



TUGAS AKHIR - KM184801

**SOLUSI PENDEKATAN HARGA DIGITAL PUT
OPTION MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI
PERTURBASI**

**FRIDA AKBAR RANI
0611164000048**

Dosen Pembimbing
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Dra. Nur Asiyah, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



TUGAS AKHIR - KM184801

**SOLUSI PENDEKATAN HARGA DIGITAL PUT
OPTION MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI
PERTURBASI**

FRIDA AKBAR RANI
NRP 06111640000048

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
Dra. Nur Asiyah, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020



FINAL PROJECT - KM4801

**APPROXIMATION SOLUTION OF PRICING
DIGITAL PUT OPTION USING HOMOTOPY
PERTUBATION**

FRIDA AKBAR RANI
NRP 06111640000048

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
Dra. Nur Asiyah, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

SOLUSI PENDEKATAN HARGA *DIGITAL PUT OPTION*
MENGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTURBASI

*APPROXIMATION SOLUTION OF PRICING DIGITAL
PUT OPTION USING HOMOTOPY PERTUBATION*

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
pada bidang studi Riset Operasi dan Pengolahan Data
Program Studi S1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

Frida Akbar Rani
NRP. 06111640000048

Menyetujui,

Pembimbing II

Pembimbing I



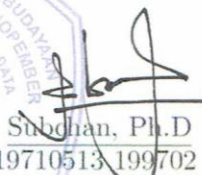
Dra. Nur Asiyah, M.Si
NIP.19610822 198701 2

Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS




Subhan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 2020

SOLUSI PENDEKATAN HARGA DIGITAL PUT OPTION MENGGUNAKAN METODE HOMOTOPI PERTURBASI

Nama Mahasiswa : Frida Akbar Rani
NRP : 0611164000048
Jurusan : Matematika FSAD-ITS
Pembimbing : 1. Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
2. Dra. Nur Asiyah, M.Si

Abstrak

Opsi merupakan sebuah kontrak untuk menjual ataupun membeli saham pada harga dan jangka waktu tertentu. Penentuan harga opsi diperlukan dalam kontrak jual beli saham agar mendapatkan keuntungan. Jenis opsi yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah digital put option tipe Eropa. Model Black-Scholes dinyatakan sebagai metode yang paling banyak digunakan untuk menentukan solusi analitik harga opsi tipe Eropa. Penurunan model Black-Scholes dilakukan dengan menggunakan metode homotopi perturbasi, sebuah metode penyelesaian dengan pendekatan deret kuasa. Hasil dari pendekatan solusi analitik model Black-Scholes menggunakan metode homotopi perturbasi dibandingkan dengan solusi analitik dari penurunan model Black-Scholes. Berdasarkan hasil simulasi, didapatkan solusi pendekatan dengan metode homotopi perturbasi mendekati solusi analitik dari Black-Scholes. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode homotopi perturbasi merupakan metode yang tepat dan akurat.

Kata-kunci: *Model Black-Scholes, Metode homotopi perturbasi, Digital Put Option*

APPROXIMATION SOLUTION OF PRICING DIGITAL PUT OPTION USING HOMOTOPY PERTUBATION

Name : Frida Akbar Rani
NRP : 06111640000048
Department : Mathematics FSAD-ITS
Supervisors : 1. Endah Rokhmati M.P.,Ph.D
2. Dra. Nur Asiyah, M.Si

Abstract

Option is a contract to put or call stock at specific price and period of time. Determination pricing of option required in put call stock contract to get profit. Type of option used in this Final Project is digital put option Europe type. Black-Scholes model is the most usable method for determine analitic solution of option price Europe type. Reduction of Black-Scholes model do with homotopy perturbation method, a solution method with sequence approach. The result from approximation solution Black-Scholes model used homotopy perturbation method compared with analitic solution of Black-Scholes model. Based on the simulation results, obtained approximation solution with homotopy perturbation method approach analytic solution from Black-Scholes model. This shows that homotopy perturbation method is right and accurate method.

Keywords: *Model Black-Scholes, homotopy perturbation method, Digital Put Option*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini sebagai salah satu syarat kelulusan dalam menempuh program studi S1 Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D, selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dr.Dwi Ratna S., MT dan Bapak Dr. Budi Setiyono, MT, selaku Sekretaris Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D dan Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.
5. Bapak Drs. Nurul Hidayat, M.Kom selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FSAD ITS.

6. Bapak Amirul Hakam, S.Si, M.Si, yang telah bersedia membantu dan memberikan arahan dalam proses penurunan metode sehingga penulisan Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
7. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam pengerjaan ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak

Surabaya, Juni 2020

Frida Akbar Rani

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Papa dan Mama, kedua orang tua saya yang tercinta. Terimakasih atas doa, kasih sayang, dukungan, motivasi, dan segalanya yang selalu dicurahkan tanpa henti kepada penulis selama ini.
2. Sahabat saya sejak mahasiswa baru, Islachiyatul Ummah yang telah dengan sabar menemani saya hingga terselesaikannya penulisan Tugas Akhir ini, selalu menjawab pertanyaan dan mengarahkan saya disaat saya mulai kesulitan mengerjakan penulisan ini.
3. Meylawai Marfu'atin, Zhafira Ardelia, Aimmatul Ummah F, Dian Wulandari, Kharisma Nur F., Novia dan Faridatul I., sahabat – sahabat saya yang telah memotivasi dan terus mensupport saya untuk segera menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan tepat waktu.
4. Yohanes A.C.G, M.Ilham Dwi, dan Alvaro B.S, teman – teman baik saya, yang sudah bersedia membantu dan menjawab pertanyaan saya setiap saat terkait penurunan rumus serta syntax dalam penyelesaian Tugas Akhir ini
5. Teman-teman angkatan 2016, khususnya LEMNISCATE terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini. Kalian keluarga kedua di kampus perjuangan ini. Terima kasih atas semangat, kerja keras dan pengorbanan kalian.

6. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batsan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Penelitian Terdahulu	6
2.2 Opsi	8
2.2.1 Aspek - Aspek dalam Kontrak Opsi	9
2.2.2 Harga Opsi	11
2.2.3 Harga <i>Call Option</i> tipe Eropa	11
2.2.4 Harga <i>Put Option</i> tipe Eropa	12

2.2.5	Opsi Digital	13
2.2.6	Harga Opsi <i>Digital</i>	14
2.3	Proses Wiener Umum	15
2.4	Lemma <i>Itô</i>	16
2.5	<i>Black-Scholes</i> Model	17
2.6	Metode <i>Homotopy Perturbation</i>	19
2.7	Mean Absolute Deviation	21
2.8	Persamaan Difusi	22
BAB III	METODE PENELITIAN	24
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	28
4.1	Solusi Analitik <i>Digital Put Option</i> dengan Model Black-Scholes	28
4.2	Pendekatan Solusi Analitik <i>Digital Put Option</i> dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Homotopi Pertubasi ..	40
4.3	Simulasi	50
4.3.1	Solusi analitik harga <i>digital put option</i> dengan model Black-Scholes	51
4.3.2	Pendekatan solusi analitik harga <i>digital put option</i> dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi	53
4.3.3	Simulasi perbandingan solusi analitik dan pendekatan <i>digital put option</i>	58
BAB V	PENUTUP	63
5.1	Kesimpulan	63
5.2	Saran	64
DAFTAR PUSTAKA		66
BIODATA PENULIS		69

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Alir	26
Gambar 4.1	Grafik solusi analitik harga <i>digital put option</i> dengan model Black-Scholes	52
Gambar 4.2	Grafik pendekatan solusi analitik harga <i>digital put option</i> dengan metode homotopi pertubasi	58
Gambar 4.3	Grafik gabungan solusi untuk harga <i>digital put option</i>	59
Gambar 4.4	Harga saham terhadap nilai MAD	61

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Asumsi harga saham	51
Tabel 4.2	Solusi analitik harga <i>digital put option</i> dengan model Black-Scholes	52
Tabel 4.3	Asumsi harga saham	53
Tabel 4.4	Hasil perhitungan untuk z , k , dan w	54
Tabel 4.5	Hasil perhitungan untuk z , k , dan w lanjutan dari tabel 4.4	55
Tabel 4.6	Hasil perhitungan untuk u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4	55
Tabel 4.7	Hasil perhitungan untuk u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 lanjutan dari tabel 4.6	56
Tabel 4.8	Hasil Pendekatan solusi analitik menggunakan metode homotopi perturbasi	57
Tabel 4.9	Hasil Nilai Errorr dengan metode MAD ..	59
Tabel 4.10	Hasil nilai <i>Errorr</i> dengan metode MAD lanjutan tabel 4.9	60

Daftar Simbol

S	Harga Saham
K	<i>Strike Price</i>
r	Suku Bunga Bebas Risiko
T	Waktu Jatuh Tempo
σ	<i>Implied Volatility</i>
$C(S, T)$	Harga <i>Digital Call Option</i>
$P(S, T)$	Harga <i>Digital Put Option</i>
$u(z, w)$	Solusi Pendekatan Harga <i>Digital Put Option</i>

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan hal - hal yang menjadi latar belakang permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun dalam suatu rumusan masalah, diberikan pula batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh.

1.1 Latar Belakang

Perkembangan jaman di era modernisasi saat ini, berpengaruh terhadap pesatnya kemajuan di bidang ilmu teknologi. Hal tersebut berdampak positif bagi perkembangan pola pikir masyarakat. Pola pikir yang lebih berkembang, menyebabkan masyarakat terus berinovasi dan membuat perencanaan yang matang untuk kehidupan dimasa depan, terutama permasalahan keuangan. Salah satu hal yang cukup menjanjikan untuk mendapatkan keuntungan adalah pada sektor investasi, salah satunya yaitu investasi saham. Seorang investor memiliki pilihan untuk membeli saham yang diperdagangkan langsung di pasar saham atau membeli aset derivatif, yaitu suatu instrumen keuangan yang nilainya bergantung pada aset yang mendasarinya (saham). Salah satu produk derivatif yang banyak dikenal adalah opsi, yaitu sebuah kontrak dengan beberapa ketentuan yang melibatkan pemegang opsi, dimana pemegang opsi memiliki hak untuk melaksanakan penjualan (*put option*) ataupun pembelian (*call option*) aset dasar (saham) pada harga dan jangka waktu tertentu. Berdasarkan periode waktu pelaksanaan jual beli

saham, opsi dapat dibedakan menjadi dua, yaitu opsi tipe Eropa (*European option*) dan opsi tipe Amerika (*American option*).

Pada Tugas Akhir ini, penulis menggunakan opsi tipe Eropa, dimana hak jual beli saham hanya dapat dilaksanakan pada saat waktu jatuh tempo yang telah ditentukan dalam kontrak opsi. Selain itu, jenis opsi yang digunakan adalah opsi digital. Opsi digital, merupakan jenis dari opsi tipe Eropa, dimana pemegang opsi dalam melaksanakan hak jual beli saham sangat bergantung pada *strike price* (harga pelaksanaan) yang telah disepakati pada kontrak dan harga saham pada pasar saham saat waktu jatuh tempo. Apabila harga saham pada waktu jatuh tempo di pasaran berada diatas atau lebih tinggi dari *strike price*, maka pemegang opsi melakukan *digital call option* (opsi beli digital). Sebaliknya, apabila harga saham pada waktu jatuh tempo di pasaran berada dibawah atau lebih rendah dari *strike price* maka pemegang opsi melakukan *digital put option* (opsi jual digital). Tindakan yang diambil pemegang opsi harus tepat dalam pelaksanaan hak jual ataupun beli, agar dapat memberikan keuntungan yang maksimal.

Penentuan harga opsi digital telah dilakukan sebelumnya oleh beberapa pihak dengan metode tertentu. Seperti pada penelitian Ziwie Ke [1], peneliti mencari solusi model harga opsi digital dengan model Black-Scholes menggunakan metode dekomposisi numerik adomian. Selanjutnya, pada penelitian Vasile L. Lazar [2], peneliti menganalisis masalah penentuan harga opsi digital di bawah model volatilitas stokastik, yaitu model Heston(1993), namun yang dihasilkan hanya solusi untuk *digital call option*. Berdasarkan dua penelitian yang sudah ada sebelumnya, penulis mencoba menggunakan metode lain untuk menentukan harga opsi digital, yaitu dengan metode homotopi perturbasi.

Metode homotopi perturbasi, merupakan gabungan dari metode perturbasi tradisional dengan metode homotopi dalam topologi. Metode ini juga menghasilkan solusi pendekatan yang sangat efektif dalam banyak kasus, dan biasanya hanya dengan beberapa iterasi ataupun orde dapat menghasilkan solusi yang sangat akurat [3]. Pada Tugas Akhir ini dibahas cara penyelesaian dan kontruksi persamaan homotopi dan homotopi pertubasi pada model Black-Scholes sehingga didapatkan sebuah bentuk solusi pendekatan untuk harga *digital put option*, dengan tingkat akurasi yang tepat dan akan dibuktikan menggunakan simulasi Matlab 2013 a dalam bentuk grafik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan pada subbab sebelumnya, didapat beberapa rumusan masalah pada Tugas Aakhir ini sebagai berikut :

1. Bagaimana hasil pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* menggunakan metode homotopi perturbasi?
2. Bagaimanakah keakuratan hasil pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi ?

1.3 Batsan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Jenis opsi yang digunakan adalah *digital put option* tipe Eropa.
2. Suku bunga konstan dan bebas risiko.

3. Volatilitas/variansi harga saham bersifat konstan.
4. Harga *put option* yang diestimasi adalah *put option* tanpa dividen.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah ada, diperoleh tujuan penulisan penelitian ini antara lain :

1. Mendapatkan hasil pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* menggunakan metode homotopi pertubasi.
2. Mendapatkan hasil akurasi dari pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi.

1.5 Manfaat

Manfaat penelitian ini antara lain :

1. Memberikan informasi mengenai model penyelesaian pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option*.
2. Memberikan informasi terkait metode Homotopi Pertubasi yang dapat digunakan untuk memperoleh pendekatan dari solusi model Black-Scholes dengan banyaknya asumsi yang dapat digunakan (lebih kompleks).

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dipaparkan hal-hal yang berkaitan dengan opsi, opsi digital, model Black-Scholes, metode homotopi perturbasi, serta teori-teori yang menunjang penulisan Tugas Akhir ini.

2.1 Penelitian Terdahulu

Model Black-Scholes merupakan model yang digunakan untuk menentukan solusi analitik dari opsi tipe Eropa. Penjabaran dan penurunan model Black-Scholes sudah banyak diteliti sebelumnya dengan berbagai macam metode, seperti pada penelitian Ziwei Ke [1]. Pada penelitian tersebut fungsi pembayaran tidak dapat dideferensiasi untuk beberapa opsi, namun dengan menggunakan metode dekomposisi numerik Adomian yang diterapkan pada model Black-Scholes permasalahan tersebut dapat diselesaikan. Metode dekomposisi Adomian (ADM) dikembangkan oleh George Adomian pada 1970-an untuk menghasilkan solusi seri untuk persamaan diferensial biasa. Selanjutnya diasumsikan fungsi pembayaran dapat dideferensiasi dan diaproksimasi dengan estimasi yang kontinu. Penulis menunjukkan teknik yang digunakan dapat diperluas untuk menetapkan harga opsi digital.

Opsi digital sering disebut dengan “*all or nothing options*” dengan definisi, pembayaran yang dilakukan telah ditentukan dan ditetapkan pada jumlah yang konstan $B > 0$. nilai dari opsi digital pada tanggal jatuh temponya direpresentasikan sebagai berikut :

Untuk *digital call option*:

$$V_c(S, T) = \begin{cases} B & , \text{jika } S > K \\ 0 & , \text{untuk yang lain.} \end{cases} \quad (2.1)$$

digital put option Untuk :

$$V_p(S, T) = \begin{cases} B & , \text{jika } S < K \\ 0 & , \text{untuk yang lain.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Penelitian Vasile L. Lazar [2], melakukan penelitian untuk menganalisis permasalahan dari harga opsi digital dengan model volatilitas stokastik, yaitu model Heston. Penulis mendefinisikan, opsi merupakan bagian dari derivatif yang ditandai dengan pembayaran non negatif. Terdapat 2 tipe dari kontrak opsi, yaitu *call option* (memberikan pemegang opsi hak untuk membeli aset dasar, dengan harga tertentu, pada waktu tertentu di masa depan) dan *put option* (memberikan pemegang opsi hak untuk menjual aset dasar, dengan harga tertentu, pada waktu tertentu di masa depan). Banyak opsi dengan struktur fungsi pembayaran yang lebih rumit dari pada struktur pembayaran *put* dan *call* biasa disebut opsi eksotis. Contohnya : *digital option, lookback option, barrier option* dll.

Digital option mempunyai fungsi pembayaran yang diskontinu pada harga dasar saham. Untuk *digital call option*, dengan *strike price* (K) dan waktu jatuh tempo (T) :

$$DC(S, T) = H(S_T - K) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } S_T \geq K \\ 0 & , \text{jika } S_T < K, \end{cases} \quad (2.3)$$

dan untuk *digital put option* :

$$DP(S, T) = H(K - S_T) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } S_T < K \\ 0 & , \text{jika } S_T \geq K. \end{cases} \quad (2.4)$$

Setelah dilakukan penurunan model Black-Scholes didapatkan harga opsi digital sebagai berikut :

$$DC(S, t) = e^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (2.5)$$

Pada model Black-Scholes standar, volatilitas diasumsikan konstan, dan hal tersebut tidak benar, karena pada kenyataannya volatilitas tidak konstan dan bahkan tidak dapat diprediksi untuk rentang waktu lebih dari beberapa bulan. Hal ini menyebabkan penulis mengembangkan sebuah model, yaitu model volatilitas stokastik, di mana volatilitas itu sendiri dianggap sebagai proses stokastik. Pada akhirnya, dengan beberapa langkah penyelesaian, didapatkan persamaan untuk harga *digital call option* adalah sebagai berikut :

$$DC(S, v, t) = e^{-r\tau}P$$

dengan P fungsi probabilitas, yang diberikan oleh :

$$P(x, v, t; \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi \ln K} f(x, v, \tau, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi \quad (2.6)$$

2.2 Opsi

Opsi [4] merupakan sebuah kontrak dengan beberapa ketentuan yang melibatkan pemegang opsi. Pemegang opsi memiliki hak untuk melakukan transaksi jual ataupun beli atas suatu saham pada suatu periode tertentu dengan nilai yang telah ditentukan saat jatuh tempo. Pada kontrak opsi ini pemegang opsi dapat melakukan jual/beli saham sebelum atau pada saat jatuh tempo untuk opsi tipe Amerika dan untuk opsi tipe Eropa hanya bisa dilakukan jual/beli saham tepat pada saat jatuh tempo, dimana nilai pada saat jatuh tempo sudah ditentukan saat pembuatan kontrak. Oleh karena itu, keputusan pemegang opsi melakukan transaksi

tergantung oleh harga saham di pasar saham. Itu sebabnya kontrak opsi disebut sebagai klaim yang tidak pasti.

Ada dua tipe kontrak opsi saham yaitu *call option* dan *put option*. *Call option* merupakan sebuah kontrak dimana pemegang opsi memiliki hak untuk membeli sejumlah aset dasar (saham) dengan harga dan waktu di masa depan yang sudah ditentukan. *Put option* merupakan sebuah kontrak dimana pemegang opsi memiliki hak untuk menjual sejumlah aset dasar (saham) dengan harga dan waktu di masa depan yang sudah ditentukan. Pemegang opsi tidak berkewajiban untuk melaksanakan jual beli saham jadi dapat membatalkan kontrak jika dirasa tidak menguntungkan.

2.2.1 Aspek - Aspek dalam Kontrak Opsi

Berikut adalah penjelasan beberapa variabel yang berpengaruh terhadap harga opsi [10] :

a. Harga saham (S)

Harga saham merupakan aspek yang sangat berpengaruh terhadap harga opsi, sebab saham merupakan aset yang mendasari kontrak dalam opsi. Harga saham memiliki hubungan searah dengan harga *call option*, artinya jika harga saham meningkat maka harga *call option* juga meningkat. Sedangkan dengan *put option* harga saham memiliki hubungan yang terbalik, jika harga saham naik maka harga *put option* akan turun.

b. *Strike price* (K)

Strike price adalah harga yang telah disepakati oleh pihak penjual dan pembeli opsi dan dijadikan acuan untuk dapat membeli atau menjual opsi pada waktu tertentu saat jatuh tempo. Jika semua komponen dari opsi diasumsikan tetap, semakin rendah *strike price* maka akan semakin tinggi harga *call option*. Sebaliknya,

semakin tinggi harga *strike price* maka akan semakin tinggi harga *put option* tersebut.

c. *Expiration date* (T)

Expiration date merupakan tanggal yang sudah ditentukan saat pembuatan kontrak dan dijadikan acuan sebagai masa berlakunya sebuah opsi dalam hal ini disebut tanggal jatuh tempo. Setelah lewat dari waktu jatuh tempo maka sebuah opsi tidak mempunyai nilai apa-apa.

d. Tingkat suku bunga bebas resiko (r)

Tingkat suku bunga bebas resiko merupakan tingkat suku bunga yang tidak memiliki resiko sama sekali. Pada tingkat suku bunga bebas resiko jangka pendek, jika tingkat suku bunga bebas resiko meningkat maka harga-harga saham juga akan mengalami kenaikan, sehingga pada tingkat suku bunga bebas resiko jangka pendek yang tinggi, investor akan semakin tertarik untuk membeli *call option* daripada membeli saham. Hal ini menyebabkan harga *call option* naik.

e. Volatilitas (σ)

Volatilitas merupakan harga fluktuasi dari sebuah saham yang ditunjukkan oleh standar deviasi atau varians. Jika semua komponen dianggap tetap, semakin besar volatilitas harga saham yang diharapkan maka harga opsi juga semakin tinggi. Hal ini dikarenakan semakin besar volatilitas maka akan semakin besar probabilitas bahwa harga saham akan mengalami perubahan.

2.2.2 Harga Opsi

Harga dari sebuah opsi [4] merupakan turunan dari harga dasar saham. Dimana aset dasar dalam hal ini saham, merupakan aset beresiko dan harganya mengikuti variabel acak. Sehingga harga dari opsi juga acak. Jika didefinisikan harga saham pada waktu t adalah S_t dan harga dari sebuah opsi adalah V_t , ada fungsi $V(S, t)$ sedemikian hingga :

$$V_t = V(S_t, t),$$

dengan $V(S, t)$ merupakan fungsi deterministik dua variabel, dapat dibentuk model persamaan diferensial untuk V_T (nilai pembayaran opsi), pada saat tanggal jatuh temponya, adapun persamaanya adalah sebagai berikut :

$$V_T = \begin{cases} (S_T - K)^+ & (\text{call option}) \\ (K - S_T)^+ & (\text{put option}). \end{cases}$$

2.2.3 Harga *Call Option* tipe Eropa

Call option [5], merupakan sebuah kegiatan pembelian saham dengan *payoff* didasarkan pada *strike price* di tanggal jatuh temponya.

Misalkan S_T harga saham pada saat jatuh tempo. K adalah *strike price* (harga saham yang ditetapkan / harga pelaksanaan) dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika $S_T \geq K$ maka pemegang opsi mendapatkan keuntungan sebesar : $S_T - K$. Jika $K \geq S_T$ maka pemegang opsi tidak memperoleh keuntungan melainkan kerugian. Hal ini berarti bahwa, *call option* sebaiknya dilakukan jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih besar dari *strike price* atau $S_T \geq K$. Dengan demikian, *payoff call option* tipe Eropa (C) pada saat jatuh tempo adalah :

$$C = \begin{cases} S_T - K & , \text{jika } S_T > K \\ 0 & , \text{jika } S_T \leq K \end{cases}$$

sehingga didapatkan:

$$C = \text{maks}(0, S_T - K).$$

Adapun dari penurunan model Black-Scholes, didapat model persamaan harga *call option* tipe Eropa pada saat jatuh tempo adalah sebagai berikut:

$$C = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

dengan $N(d)$ merupakan distribusi kumulatif berdistribusi normal standar dengan rata - rata nol dan standar deviasi satu. Adapun d_1 dan d_2 didefinisikan sebagai berikut :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

dan

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

2.2.4 Harga *Put Option* tipe Eropa

Put Option [5], merupakan sebuah kegiatan penjualan saham dengan *payoff* didasarkan pada *strike price* di tanggal jatuh temponya.

Misalkan S_T harga saham pada saat tanggal jatuh tempo. K adalah *strike price* (harga saham yang ditetapkan / harga pelaksanaan) dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika $S_T < K$, maka pemegang opsi mendapatkan keuntungan sebesar $K - S_T$. Jika $S_T \geq K$, maka pemegang opsi tidak mendapatkan keuntungan melainkan kerugian. Hal ini berarti bahwa *put option* sebaiknya dilakukan jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih kecil dari *strike price* atau $S_T < K$. Dengan

demikian, *payoff put option* tipe Eropa (P) pada waktu jatuh temponya adalah :

$$P = \begin{cases} K - S_T & , \text{jika } S_T < K \\ 0 & , \text{jika } S_T \geq K \end{cases}$$

sehingga didapatkan :

$$P = \text{maks}(0, K - S_T).$$

Adapun dari penurunan model Black-Scholes, didapat model persamaan harga *put option* tipe Eropa pada saat jatuh tempo adalah sebagai berikut:

$$P = e^{-r(T-t)} KN(-d_2) - SN(-d_1)$$

dengan $N(d)$ merupakan distribusi kumulatif berdistribusi normal standar dengan rata - rata nol dan standar deviasi satu. Adapun d_1 dan d_2 didefinisikan sebagai berikut :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

dan

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

2.2.5 Opsi Digital

Opsi digital [6] merupakan tipe dari opsi, dimana pemegang opsi dalam melaksanakan hak jual beli saham, sangat bergantung pada *strike price* (harga pelaksanaan/harga saham yang ditentukan pada kontrak). Pemegang opsi dapat melaksanakan jual beli saham dengan memperhatikan pergerakan harga saham dan *strike price*-nya. Apabila harga

saham pada waktu jatuh tempo di pasaran berada diatas atau lebih tinggi dari *strike price*, maka pemegang opsi melakukan *digital call option*. Sebaliknya, apabila harga saham pada waktu jatuh tempo di pasaran berada dibawah atau lebih rendah dari *strike price* maka pemegang opsi melakukan *digital put option*.

Ada dua jenis opsi digital, yaitu *cash or nothing options* dan *asset or nothing options*. Pada *cash or nothing options*, pemegang opsi membayar sejumlah uang tunai yang sudah ditetapkan pada kontrak di tanggal jatuh tempo. Sedangkan pada *asset or nothing options*, pemegang opsi mendapatkan sejumlah aset (saham) bukan sejumlah uang tunai.

2.2.6 Harga Opsi *Digital*

Opsi digital memiliki *payoff* untuk *digital call option* dan *digital put option* sebagai berikut :

payoff untuk *digital call option*

$$D_{call} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } S_T \geq K \\ 0 & , \text{jika } S_T < K \end{cases} \quad (2.7)$$

payoff untuk *digital put option*

$$D_{put} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } S_T < K \\ 0 & , \text{jika } S_T \geq K. \end{cases} \quad (2.8)$$

Adapun untuk harga opsi digital persamaan Black-Scholes dapat disederhanakan menjadi [7] :

untuk harga *digital call option*

$$P_{call} = e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.9)$$

untuk harga *digital put option*

$$P_{put} = e^{-r(T-t)} N(-d_2) \quad (2.10)$$

dengan :

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Opsi digital (sering disebut opsi biner) karena hal inilah rumusan di atas untuk *cash or nothing option* karena pemegang opsi membayar sejumlah uang tunai yang sudah ditetapkan, jika harga dasar saham mencapai tingkat tertentu. Opsi digital lainnya adalah *aset or nothing option*, dimana harga opsi diberikan sebagai berikut :

untuk harga *digital call option*

$$P_{call} = SN(d_2) \quad (2.11)$$

untuk harga *digital put option*

$$P_{put} = SN(-d_2) \quad (2.12)$$

dengan d seperti pada *cash or nothing option*. Dapat dilihat bahwa, *asset or nothing option* kombinasi dari *cash or nothing* dan dua istilah dalam formula Black-Scholes.

2.3 Proses Wiener Umum

Proses Wiener umum [12] merupakan *Brownian Motion* untuk suatu peubah acak X dinyatakan sebagai berikut:

$$dX(t) = adt + bdW(t). \quad (2.13)$$

$W(t)$ adalah proses Wiener, adt sebagai komponen deterministik, $bdW(t)$ menyatakan komponen stokastik, sedangkan a menyatakan rata-rata dan b menyatakan standar deviasi dari X . Pada aset saham model umumnya dinyatakan sebagai : $\frac{dS}{S}$ yang dibagi dalam dua bagian, yaitu :

1. Bagian deterministik : μdt , dengan μ merupakan fungsi S dan t yang menyatakan rata - rata pertumbuhan harga saham dengan tingkat obligasi bebas resiko.
2. Bagian faktor eksternal : σdB , dengan σ merupakan fungsi S dan t yang menyatakan volatilitas dari saham, sedangkan B dalam dB menotasikan *Brownian Motion*.

Variabel μ dan σ dapat diestimasi menggunakan harga saham pada hari sebelumnya, sehingga diperoleh persamaan diferensial stokastik:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB. \quad (2.14)$$

2.4 Lemma Itô

Prose Wiener umum [12] untuk peubah acak X pada persamaan (2.13) didefinisikan sebagai :

$$dX(t) = a dt + b dW(t). \quad (2.15)$$

$W(t)$ adalah proses Wiener, $a dt$ sebagai komponen deterministik, $b dW(t)$ menyatakan komponen stokastik, sedangkan a menyatakan rata-rata dan b menyatakan standar deviasi dari X . Secara aljabar proses Itô dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$dX(t) = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) dW(t). \quad (2.16)$$

Misalkan $Y(t) = f(X(t), t)$, proses $X(t)$ memenuhi persamaan (2.16) dimana t adalah waktu dan turunan - turunan dari $f_t((X(t), t), f_x(X(t), t), f_{xx}(X(t), t))$ kontinu, maka $Y(t) = f(X(t), t)$ memenuhi persamaan berikut:

$$dY(t) = f_t(X(t), t) dt + f_x(X(t), t) dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(X(t), t) (dX(t))^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t)dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t)(dX(t))^2.$$

sehingga persamaan (2.15) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t) \\ dF &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}adt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2dW^2 + \frac{\partial f}{\partial x}bdW + \frac{\partial f}{\partial t}dtdW \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdW. \end{aligned}$$

2.5 Black-Scholes Model

Model Black-Scholes [8] merupakan model yang digunakan untuk menentukan harga opsi dengan beberapa asumsi, yaitu penggunaannya terbatas pada opsi tipe Eropa dan tidak bisa digunakan pada opsi lainnya, variansi harga saham bersifat konstan selama usia opsi dan diketahui secara pasti, suku bunga bebas risiko yang artinya suku bunga dari harga saham yang mendasari opsi tetap konstan, saham yang digunakan tidak memberikan dividen (pembagian keuntungan saham), dan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi. Didefinisikan pergerakan harga saham S mengikuti gerak *Brownian Motion* dan diasumsikan sebagai berikut :

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdW. \quad (2.17)$$

dengan :

- μ : *expected of return*,
- σ : volatilitas
- dW : proses *wiener* umum,
- μ dan σ dianggap konstan.

Selanjutnya dengan menggunakan lemma *Itô* untuk harga opsi $V(S, t)$, maka persamaan diferensial dari $V(S, t)$ dapat dibentuk sebagai berikut:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}bdW.$$

Dari asumsi proses perubahan harga saham, untuk $V(S, t)$, dengan $a = \mu S$ dan $b = \sigma S$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW dW.$$

Selanjutnya, dengan menggunakan portofolio Π

$$\Pi = V - \frac{\partial V}{\partial S} S \quad (2.18)$$

perubahan nilai portofolio $d\pi$ pada interval waktu singkat dt , diberikan dengan :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (2.19)$$

Sedangkan portofolio bebas resiko dinyatakan sebagai berikut:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

dengan r bunga bebas resiko.

Substitusikan persamaan (2.18) dan (2.19), sehingga diperoleh:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0.$$

Jadi model Black-Scholes untuk opsi tipe Eropa adalah :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0 \quad (2.20)$$

2.6 Metode *Homotopy Perturbation*

Metode homotopi pertubasi [9] didesain untuk mendapatkan solusi pendekatan yang efektif dan akurat untuk permasalahan harga opsi tipe Eropa. Permasalahan dari harga opsi tipe Eropa dapat didekati dengan persamaan diferensial parsial. Metode ini akan digunakan untuk mencari pendekatan solusi analitik dari model Black-Scholes pada persamaan (2.20). Selanjutnya, diilustrasikan model dasar dari metode homotopi pertubasi mengikuti persamaan diferensial nonlinier secara umum :

$$A(u) - f(\tau) = 0 \quad , \tau \in \Omega \quad (2.21)$$

dengan batasan kondisi :

$$B\left(u, \frac{\partial u(\tau)}{\partial n}\right) = 0 \quad , \tau \in \Gamma$$

dimana :

A : operator turunan nonlinier

B : operator batas

τ : batasan dari domain Ω

$f(\tau)$: merupakan fungsi yang diketahui

$u(\tau)$: fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada r (suku bunga bebas resiko).

Operator A dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu L bagian linier dan N bagian nonlinier. Sehingga, persamaan (2.21) dapat ditulis sebagai berikut :

$$L(u) + N(u) - f(\tau) = 0.$$

Selanjutnya dikonstruksikan homotopi dari persamaan (2.21) $v(\tau, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga memenuhi :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(\tau)] = 0 \quad , \tau \in \Gamma \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) ekuivalen dengan persamaan berikut:

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(\tau)] = 0 \quad (2.23)$$

dengan :

$p \in [0, 1]$ merupakan parameter buatan yang digunakan sebagai parameter kecil dan u_0 estimasi awal awal dari persamaan (2.21) yang memenuhi kondisi batas. Selanjutnya, jika diberikan $p = 0$, maka persamaan (2.23) menjadi:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad (2.24)$$

sedangkan apabila $p = 1$, maka persamaan (2.23) menjadi :

$$H(v, 1) = L(v) + N(v) - f(\tau) = 0. \quad (2.25)$$

Proses perubahan dari $p = 0$ hingga $p = 1$ mengubah $v(\tau, p)$ dari $v_0(\tau)$ ke $v(\tau)$ dalam topologi disebut proses deformasi, sedangkan persamaan (2.24) dan (2.25) disebut Homotopi. Jika dimisalkan solusi dari persamaan (2.22) dan (2.23) adalah :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.26)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (2.26) ke persamaan (2.22) diperoleh :

$$\begin{aligned} H(v(\tau, p)p) &= (1 - p) [L(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - L(u_0)] + \\ &p [L(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)] + p[N(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)] \\ &\quad - p[f(\tau)] = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Misalkan L dan N merupakan operator diferensial untuk masing-masing fungsi linear dan nonlinear. Oleh karena sifat linear dari operator diferensial maka persamaan (2.27) menjadi

$$H(v, p) = L(v_0) - L(u_0) + p[L(v_1) + N(v_0) + L(u_0) - f(\tau)] +$$

$$p^2[N(v_1) + L(v_2)] + p^3[L(v_3) + N(v_3)] + \dots \quad (2.28)$$

Selanjutnya ekspansi persamaan (2.28) berdasarkan pada orde perturbasi, sehingga diperoleh untuk orde ke-0, yaitu:

$$p^0 : L(v_0) - L(u_0) = 0$$

$$L(v_0) = L(u_0)$$

$$v_0 = L^{-1}L(u_0)$$

$$v_0 = u_0.$$

Untuk orde ke-1 didapat :

$$p^1 : L(v_1) + N(v_0) + L(u_0) - f(\tau) = 0$$

$$L(v_1) = -N(v_0) - L(u_0) + f(\tau)$$

$$v_1 = -L^{-1}N(v_0) - L^{-1}L(u_0) + L^{-1}f(\tau)$$

$$v_1 = -L^{-1}N(v_0) - u_0 + L^{-1}f(\tau).$$

Begitupun seterusnya hingga orde ke-n dan diperoleh nilai-nilai untuk v_0, v_1, v_2, \dots . Menurut metode Homotopi Pertubasi, solusi pendekatan untuk persamaan (2.21) adalah :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.29)$$

2.7 Mean Absolute Deviation

Mean absolute deviation (MAD) [11] merupakan metode untuk mengukur akurasi dari sebuah peramalan. MAD merupakan nilai total absolut dari *forecast error* dibagi banyaknya data. Pada penelitian ini, hasil dari pendekatan solusi analitik model Black-Scholes dengan metode homotopi perturbasi dianggap sebagai nilai hasil peramalan dan solusi analitik model Black-Scholes merupakan nilai aktual. Solusi

dari nilai aktual dan nilai hasil peramalan adalah *forecast error*. Formula MAD dijabarkan sebagai berikut :

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|$$

dengan keterangan :

n : banyak data,

e_t : *forecast error* atau selisih antara nilai aktual dan nilai hasil peramalan.

Apabila nilai MAD mendekati nol, maka nilai hasil peramalan dianggap baik dan mendekati nilai aktual.

2.8 Persamaan Difusi

Persamaan difusi [13] adalah Persamaan analitik yang linear dan berorde dua, dimana persamaan umumnya adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x, \tau > 0 \quad (2.30)$$

diberikan syarat awal, $u(x, 0) = u_0(x)$ dan $u(0, \tau) = 1$ untuk $-\infty < x < \infty$ dengan nilai

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv \quad (2.31)$$

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian terdiri atas enam tahap, antara lain: studi literatur, mengkaji model Black-Scholes, tahap penurunan model Black-Scholes untuk mendapatkan solusi analitik harga *digital put option*, tahap mencari pendekatan solusi analitik harga *digital put option*, simulasi hasil perbandingan menggunakan software Matlab 2013a, dan penarikan kesimpulan.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini akan dicari referensi yang berkaitan dengan opsi, definisi opsi, harga opsi, jenis dan tipe opsi, opsi digital, harga opsi digital, model Black-Scholes, metode homotopi pertubasi. Referensi yang dicari meliputi definisi, serta rumusan - rumusan dari setiap bagian dan lain sebagainya yang berhubungan dengan penulisan Tugas Akhir ini. Referensi – referensi yang dicari dapat diperoleh melalui jurnal yang sesuai dengan topik Tugas Akhir ini. Selain itu, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan opsi digital, model Black-Scholes dan metode homotopi pertubasi.

2. Mengkaji Model Black-Scholes

Pada tahap ini akan dilakukan pengkajian mengenai model Black-Scholes, akan dicari asal usul dari model ini, penurunan rumus didalamnya dengan beberapa proses seperti proses wiener dan lemma Itô untuk

mendapatkan model Black-Scholes secara umum.

3. Penurunan Model Black-Scholes untuk Mendapatkan Solusi Analitik Harga *Digital Put Option*

Pada tahap ini akan dilakukan penurunan terhadap rumus umum model Black-Scholes, dengan melakukan transformasi untuk beberapa variabel terkait. Memauskkan fungsi *payoff* untuk *digital put option* beserta kondisi batasnya. Penurunan dibantu dengan mengikuti proses difusi hingga mendapatkan solusi analitik untuk harga *digital put option*.

4. Penurunan Model Black-Scholes dengan metode Homotopi Pertubasi untuk Mendapatkan Pendekatan Solusi Analitik Harga Digital Put Option

Pada tahap ini akan dilakukan penurunan terhadap rumus umum model Black-Scholes, dengan melakukan transformasi terhadap beberapa variabel, memasukkan fungsi *payoff* untuk *digital put option*, mengkontruksi persamaan homotopi pada model Black-Scholes yang sudah ditransformasi, mentransformasi kembali model Black-Scholes untuk kontruksi homotopi pertubasi beserta kondisi batas yang baru, hingga didapatkan pendekatan solusi analitik harga *digital put option*.

5. Simulasi Hasil Perbandingan

Setelah didapatkan hasil penyelesaian, maka akan dibandingkan antara sonlusi analitik dari penurunan model Black-Scholes dengan hasil pendekatan solusi analitik model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi. Adapun simulasi berupa perhitungan dan plot grafik, menggunakan simulasi software Matlab 2013a. Untuk menguji akurasi hasil

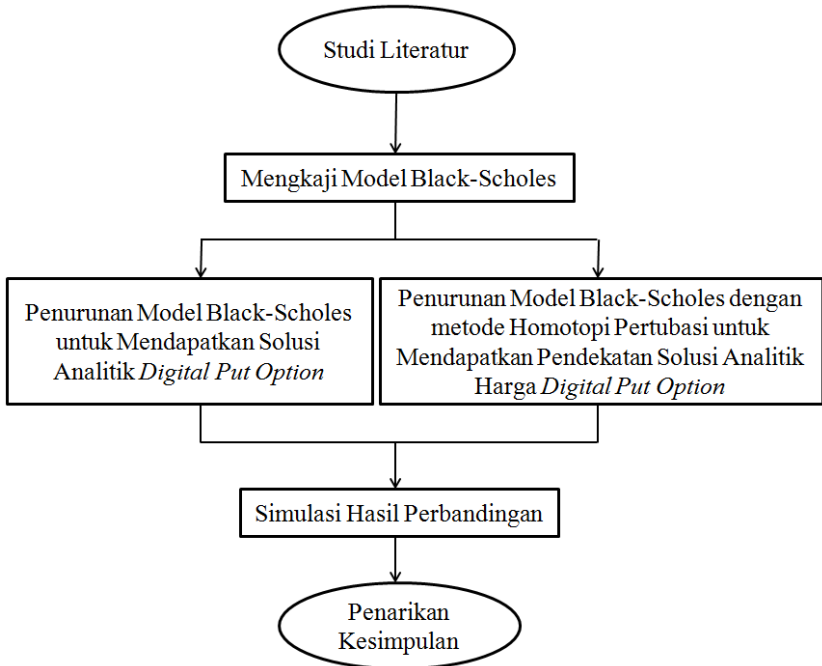
pendekatan solusi digunakan metode *mean absolute deviation* (MAD).

6. Penarikan Kesimpulan

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

7. Diagram Alir

Berikut diagram alur pengerjaan tugas akhir



Gambar 3.1: Diagram Alir

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai solusi analitik untuk harga *digital put option* yang akan diperoleh dari persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Selanjutnya digunakan metode homotopi pertubasi pada penurunan model Black-Scholes untuk mendapatkan pendekatan solusi analitik harga *digital put option* dan diselesaikan menggunakan metode homotopi pertubasi. Hasil pendekatan dari metode homotopi pertubasi akan dibandingkan dengan solusi analitik Black-Scholes melalui simulasi program Matlab 2013 a.

4.1 Solusi Analitik *Digital Put Option* dengan Model Black-Scholes

Pada tahap ini, dibahas mengenai solusi analitik dari *digital put option* dimana, solusi yang didapatkan akan diselesaikan menggunakan diferensial parsial dan metode difusi. Diketahui persamaan Black-Scholes secara umum tanpa pembagian dividen adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Persamaan Black-Scholes untuk *put option* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0. \quad (4.1)$$

Diketahui bahwa *payoff* untuk *digital put option* :

$$P(S, T) = H(k - S) = \begin{cases} 1, & \text{jika } S < K \\ 0, & \text{jika } S \geq K. \end{cases} \quad (4.2)$$

Selanjutnya, akan dilakukan transformasi model persamaan Black-Scholes untuk *put option* (4.1) ke dalam proses difusi dengan beberapa transformasi sebagai berikut :

$$S = S(x) = Ke^x \quad \Longrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) \quad (4.3)$$

$$t = t(\tau) = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \Longrightarrow \quad \tau = (T - t)\frac{1}{2}\sigma^2 \quad (4.4)$$

$$P(S, t) = v(x, \tau). \quad (4.5)$$

Substitusikan $P(S, T)$ dari persamaan (4.2) untuk mendapatkan $v(x, \tau)$, dengan penjabaran sebagai berikut :

$$P(S, t) = H(K - S) = \begin{cases} 1, & \text{jika } S < K \\ 0, & \text{jika } S \geq K, \end{cases}$$

$$v(x, \tau) = H(K - Ke^x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } Ke^x < K \\ 0, & \text{jika } Ke^x \geq K, \end{cases}$$

$$v(x, \tau) = HK(1 - e^x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } Ke^x < K \\ 0, & \text{jika } Ke^x \geq K, \end{cases}$$

$$v(x, \tau) = HK(1 - e^x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e^x < 1 \\ 0, & \text{jika } e^x \geq 1, \end{cases}$$

$$v(x, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x < 0 \\ 0, & \text{jika } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Setelah diperoleh beberapa bentuk transformasi dari persamaan (4.3), (4.4), dan (4.5), masing - masing transformasi untuk model *Black-Scholes* dijabarkan sebagai berikut :

* Untuk suku $\frac{\partial P}{\partial t}$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot (0) + \frac{\partial v}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad . \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

* Untuk suku $rS \frac{\partial P}{\partial S}$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
 rS \frac{\partial P}{\partial S} &= rS \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right) \\
 &= rS \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot (0) \right) \\
 &= rS \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} \right) \\
 &= r \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

* Untuk suku $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial P^2}{\partial S^2}$ diperoleh :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial P^2}{\partial S^2} &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial S} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial S} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

* Untuk suku rP diperoleh :

$$rP = rv. \tag{4.10}$$

Subtitusikan hasil transformasi (4.7), (4.8), (4.9), dan (4.10) kedalam persamaan (4.1), sehingga diperoleh :

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv.$$

Kedua ruas dibagi dengan $\frac{1}{2}\sigma^2$ sehingga menjadi,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2r}{\sigma^2} v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v. \tag{4.11}$$

Setelah mendapatkan hasil yang paling sederhana, akan dilakukan transformasi pada persamaan (4.11) dengan menggunakan proses difusi. Ditransformasikan bahwa $v(x, \tau)$ adalah :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (4.12)$$

dan secara berurut transformasi masing - masing elemen pada persamaan (4.11), dijabarkan sebagai berikut :

* Untuk suku $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) \\ &= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

* Untuk suku $\frac{\partial v}{\partial x}$ diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \right) \\ &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \tau) \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

* Untuk suku $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ diperoleh :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \tau) \right) \\
&= \alpha \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \tau) + \\
&\quad \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) \\
&= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan hasil dari α dan β , substitusikan transformasi (4.13), (4.14), dan (4.15) ke dalam persamaan (4.11) sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \\
&\quad \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) - \frac{2r}{\sigma^2} e^{\alpha x + \beta \tau} u.
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $e^{\alpha x + \beta \tau}$

$$\begin{aligned}
\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2r}{\sigma^2} u \\
\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{\sigma^2} r \alpha u + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} u \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} - \alpha^2 u - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{\sigma^2} r \alpha u - \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} u + \beta u &= 0.
\end{aligned}$$

Dilakukan penyederhanaan persamaan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(-2\alpha - \frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) + u \left(-\alpha^2 - \frac{2r}{\sigma^2} \alpha + \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} + \beta \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} - 2\alpha \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\beta - \alpha^2 - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} \right) u &= 0. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan difusi pada (2.30), persamaan (4.16) diarahkan ke dalam persamaan difusi, menjadi :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

sehingga variabel dan konstanta yang dikalikan dengan $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan u disama dengankan nol seperti berikut :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} - 2\alpha\right) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ 1 - \frac{2r}{\sigma^2} - 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Lakukan penyederhanaan hingga mendapatkan variabel α sebagai berikut :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (4.17)$$

Berlaku pula untuk variabel dan konstanta yang dikalikan dengan u disama dengankan nol

$$\begin{aligned} \left(\beta - \alpha^2 - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} \right) u &= 0 \\ \beta &= \alpha^2 + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \alpha - \frac{2r}{\sigma^2} \\ &= \alpha^2 + \frac{2r}{\sigma^2} \alpha - \alpha - \frac{2r}{\sigma^2} \\ &= (\alpha - 1) \left(\alpha + \frac{2r}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Terlihat pada persamaan (4.18) masih terdapat variabel α , sehingga dilakukan substitusi hasil dari α pada persamaan (4.17)

$$\beta = \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{2r}{\sigma^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan penyederhanaan diperoleh hasil dari β adalah :

$$\beta = -\frac{1}{4} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right)^2. \quad (4.19)$$

Apabila dimisalkan $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, maka diperoleh hasil untuk α dan β sebagai berikut :

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \quad (4.20)$$

dan

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 \quad (4.21)$$

Hasil dari α dan β sudah didapatkan, sehingga dapat disubstitusikan pada persamaan (4.12) menjadi :

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau).$$

Selanjutnya akan dicari untuk $u(x, \tau)$

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} v(x, \tau).$$

Substitusi $v(x, \tau)$ dari persamaan (4.6)

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} HK(1 - e^x) & , \text{jika } Ke^x < K \\ e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} HK(1 - e^x) & , \text{jika } Ke^x \geq K \end{cases}$$

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} HK(1 - e^x) & , \text{jika } e^x < 1 \\ e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} HK(1 - e^x) & , \text{jika } e^x \geq 1. \end{cases}$$

Substitusikan hasil $HK(1 - e^x)$ dari persamaan (4.6)

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}(1) & , \text{jika } e^x < 1 \\ e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}(0) & , \text{jika } e^x \geq 1 \end{cases}$$

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} & , \text{jika } e^x < 1 \\ (0) & , \text{jika } e^x \geq 1. \end{cases}$$

Untuk $\forall x \in R$ dan $\tau > 0$, syarat batas $u(x, 0)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & , \text{jika } e^x < 1 \\ 0 & , \text{jika } e^x \geq 1 \end{cases}$$

$$u(x, \tau) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & , x < 0 \\ 0 & , x \geq 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Berdasarkan persamaan (2.31) proses difusi memiliki solusi :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv$$

dengan kondisi batas pada formula (4.22) dapat diperoleh:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^0 u(s, 0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Apabila dimisalkan :

$$q = \frac{s - x}{\sqrt{2\tau}}$$

$$q\sqrt{2\tau} = s - x$$

$$s = q\sqrt{2\tau} + x$$

$$ds = \sqrt{2\tau}dq$$

sehingga dapat ditulis $u(x, \tau)$, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} u(x + q\sqrt{2\tau}, 0) e^{-\frac{q^2}{2}} \sqrt{2\tau} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} u(x + q\sqrt{2\tau}, 0) e^{-\frac{q^2}{2}} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+q\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{q^2}{2}} dq. \end{aligned}$$

Dilakukan perkalian pada eksponen, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{2}(k-1)q\sqrt{2\tau} - \frac{q^2}{2}} dq \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}(q^2 - (k-1)q\sqrt{2\tau}) + \frac{1}{4}(k-1)^2 2\tau - \frac{1}{4}(k-1)^2 \tau} dq \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2 \tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}(q - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau})^2} dq. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan integral dilakukan penyederhanaan, dengan permisalan:

$$p = q - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

$$dp = dq$$

Permisalan yang telah dibuat disubstitusikan pada persamaan (4.12) sehingga diperoleh :

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2 \tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp \right].$$

Dilakukan penyederhanaan hingga diperoleh persamaan yang paling sederhana

$$= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N \left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \right)$$

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N \left(\frac{-x - (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right) \quad (4.24)$$

Solusi untuk $u(x, \tau)$ sudah didapatkan, sehingga untuk $v(x, \tau)$ diperoleh :

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

subtitusikan persamaan (4.24),

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N \left(\frac{-x - (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right)$$

$$v(x, \tau) = e^{-k\tau} N \left(-\left(\frac{-x - (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right) \right) \quad (4.25)$$

Misalkan $d_2 = \frac{-x - (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$, persamaan (4.25) menjadi :

$$v(x, \tau) = e^{-k\tau} N(-d_2) \quad (4.26)$$

Dengan $N(\cdot)$ adalah CDF distribusi normal standar. Selanjutnya persamaan (4.26) diubah menjadi fungsi dari S dan t . Diketahui bahwa : $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dan $\tau = (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2$, maka :

$$v(x, \tau) = e^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)(T-t)\frac{\sigma^2}{2}} N(-d_2).$$

Jadi diperoleh solusi untuk $v(x, \tau)$ adalah :

$$v(x, \tau) = e^{-r(T-t)} N(-d_2).$$

Pada transformasi (4.5), $P(S, t) = v(x, \tau)$, karena hasil dari $v(x, \tau) = e^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)(T-t)\frac{\sigma^2}{2}} N(-d_2)$, maka dapat di tuliskan :

$$P(S, t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2) \quad (4.27)$$

merupakan solusi analitik untuk *digital put option*,

dengan $d_2 = \frac{-x - (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$ diajabarkan sebagai berikut:

subtitusikan $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dan $\tau = (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2$ pada d_2 , sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{x + \tau(k-1)}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{2(T-t)\frac{1}{2}\sigma^2}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{2(T-t)\frac{1}{2}\sigma^2}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Jadi, diperoleh solusi analitik untuk harga *digital put option* adalah:

$$P(S, t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2), \quad (4.29)$$

dengan d_2 didefinisikan sebagai berikut:

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad (4.30)$$

4.2 Pendekatan Solusi Analitik *Digital Put Option* dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Homotopi Pertubasi

Setelah mendapatkan penjabaran untuk solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan deferensial parsial dan proses difusi. Selanjutnya akan dijabarkan pendekatan solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi.

Diketahui dari Persamaan (4.1) bahwa model umum Black-Scholes untuk *put option* adalah:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad (4.31)$$

dengan $P(S, T)$ payoff untuk *digital put option*

$$P(S, T) = H(K - S) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } S < K \\ 0 & , \text{jika } S \geq K. \end{cases}$$

Transformasi variabel dilakukan sama seperti pada penjabaran solusi analitik seperti persamaan (4.3), (4.4) dan (4.5).

Dimisalkan :

$$S = Ke^x$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$P(S, T) = v(x, \tau). \quad (4.32)$$

Persamaan (4.31) dapat ditransformasikan dengan persamaan (4.32), menjadi :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} + kv = 0 \quad (4.33)$$

dengan $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dan kondisi awal untuk $v(x, 0)$:

$$\begin{aligned} P(S, 0) &= \begin{cases} 1 & , \text{jika } S < K \\ 0 & , \text{jika } S \geq K \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \text{jika } Ke^x < K \\ 0 & , \text{jika } Ke^x \geq K. \end{cases} \end{aligned}$$

Dilakukan pembagian dengan K

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} 1 & , \text{jika } e^x < 1 \\ 0 & , \text{jika } e^x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & , \text{jika } x < 0 \\ 0 & , \text{jika } x \geq 0 \end{cases} \\ &= v_0(x, 0). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Selanjutnya dilakukan kontruksi persamaan homotopi pertubasi pada persamaan (4.33) dengan membuat parameter buatan (p)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = p \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \right) \quad (4.35)$$

dan menurut topologi homotopi pertubasi, persamaan (4.35) mempunyai solusi :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4\dots \quad (4.36)$$

Substitusi persamaan (4.36) ke persamaan (4.35), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) &= p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \right) \\ &+ (k-1) \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - k(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \end{aligned}$$

dengan mengumpulkan p dengan pangkat yang sama, diperoleh :

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial \tau} &= 0 \\ p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v_0}{\partial x} - kv_0 \\ p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v_1}{\partial x} - kv_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^n : \frac{\partial v_n}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - kv_{n-1}. \quad (4.37)$$

Karena v_0 tidak dapat diturunkan saat $x = 0$, maka untuk mendapatkan solusi dari persamaan (4.37) wilayah perhitungan dibagi menjadi dua bagian, yaitu saat $x < 0$ dan $x \geq 0$, dengan penjabaran sebagai berikut :

* Pada orde ke -1 :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v_0}{\partial x} - kv_0 \quad (4.38)$$

- Untuk $x < 0$

$$v_0 = 1, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.38) menjadi:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = 0 + (k-1).0 - k.(1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = -k$$

$$\partial v_1 = -k \partial \tau$$

sehingga diperoleh hasil v_1 untuk $x < 0$ adalah :

$$v_1 = -k\tau.$$

- Untuk $x \geq 0$

$$v_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.38), menjadi :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = 0 + (k-1).0 - k.0$$

dan diperoleh hasil v_1 untuk $x \geq 0$ adalah :

$$v_1 = 0.$$

* Pada orde ke -2

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v_1}{\partial x} - kv_1 \quad (4.39)$$

- Untuk $x < 0$

$$v_1 = -k\tau, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.39) menjadi :

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = 0 + (k - 1).0 - k.(-k\tau)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = k^2\tau$$

dan diperoleh hasil v_2 untuk $x < 0$ adalah :

$$v_2 = \frac{1}{2}k^2\tau^2.$$

- Untuk $x \geq 0$

$$v_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.39) menjadi:

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = 0 + (k - 1).0 - k.0$$

dan diperoleh hasil v_2 untuk $x \geq 0$ adalah :

$$v_2 = 0.$$

* Pada orde ke-3

$$\frac{\partial v_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (k - 1)\frac{\partial v_2}{\partial x} - kv_2 \quad (4.40)$$

- Untuk $x < 0$

$$v_2 = \frac{1}{2}k^2\tau^2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.40) menjadi :

$$\frac{\partial v_3}{\partial \tau} = 0 + (k - 1).0 - k.\left(\frac{1}{2}k^2\tau^2\right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}k^3\tau^3$$

dan diperoleh hasil v_3 untuk $x < 0$ adalah :

$$v_3 = -\frac{1}{6}k^3\tau^3.$$

- Untuk $x \geq 0$

$$v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0$$

disubstitusikan pada persamaan (4.40) menjadi:

$$\frac{\partial v_3}{\partial \tau} = 0 + (k - 1).0 - k.0$$

dan diperoleh hasil v_3 untuk $x \geq 0$ adalah :

$$v_3 = 0.$$

Jadi, solusi dari persamaan (4.37) adalah :

$$V_n(x, \tau) = \begin{cases} \frac{(-k\tau)^n}{n!} & , \text{jika } x < 0 \\ 0 & , \text{jika } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Selanjutnya untuk mengatasi permasalahan patahan pada solusi persamaan (4.33) digunakan metode homotopi pertubasi, dengan transformasi sebagai berikut :

$$z = \frac{x}{\sqrt{\tau}}, \quad w = \sqrt{\tau}, \quad v(x, \tau) = u(z, w) \quad (4.42)$$

dengan kondisi awal untuk $u(z, w)$:

$$v(x, \tau) = HK(1 - e^x) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } x < 0 \\ 0 & , \text{jika } x \geq 0 \end{cases}$$

$$v(x, \tau) = u(z, w)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} u(z, w) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } z \rightarrow +\infty \\ 0 & , \text{jika } z \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

* Transformasi untuk $\frac{\partial v}{\partial \tau}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{-x}{w^2} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{\partial u}{\partial w} \left(\frac{1}{2w} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\frac{z}{2w^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{1}{2w}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

* Transformasi untuk $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{w} + 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\quad (4.44)$$

* Transformasi untuk $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{1}{w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{1}{w} + 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Substitusi persamaan transformasi (4.43), (4.44), dan (4.45) ke persamaan (4.33) menjadi :

$$-\frac{z}{2w^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2w} \frac{\partial u}{\partial w} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (k-1) \frac{1}{w} \frac{\partial u}{\partial z} + ku = 0$$

$$-\frac{z}{2w^2} u_z + \frac{1}{2w} u_w - \frac{1}{w^2} u_{zz} - (k-1) \frac{1}{w} u_z + ku = 0,$$

kedua ruas dikalikan dengan $2w^2$

$$wu_w = zu_z + 2u_{zz} + 2(k-1)wu_z - 2kuw^2$$

$$(uw)_w - u = zu_z + 2u_{zz} + 2(k-1)wu_z - 2kuw^2$$

$$(uw)_w = zu_z + u + 2u_{zz} + 2(k-1)wu_z - 2kuw^2. \quad (4.46)$$

Pada persamaan (4.46) dilakukan kontruksi metode homotopi pertubasi dengan menambahkan parameter buatan (p), dimana $p \rightarrow 1$

$$(uw)_w = zu_z + u + 2u_{zz} + 2p(k-1)wu_z - 2kup^2w^2. \quad (4.47)$$

Diasumsikan bahwa solusi dari persamaan (4.47) adalah :

$$u = u_0 + u_1p + u_2p^2 + u_3p^3 + \dots \quad (4.48)$$

Substitusi solusi (4.48) pada persamaan (4.47), sehingga diperoleh :

$$(u_0w + u_1pw + u_2p^2w + \dots)_w = 2(u_{0zz} + pu_{1zz} + p^2u_{2zz} + \dots) +$$

$$z(u_{0z} + pu_{1z} + p^2u_{2z} + \dots) + 2(k-1)wp(u_{0z} + pu_{1z} + p^2u_{2z} + \dots)$$

$$- 2k(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)w^2p^2.$$

Selanjutnya dilakukan pengelompokan berdasarkan pangkat dari p

$$p^0 : (u_0w)_w = 2u_{0zz} + zu_{0z} + u_0$$

$$p^1 : (u_1w)_w = 2u_{1zz} + zu_{1z} + 2(k-1)wu_{0z} + u_1$$

$$p^2 : (u_2w)_w = 2u_{2zz} + zu_{2z} + 2(k-1)wu_{1z} + u_2 - 2ku_0w^2$$

.

.

.

$$p^n : (u_nw)_w = 2u_{nzz} + zu_{nz} + 2(k-1)wu_{n-1z} + u_n - 2ku_{n-2}w^2.$$

Persamaan berdasarkan dengan order p dapat ditulis sebagai: $u_i = f_i(z)w^i$, sehingga diperoleh $u_0 = f_0$, $u_1 = f_1w$, $u_2 = f_2w^2$, berlaku seterusnya hingga orde ke $-n$. Jadi diperoleh masing-masing persamaan berdasarkan order p adalah sebagai berikut :

* Persamaan untuk p orde 0

$$p^0 : (f_0w)_w = 2f_{0zz} + zf_{0z} + f_0$$

$$p^0 : f_{0w}w + f_0 = 2f_{0zz} + zf_{0z} + f_0$$

$$p^0 : f_{0w}w = 2f_{0zz} + zf_{0z}$$

* Persamaan untuk p orde 1

$$p^1 : (f_1w^2)_w = 2f_{1zz}w + zwf_{1z} + 2(k-1)wf_{0z} + wf_1$$

$$p^1 : f_{1w}w^2 + 2f_1w = 2f_{1zz}w + zwf_{1z} + 2(k-1)wf_{0z} + wf_1$$

$$p^1 : f_{1w}w^2 = w[2f_{1zz} + zf_{1z} + 2(k-1)f_{0z} - f_1]$$

* Persamaan untuk p orde 2

$$p^2 : (f_2 w^3)_w = 2f_{2zz} w^2 + z w^2 f_{2z} + 2(k-1) w^2 f_{1z} + f_2 w^2 - 2k f_0 w^2$$

$$p^2 : f_{2w} w^3 + 3f_2 w^2 = 2f_{2zz} w^2 + z w^2 f_{2z} + 2(k-1) w^2 f_{1z} + f_2 w^2 - 2k f_0 w^2$$

$$p^2 : f_{2w} w^3 = w^2 [2f_{2zz} + z f_{2z} + 2(k-1) f_{1z} - 2k f_0 - 2f_2]$$

.

.

.

* Persamaan untuk p orde n

$$p^n : f_{nw} w^{n+1} = w^n [2f_{nzz} + z f_{nz} + 2(k-1) f_{n-1z} - 2k f_{n-2} - n f_n]$$

dengan kondisi awal

$$\text{untuk } n = 0, u(z, w) = \begin{cases} 1 & , z \rightarrow -\infty \\ 0 & , z \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{untuk } n \geq 1, u(z, w) = \begin{cases} 0 & , z \rightarrow -\infty \\ 0 & , z \rightarrow \infty \end{cases}$$

diperoleh penyelesaian untuk setiap persamaan dari u berdasarkan orde dari p dengan bantuan *software Mathematica* adalah sebagai berikut :

$$u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Erf} \left[\frac{z}{2} \right] \quad (4.49)$$

$$u_1 = -\frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (k-1)}{2\sqrt{\pi}} \quad (4.50)$$

$$u_2 = \frac{1}{8} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4}} z(-1+k)^2}{\sqrt{\pi}} - 4k \operatorname{Erfc} \left[\frac{z}{2} \right] \right] \quad (4.51)$$

$$u_3 = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (2(k-1)(1+k(10+k)) - (k-1)^3 z^2)}{48\sqrt{\pi}} \quad (4.52)$$

$$u_4 = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (-6(k-1)^2(1+k(6+k))z + (k-1)^4 z^3)}{348\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} k^2 \operatorname{Erfc} \left[\frac{z}{2} \right]. \quad (4.53)$$

Jadi hasil dari pendekatan solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi adalah :

$$u = u_0 + u_1 w + u_2 w^2 + u_3 w^3 + u_4 w^4 \quad (4.54)$$

dengan u_0, u_1, u_2, u_3 dan u_4 seperti pada persamaan (4.49), (4.50), (4.51), (4.52) dan (4.53).

4.3 Simulasi

Setelah mendapatkan penjabaran untuk solusi analitik dan pendekatan solusi analitik harga *digital put option*, selanjutnya akan disimulasikan kedua hasil yang diperoleh dalam bentuk tabel perhitungan dan grafik. Untuk memastikan keakurasian hasil pendekatan juga akan dilakukan perhitungan dengan metode *mean absolute deviation* (MAD).

4.3.1 Solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes

Misalkan diasumsikan beberapa parameter sebagai berikut:

$$K = \$30, \quad T = 1, \quad r = 0,05, \quad \sigma = 0,324336$$

Dengan harga saham diasumsikan pada tabel 4.1 berikut :

Tabel 4.1: Asumsi harga saham

No.	S(\$)	No.	S(\$)	No.	S(\$)
1.	1	8.	35	15.	70
2.	5	9.	40	16.	75
3.	10	10.	45	17.	80
4.	15	11.	50	18.	85
5.	20	12.	55	19.	90
6.	25	13.	60	20.	95
7.	30	14.	65	21	100

Berdasarkan Persamaan (4.25) dan (4.26), dengan $S = 1$ diambil dari tabel 4.1, diperoleh hasil perhitungan :

$$P(S, T) = e^{-r(T-t)} N(-d_2) = e^{-0,05(1)} N(-d_2) = e^{-0,05} N(-d_2)$$

$$\begin{aligned} \text{dan } d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1}{30}\right) + \left(0,05 - \frac{1}{2}(0,324336)^2\right)(1)}{0,324336\sqrt{(1)}} = -10,4947 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

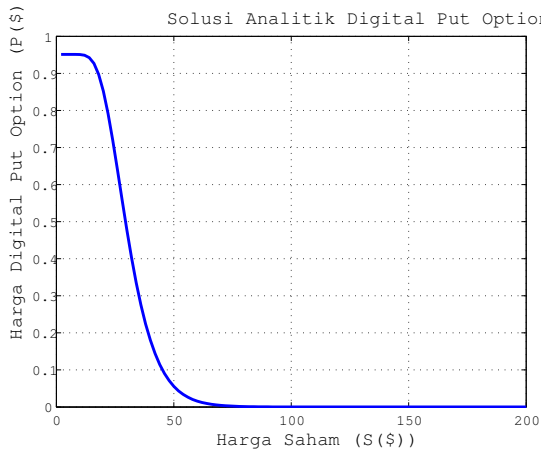
$$P(S, T) = e^{-0,05}(1 - N(-10,4947)) = 0,95122943,$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan dengan cara yang sama untuk semua nilai S pada tabel 4.1 hingga diperoleh hasil perhitungan seperti pada tabel 4.2 berikut :

Tabel 4.2: Solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes

No.	S(\$)	P(\$)	No.	S(\$)	P(\$)
1.	1	0,95122943	11	50.	0,055703
2.	5	0,95122941	12	55.	0,029852
3.	10	0,9509033	13	60.	0,015811
4.	15	0,9360372	14	65.	0,008325
5.	20	0,8521403	15	70.	0,004377
6.	25	0,6808046	16	75.	0,002304
7.	30	0,4786531	17	80	0,001217
8.	35	0,3045379	18	85	0,000646
9.	40	0,1804537	19	90	0,000345
10.	45	0,1018708	20	95	0,000186
			21	100	0,0001008

Berdasarkan hasil perhitungan pada tabel 4.2 didapatkan plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.1: Grafik solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes

Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, dan *interest rate* yang telah ditentukan, beserta dengan meningkatnya harga saham maka yang terjadi adalah harga *digital put option* semakin menurun.

4.3.2 Pendekatan solusi analitik harga *digital put option* dengan model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi

Berdasarkan persamaan (4.49) diketahui bahwa variabel yang terkandung dalam hasil dari pendekatan solusi analitik adalah z , k , dan w . Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah membandingkan antara solusi analitik dan pendekatan solusi analitik menggunakan metode homotopi pertubasi, sehingga z , k , dan w pada persamaan (4.49), dikonversikan dalam bentuk :

$$z = \frac{x}{\sqrt{\tau}}, \quad w = \sqrt{\tau}, \quad k = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (4.55)$$

dengan $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$. Misalkan diasumsikan beberapa parameter sebagai berikut:

$$K = \$30, \quad T = 1, \quad r = 0,05, \quad \sigma = 0,324336$$

Dengan harga saham diasumsikan pada tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3: Asumsi harga saham

No.	S(\$)	No.	S(\$)	No.	S(\$)
1.	1	8.	35	15.	70
2.	5	9.	40	16.	75
3.	10	10.	45	17.	80
4.	15	11.	50	18.	85
5.	20	12.	55	19.	90
6.	25	13.	60	20.	95
7.	30	14.	65	21.	100

Berdasarkan persamaan(4.55),dengan dengan $S = 1$ diambil dari tabel 4.3 diperoleh hasil perhitungan :

$$z = \frac{x}{\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{(T-t)\frac{1}{2}\sigma^2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{30}\right)}{\sqrt{(1)\left(\frac{1}{2}(0,324336)^2\right)}}$$

$$= \frac{-3,401197}{0,052597} = -14,830$$

$$w = \sqrt{\tau} = \sqrt{(T-t)\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$= \sqrt{(1)\left(\frac{1}{2}(0,324336)^2\right)} = 0,052597$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} = \frac{2(0,05)}{(0,324336)^2} = 0,950626$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan dengan cara yang sama untuk mendapatkan nilai z , k , dan w pada semua nilai S pada tabel 4.3 hingga diperoleh hasil pada tabel 4.4, berikut:

Tabel 4.4: Hasil perhitungan untuk z , k , dan w

NO.	S(\$)	k	x	τ	z	w
1.	1	0,951	-3,401	0,0526	-14,830	0,229
2.	5	0,951	-1,792	0,0526	-7,813	0,229
3.	10	0,951	-1,099	0,0526	-4,790	0,229
4.	15	0,951	-0,693	0,0526	-3,022	0,229
5.	20	0,951	-0,405	0,053	-1,768	0,229
6.	25	0,951	-0,182	0,053	-0,795	0,229
7.	30	0,951	0,000	0,053	0,000	0,229

Tabel 4.5: Hasil perhitungan untuk z , k , dan w lanjutan dari tabel 4.4

N0.	S(\$)	k	x	τ	z	w
8.	35	0,951	0,154	0,053	0,672	0,229
9.	40	0,951	0,288	0,053	1,254	0,229
10.	45	0,951	0,405	0,053	1,768	0,229
11.	50	0,951	0,511	0,053	2,227	0,229
12.	55	0,951	0,606	0,053	2,643	0,229
13.	60	0,951	0,693	0,053	3,022	0,229
14.	65	0,951	0,773	0,053	3,371	0,229
15.	70	0,951	0,847	0,053	3,695	0,229
16.	75	0,951	0,916	0,053	3,995	0,229
17.	80	0,951	0,980	0,053	4,277	0,229
18.	85	0,951	1,041	0,053	4,541	0,229
19.	90	0,951	1,099	0,053	4,790	0,229
20.	95	0,951	1,153	0,053	5,026	0,229
21.	100	0,951	1,204	0,053	5,249	0,229

Setelah diperoleh k , z , dan w , selanjutnya dari perhitungan didapatkan nilai untuk u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 seperti pada tabel 4.6 berikut :

Tabel 4.6: Hasil perhitungan untuk u_0, u_1, u_2, u_3, u_4

N0.	S(\$)	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1.	1	1,000000	0,000000	-0,950626	0,000000	0,451845
2.	5	1,000000	0,000000	-0,950626	0,000000	0,451845
3.	10	0,999647	0,000045	-0,950293	-0,000043	0,451688
4.	15	0,983706	0,001419	-0,935190	-0,001348	0,444533
5.	20	0,894376	0,006376	-0,850356	-0,006060	0,404251
6.	25	0,712989	0,011893	-0,677903	-0,011307	0,322271
7.	30	0,500000	0,013928	-0,475313	-0,013243	0,225922

Tabel 4.7: Hasil perhitungan untuk u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 lanjutan dari tabel 4.6

N0.	$S(\$)$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
8.	35	0,317293	0,012441	-0,301524	-0,011828	0,143269
9.	40	0,187543	0,009398	-0,178137	-0,008935	0,084602
10.	45	0,105624	0,006376	-0,100270	-0,006060	0,047594
11.	50	0,057629	0,004029	-0,054673	-0,003829	0,025934
12.	55	0,030822	0,002429	-0,029221	-0,002308	0,013851
13.	60	0,016294	0,001419	-0,015436	-0,001348	0,007312
14.	65	0,008565	0,000813	-0,008108	-0,000772	0,003838
15.	70	0,004495	0,000459	-0,004252	-0,000436	0,002011
16.	75	0,002363	0,000257	-0,002234	-0,000244	0,001056
17.	80	0,001247	0,000144	-0,001178	-0,000137	0,000556
18.	85	0,000661	0,000080	-0,000624	-0,000076	0,000295
19.	90	0,000353	0,000045	-0,000333	-0,000043	0,000157
20.	95	0,000190	0,000025	-0,000179	-0,000024	0,000084
21.	100	0,000103	0,000014	-0,000097	-0,000013	0,000046

Hasil perhitungan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 digunakan untuk mendapatkan hasil pendekatan seperti pada persamaan(4.54):

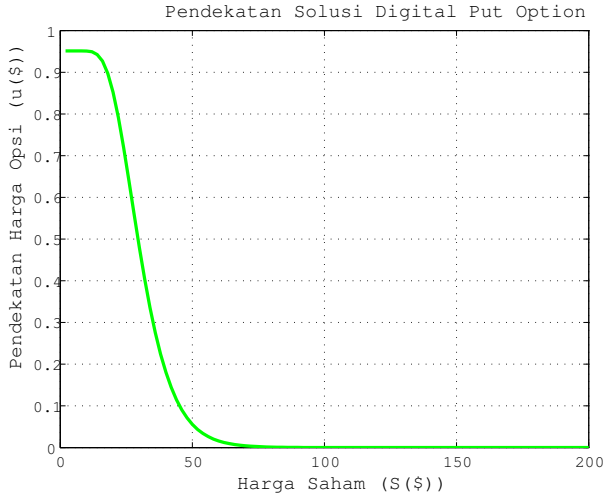
$$\begin{aligned}
 u(z, w) &= u_0 + u_1 w + u_2 w^2 + u_3 w^3 + u_4 w^4 \\
 &= (1,000000) + (0,000000)(0,229340) + (-0,950626)(0,229340)^2 \\
 &\quad + (0,000000)(0,229340)^3 + (0,451845)(0,229340)^4 \\
 &= 0,95125.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan dengan cara yang sama untuk mendapatkan hasil pendekatan pada semua nilai S seperti pada tabel 4.8 berikut :

Tabel 4.8: Hasil Pendekatan solusi analitik menggunakan metode homotopi pertubasi

N0.	S(\$)	Pendekatan Homotopi Pertubasi
1.	1	0,95125
2.	5	0,951249985
3.	10	0,950923898
4.	15	0,93605711
5.	20	0,852156957
6.	25	0,68081597
7.	30	0,478659536
8.	35	0,304540969
9.	40	0,180454951
10.	45	0,101871232
11.	50	0,055703505
12.	55	0,02985244
13.	60	0,015811427
14.	65	0,008325941
15.	70	0,004377285
16.	75	0,002304626
17.	80	0,001217759
18.	85	0,000646785
19.	90	0,000345678
20.	95	0,00018605
21.	100	0,000100893

Berdasarkan Tabel 4.8 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :

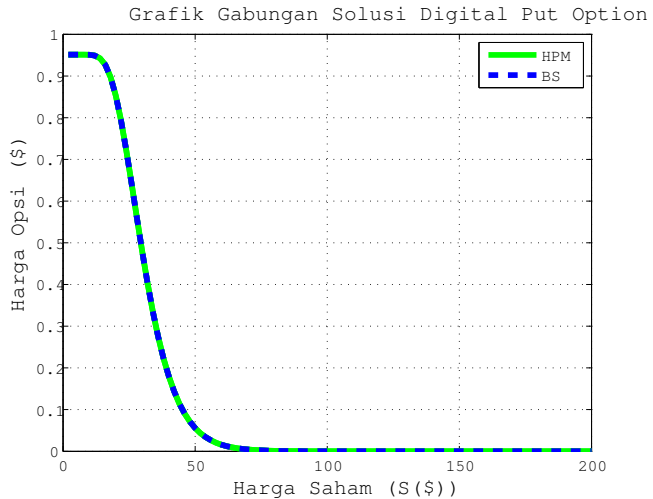


Gambar 4.2: Grafik pendekatan solusi analitik harga *digital put option* dengan metode homotopi pertubasi

Terlihat pada Gambar 4.2 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, dan *interest rate*, yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham, hasil pendekatan harga *digital put option* mengalami penurunan

4.3.3 Simulasi perbandingan solusi analitik dan pendekatan *digital put option*

Pada tahap ini akan digabungkan grafik dari solusi analitik dan pendekatan solusi analitik, serta dilakukan perhitungan nilai *error* dengan metode *mean absolute deviation* (MAD). Dari plot grafik gambar (4.1) dan plot grafik gambar (4.2) apabila digabungkan diperoleh hasil seperti berikut :



Gambar 4.3: Grafik gabungan solusi untuk harga *digital put option*

Terlihat pada Gambar 4.3 bahwa hasil grafik dari solusi analitik model Black-Scholes dan pendekatan solusi analitik *digital put option* menggunakan metode homotopi pertubasi mendekati dan berhimpit. Untuk lebih meyakinkan bahwa hasil dari grafik pada gambar 4.3 tepat, dilakukan perhitungan *error* dengan metode *mean absolut deviation*. Adapun hasil perhitungannya seperti pada tabel 4.9 berikut :

Tabel 4.9: Hasil Nilai Error dengan metode MAD

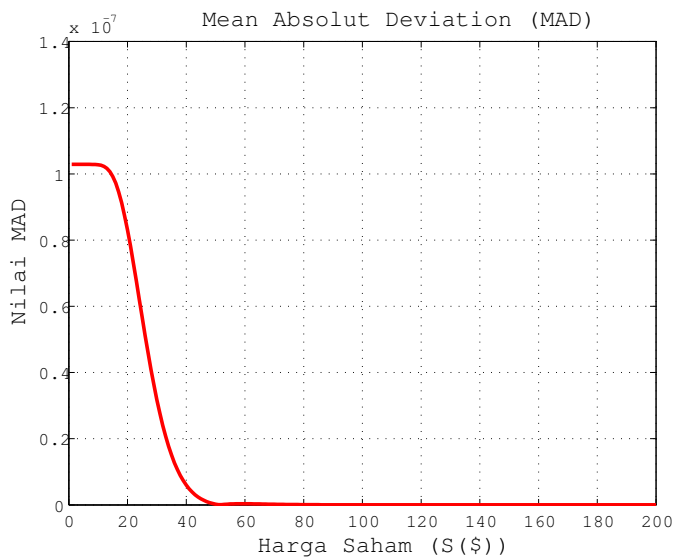
N0.	Solusi Analitik (BS)	Pendekatan HPM	MAD
1.	0,951229425	0,95125	0,000020575499286
2.	0,951229409	0,951249985	0,000020575498051
3.	0,950903342	0,950923898	0,000020555799045
4.	0,936037266	0,93605711	0,000019844055939

Tabel 4.10: Hasil nilai *Errorr* dengan metode MAD lanjutan tabel 4.9

NO.	Solusi Analitik (BS)	Pendekatan HPM	MAD
5.	0,852140343	0,852156957	0,000016613994749
6.	0,680804647	0,68081597	0,000011323500400
7.	0,478653177	0,478659536	0,000006358953463
8.	0,304537956	0,304540969	0,000003012931504
9.	0,180453752	0,180454951	0,000001199195525
10.	0,101870865	0,101871232	0,000000367044358
11.	0,055703461	0,055703505	0,000000043189925
12.	0,029852495	0,02985244	0,000000055188504
13.	0,015811495	0,015811427	0,000000067781825
14.	0,008325996	0,008325941	0,000000054601303
15.	0,004377323	0,004377285	0,000000037993445
16.	0,00230465	0,002304626	0,000000024585630
17.	0,001217775	0,001217759	0,000000015266807
18.	0,000646794	0,000646785	0,000000009248045
19.	0,000345684	0,000345678	0,000000005518284
20.	0,000186053	0,00018605	0,000000003263607
21.	0,000100895	0,000100893	0,000000001921025
		Nilai MAD	0,000005749763368

Terlihat pada tabel 4.10, hasil dari nilai MAD $\approx 0,0000057$. Menurut metode MAD, apabila nilai MAD mendekati nol, maka nilai hasil peramalan dianggap baik dan mendekati nilai aktual, dalam hal ini hasil dari pendekatan solusi analitik model Black-Scholes merupakan nilai hasil peramalan dan solusi analitik model Black-Scholes merupakan nilai aktual.

Adapun hasil plot grafik harga saham terhadap Nilai MAD digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.4: Harga saham terhadap nilai MAD

Terlihat pada Gambar 4.4 bahwa dengan strike price, volatilitas, dan *interest rate*, yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham, maka nilai *error* semakin kecil.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Hasil pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* menggunakan metode homotopi pertubasi adalah:

$$u(z, w) = u_0 + u_1w + u_2w^2 + u_3w^3 + u_4w^4$$

dengan u_0, u_1, u_2, u_3 dan u_4 sebagai berikut:

$$u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left[\frac{z}{2} \right]$$

$$u_1 = -\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(k-1)}{2\sqrt{\pi}}$$

$$u_2 = \frac{1}{8} \left[\frac{e^{-\frac{z^2}{4}} z (-1+k)^2}{\sqrt{\pi}} - 4k \operatorname{Erfc} \left[\frac{z}{2} \right] \right]$$

$$u_3 = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} (2(k-1)(1+k(10+k)) - (k-1)^3 z^2)}{48\sqrt{\pi}}$$

$$u_4 = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}(-6(k-1)^2(1+k(6+k))z + (k-1)^4z^3)}{348\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4}k^2 \operatorname{Erfc}\left[\frac{z}{2}\right]$$

2. Berdasarkan simulasi, didapatkan hasil pendekatan solusi analitik menggunakan metode homotopi pertubasi mendekati hasil perhitungan solusi analitik dengan model Black-Scholes. Terlihat dari kedua grafik saling mendekati dan berhimpit. Selain itu, didapatkan nilai mean absolute deviation (MAD) $\approx 0,0000057$, dimana jika nilai MAD mendekati nilai nol, maka semakin akurat kebenaran hasil perhitungan. Jadi secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa, hasil pendekatan solusi analitik untuk harga *digital put option* menggunakan metode homotopi pertubasi tepat dan akurat.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dibahas mengenai penyelesaian model Black-Scholes menggunakan metode homotopi pertubasi untuk jenis opsi lainya pada tipe Eropa, dan juga untuk tipe Amerika. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ke,Z., Goard J., Zhu S.P. 2017. **An Appropriate Approach to Pricing European-Style Options With the Adomian Decomposition Method.** 10.1017/S1446181117000438:1.
- [2] Lazar, L. V. 2003. **Pricing Digital Call Option In The Heston Stochastic Volatility Model.** *Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica.* Volume XLVIII(3).
- [3] Hemedat, A.A. (2012). **Homotopy Perturbation Method for Solving Systems of Nonlinear Coupled Equations.** vol.6(96): 4787-4800.
- [4] Jiang, L. 2005. **Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing.** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore.
- [5] Ardiyanto. 2009. **Model Investasi Harga Saham Tipe Eropa Dengan Menggunakan Model Black-Scholes.** *skripsi.* Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.
- [6] Vishwanath,S.R. 2009. **Investment Management.** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. Springer-Verlag Berlin Heidelberg German.
- [7] Roman J. R. M. 2017. **Analitiycal Finance.** Volume 1. Springer Nature. Cham,Switzerland.

- [8] Stehilokova, B. 2014/2015. **Black-Scholes Model: Derivation and Solution**. *Tesis*. Faculty of Mathematics; Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava.
- [9] He,H.J. 2003. **Homotopy Perturbation Method : a New Nonlinear Analytical Technique**. *Applied Mathematics and Computation* .Vol. 135(73-79).
- [10] E. Tandelilin, *Portofolio dan Investasi: Teori dan Aplikasi*. Kanisius, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=YLORI8ul44kC>.
- [11] D. Montgomery, C. Jennings, and M. Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, ser. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2011. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=-qaFi0oOPAYC>
- [12] Y. Kwok, **Mathematical Models of Financial Derivatives**, ser. Springer Finance. Springer Berlin Heidelberg, 2008. [Online]. Available: <https://books.google.co.id/books?id=2sGwSAfA8eAC>
- [13] P. Nirmala. **Penyelesaian Persamaan Black-Scholes dengan Adomian Decomposition Method**. Skripsi. 2015.

BIODATA PENULIS



Nama lengkap penulis Frida Akbar Rani, lahir di Pasuruan pada tanggal 03 April 1998. Sebelum menempuh bangku perkuliahan, penulis memulai pendidikan formal mulai dari TKK Sang Timur Pasuruan (2003-2004), SDK Sang Timur Pasuruan (2004-2010), SMP Negeri 1 Pasuruan (2010-21013), SMAN 1 Pasuruan (2013-2016). Pada tahun 2016, penulis meneruskan pendidikan ke jenjang strata-1 di Departemen

Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), melalui jalur SNMPTN dengan nomor registrasi peserta (NPR) 06111640000048. Dimasa perkuliahan penulis aktif dalam berbagai organisasi antara lain Lembaga Dakwah Jurusan Matematika Ibnu Muqhlah sebagai staf Jaringan dan Media periode (2017-2018) dan (2018-2019). UKM Musik ITS sebagai staf internal(2017-2018). HIMATIKA ITS sebagai staf Community Service (2017-2018), dan Kepala Departemen Social Development(2018-2019). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai acara kemahasiswaan yaitu Pagelaran Seni ITS EXPO, OMITs, METRONOME UKM Musik ITS serta dalam pelatihan kemahasiswaan seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD, LKMW TD, dan LKMW TL. Selama di Departemen Matematika, Penulis saat menjalani kuliah lebih dominan mengambil Bidang Studi Matematika Terapan. Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: fridaakrani@gmail.com