



TESIS - KS185411

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS  
*BIVARIATE ZERO-INFLATED POISSON INVERSE  
GAUSSIAN REGRESSION***

(Studi Kasus: Pemodelan Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo)

Rossy Noviyana  
06211850010018

Dosen Pembimbing  
Dr. Purhadi, M.Sc  
Dr. Sutikno, M.Si

Program Magister  
Departemen Statistika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2020



TESIS - KS185411

**PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS  
*BIVARIATE ZERO-INFLATED POISSON INVERSE  
GAUSSIAN REGRESSION***

(Studi Kasus: Pemodelan Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo)

**ROSSY NOVIYANA  
06211850010018**

Dosen Pembimbing  
Dr. Purhadi, M.Sc  
Dr. Sutikno, M.Si

Program Magister  
Departemen Statistika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2020



THESIS - KS185411

**PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESES TESTING  
*BIVARIATE ZERO INFLATED POISSON INVERSE  
GAUSSIAN REGRESSION***

(Case Study: Modeling the Number of Cases of People with HIV and AIDS in Trenggalek and Ponorogo)

**ROSSY NOVIYANA  
06211850010018**

Supervisor  
Dr. Purhadi, M.Sc  
Dr. Sutikno, M.Si

Magister Program  
Departement of Statistics  
Faculty of Science and Data Analytics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2020

**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
**Magister Statistika (M.Stat)**  
di  
**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh:  
**ROSSY NOVIYANA**  
**NRP: 06211850010018**

Tanggal Ujian : 28 Juli 2020  
Periode Wisuda : September 2020

Disetujui oleh:  
**Pembimbing:**

1. **Dr. Puhadi, M.Sc.**  
NIP. 19620204 198701 1 001

  
.....

2. **Dr. Sutikno, M.Si**  
NIP. 19710313 199702 1 001

  
.....

**Penguji :**

1. **Dr. Bambang W. Otok, M.Si.**  
NIP. 19681124 199412 1 001

  
.....

2. **Dr. Ismaini Zain, M.Si.**  
NIP: 19600525 198803 2 001

  
.....

**Kepala Departemen Statistika**  
**Fakultas Sains dan Analitika Data**

**Dr. Kartika Fithriasari, M.Si.**  
NIP: 19691212 199303 2 002

  
t

# **PENAKSIRAN PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS BIVARIATE ZERO INFLATED POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION**

(Studi Kasus : Pemodelan Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo)

Nama : Rossy Noviyana  
Pembimbing : Dr. Purnadi, M.Sc  
Co-Pembimbing : Dr. Sutikno, M.Si

## **ABSTRAK**

Data cacahan (*count data*) merupakan data yang menunjukkan banyaknya kejadian dalam kurun waktu tertentu, dan selalu bernilai positif. Salah satu metode untuk menganalisis jenis data cacahan yaitu Regresi Poisson yang merupakan salah satu anggota keluarga *Generalized Linear Models (GLMs)*, dimana dalam regresi Poisson terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu respon harus memiliki *mean* dan varians yang sama (*equidispersion*). Beberapa kasus riil terjadinya *underdispersion* maupun *overdispersion* karena banyak amatan bernilai nol (*extra zeros*). *Mixed poisson distribution* merupakan solusi alternatif untuk kasus overdispersi maupun underdispersi. Salah satu metode yang sudah dikembangkan yaitu *Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (ZIPIG)*. Jika terdapat dua respon, maka analisis regresi yang sesuai yaitu *Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG)*. Penaksiran parameter model BZIPIG menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* dengan iterasi *Berndt Hall Hall Hausman (BHHH)* serta pengujian hipotesis menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT)*. Penelitian ini menggunakan metode BZIPIG dengan tujuan untuk mengetahui bentuk penaksiran parameter dan pengujian hipotesis serta mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi HIV dan AIDS pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo merupakan salah satu Provinsi di Jawa Timur, dimana Jawa Timur merupakan Provinsi yang masuk ke dalam 3 Provinsi tertinggi yang memiliki kasus HIV dan AIDS. Berdasarkan nilai AICc yang didapatkan, model BZIPIGR merupakan model yang layak untuk diterapkan pada data jumlah kasus HIV dan AIDS. Variabel yang memiliki pengaruh dapat meningkatkan jumlah kasus HIV dan AIDS yaitu persentase penduduk berpendidikan rendah (SMA). Variabel yang memiliki pengaruh menurunkan jumlah kasus HIV dan AIDS yaitu persentase penduduk yang berumur 25-29 tahun, persentase pasangan usia subur (PUS) dengan pemakaian kondom, persentase kegiatan penyuluhan Kesehatan dan persentase jaminan Kesehatan masyarakat (Jamkesmas).

**Kata Kunci:** *equidispersi, extra zeros, MLE, MLRT, Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG), HIV dan AIDS.*

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

# **PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESES TESTING BIVARIATE ZERO INFLATED POISSON INVERSE GAUSSIAN REGRESSION**

(Case Study: Modeling the Number of Cases of People with HIV and AIDS in  
Trenggalek and Ponorogo)

Name : Rossy Noviyana  
Supervisor : Dr. Puhadi, M.Sc  
Co Supervisor : Dr. Sutikno, M.Si

## **ABSTRACT**

Count data is data that shows the number of events at a certain time and is always positive. One method for analyzing the type of data count is Poisson Regression which is a member of the Generalized Linear Models family (GLMs), Which is Poisson regression some assumptions must be fulfilled and the response must have the same *mean* and variance (equidispersion). Some real cases of underdispersion and overdispersion because many observations have zero value (extra zeros). Mixed Poisson distribution is an alternative solution for overdispersion and underdispersion cases. One method that has been developed is Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (ZIPIG). If there are two responses, then the appropriate regression analysis is Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG). Estimating the parameters of the BZIPIG model uses Maximum Likelihood Estimation (MLE) with the Berndt Hall Hausman (BHHH) iteration and hypothesis testing using the Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT). This study uses the BZIPIG method intending to determine the form of parameter assessment and hypothesis testing and to know the factors that influence HIV and AIDS in each district in Trenggalek and Ponorogo Regencies. Trenggalek and Ponorogo Regencies are one of the provinces in East Java, where East Java is one of the 3rd provinces that have the highest HIV and AIDS cases. Based on the AICc values obtained, the BZIPIGR model is a feasible model to be applied to data on the number of HIV and AIDS cases. The variables have an influence that can increase the number of HIV and AIDS cases, namely the percentage of the population with low education (SMA). Variables that have the effect of reducing the number of HIV and AIDS cases are the percentage of population aged 25-29 years, the percentage of fertile age couples (PUS) using condoms, the percentage of health education activities, and the percentage of public health insurance (Jamkesmas).

**Keywords:** *equidispersi, extra zeros, MLE, MLRT, Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG), HIV dan AIDS.*

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## KATA PENGANTAR

Puji Syukur atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah, serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan Tesis yang berjudul “**Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis *Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression*** (Studi Kasus: Pemodelan Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo)” ini tepat pada waktunya. Penulisan laporan Tesis ini tidak akan berjalan dengan lancar tanpa bantuan dan dukungan beberapa pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada;

1. Ibu Dr. Kartika Fithriasari, M.Si. selaku Kepala Departemen Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data Intitut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Ibu Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D selaku Sekretaris Departemen I (Bidang Akademik, Kemahasiswaan, Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat).
3. Ibu Dr. Vita Ratnasari, M.Si. selaku Sekretaris Departemen II (Bidang Sumber Daya Keuangan, Sumber Daya Manusia, dan Sarana Prasarana).
4. Bapak Dr. rer. pol Dedy Dwi Prastyo, S.Si., M.Si. selaku Kepala Program Studi Pasca Sarjana Departemen Statistika ITS.
5. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc. dan Bapak Dr. Sutikno, M.Si. selaku dosen pembimbing telah meluangkan waktu untuk membimbing dan mengarahkan penulis selama menyusun Tesis.
6. Bapak Dr. Bambang W Otok, M.Si. dan Ibu Dr. Ismaini Zain, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran serta masukan untuk perbaikan kepada penulis untuk hasil tesis yang lebih baik.
7. Bapak Dr. Ir. Setiawan, MS. selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan dalam menjalani perkuliahan.
8. Bapak Zulyadi dan Ibu Lenhaida selaku orang tua, Wo Oca, Udo Sony, Iyas, serta keluarga lainnya yang telah memberikan dukungan, do’a, dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis dengan baik.

9. Teman-teman seperjuangan S2 “Kalem”, “Genk Goeboeg”, dan angkatan ganjil 2018. Intan, Ita, dan “Besok Libur” yang telah memberikan cinta dalam setiap kebersamaan yang dilakukan sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis dengan baik.

Penulis berharap hasil Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Semoga kebaikan dan bantuan yang telah diberikan kepada penulis dibalas oleh Allah SWT.

Surabaya, Agustus 2020

Rosy Noviyana

## DAFTAR ISI

ABSTRAK .....	i
ABSTRACT.....	iii
KATA PENGANTAR .....	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
BAB 1 .....	1
PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Perumusan Masalah .....	6
1.3. Tujuan Penelitian .....	7
1.4. Manfaat Penelitian .....	7
1.5. Batasan Masalah .....	7
BAB 2 .....	9
KAJIAN PUSTAKA.....	9
2.1. Distribusi Poisson .....	9
2.2. Equidispersi.....	9
2.3. Poisson Inverse Gaussian Regression (PIGR) Univariat .....	10
2.4. Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression (BPIGR).....	11
2.4.1. Penaksir Parameter Model <i>Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression</i> (BPIGR) .....	12
2.4.2. Pengujian Hipotesis Model <i>Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression</i> (BPIGR) .....	16
2.5. Zero Inflated Poisson Regression (ZIPR) .....	18
2.5.1. Penaksir Parameter Regresi <i>Univariate Zero Inflated Poisson</i> ....	19
2.5.2. Pengujian Hipotesis Regresi <i>Univariate Zero Inflated Poisson</i> ...	24
2.6. Bivariate Zero Inflated Poisson Regression (BZIPR).....	26
2.7. Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (ZIPIGR) .....	26

2.8.	Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (BZIPIGR).....	27
2.9.	Uji Korelasi.....	29
2.10.	Multikolinearitas.....	30
2.11.	Kriteria Keباikan Model .....	30
2.12.	HIV dan AIDS serta Faktor yang Berpengaruh terhadap Jumlah Kasus HIV dan AIDS .....	31
BAB 3	.....	35
METODE PENELITIAN .....		35
3.1.	Kajian Teori.....	35
3.1.1	Menentukan Penaksir Parameter Model BZIPIGR .....	35
3.1.2	Menentukan Statistik Uji Hipotesis Model BZIPIGR.....	37
3.2.	Sumber Data .....	38
3.2.1	Variabel Penelitian .....	38
3.2.2	Langkah-langkah Penentuan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus HIV dan AIDS dengan Model BZIPIGR	41
BAB 4	.....	45
ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....		45
4.1.	Penaksiran Parameter Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG).....	45
4.2.	Pengujian Hipotesis Parameter Model BZIPIG.....	47
4.2.1	Pengujian Serentak Parameter $\beta_1, \beta_2$ .....	47
4.2.2	Pengujian Parameter Secara Parsial .....	51
4.3.	Model Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (BZIPIG).....	52
4.3.1	Statistika Deskriptif Respon dan Variabel Prediktor Penelitian....	52
4.3.2	Uji Korelasi Respon.....	55
4.3.3	Uji Multikolinearitas.....	55
4.3.4	Uji Equidispersi .....	56

4.3.5	Pemodelan Regresi Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo dengan metode <i>Bivariate</i> <i>Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG)</i> .....	57
BAB 5	.....	63
KESIMPULAN DAN SARAN	.....	63
5.1.	Kesimpulan .....	63
5.2.	Saran .....	63
DAFTAR PUSTAKA	.....	65
LAMPIRAN	.....	69
BIOGRAFI PENULIS	.....	117

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Kerangka Teori Lawrence Green .....	32
Gambar 2.2 Kerangka Konsep Penelitian .....	33
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian mendapatkan Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis .....	42
Gambar 3.2 Langkah-langkah analisis data jumlah HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.Uji Korelasi .....	43
Gambar 3.3 Langkah-langkah analisis data jumlah HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. ....	43

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## **DAFTAR TABEL**

Tabel 3.1. Variabel Penelitian dan Definisi Operasional.....	40
Tabel 3.2. Struktur Data Penelitian.....	41
Tabel 4.1. Statistika Deskriptif Respon dan Variabel Prediktor .....	53
Tabel 4.2. Koefisien Korelasi Respon dengan Variabel Prediktor .....	54
Tabel 4.3. Nilai VIF Variabel Prediktor .....	56
Tabel 4.4. Estimasi Parameter Model BZIPIGR .....	58

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 .....	69
Lampiran 2. Fungsi kepadatan peluang BZIPIGR.....	70
Lampiran 3. Fungsi $\ln$ <i>likelihood</i> $L(\Omega)$ BZIPIGR.....	71
Lampiran 4. Turunan pertama fungsi $\ln$ <i>likelihood</i> BZIPIGR.....	73
Lampiran 5. Fungsi kepadatan peluang di bawah $H_0$ $L(\omega)$ BZIPIGR .....	87
Lampiran 6. Fungsi $\ln$ <i>likelihood</i> di bawah $H_0$ $L(\omega)$ BZIPIGR .....	88
Lampiran 7. Turunan pertama fungsi $\ln$ <i>likelihood</i> di bawah $H_0$ $L(\omega)$ BZIPIGR .....	89
Lampiran 8. Pemeriksaan Korelasi antar Variabel .....	94
Lampiran 9. Uji Multikolinearitas .....	95
Lampiran 10. Uji Equidispersi .....	96
Lampiran 11. Uji Serentak Model BZIPIGR .....	97
Lampiran 12. Uji Parsial Model BZIPIGR .....	98
Lampiran 13. Syntax BZIPIGR .....	99
Lampiran 14. Syntax BZIPIGR dibawah populasi .....	108

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Data cacahan (*count data*) merupakan data yang menunjukkan banyaknya kejadian dalam kurun waktu tertentu, dan selalu bernilai positif. Data cacahan tidak dapat menggunakan regresi OLS (*Ordinary Least Square*) karena akan melanggar asumsi yaitu nilai *error* tidak distribusi normal dan memiliki sifat heteroskedastisitas (Widiari, 2016). Pengembangan dalam pemodelan untuk data cacahan dapat menggunakan *Generalized Linear Models* (GLMs). GLMs sendiri menyediakan metode analisis untuk data yang tidak berdistribusi normal dan merupakan generalisasi dari model regresi OLS yang memiliki asumsi ketat. Regresi Poisson merupakan analisis regresi nonlinear dari distribusi poisson yang merupakan salah satu anggota dari keluarga *Generalized Linear Models* (GLMs).

Distribusi Poisson ditentukan hanya menggunakan satu parameter untuk mendefinisikan *mean* dan varians dari distribusi tersebut, sehingga dalam regresi Poisson terdapat asumsi yang harus dipenuhi yaitu respon harus memiliki *mean* dan varians yang sama (*equidispersion*). Kenyataannya asumsi tersebut sering dilanggar, dimana nilai varians lebih kecil dari *mean* (*underdispersion*) ataupun nilai varian yang lebih besar dibandingkan *mean* (*overdispersion*). Data cacahan sering menunjukkan varians yang cukup besar karena banyak mengandung nilai nol (*extra zeros*) atau sebaran yang lebih besar daripada nilai-nilai pada data keduanya (Hu, Pavlicova dan Nunes, 2011). Umumnya data cacahan mengalami kasus overdispersi (Consul dan Famoye, 1992). Jika kasus tersebut diabaikan, maka akan mengakibatkan terjadinya *underestimate* dan salah dalam mengambil keputusan pada saat pengujian hipotesis, misal hasil yang didapatkan suatu variabel prediktor berpengaruh signifikan namun pada kenyataannya tidak berpengaruh signifikan (Hilbe, 2007).

Beberapa pemodelan dibentuk untuk mengatasi masalah overdispersi. Pemodelan tersebut merupakan perpaduan antara Distribusi Poisson dengan beberapa distribusi lain baik diskrit maupun kontinu (*mixed poisson distribution*). *Mixed poisson distribution* merupakan solusi alternatif untuk kasus overdispersi

maupun underdispersi, namun hanya beberapa yang sering digunakan karena perhitungannya yang rumit. Beberapa *mixed poisson distribution* yang telah dikembangkan yaitu *Zero-Inflated Poisson (ZIP)*, *Generalized Poisson*, *Negative Binomial Poisson* dan *Poisson Inverse Gaussian (PIG)*.

Poisson Invers Gaussian (PIG) yang merupakan *mixed poisson distribution* dengan random efek yang memiliki distribusi Invers Gaussian. Distribusi ini pertama kali diperkenalkan oleh Holla pada tahun 1966 (Karlis dan Nikoloulopoulos, 2005). Distribusi PIG sendiri merupakan bentuk dari distribusi *Siche (SI)* dengan dua parameter. SI disebut sebagai model yang lebih baik daripada model binomial negatif, terutama untuk data yang overdispersi yang tinggi dan cenderung menceng kanan (*highly skewed to the right*). Namun penghitungannya lebih rumit karena memiliki tiga parameter pada fungsi kepadatan peluangnya. Sebagai bentuk dari distribusi SI adalah distribusi PIG yang digunakan dalam memodelkan data cacahan yang menceng kanan serta memiliki ekor yang sedikit lebih panjang. Akan tetapi, distribusi PIG memiliki bentuk fungsi likelihood yang *close form* dan penghitungannya lebih mudah sehingga banyak penelitian yang melibatkan data cacahan banyak yang menggunakan model ini (Stasinopoulus dan Rigby, 2007).

Beberapa kajian mengenai regresi *Poisson Inverse Gaussian (PIG)* yang telah dilakukan diantaranya penelitian dari Shoukri, Asyali dan Vandorp (2004) yang menggunakan model PIG dan menyimpulkan bahwa regresi PIG merupakan model yang lebih baik daripada model regresi binomial negatif; dan Widiari, Purhadi, dan Latra (2016) menggunakan regresi PIG karena merupakan cacahan yang berpotensi terjadi overdispersi dengan penaksiran parameter dilakukan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* dan pengujian hipotesis menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT)* dengan pemilihan model terbaik menggunakan nilai *Akaike information Criterion (AIC)*.

Seperti model regresi pada umumnya, regresi Poisson biasanya melibatkan satu respon (*univariate Poisson*) atau lebih dari satu respon (*multivariate Poisson*) dengan beberapa variabel prediktor. Analisis regresi *Poisson* yang terdiri atas dua respon dan beberapa variabel prediktor disebut regresi *bivariate Poisson*. Analisis ini diusulkan oleh Holgate (1964) dan dipresentasikan oleh Johnson dan Kotz (1969)

dalam AlMuhayfith, Alzaid, dan Omair (2016). Dua respon pada model regresi *bivariate Poisson* merupakan data cacahan yang berdistribusi *Poisson*, saling berkorelasi, dan parameternya akan diduga secara bersama-sama.

Penelitian yang berkaitan dengan kasus bivariat untuk data cacahan berdistribusi *Poisson* diperkenalkan oleh Jung dan Winkelman (1993) untuk menduga parameternya dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan memodelkan sepasang data cacahan yang berdistribusi *Poisson*. Dikarenakan hasil penaksiran parameter biasanya tidak *closed form*, maka digunakan iterasi numerik. Salah satu metode iterasi yang digunakan yaitu iterasi numerik Newton-Raphson (Cameron dan Trivedi, 1998). Selanjutnya Ratnasari dan Purhadi (2014) mengusulkan regresi *bivariate* *PIG* untuk mengatasi kemungkinan terjadinya overdispersi dan penaksiran parameter dilakukan menggunakan metode MLE dengan metode iterasi *Newton-Raphson*.

Zha, Lord dan Zou (2014), menggunakan pemodelan regresi *PIG* untuk menganalisis kasus jumlah kecelakaan motor yang terjadi di Texas dan Washinton, dengan membandingkan model regresi binomial negative dan model regresi *PIG* pada nilai *Akaike Information Criterion* (*AIC*) dan nilai *Bayesian Information Criterion* (*BIC*). Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa pemodelan regresi *PIG* lebih baik dibandingkan pemodelan regresi binomial negatif pada kasus ini. Namun dalam penelitian tersebut data menceng kanan dengan ekor yang sedikit panjang dan 37 persen data amatan bernilai nol, sehingga menyebabkan pelanggaran asumsi equidispersi pada distribusi *Poisson*. Untuk mengatasi hal tersebut, terdapat metode yang dikembangkan untuk menganalisis respon dengan jumlah nol yang banyak dengan regresi *Zero-Inflated Poisson* (*ZIP*).

Beberapa kasus ditemukan suatu peristiwa yang jarang terjadi sehingga respon banyak berisikan data yang bernilai nol (*excess zero*). *Excess zero* merupakan salah satu permasalahan dalam regresi *Poisson* dimana jumlah respon nol yang diamati melebihi jumlah respon nol yang diperkirakan oleh model. Lambert (1992) mengembangkan model regresi *Zero-Inflated Poisson* (*ZIP*) untuk mengatasi banyaknya nilai nol pada respon. Famoye dan Singh (2006) memperkirakan proporsi data bernilai nol yang sesuai untuk model *ZIP* adalah sebesar 63,7 persen.

Ridout, Demetrio dan Hinde (1998) mengaplikasikan model ZIP pada data biologi yaitu data jumlah akar yang dihasilkan oleh 270 tunas apel. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa model ZIP tidak cocok diterapkan untuk menangani kasus overdispersi. Hasil estimasi parameter dalam ZIP akan menjadi bias ketika terjadi overdispersi pada data cacah yang mengalami *excess zero*. Ridout dkk (1998) mendapati bahwa untuk data tersebut, model *Zero Inflated Negative Binomial* (ZINB) memiliki performa yang lebih baik dibanding model ZIP. Meskipun demikian, Famoye dan Singh (2006) menyatakan bahwa kelemahan dari model ZINB adalah bahwa teknik iterasi yang digunakan untuk estimasi parameter pada model ZINB seringkali gagal menuju konvergen. Oleh karena itu, Famoye dan Singh (2006) menyarankan penggunaan model *Zero Inflated Generalized Poisson* (ZIGP) sebagai alternatif dari model ZINB. Rahayuning dan Purhadi (2020) mengaplikasikan model ZIGP pada data kesehatan. Penelitian tersebut mendapatkan hasil ZIGP cocok untuk diaplikasikan pada kasus overdispersi yang diakibatkan banyaknya nilai nol yang terkandung dari data.

Jumlah kasus HIV dan AIDS merupakan salah satu contoh data cacahan pada bidang kesehatan. HIV (*Human Immunodeficiency Virus*) merupakan virus yang menyerang atau menginfeksi sel darah putih dan menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia. Menurut Kemenkes RI Tahun 2014 AIDS (*Acquired Immune Deficiency Syndrome*) merupakan sekumpulan jenis penyakit yang timbul karena turunnya kekebalan tubuh yang disebabkan infeksi oleh HIV. HIV dan AIDS ini sudah menjadi epidemi di seluruh dunia karena tidak ada obat yang dapat menyembuhkan penderitanya. Selain itu, gejala penyakit ini tidak terlihat dan perjalanan penyakit ini memerlukan waktu yang relative Panjang. Penyebaran HIV dan AIDS di Indonesia sendiri berawal karena adanya Pekerja Seks Komersial (PSK) dan kaum homoseksual. PSK yang berganti-ganti pasangan menyebabkan timbulnya HIV dan AIDS dengan cara menyebarkan dari satu pelanggan ke pelanggan yang lain. Selain itu, bayi-bayi yang baru lahir juga terjangkit penyakit ini karena dilahirkan dari ibu yang juga terjangkit HIV dan AIDS. Belakangan ini juga ditemukan penyebab utama penyebaran HIV dan AIDS juga disebabkan oleh orang yang heteroseksual dan pengguna Narkotika, Psikotropika, dan Zat Adiktif lainnya (NAPZA) melalui jarum suntik. Meluasnya penyakit HIV dan AIDS ini



memberikan dampak buruk pada pembangunan secara nasional karena sebagian besar penderita HIV dan AIDS masih berusia produktif. Dampak buruk ini tidak hanya dirasakan di bidang kesehatan, tetapi juga di bidang sosial ekonomi.

Tiga peringkat tertinggi jumlah infeksi HIV yang terjadi di Indonesia dari tahun 1987 sampai tahun 2014 yaitu pada Provinsi DKI Jakarta (32.782 jiwa), Jawa timur (19.249 jiwa) dan Papua (16.051 jiwa). Berbeda halnya dengan HIV, tiga peringkat tertinggi jumlah infeksi AIDS yaitu pada Provinsi Papua (10.184 jiwa), Jawa timur (8.976 jiwa), dan DKI Jakarta (7.477 jiwa) (Dinkes Jatim, 2014). Tahun 2019 jumlah kasus HIV dan AIDS sebanyak 8885 jiwa, jumlah tersebut meningkat dari tahun sebelumnya. Besarnya jumlah infeksi HIV dan AIDS di Jawa timur yang sangat tinggi perlu menjadi perhatian. HIV dan AIDS masih menjadi permasalahan yang harus diselesaikan di berbagai daerah, termasuk Kabupaten Trenggalek dan Kabupaten Ponorogo. Berbagai penanganan untuk mencegah penyebaran virus ini telah dilakukan oleh dinas kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo, di antaranya memberikan penyuluhan kepada masyarakat dan populasi kunci (waria) serta eks lokalisasi. Namun, penyebaran penyakit ini tetap berlanjut di kedua kabupaten tersebut. Oleh karena itu, perlu mengetahui faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo untuk mencegah timbulnya penyakit tersebut serta penularannya. Data jumlah kasus baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 berdistribusi Poisson (Pangulimang, 2016). Selain itu, data tersebut mengalami overdispersi yang sangat tinggi karena mengandung banyak nilai nol (Umami, 2015), sehingga model regresi Poisson biasa tidak dapat menyelesaikan kasus ini. Pengembangan model regresi Poisson perlu dilakukan untuk mengatasi overdispersi yang tinggi. Salah satu pengembangan model regresi Poisson adalah model regresi Poisson inverse Gaussian (PIG). Penelitian terhadap model regresi PIG telah dilakukan oleh Widiari (2016). Penelitian tersebut menggunakan satu respon, yaitu jumlah kasus baru HIV di Jawa Timur. Lalu, penelitian tersebut dikembangkan lagi menjadi model regresi Geographically Weighted Poisson Inverse Gaussian oleh Purnamasari (2016).

Penelitian mengenai data cacahan menggunakan data jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012 pernah dilakukan oleh

Umami (2015) menggunakan metode BZIPR dengan iterasi numerik *Newton-Raphson* mendapatkan nilai AICc sebesar 340,6977 dengan hasil bahwa kasus HIV didominasi oleh kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk yang berpendidikan rendah, dan persentase penduduk yang menggunakan kondom. Kasus AIDS dipengaruhi oleh persentase penduduk yang memiliki pendidikan yang rendah, dan kelompok umur 25-29. Pangulimang (2016) menggunakan metode GWBZIPR dengan iterasi numerik *Newton-Raphson* mendapatkan nilai AICc sebesar 320,3074 dengan hasil bahwa kasus HIV sebagian besar dipengaruhi oleh persentase penduduk yang memiliki pengetahuan sendah (SMA), persentase penduduk yang memakai kondom dan persentase kegiatan penyuluhan kesehatan. Kasus AIDS sebagian besar dipengaruhi oleh persentase jamkesmas. Wijaya (2017) menggunakan metode BPIG dengan iterasi numerik *Newton-Raphson* mendapatkan nilai AICc 910,2177 dengan hasil bahwa kasus HIV dan AIDS dipengaruhi oleh persentase penduduk berusia 25-29 tahun, persentase penduduk dengan tingkat pendidikan rendah, persentase PUS yang menggunakan kondom, persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan, dan persentase penduduk yang mendapatkan jaminan kesehatan masyarakat. Sehingga dalam penelitian ini akan dikembangkan model pada data cacahan bivariat yang mengandung nilai nol untuk kasus HIV dan AIDS hampir 50% dengan model *Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression* (BZIPIGR) dengan iterasi numerik BHHH.

## 1.2. Perumusan Masalah

Analisis regresi *Poisson* yang terdiri atas dua respon dan beberapa variabel prediktor disebut regresi *bivariate Poisson*. Dua respon pada model regresi *bivariate Poisson* merupakan data cacahan yang berdistribusi *Poisson*. Data mengenai jumlah kasus HIV dan AIDS merupakan data *count* yang berpotensi terjadi overdispersi sehingga untuk pemodelannya menggunakan *Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (BPIG). Dalam kenyataannya, terdapat banyak kasus data cacahan yang mengandung banyak nilai nol pada responnya, seperti kasus penyakit HIV dan AIDS pada data tingkat Kecamatan. Oleh karena itu, dikembangkanlah suatu model data cacahan bivariat, yaitu model BZIPIGR.

Penelitian ini menggunakan metode iterasi *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH) untuk mengatasi masalah penaksiran parameter. Kelebihan dari iterasi numerik *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH) yaitu hanya menggunakan turunan pertama dari fungsi *ln likelihood*. Berdasarkan hal tersebut, maka permasalahan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana bentuk penaksir parameter model BZIPIGR?
2. Bagaimana bentuk statistik uji hipotesis model BZIPIGR?
3. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo melalui model BZIPIGR?

### **1.3. Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin di capai dalam penelitian ini adalah.

1. Mendapatkan penaksir parameter model BZIPIGR.
2. Mendapatkan statistik uji model BZIPIGR.
3. Menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo berdasarkan model BZIPIGR.

### **1.4. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai pengembangan metode statistik khususnya penaksiran parameter dan statistik uji model BZIPIGR. Bagi masyarakat, untuk mengetahui faktor-faktor yang berhubungan dengan penyakit HIV dan AIDS dan berpotensi dalam meningkatkan penyebarannya sehingga dapat menjadi bentuk peringatan dini agar lebih waspada dan berhati-hati supaya tidak tertular penyakit tersebut.

### **1.5. Batasan Masalah**

Adapun batasan batasan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini dibatasi hanya pada jumlah kasus HIV dan AIDS di kecamatan yang berada di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012. Jumlah

kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo saling berkorelasi dan berdistribusi Bivariat Poisson.

2. Menggunakan data yang memiliki jumlah kasus HIV dan AIDS atau tidak memiliki kasus HIV atau AIDS.
3. Penaksiran parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan penentuan statistik uji menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi fungsi peluang diskrit yang menyatakan jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu apabila rata-rata kejadian tersebut diketahui dan dalam waktu yang saling bebas sejak kejadian terakhir. Distribusi Poisson juga dapat digunakan untuk jumlah kejadian pada interval tertentu seperti jarak, luas, atau volume. Distribusi poisson merupakan model patokan (*benchmark*) bagi data cacahan (Cameron dan Trivedi, 1998).

Fungsi peluang untuk data berdistribusi Poisson bergantung pada parameter tunggal, yaitu rataan  $\mu$ . Fungsi peluangnya adalah sebagai berikut.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} & , y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dalam distribusi Poisson, rataan dan *varians* adalah bernilai sama dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$E(Y) = Var(Y) = \mu.$$

Karena nilai ekspektasi (*mean*) dan variasi adalah  $\mu$ , maka asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi poisson adalah *mean* dan variasi dari variabel respon bernilai sama.

#### 2.2. Equidispersi

Regresi Poisson terdapat asumsi yang harus terpenuhi yaitu nilai *mean* dan *variance* respon harus sama (*equidispersion*). Namun pada kenyataannya sering di temukan pelanggaran asumsi yaitu overdispersi. Overdispersi pada regresi Poisson terjadi ketika varians dari respons lebih besar dari rata-rata. Overdispersi disebabkan oleh korelasi positif atau kelebihan variasi antara peluang respon. Overdispersi juga muncul ketika terjadi pelanggaran pada asumsi distribusi data, misal ketika data dikelompokkan sehingga melanggar asumsi observasi dari kebebasan likelihood (Hilbe, 2007). Overdispersi dapat menyebabkan terjadinya

kesalahan dalam interpretasi model karena overdispersi yang terabaikan akan menghasilkan nilai *standar error* yang *underestimate*. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mendeteksi equidispersi pada respon yang akan diteliti dengan melihat nilai dari *The variance test* (VT), seperti pada persamaan 2.1.

$$VT = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} \quad (2.1)$$

Nilai ini sama dengan rasio varians terhadap rata-rata (*variance-to-mean ratio*), dimana seringkali disebut sebagai indeks dispersi, dikalikan dengan  $n-1$ , dimana  $n$  adalah ukuran sampel. Bila nilai indeks dispersi kurang dari 1 maka dapat dikatakan terjadi underdispersi, sebaliknya overdispersi terjadi bila nilai indeks dispersi lebih dari 1 (Karlis dan Xekalaki, 2000).

### 2.3. Poisson Inverse Gaussian Regression (PIGR) Univariat

Distribusi *inverse gaussian* merupakan distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan mirip dengan distribusi gamma tapi dengan kemencengan lebih besar dan keruncingan tajam. Distribusi PIG merupakan salah satu distribusi *mixed poisson* yang terdiri atas dua parameter, yaitu  $\mu$  (rata-rata) sebagai parameter lokasi dan  $\tau$  (parameter dispersi) sebagai parameter bentuk. Misalkan  $Y$  adalah respon yang berdistribusi PIG. Fungsi kepadatan peluang bagi  $Y$  sebagai berikut.

$$f(y; \mu, \tau) = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu^y e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z)}{(z\tau)^y y!}, \quad y \geq 0$$

dengan

$$s = y - \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad z = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\mu}{\tau}}$$

$$K_s(z) = K_{y-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{(2\mu\tau+1)}\right)$$

Nilai harapan dari distribusi PIG adalah  $E(Y) = E\{E(Y | \mu\nu)\} = E(\mu\nu) = \mu$ .

Nilai varians untuk distribusi PIG adalah  $Var(Y) = Var\{E(Y | \mu\nu)\} + E\{Var(Y | \mu\nu)\} = \mu + \tau\mu^2$ .  $Y$  merupakan sejumlah

kejadian pada suatu unit observasi dalam suatu kurun waktu tertentu dan  $\mu$  adalah rata-rata kejadian tersebut. Sementara  $\tau$  merupakan parameter overdispersi dan sama dengan  $Var(v)$ , yang disebabkan karena terdapatnya heterogenitas atau keragaman yang berkaitan dengan unit observasi dengan karakter tertentu (Dean, Lawless dan Willmot, 1989a).

Misalkan  $Y_i$  adalah respon untuk pengamatan ke- $i$  dan  $\mathbf{x}_i^T = [1 \ x_{1i} \ x_{2i} \ \dots \ x_{pi}]^T$  adalah vektor penjelas untuk pengamatan ke- $i$  yang berdimensi  $(k+1) \times 1$ . Model Regresi PIG seperti berikut.

$$\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \text{ atau } \ln(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta},$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k]^T,$$

#### 2.4. Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression (BPIGR)

Distribusi *Bivariate Poisson Inverse Gaussian* (BPIG) memiliki dua variabel cacahan yang saling berkorelasi. Misalkan ada dua variabel random yang berdistribusi Poisson dan saling bebas  $Y_1$  dan  $Y_2$ , yang memiliki *mean* masing-masing  $v\mu_1$  dan  $v\mu_2$  dan varians  $Var(Y_1) = \mu_1 + \mu_1^2\tau$  dan  $Var(Y_2) = \mu_2 + \mu_2^2\tau$ . Variabel  $v$  merupakan variabel random yang berdistribusi *inverse Gaussian*. Hal tersebut menunjukkan bahwa  $Y_1$  dan  $Y_2$  berdistribusi *mixed Poisson*, yaitu *Poisson Inverse Gaussian*. Distribusi ini dapat mengatasi terjadinya overdispersi. Fungsi massa peluang bersama untuk  $Y_1$  dan  $Y_2$  seperti pada persamaan 2.2 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2; \mu_1, \mu_2, \tau) &= \int_0^\infty \prod_{h=1}^2 f(y_h; \mu_h, v) g(v; \tau) dv \\ &= \int_0^\infty \prod_{h=1}^2 \frac{e^{(-v\mu_h)} (v\mu_h)^{y_j}}{y_h!} g(v; \tau) dv \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan  $g(v; \tau)$  adalah fungsi kepadatan peluang untuk  $v$ .

Model BPIG didasarkan pada distribusi campuran *inverse Gaussian* yang memiliki fungsi kepadatan peluang. Berdasarkan persamaan (2.2), distribusi BPIG memiliki fungsi kepadatan bersama sebagai berikut.

$$f(y_1, y_2; \mu_1, \mu_2, \tau) = \left( \frac{2z}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_1^{y_1} \mu_2^{y_2} e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z)}{(z\tau)^{y_1+y_2} y_1! y_2!}$$

dengan

$$s = y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad z = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{2(\mu_1 + \mu_2)}{\tau}},$$

$$\text{sehingga } K_s(z) = K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\tau} \sqrt{1 + 2\tau(\mu_1 + \mu_2)} \right)$$

BPIGR merupakan model regresi dengan dua respon yang berkorelasi. Misalkan  $y_{ih}$  adalah respon ke- $h$  untuk pengamatan ke- $i$  dan diberikan sampel random  $(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim BPIG(\mu_{hi}, \tau)$  dimana  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $h = 1, 2$ . Maka model BPIGR dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\ln[E(Y_{ih})] = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h$$

$$E(Y_{ih}) = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h),$$

dengan.

$$\mathbf{x}_i = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{pi}]^T \text{ adalah vektor variabel pada pengamatan ke-}i$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

$\boldsymbol{\beta}_h = [\beta_{h0} \quad \beta_{h1} \quad \beta_{h2} \quad \dots \quad \beta_{hp}]^T$  adalah vektor koefisien regresi yang berdimensi  $(p + 1) \times 1$  pada respon ke- $h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ).

#### 2.4.1. Penaksir Parameter Model *Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (BPIGR)

Menurut Wijaya (2017), metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk menaksir parameter model BPIGR dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Terdapat dua parameter yang akan diduga yaitu  $\boldsymbol{\beta}_h$  dan  $\tau$ . Fungsi *likelihood* model BPIGR dibentuk berdasarkan fungsi kepadatan peluang bersama  $Y_1$  dan  $Y_2$ , jika didapatkan persamaan yang tidak eksplisit maka dilanjutkan dengan algoritma *Newton-Raphson*. Berikut merupakan langkah-langkah secara terperinci.

##### 1. Membuat fungsi *likelihood*

Fungsi kepadatan peluang distribusi BPIG adalah sebagai berikut.



$$f(y_h; \boldsymbol{\beta}_h, \tau, h=1, 2) = e^{\frac{1}{\tau}} K_s(z) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_h \right)^{-\frac{\left( \sum_{h=1}^2 y_h - 1 \right)}{4}} \prod_{h=1}^2 \frac{\mu_h^{y_h}}{y_h!}, \quad (2.3)$$

dimana  $s = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}$  dan  $z = \frac{1}{\tau} \left( 1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_h \right)^{\frac{1}{2}}$  sehingga

$$K_s(z(u, v)) = K_{y_1 + y_2 - \frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\tau} \left( 1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_h \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Fungsi *likelihood* sebagai berikut.

$$f(\boldsymbol{\beta}_h; \tau; h=1, 2) = e^{\frac{n}{\tau}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1}{\tau} \right)^{\frac{n}{2}} K_s(z) \left( 1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h} \right)^{-\frac{\left( \sum_{h=1}^2 y_{ih} - 1 \right)}{4}} \prod_{h=1}^2 \frac{e^{y_{ih} \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h}}{y_{ih}!} \quad (2.4)$$

2. Membuat log natural (ln) dari fungsi *likelihood* pada persamaan (2.4)

$$l(\boldsymbol{\beta}_h, \tau) = \ln L(\boldsymbol{\beta}_h, \tau, h=1, 2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{\tau} - \frac{n}{2} \ln \tau + \frac{n}{2} \ln \left( \frac{2}{\pi} \right) + \sum_{i=1}^n \ln K_{s_i}(z_i) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sum_{h=1}^2 y_{ih} - 1}{4} \right) \ln \left( 1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^2 y_{ih} \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h - \ln \left( \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^2 y_{ih}! \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Mencari turunan pertama dari ln fungsi *likelihood* pada persamaan (2.5) terhadap parameter  $\boldsymbol{\beta}_h$  dan  $\tau$ .

$$\boldsymbol{\theta} = \left[ \boldsymbol{\beta}_1^T \quad \boldsymbol{\beta}_2^T \quad \tau \right]^T$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap  $\boldsymbol{\beta}_1$  adalah

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^n (y_{i1} - M(y_i) \mu_{i1}) \mathbf{x}_i^T$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap  $\boldsymbol{\beta}_2$  adalah

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^n (y_{i2} - M(y_i) \mu_{i2}) \mathbf{x}_i^T$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap  $\tau$  adalah

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \frac{M(y_i) \left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) - 1}{\tau^2} - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^2 \frac{y_{ih}}{\tau}$$

$$\text{dimana } M(y_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}}} \frac{K_{\sum_{h=1}^2 y_{ih} + \frac{1}{2}}(z_i)}{K_{\sum_{h=1}^2 y_{ih} - \frac{1}{2}}(z_i)}$$

Turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap  $\boldsymbol{\beta}_h$  dan  $\tau$  membentuk persamaan yang tidak eksplisit. Sehingga dibutuhkan turunan kedua, seperti berikut.

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_1$  adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^n \mu_{i1} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \left( M(y_i) - \frac{\mu_{i1} \left[1 + \tau M(y_i) \left(1 + 2 \sum_{h=1}^2 y_{ih}\right)\right]}{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}} - \mu_{i1} M^2(y_i) \right)$$

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_1^T$  dan  $\boldsymbol{\beta}_2$  adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^n \mu_{i1} \mu_{i2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \left( \frac{\left[1 + \tau M(y_i) \left(1 + 2 \sum_{h=1}^2 y_{ih}\right)\right]}{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}} - M^2(y_i) \right)$$

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_2$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T \partial \boldsymbol{\beta}_2} &= - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \mu_{i2} M(y_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right] \mathbf{x}_i^T \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_{i2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \left( M(y_i) - \frac{\mu_{i2} \left[1 + \tau M(y_i) \left(1 + 2 \sum_{h=1}^2 y_{ih}\right)\right]}{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}} - \mu_{i2} M^2(y_i) \right) \end{aligned}$$

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_1$  dan  $\tau$  adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \mu_{i1} \mathbf{x}_i \left( \tau M(y_i) - \frac{\left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) \left[1 + \tau M(y_i) \left(1 + 2 \sum_{h=1}^2 y_{ih}\right)\right]}{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}} \right) - M^2(y_i) \left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right)$$

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\boldsymbol{\beta}_2$  dan  $\tau$  adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \tau} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n \mu_{i2} \mathbf{x}_i \left( \begin{array}{c} \tau M(y_i) - \frac{\left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) \left[1 + \tau M(y_i) \left(1 + 2 \sum_{h=1}^2 y_{ih}\right)\right]}{1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}} \\ -M^2(y_i) \left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) \end{array} \right)$$

Turunan kedua  $l(\boldsymbol{\theta})$  terhadap  $\tau$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau^2} = & \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right)}{\tau^4 \left(1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right)} \left\{ \tau^2 M(y_i) \left(\sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) \right\} + \right. \\ & \left. - \left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) \left[ 1 - M^2(y_i) \left(1 + 2\tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right) + 2\tau M(y_i) \left(\sum_{h=1}^2 y_{ih}\right) \right] \right. \\ & \left. \left[ \frac{\tau^2 M(y_i) \left(\sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right)}{\tau^4} - \frac{2M(y_i) \left(1 + \tau \sum_{h=1}^2 \mu_{ih}\right)}{\tau^3} + \frac{2}{\tau^3} + \sum_{h=1}^2 \frac{y_{ih}}{\tau^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Turunan pertama fungsi  $\ln$  *likelihood* merupakan fungsi yang tidak eksplisit. Salah satu solusi untuk menduga parameter dengan algoritma iterasi *Newton-Raphson*. Algoritma *Newton-Raphson* dilakukan dengan menggunakan persamaan.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) \quad (2.6)$$

dimana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \tau]^T$$

$$\mathbf{g}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = \left[ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau} \right]_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}}$$

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \tau} \\ & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \tau} \\ \text{Simetris} & & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \tau^2} \end{array} \right]_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}}$$

Adapun langkah-langkah penaksiran parameter dengan algoritma iterasi *Newton-Raphson* sebagai berikut.

- a. Tentukan nilai awalan (*initial value*) untuk parameter  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)} = [\boldsymbol{\beta}_{1(0)}^T \quad \boldsymbol{\beta}_{2(0)}^T \quad \tau_{(0)}]^T$

Dengan menggunakan fungsi massa peluang distribusi univariat Poisson inverse Gaussian, yaitu.

$$\mu_j = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_h) \text{ dengan } \mu_{j(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ih}}{n}$$

- b. Tentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$  dengan menggunakan turunan pertama fungsi *ln likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$
- c. Masukkan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$  dengan menggunakan turunan kedua fungsi *ln likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga  $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$
- d. Masukkan nilai  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$  ke dalam elemen-elemen vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$  sehingga diperoleh vektor  $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$  dan matriks  $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$
- e. Melakukan iterasi mulai dari  $m=0$  pada persamaan (2.6)
- f. Nilai  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$  merupakan kumpulan penaksiran parameter yang konvergen saat iterasi ke-  $m$
- g. Jika penaksiran parameter belum konvergen maka kembali ke Langkah e. Iterasi akan berhenti jika nilai  $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\| \leq \varepsilon$ , dengan  $\varepsilon$  merupakan suatu nilai yang sangat kecil

#### 2.4.2. Pengujian Hipotesis Model *Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression* (BPIGR)

Pengujian hipotesis model regresi BPIG dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0: \beta_{h1} = \beta_{h2} = \dots = \beta_{hp} = 0$  dengan  $h = 1, 2$

$H_1$ : paling sedikit ada satu  $\beta_{hp} \neq 0$  dengan  $h = 1, 2; k = 1, 2, \dots, p$  dan  $\tau \neq 0$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$G^2 = -2 \ln \left( \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = 2 \left( \ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega}) \right) \quad (2.7)$$

dengan  $L(\hat{\Omega})$  merupakan nilai *likelihood* untuk model lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan  $L(\hat{\omega})$  merupakan nilai *likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Kriteria daerah penolakan  $H_0$  jika nilai  $G^2 > \chi_{\alpha, \nu}^2$  dengan  $\nu$  adalah derajat bebas yang diperoleh dari jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah  $H_0$ .

Apabila didapatkan keputusan saat pengujian serentak berupa tolak  $H_0$  maka selanjutnya melakukan pengujian pada parameter secara parsial untuk mengetahui mana saja parameter yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan yaitu.

1) Pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter  $\beta_h$

Menurut Wijaya (2017), langkah-langkah untuk mendapatkan pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter  $\beta_h$  sebagai berikut.

a) Menentukan hipotesis

$$H_0 : \beta_{hk} = 0$$

$$H_1 : \beta_{hk} \neq 0 \text{ dengan } h = 1, 2 \text{ dan } k = 1, 2, \dots, p$$

b) Menentukan statistik uji

Statistik uji yang digunakan yaitu.

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{hk}}{se(\hat{\beta}_{hk})} \quad (2.8)$$

Nilai  $se(\hat{\beta}_{hk}) = \sqrt{\hat{v}\hat{a}r(\hat{\beta}_{hk})}$  di mana nilai  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\beta}_{hk})$  diperoleh dari elemen diagonal utama dari matriks varian kovarian dari persamaan berikut.

$$C\hat{o}v(\hat{\theta}) = -\hat{E}\left(H^{-1}(\hat{\theta})\right) = -H^{-1}(\hat{\theta})$$

Tolak  $H_0$  jika  $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$  dengan  $\alpha$  merupakan taraf signifikansi.

2) Pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter  $\tau$

Menurut Wijaya (2017), langkah-langkah untuk mendapatkan pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter  $\tau$  sebagai berikut.

a) Menentukan hipotesis

$$H_0 : \tau = 0$$

$$H_1 : \tau \neq 0$$

b) Menentukan statistik uji

Statistik uji yang digunakan yaitu.

$$Z = \frac{\hat{\tau}}{se(\hat{\tau})} \quad (2.9)$$

Nilai  $se(\hat{\tau}) = \sqrt{\hat{v}\hat{a}r(\hat{\tau})}$  di mana nilai  $\hat{v}\hat{a}r(\hat{\tau})$  diperoleh dari elemen diagonal utama dari matriks varian kovarian dari persamaan berikut.

$$C\hat{o}v(\hat{\theta}) = -\hat{E}\left(H^{-1}(\hat{\theta})\right) = -H^{-1}(\hat{\theta})$$

tolak  $H_0$  jika  $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$  dengan  $\alpha$  merupakan taraf signifikansi.

## 2.5. Zero Inflated Poisson Regression (ZIPR)

Model regresi ZIP adalah salah satu alternatif metode untuk menganalisis data pengamatan dengan banyak nilai nol pada respon. Banyaknya nilai nol pada data dapat mengakibatkan pelanggaran pada asumsi kesamaan *mean* dan *varians* pada distribusi Poisson. Fungsi peluang untuk  $Y$  adalah

$$P(Y = y) = \begin{cases} p + (1-p)\exp(-\mu) & , \text{ untuk } y = 0 \\ \frac{(1-p)\exp(-\mu) - \mu^y}{y!} & , \text{ untuk } y > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\mu = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) \quad (2.11)$$

$$p = \frac{\exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau})}{1 + \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau})} \text{ dan } (1-p) = \frac{1}{1 + \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau})} \quad (2.12)$$

dimana

$\boldsymbol{\beta}$  = vektor parameter regresi

$\boldsymbol{\tau}$  = vektor parameter regresi

$\mathbf{x}$  = vektor variabel prediktor berbeda yang berhubungan dengan peluang pada pengelompokan data yang bernilai 0 (*zero state*)  $y_i = 0$  dan *mean* distribusi poisson (*poisson state*)  $y_i > 0$

Substitusi persamaan (2.12) dan (2.11) ke persamaan (2.10) akan menghasilkan fungsi peluang regresi ZIP sebagai berikut.

$$P(Y_i = y_i) = \begin{cases} \frac{e^{\mathbf{x}_i^T \tau} + \left(\exp(-e^{\mathbf{x}_i^T \beta})\right)}{1 + e^{\mathbf{x}_i^T \tau}} & , \text{ untuk } y_i = 0 \\ \frac{1}{1 + e^{\mathbf{x}_i^T \tau}} \left(\exp(-e^{\mathbf{x}_i^T \beta})\right) \left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta}\right)^{y_i} \\ y_i! & , \text{ untuk } y_i > 0 \end{cases}$$

Nilai rata-rata dan varians  $Y_i$  adalah.

$$\begin{aligned} E(Y_i | \mathbf{x}_i) &= (1 - p_i) \mu_i(\mathbf{x}_i) \\ \text{Var}(Y_i | \mathbf{x}_i) &= (1 - p_i) [\mu_i^2 + \mu_i] - (1 - p_i)^2 \mu_i^2 \\ &= E(Y_i | \mathbf{x}_i) (1 + p_i \mu_i) \end{aligned}$$

Jika  $p$  dan  $\mu$  dipengaruhi oleh kovariat yang sama maka  $p$  merupakan fungsi dari  $\mu$ . Dalam aplikasinya, hanya ada sedikit informasi bagaimana  $p$  berhubungan dengan  $\mu$  sehingga natural parameterisasinya adalah (Lambert, 1992).

$$\ln(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \text{ dan } \text{logit}(p_i) = -\lambda \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

dimana  $\lambda$  adalah suatu ukuran parameter yang tidak diketahui yang menyiratkan bahwa  $p_i = (1 + \mu_i^\tau)^{-1}$ . Model ZIP untuk bentuk demikian dinotasikan sebagai  $ZIP(\lambda)$ . Fungsi peluang regresi ZIP univariat dengan *exposure* adalah sebagai berikut.

$$P(Y_i = y_i) = \begin{cases} \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \tau) + \left(\exp(-a_i \exp(x_i^T \beta))\right)}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \tau)} & , \text{ untuk } y_i = 0 \\ \frac{1}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \tau)} \left(\exp(-a_i \exp(x_i^T \beta))\right) \left(a_i \exp(x_i^T \beta)\right)^{y_i} \\ y_i! & , \text{ untuk } y_i > 0 \end{cases}$$

### 2.5.1. Penaksir Parameter Regresi *Univariate Zero Inflated Poisson*

Penaksiran parameter pada model regresi ZIP menggunakan metode MLE dengan fungsi kepadatan peluang  $Y_i$  diketahui (Lambert, 1992). Fungsi *likelihood* model regresi ZIP adalah.

$$L(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})} & y_i = 0 \\ \frac{1}{\prod_{i=1}^n \frac{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})}{y_i!} + (\exp(-\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) y_i)} & y_i > 0 \end{cases}$$

Fungsi ln likelihood

$$L(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})) & y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (-\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) y_i) - \sum_{i=1}^n (\ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}))) - \sum_{i=1}^n y_i! & y_i > 0 \end{cases}$$

$$L(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \ln(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})) + \sum_{i=1}^n (-\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) y_i) - \sum_{i=1}^n y_i! \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) disebut *incomplete likelihood* karena nilai nol pada suku pertama tidak diketahui yang mana berasal dari *zero state* dan *poisson state* sehingga persamaan (2.13) diselesaikan dengan mendefinisikan kembali variabel  $Y_i$  dengan suatu variabel indicator  $Z_i$  yaitu.

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{jika } y_i \text{ dari } zero \text{ state} \\ 0 & \text{jika } y_i \text{ dari } poisson \text{ state} \end{cases}$$

Jika  $y_i > 0$  maka nilai  $Z_i = 0$ . Tetapi jika  $y_i = 0$  maka nilai  $Z_i$  dapat bernilai 0 atau 1. Untuk mengatasinya, dapat menggunakan algoritma Ekspektasi Maksimalisasi (EM). Algoritma EM merupakan salah satu metode alternative iteratif untuk memaksimumkan fungsi *likelihood* dari data yang tidak lengkap (*missing*). Setiap iterasi algoritma EM melalui dua tahap yaitu tahap Ekspektasi dan tahap Maksimalisasi. Tahap Ekspektasi yaitu tahap penghitungan ekspektasi dari fungsi ln *likelihood* dengan memperhatikan data yang tidak lengkap. Tahap Maksimalisasi yaitu tahap penghitungan untuk mencari penaksir parameter yang memaksimumkan fungsi ln *likelihood* dari tahap Ekspektasi sebelumnya.



Estimasi parameter  $Z_i$  dilakukan dengan algoritma EM, namun sebelumnya

akan ditentukan distribusi dari  $Z_i$  yaitu.  $P(Z_i = z_i) = \begin{cases} \pi_i, & \text{jika } z_i = 0 \\ 1 - \pi_i, & \text{jika } z_i > 0 \end{cases}$

Pada saat  $z_i = 0$ , fungsi peluangnya sama dengan fungsi peluang  $Y_i$  yang berdistribusi *poisson* dengan parameter  $\pi_i$  yaitu sebesar  $(1 - \pi_i)$ . Sehingga dapat dikatakan bahwa variabel  $Z_i$  berdistribusi Binomial  $(1 - \pi_i)$  dengan  $E(Z_i) = \pi_i$  dan  $Var(Z_i) = \pi_i(1 - \pi_i)$ . Bentuk distribusi gabungan antara  $Y_i$  dan  $Z_i$  adalah

$$\begin{aligned} f(y, z | \pi, \mu) &= f(z) f(y | z) \\ &= f(z | 1, \pi) f(y | z, \pi) \\ &= (\pi_i)^{z_i} (1 - \pi_i)^{1 - z_i} \left( \frac{\mu_i^{y_i} \exp(-\mu_i)}{y_i!} \right)^{1 - z_i} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substitusikan persamaan (2.11) dan (2.12) ke persamaan (2.14)

$$f(y, z | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}) = \left( \frac{1}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})} \right) (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}))^{z_i} \left( \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{y_i}}{y_i!} \right)^{1 - z_i}$$

Bentuk fungsi *likelihood* dan *ln likelihood* dari distribusi  $f(y, z | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau})$  adalah

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau} | y, z) &= \prod_{i=1}^n \left[ \left( \frac{1}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})} \right) (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}))^{z_i} \left( \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) (z_i)^{y_i}}{y_i!} \right)^{1 - z_i} \right] \\ \ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, y, z) &= \sum_{i=1}^n (z_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau} - \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}))) - \sum_{i=1}^n (1 - z_i) \ln(y_i!) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (1 - z_i) (y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) disebut sebagai *completed likelihood*. Jika ditulis secara terpisah maka.

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, y, z) = \ln L(\boldsymbol{\beta}, y, z) + \ln L(\boldsymbol{\tau}, y, z) + \sum_{i=1}^n z_i \ln(y_i!) \text{ dimana}$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, y, z) = \sum_{i=1}^n (1 - z_i) (y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})) \quad (2.16)$$

dan

$$\ln L(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \left( z_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau} - \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})) \right) \quad (2.17)$$

Suku terakhir dari  $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  yaitu  $\sum_{i=1}^n z_i \ln(y_i!)$  dapat diabaikan karena tidak mengandung vektor parameter  $\boldsymbol{\tau}$  dan  $\boldsymbol{\beta}$ . Berikut ini adalah langkah-langkah dari algoritma EM.

1. Menghitung nilai ekspektasi dari  $Z_i$

$$E(Z_i | y_i, \boldsymbol{\tau}^{(m)}, \boldsymbol{\beta}^{(m)}) = Z_i^{(m)}$$

$$Z_i^{(m)} = P(Z_i = 1 | y_i, \boldsymbol{\tau}^{(m)}, \boldsymbol{\beta}^{(m)})$$

$$= \begin{cases} P(Z_i = 1 | y_i, \boldsymbol{\tau}^{(m)}, \boldsymbol{\beta}^{(m)}), & \text{untuk } y_i = 0 \\ 0 & , \text{ untuk } y_i > 0 \end{cases}$$

Selanjutnya substitusikan hasil ekspektasi tersebut pada persamaan (2.16) dan (2.17) sehingga menjadi.

$$\ln L(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{Z}^{(m)}) = \sum_{i=1}^n (1 - Z_i^{(m)}) (y_i \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \quad (2.18)$$

dan

$$\ln L(\boldsymbol{\tau} | \mathbf{y}, \mathbf{Z}^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \left( Z_i^{(m)} \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau} - \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})) \right) \quad (2.19)$$

2. Maksimalisasi  $\boldsymbol{\beta}$  dengan metode iterasi Newton-Raphson untuk memperoleh  $\boldsymbol{\beta}^{(m+1)}$  yang memaksimalkan persamaan (2.18). Vektor gradien ( $g$ ) dan matriks Hessian ( $H$ ) yaitu

$$g^{T(m)} = \mathbf{X}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{T} \mathbf{X}$$

$\mathbf{S}^{(m)}$  adalah matriks diagonal dengan  $(1 - Z_i^{(m)})$  sebagai elemen diagonal utama dan  $\mathbf{T}$  adalah matriks diagonal dengan  $\mu$  sebagai diagonal utamanya.

3. Memaksimalisasi  $\boldsymbol{\tau}$  pada persamaan (2.19), dimana untuk setiap  $y_i > 0$  nilai  $Z_i^{(m)} = 0$  sehingga menjadi.

$$\ln L(\boldsymbol{\tau} | \mathbf{y}, \mathbf{Z}^{(m)}) = \sum_{y_i=0}^{n_0} Z_i^{(m)} \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau} - \sum_{y_i=0}^{n_0} Z_i^{(m)} \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau})) - \sum_{y_i=0}^{n_0} (1 - Z_i^{(m)}) \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\tau}))$$

Misalkan  $y_i$  sampai dengan  $y_{n_0}$  adalah 0 atau dapat ditulis  $y_1, y_2, \dots, y_{n_0} = 0$

kemudian didefinisikan matriks diagonal  $\mathbf{V}^{(m)}$  dengan elemen diagonal utama.

$$\mathbf{V}_*^T = (1 - Z_1^{(m)}, 1 - Z_2^{(m)}, \dots, 1 - Z_{n+1}^{(m)}, 1 - Z_{n+n_0}^{(m)})$$

Didefinisikan juga

$$\mathbf{y}_*^T = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+n_0})$$

$$\mathbf{x}_*^T = (1, x_1^T, x_2^T, \dots, x_k^T)$$

$$\boldsymbol{\pi}_*^T = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}, \pi_{n+n_0})$$

$\mathbf{x}_*^T$  berukuran  $(p+1)$  sehingga persamaannya dapat ditulis sebagai berikut.

$$\ln L(\boldsymbol{\tau} | \mathbf{y}, \mathbf{Z}^{(m)}) = \sum_{i=1}^{n+n_0} y_{*i} v_{*i}^{(m)} \mathbf{x}_{*i}^T \boldsymbol{\tau} - \sum_{i=1}^{n+n_0} v_{*i}^{(m)} \ln(1 + \exp(\mathbf{x}_{*i}^T \boldsymbol{\tau}))$$

Vektor gradient ( $\mathbf{g}$ ) dan matriks ( $\mathbf{H}$ ) yaitu.

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} (\mathbf{y}_* - \boldsymbol{\pi}_*) \text{ dan}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}_*^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{Q}_* \mathbf{X}_*$$

Dimana  $\mathbf{Q}_*$  adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal utamanya

$\pi_i(1 - \pi_i)$ . Langkah-langkah untuk memperoleh  $\boldsymbol{\tau}^{(m+1)}$  ini identik dengan

metode iteratif Newton-Raphson, seperti yang dilakukan pada langkah untuk

memaksimalkan  $\boldsymbol{\beta}$  dengan  $\mathbf{y}_*$  sebagai respon  $\mathbf{X}_*$  sebagai matriks variabel, dan

$\mathbf{V}^{(m)}$  sebagai matriks pembobot.

4. Mengganti  $\boldsymbol{\beta}$  dan  $\boldsymbol{\tau}$  dengan  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)}$  dan  $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(m+1)}$ , kemudian lakukan kembali langkah tahap 1 (tahap Ekspektasi)
5. Tahap Ekspektasi dan Maksimalisasi dilakukan secara terus menerus hingga memperoleh penaksir parameter yang konvergen.

### 2.5.2. Pengujian Hipotesis Regresi *Univariate Zero Inflated Poisson*

Pengujian hipotesis pada regresi ZIP dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) sebagai berikut.

#### 1. Pengujian serentak parameter $\beta$ dan $\tau$

Parameter yang diuji pada pengujian serentak ini mencakup seluruh parameter  $\beta$  dan  $\tau$  secara bersama-sama dengan hipotesis.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_k \neq 0 \text{ atau } \tau_k \neq 0 \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji yang digunakan adalah ukuran statistik *likelihood ratio* (devians) yang dibentuk dengan menentukan himpunan parameter di bawah populasi ( $\Omega$ ) yaitu  $\Omega = \{\beta, \tau\}$  dan himpunan parameter di bawah  $H_0$  benar ( $\omega$ ) yaitu  $\omega = \{\beta_0, \tau_0\}$ . Kemudian pada himpunan parameter di bawah populasi, dibentuk fungsi *likelihood* untuk model penuh (*saturated*) yang melibatkan seluruh variabel prediktor. Himpunan parameter dibawah  $H_0$  benar, dibentuk fungsi *likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor. Kedua fungsi *likelihood*  $L(\Omega)$  dan  $L(\omega)$  adalah

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n \left[ \left( \frac{1}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \tau)} \right) \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \tau) \right)^{z_i} \left( \frac{\exp(-\mathbf{x}_i^T \beta) (\exp(\mathbf{x}_i^T \beta))^{y_i}}{y_i!} \right)^{1-z_i} \right]$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n \left[ \left( \frac{1}{1 + \exp(\tau_0)} \right) \left( \exp(\tau_0) \right)^{z_i} \left( \frac{\exp(-\beta_0) (\exp(\beta_0))^{y_i}}{y_i!} \right)^{1-z_i} \right]$$

$\hat{\beta}$  dan  $\hat{\tau}$  yang merupakan hasil estimasi parameter pada sub bab 2.5.1 dan  $\hat{\beta}_0$  yaitu elemen ke-dari  $\hat{\beta}_m$  disubstitusikan pada kedua fungsi *likelihood* tersebut dan dibandingkan dalam bentuk devians berikut

$$D = -2 \ln \left[ \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right]$$

Statistik  $D$  berdistribusi  $\chi^2_{(\alpha, \nu)}$  sehingga pada taraf signifikansi  $\alpha$  tolak  $H_0$  jika nilai  $D > \chi^2_{(\alpha, \nu)}$  dimana  $\nu$  adalah jumlah parameter dibawah populasi dikurangi jumlah parameter dibawah  $H_0$

## 2. Pengujian parsial $\beta$

Parameter yang diuji mencakup seluruh  $\beta$  secara parsial dengan hipotesis.

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0 \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji yang digunakan adalah ukuran statistik *likelihood ratio* (devians) yang dibentuk dengan menentukan himpunan parameter dibawah populasi ( $\Omega$ ) yaitu  $\Omega = \{\beta, \tau\}$  dan himpunan parameter di bawah  $H_0$  benar ( $\omega$ ) yaitu  $\omega = \{\beta^*, \tau\}$ ,  $\beta^*$  adalah  $\beta$  dengan  $\beta_k = 0$ .

Selanjutnya  $\hat{\beta}$  dan  $\hat{\tau}$  yang merupakan hasil estimasi parameter pada sub bab 2.5.1 disubstitusikan pada kedua fungsi *likelihood* tersebut serta dibandingkan dalam bentuk devians  $D$

Dimana  $D$  berdistribusi  $\chi^2_{(1)}$  sehingga pada taraf signifikansi  $\alpha$  tolak  $H_0$  jika nilai  $D > \chi^2_{(1, \alpha)}$ .

## 3. Pengujian parsial $\tau$

Parameter yang diuji mencakup seluruh  $\tau$  secara parsial dengan hipotesis.

$$H_0 : \tau_k = 0$$

$$H_1 : \tau_k \neq 0 \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, p$$

Statistik uji yang digunakan adalah ukuran statistik *likelihood ratio* (devians) yang dibentuk dengan menentukan himpunan parameter dibawah populasi ( $\Omega$ ) yaitu  $\Omega = \{\beta, \tau\}$  dan himpunan parameter di bawah  $H_0$  benar ( $\omega$ ) yaitu  $\omega = \{\beta, \tau^*\}$ ,  $\tau^*$  adalah  $\tau$  dengan  $\tau_k = 0$ .

Selanjutnya  $\hat{\beta}$  dan  $\hat{\tau}$  yang merupakan hasil estimasi parameter pada sub bab 2.2.2 disubstitusikan pada kedua fungsi *likelihood* tersebut serta dibandingkan dalam bentuk devians  $D$

Dimana devians  $D$  berdistribusi  $\chi^2_{(1)}$  sehingga pada taraf signifikansi  $\alpha$  tolak  $H_0$  jika nilai  $D > \chi^2_{(1,\alpha)}$ .

## 2.6. Bivariate Zero Inflated Poisson Regression (BZIPR)

Misalkan  $Y_1$  dan  $Y_2$  adalah variabel random berdistribusi bivariate poisson  $(Y_{1k}, Y_{2k}) \sim PB(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$  dengan fungsi peluang gabungannya adalah

$$P(Y_1, Y_2) = \begin{cases} p + (1-p)\exp(-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_0)) & y_1 = y_2 = 0 \\ (1-p) \sum_{j=0}^{\min(y_1, y_2)} \frac{\mu_1^{y_1-j} \mu_2^{y_2-j} \mu_0^j}{(y_1-j)!(y_2-j)!j!} \exp(-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_0)) & y_1 \neq 0, y_2 \neq 0 \end{cases}$$

dengan persamaan regresi sebagai berikut.

$$\mu_{hk} + \mu_0 = \exp(x_i^T \beta_h); h = 1, 2$$

Nilai rata-rata, varians dan kovarians dari BZIP adalah.

$$E(Y_l) = (1-p_l)(\mu_l + \mu_0)$$

$$\text{Var}(Y_l) = E(Y_l)[1 + p(\mu_l + \mu_0)], \quad l = 1, 2$$

$$E(Y_1, Y_2) = (1-p)[(\mu_1 + \mu_0)(\mu_2 + \mu_0) + \mu_0]$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = (1-p)[(\mu_0 + p(\mu_1 + \mu_0)(\mu_2 + \mu_0))]$$

Model regresi ZIP bivariat adalah sebagai berikut.

$$\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \beta) \quad p_i = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \theta)}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \theta)}$$

## 2.7. Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (ZIPIGR)

Jika  $Y=0$  dengan nilai peluang  $v$  dan  $Y=Y_1$  dengan nilai peluang  $(1-v)$ , dimana  $Y_1 \sim PIG(\mu, \tau)$ . Maka  $Y$  berdistribusi *Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian* yang dapat dituliskan menjadi  $Y_1 \sim ZIPIG(\mu, \tau, p)$  dengan fungsi peluang sebagai berikut.

$$P(Y = y | \mu, \tau, p) = \begin{cases} p + (1-p)P(Y = 0 | \mu, \tau) & ; \quad y = 0 \\ (1-p)P(Y = y | \mu, \tau) & ; \quad y = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Untuk  $\mu > 0$ ,  $\tau > 0$ , dan  $0 < p < 1$ , dimana  $Y_1 \sim \text{PIG}(\mu, \tau)$ . Mean dari Y diperoleh

$$E[Y] = (1-p)\mu$$

dan varians dari Y adalah

$$\text{Var}(Y) = p(1-p) + \mu^2(1-p)(\tau + p)$$

Model ZIPIGR dapat ditulis sebagai berikut.

$$p = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\theta})}{1 + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\theta})} \quad \mu = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$$

## 2.8. Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (BZIPIGR)

Misalkan  $Y_1$  dan  $Y_2$  adalah variabel random berdistribusi BZIPIGR dengan  $(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim \text{ZIBPIG}(\mu_1, \mu_2, \mu_0, p_1, p_2, \tau)$  dengan beberapa kombinasi sebagai berikut (Zhang dkk, 2015).

1. Jika  $y_1 = 0$  dan  $y_2 = 0$  maka  $P(Y_1 = 0, Y_2 = 0)$ .
 
$$= p_1 p_2 + p_1(1-p_2)P(Y_2 = 0) + p_2(1-p_1)P(Y_1 = 0) + (1-p_1)(1-p_2)P(Y_1 = 0, Y_2 = 0) \quad (2.20)$$

2. Jika  $y_1 = 0$  dan  $y_2 > 0$  maka  $P(Y_1 = 0, Y_2 = y_2)$ .
 
$$= p_1(1-p_2)P(Y_2 = y_2) + (1-p_1)(1-p_2)P(Y_1 = 0, Y_2 = y_2) \quad (2.21)$$

3. Jika  $y_1 > 0$  dan  $y_2 = 0$  maka  $P(Y_1 = y_1, Y_2 = 0)$ .
 
$$= p_2(1-p_1)P(Y_1 = y_1) + (1-p_1)(1-p_2)P(Y_1 = y_1, Y_2 = 0) \quad (2.22)$$

4. Jika  $y_1 > 0$  dan  $y_2 > 0$  maka  $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$ .
 
$$= (1-p_1)(1-p_2)P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \quad (2.23)$$

Persamaan (2.20) sampai persamaan (2.23) dapat ditulis sebagai berikut.

1. Jika  $y_1 = 0$  dan  $y_2 = 0$  maka  $P(Y_1 = 0, Y_2 = 0)$ .

$$\begin{aligned}
& p_2(\mathbf{x}_i)p_1(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau+1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau+1} \right) \\
& + p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\lambda_{1i}\tau+1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{1i}\tau+1} \right) \\
& + (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1} \right)
\end{aligned}$$

2. Jika  $y_1 = 0$  dan  $y_2 > 0$  maka  $P(Y_1 = 0, Y_2 = y_2)$ .

$$\begin{aligned}
& p_1(\mathbf{x}_i)(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{1+2\lambda_{2i}\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{2i}^{y_{2i}} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) K_{y_{2i}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{1+2\lambda_{2i}\tau}\right)}{\left(\sqrt{1+2\lambda_{2i}\tau}\right)^{y_{2i}} y_{2i}!} \\
& + (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{2i}^{y_{2i}} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) K_{y_{2i}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}\right)}{\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}^{y_{2i}} y_{2i}!}
\end{aligned}$$

3. Jika  $y_1 > 0$  dan  $y_2 = 0$  maka  $P(Y_1 = y_1, Y_2 = 0)$ .

$$\begin{aligned}
& p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\lambda\tau} \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) K_{y_{1i}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}}\right)}{\left(\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1}\right)^{y_{1i}} y_{1i}!} \\
& + (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) K_{y_{1i}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}\right)}{\left(\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}\right)^{y_{1i}} y_{1i}!}
\end{aligned}$$

4. Jika  $y_1 > 0$  dan  $y_2 > 0$  maka  $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$ .

$$(1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) e^{\frac{1}{\tau}} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}} \lambda_{2i}^{y_{2i}} \exp(\tau^{-1}) K_{y_{1i}+y_{2i}-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1} \right)}{\left(\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}\right)^{y_{1i}+y_{2i}} y_{1i}! y_{2i}!}$$

Model BZIPIGR dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} & 1 - p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \\
p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} & 1 - p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \\
\ln\left(\frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1-p_1(\mathbf{x}_i)}\right) &= -\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1 & \ln\left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1-p_2(\mathbf{x}_i)}\right) &= -\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2 \\
\lambda_{1i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) & \lambda_{2i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)
\end{aligned}$$



## 2.9. Uji Korelasi

Korelasi adalah metode statistik yang digunakan untuk mencari hubungan antara dua variabel atau lebih (Rantau, 2013). Salah satu cara untuk melihat hubungan diantara dua variabel adalah dengan melihat nilai koefisien korelasi, yaitu suatu nilai yang mengukur kekuatan hubungan antara dua variabel. Koefisien korelasi biasanya mengacu pada koefisien korelasi momen-produk *Pearson*, sesuai nama orang yang mengembangkannya yaitu *Pearson*. Koefisien korelasi *Pearson* digunakan untuk menghitung korelasi antar variabel kontinyu atau diskrit. Nilai koefisien korelasi *Pearson* berkisar diantara -1 sampai 1. Kedua variabel dikatakan memiliki hubungan yang erat bila nilai korelasi mendekati 1, baik itu positif maupun negatif. Namun bila nilai korelasi 0 menunjukkan bahwa kedua variabel tidak memiliki hubungan erat. Nilai korelasi yang positif menunjukkan adanya hubungan berbanding lurus diantara kedua variabel tersebut, sebaliknya hubungan yang berbanding terbalik terlihat dari nilai korelasi yang negatif (Triola, 2010).

Pengujian hipotesisnya sebagai berikut.

$$H_0 : \rho_{y_1, y_2} = 0$$

$$H_1 : \rho_{y_1, y_2} \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan adalah.

$$T = \frac{r_{y_1, y_2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{y_1, y_2})^2}}, \quad (2.24)$$

$$\text{dimana } r_{y_1, y_2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 \sum_{i=1}^n (y_{2i} - \bar{y}_2)^2}}.$$

Keputusan tolak  $H_0$  jika  $|t_{hitung}| > t_{\alpha/2; \nu}$ .

## 2.10. Multikolinearitas

Korelasi antara variabel-variabel prediktor pada pemodelan regresi disebut dengan multikolinearitas. Ini merupakan salah satu masalah dalam analisis regresi, karena bila beberapa prediktor berkorelasi maka akan sulit membedakan pengaruh dari masing-masing variabel. Korelasi antar variabel prediktor akan menyebabkan determinan matriks  $X^T X$  sama dengan nol sehingga invers matriks tersebut tidak ada dan pendugaan parameter tidak akan diperoleh. Akibatnya, proses penaksiran dalam model regresi Poisson tidak dapat dilakukan. Oleh karena itu identifikasi multikolinearitas dalam pemodelan regresi Poisson merupakan hal yang penting untuk dilakukan (Pangulimang, dkk., 2016).

Salah satu cara untuk mendeteksi terjadinya multikolinearitas adalah dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) (Gujarati, 2004), yaitu nilai yang menggambarkan kenaikan varians dari dugaan parameter antar variabel prediktor, dan dirumuskan dalam persamaan sebagai berikut.

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2}, \quad (2.25)$$

dimana  $R_j^2$  adalah koefisien determinasi antara  $x_j$  dengan variabel prediktor lainnya. Apabila nilai VIF lebih dari 10 maka dapat dikatakan terjadi multikolinearitas. Jika nilai VIF kurang dari 10 maka dapat dikatakan tidak terjadi multikolinearitas dan pemodelan regresi dapat dilanjutkan.

## 2.11. Kriteria Kebaikan Model

*Akaike Information Criterion Corrected* (AICc) digunakan apabila tujuan dari pemodelan regresi adalah untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model. Bentuk AICc untuk model regresi multivariat adalah sebagai berikut (Bedrick dan Tsai, 1994).

$$AICc = n \left( \log |\hat{\Sigma}| + q \right) + \frac{2n}{n - (m + q + 1)} (qm + 0,5q(q + 1)) \quad (2.27)$$

$n$  = banyaknya pengamatan

$q$  = banyaknya respon

$m$  = banyaknya variabel prediktor

AICc dapat digunakan sebagai kriteria perbandingan model. Semakin kecil nilai

AICc menandakan suatu model semakin baik

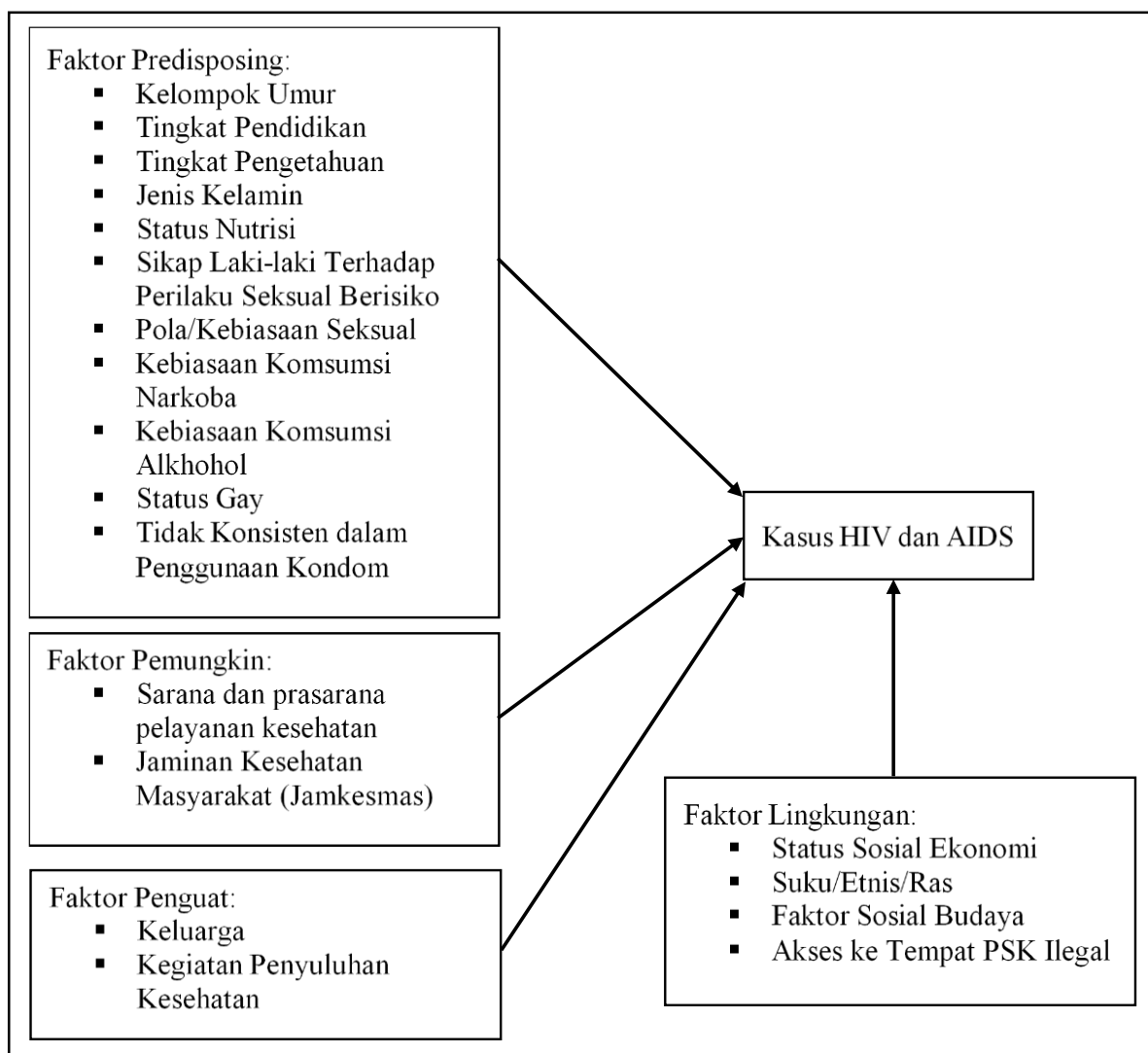
## **2.12. HIV dan AIDS serta Faktor yang Berpengaruh terhadap Jumlah Kasus HIV dan AIDS**

Penyakit HIV (Human Immunodeficiency Virus) merupakan sejenis virus yang menyerang/menginfeksi sel-sel darah putih yang akan menyebabkan turunnya kekebalan tubuh manusia dan merusak fungsinya. Infeksi HIV yang tidak segera ditangani akan berkembang menjadi kondisi serius yang disebut AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome) yang merupakan tahap akhir infeksi disebabkan oleh HIV yang dapat menginfeksi sistem organ tubuh termasuk otak, sehingga dapat merusak sistem kekebalan tubuh. Sampai saat ini belum ada obat untuk menangani HIV dan AIDS. Tetapi, ada obat untuk memperlambat perkembangan penyakit tersebut, dan dapat meningkatkan harapan hidup penderita.

Menurut Lawrence Green kasus HIV dan AIDS ini ditentukan oleh 3 faktor utama, yakni.

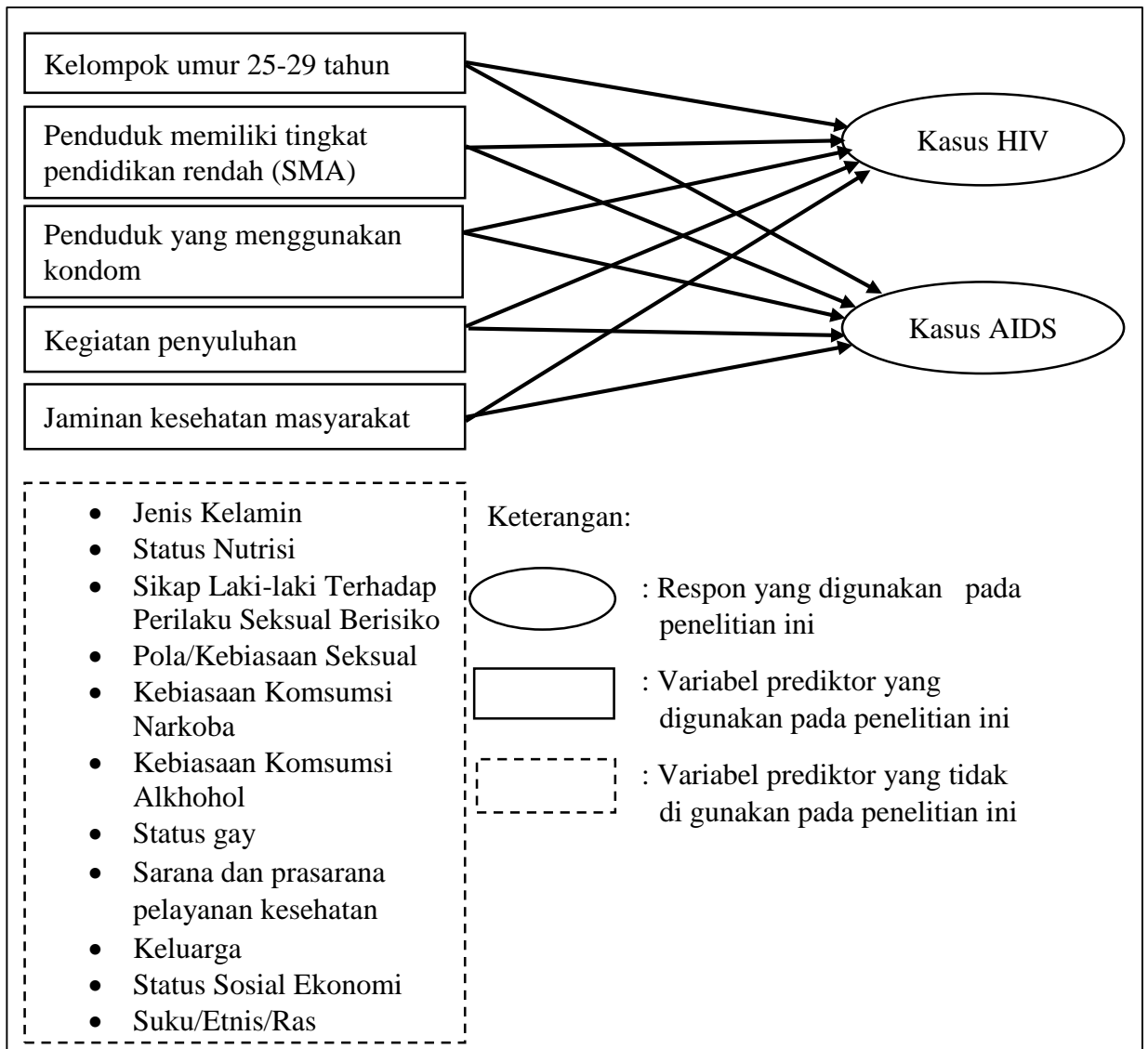
1. Faktor Pendorong (Predisposing factors) Faktor-faktor yang mendorong terjadinya perilaku seseorang, antara lain pengetahuan, sikap, keyakinan, kepercayaan, nilai-nilai, tradisi, dan sebagainya. Faktor pendorong terpaparnya HIV yaitu pengetahuan yang rendah mengenai HIV, sikap yang menerima tentang perilaku penyebab HIV dan tradisi yang dapat menyebabkan HIV.
2. Faktor pemungkin (Enabling factors) Faktor-faktor yang memfasilitasi perilaku seseorang untuk bisa terinfeksi HIV seperti sarana dan prasarana atau fasilitas untuk terjadinya perilaku kesehatan, faktor pemungkin yang dapat menyebabkan HIV yaitu jarak lokalisasi PSK yang dekat dengan rumah, jarak ke pelayanan kesehatan yang jauh sehingga kurang memperoleh informasi mengenai HIV
3. Faktor penguat (Reinforcing factors) Faktor yang memperkuat terjadinya perilaku seseorang terinfeksi HIV. Kadang-kadang meskipun orang tahu dan mampu untuk berperilaku sehat, tetapi tidak melakukannya. Contoh faktor penguat yaitu keluarga, tenaga kesehatan dan tokoh masyarakat. Pada kasus terpapar HIV faktor penguat yaitu aturan dalam keluarga yang tidak melarang perilaku penyebab HIV, dan lingkungan mendukung untuk melakukan perilaku penyebab HIV.

Kerangka teori Lawren Green yaitu.



Gambar 2.1 Kerangka Teori Lawrence Green

Gambar 2.1 menyajikan kerangka kerja untuk menganalisis faktor-faktor penentu jumlah kasus HIV dan AIDS. Berdasarkan beberapa penelitian terkait jumlah kasus HIV dan AIDS (Gambar 2.1), terdapat beberapa variabel yang dapat mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS. Dengan pertimbangan ketersediaan data untuk tingkat kecamatan dan kesesuaian hubungan antara respon dengan variabel prediktor, maka tidak semua variabel tersebut digunakan dalam penelitian ini. Kerangka konsep penelitian pada Gambar 2.2 disajikan untuk memberikan gambaran yang lebih detail.



Gambar 2.2 Kerangka Konsep Penelitian

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## BAB 3

### METODE PENELITIAN

#### 3.1. Kajian Teori

Bagian ini akan dijelaskan beberapa hal terkait penaksiran parameter dan pengujian hipotesis untuk model BZIPIGR. Berikut ini merupakan langkah-langkah dalam analisis data untuk setiap tujuan penelitian.

##### 3.1.1 Menentukan Penaksir Parameter Model BZIPIGR

Menentukan penaksiran parameter model BZIPIG dengan menggunakan iterasi *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH) hanya membutuhkan turunan pertama dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Membentuk fungsi distribusi BZIPIGR dengan  $(Y_{1i}, Y_{2i}) \sim BZIPIG$

$(\mu_1, \mu_2, \mu_0, p_1, p_2, \tau)$  maka fungsi peluang bersama dari  $Y_1, Y_2$  adalah.

$$P(y_{1i}, y_{2i}) = \begin{cases} \begin{aligned} & p_2(\mathbf{x}_i) p_1(\mathbf{x}_i) \\ & + (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{-\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau + 1}) \\ & + p_2(\mathbf{x}_i) (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\lambda_{1i}\tau + 1)^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{1i}\tau + 1}) \\ & + (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} & y_{1i} = y_{2i} = 0 \\ \begin{aligned} & K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1}) \\ & (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) e^{\tau} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}} \lambda_{2i}^{y_{2i}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{y_{1i} + y_{2i} - \frac{1}{2}}}{\left( \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \right)^{y_{1i} + y_{2i}} y_{1i}! y_{2i}!}} \end{aligned} & y_{1i}; y_{2i} \neq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Model BZIPIGR.

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} & 1 - p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \\ p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} & 1 - p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \\ \text{logit}(p_1) &= \ln \left( \frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1 - p_1(\mathbf{x}_i)} \right) = -\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1 & \text{logit}(p_2) &= \ln \left( \frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1 - p_2(\mathbf{x}_i)} \right) = -\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2 \\ \lambda_{1i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) & \lambda_{2i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \end{aligned}$$

2. Menentukan fungsi likelihood  $L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau) = \prod_{i=1}^n P(y_{1i}, y_{2i})$  merupakan fungsi kepadatan bersama distribusi BZIPIG.

3. Menentukan fungsi log-likelihood model BZIPIGR

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)$$

4. Mencari turunan pertama dari fungsi  $\ln L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)$  terhadap parameter  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2$  dan  $\tau$  kemudian disamadengankan nol.

5. Jika hasil penurunan pertama terhadap masing-masing parameternya tidak *close form* untuk menyelesaikannya menggunakan iterasi numerik BHHH dengan langkah-langkah sebagai berikut. (Cameron dan Trivedi, 2005)

a. Tentukan nilai awalan (*initial value*) dari vektor  $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \ \boldsymbol{\beta}_2^T \ \theta_1 \ \theta_2 \ \tau]^T$ , misalkan  $\boldsymbol{\gamma}_{(0)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(0)}$  sesuai dengan fungsi ZIPIG. Nilai awalan untuk  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2$  diperoleh dari estimator pada model ZIPR sedangkan nilai awal untuk parameter  $\tau$  diperoleh dari nilai disperse model ZIPIGR.

b. Tentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)})$  dengan menggunakan turunan pertama fungsi  $\ln$  likelihood terhadap parameter yang ingin diduga  $(\boldsymbol{\gamma}_{(m)})$ . dengan

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = \left[ \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)^T \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)^T \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_1} \right) \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_2} \right) \quad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \tau} \right]^T \text{ dengan}$$

$$L(\bullet) = \ln L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)$$

c. Tentukan matriks Hessian.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m)^T$$

$$\text{dengan } \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) = \frac{\partial \ln L(y_i | X_i, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)}{\partial (\boldsymbol{\gamma}_m)}$$

d. Menstutitusikan nilai  $\boldsymbol{\gamma}_m$  ke dalam elemen-elemen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m)$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_m)$ .



e. Lakukan iterasi mulai dari  $m = 0$  pada persamaan berikut.

$$\boldsymbol{\gamma}_{m+1} = \boldsymbol{\gamma}_m - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m). \text{ Iterasi akan berhenti jika nilai } \|\boldsymbol{\gamma}_{m+1} - \boldsymbol{\gamma}_m\| \leq \varepsilon$$

, dengan  $\varepsilon$  merupakan bilangan positif yang sangat kecil dan mendekati 0.

Ulangi Langkah b dan seterusnya dengan  $m = m + 1$ .

### 3.1.2 Menentukan Statistik Uji Hipotesis Model BZIPIGR

Pengujian hipotesis parameter model BZIPIGR dilakukan dengan metode MLRT. Langkah-langkah pengujian parameter model BZIPIGR dapat dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

a. Menentukan hipotesis

$$H_0 : \beta_{1k} = \beta_{2k} = 0 \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, p$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hk} \neq 0 \text{ dengan } h = 1, 2 \text{ dan } k = 1, 2, \dots, p$$

2. Membuat himpunan parameter dibawah populasi

$$\Omega = \{\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\theta}_h, \tau; h = 1, 2\}$$

3. Membuat fungsi *likelihood* di bawah populasi ( $L(\Omega)$ )

$$L(\Omega) = L(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\theta}_h, \tau; h = 1, 2) = \prod_{i=1}^n P(y_{hi} | \boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\theta}_h, \tau; h = 1, 2)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} (L(\Omega)).$$

$L(\hat{\Omega})$  adalah nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap dimana melibatkan variabel prediktor.

4. Membuat himpunan parameter dibawah  $H_0$  benar  $\omega$

$$\omega = \{\beta_{h0}, \theta_{h0}, \tau; h = 1, 2\}.$$

5. Membuat fungsi *likelihood* di bawah  $H_0$  benar ( $L(\omega)$ )

$$L(\omega) = L(\beta_{h0}, \theta_{h0}, \tau; h = 1, 2) = \prod_{i=1}^n P((y_{1i}, y_{2i}) | \beta_{h0}, \theta_{h0}, \tau; h = 1, 2)$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} (L(\omega)).$$

$L(\hat{\omega})$  adalah nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor.

6. Membuat rasio dari

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

7. Menentukan statistik uji  $G^2_{hitung}$

$$\begin{aligned} G^2 &= -\ln(\Lambda^2) \\ &= -2 \ln \left( \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \\ &= 2 \left( \ln(L(\hat{\Omega})) - \ln(L(\hat{\omega})) \right). \end{aligned}$$

8. Menentukan distribusi  $G^2$

9. Menentukan daerah penolakan  $H_0$

### 3.2. Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Profil Dinas Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012 yang dapat dilihat pada Lampiran 1. Data tersebut pernah digunakan pada beberapa penelitian yaitu Umami (2015), Pangulimang (2016), dan Wijaya (2017) dengan tujuan untuk mengetahui faktor-faktor yang dapat mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS. Unit pengamatan yang digunakan pada penelitian ini adalah 27 Kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

#### 3.2.1 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari dua respon (Y) dan lima variabel prediktor (X). Variabel dalam penelitian ini adalah Respon  $Y$  yang terdiri atas.

$Y_1$  = Jumlah kasus HIV di tiap kecamatan dari Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

$Y_2$  = Jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan dari Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Variabel prediktor  $X$  yang terdiri atas.

$X_1$  = Persentase kelompok umur 25-29 tahun pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Pada Profil Kesehatan Provinsi Jawa timur tercatat sampai tahun 2012, kebanyakan kasus AIDS berada pada umur seksual aktif, sedangkan kasus HIV tertinggi berada pada kelompok umur yang sama yaitu umur 25-29 tahun.

$X_2$  = Persentase penduduk yang bertingkat Pendidikan rendah (SMA) pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Latar belakang Pendidikan berpengaruh pada pengetahuan seseorang. Demikian halnya dengan pengetahuan seseorang terhadap HIV dan AIDS. Semakin rendah tingkat pendidikan seseorang menunjukkan bahwa semakin sedikit pengetahuan orang tersebut akan HIV dan AIDS sehingga memiliki potensi yang cukup besar terkena resiko penyakit tersebut.

$X_3$  = Persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Upaya pencegahan HIV dan AIDS adalah salah satunya dengan mendistribusikan kondom disertai penjelasan penggunaan dan manfaat kondom.

$X_4$  = Persentase kegiatan penyuluhan kesehatan tentang HIV dan AIDS pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Pemerintah melakukan penyuluhan kesehatan untuk menambah pengetahuan penyebab dan solusi penyembuhan HIV dan AIDS.

$X_5$  =Persentase jaminan Kesehatan masyarakat kurang mampu pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Orang kurang mampu yang terkena HIV and AIDS lebih rentan terhadap efek jangka panjang karena terkendala pada biaya pengobatan, sehingga pemerintah memberikan jaminan Kesehatan untuk mereka.

Definisi operasional dari masing-masing variabel dan struktur data yang digunakan diuraikan pada Tabel 3.1. Data pengamatan selengkapnya disajikan pada Lampiran 1.

Tabel 3.1. Variabel Penelitian dan Definisi Operasional

<b>Variabel</b>	<b>Keterangan</b>
Jumlah kasus HIV $Y_1$	Jumlah kasus HIV pada tiap Kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.
Jumlah kasus AIDS $Y_2$	Jumlah kasus AIDS pada tiap Kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.
Persentase kelompok umur 25-29 tahun pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo $X_1$	Hasil bagi dari jumlah kelompok umur 25-29 tahun dengan jumlah penduduk tiap kecamatan.
Persentase penduduk yang bertingkat Pendidikan rendah (SMA) pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. $X_2$	Hasil bagi jumlah penduduk yang hanya tamat SMA dengan jumlah penduduk usia 10 tahun keatas menurut tingkat Pendidikan tertinggi yang ditamatkan di tiap kecamatan.
Persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo $X_3$	Hasil bagi antara jumlah PUS yang menggunakan kondom dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. PUS adalah suami istri yang istrinya berumur antara 15-49 tahun dan masih haid atau pasangan suami istri yang istrinya berumur kurang dari 15 tahun dan sudah haid atau istri berumur 50 tahun tetapi masih haid.
Persentase kegiatan penyuluhan kesehatan tentang HIV dan AIDS pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo $X_4$	Hasil bagi antara jumlah penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.
Persentase jaminan Kesehatan masyarakat kurang mampu pada tiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo $X_5$	Hasil bagi antara jumlah penduduk yang mendapatkan Jamkesmas dan jumlah total penduduk dikali 100 pada setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Sumber: Profil Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Struktur data yang digunakan akan diuraikan pada berikut ini.  
Tabel 3.2. Struktur Data Penelitian

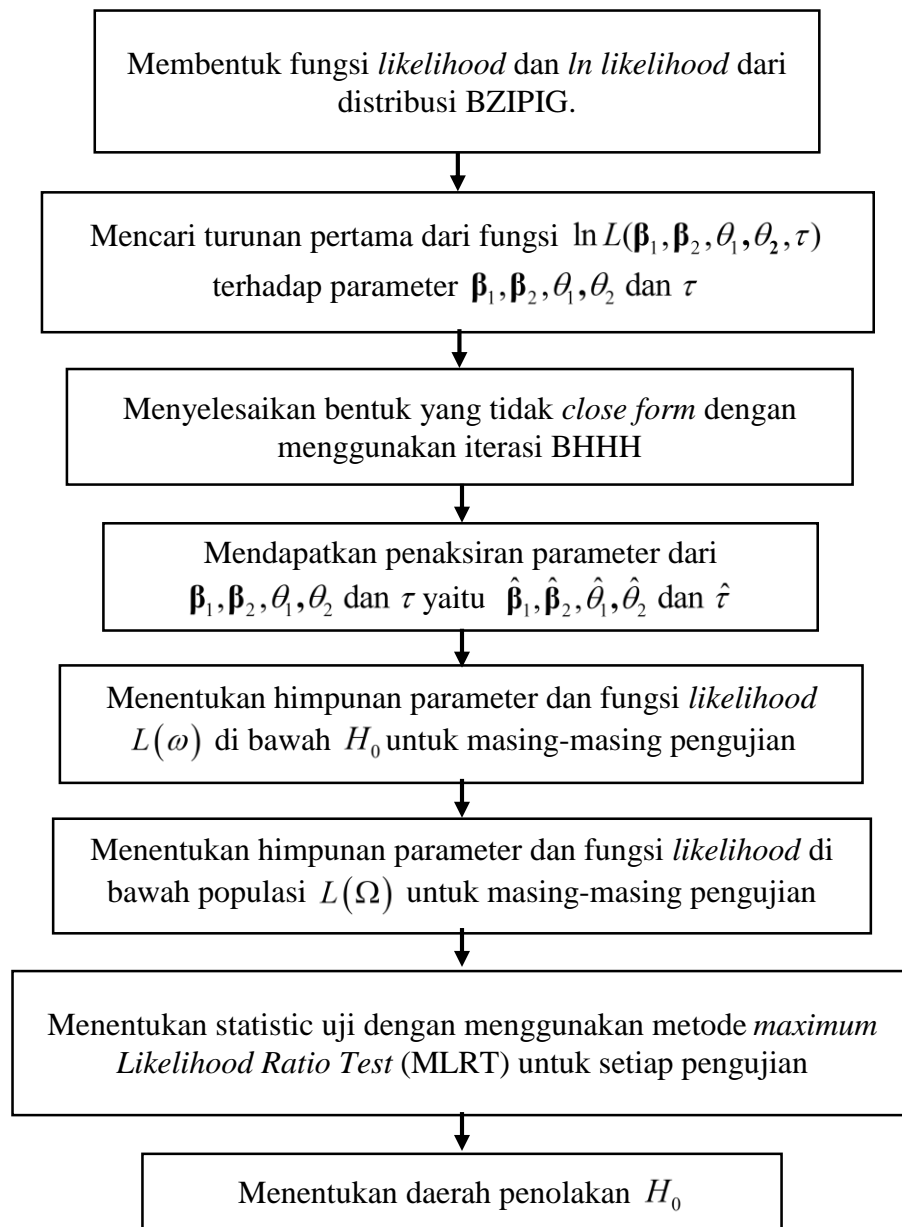
Wilayah	Respon		Variabel Prediktor				
	$Y_1$	$Y_2$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
1	$y_{1.1}$	$y_{2.1}$	$x_{1.1}$	$x_{2.1}$	$x_{3.1}$	$x_{4.1}$	$x_{5.1}$
2	$y_{1.2}$	$y_{2.2}$	$x_{1.2}$	$x_{2.2}$	$x_{3.2}$	$x_{4.2}$	$x_{5.2}$
3	$y_{1.3}$	$y_{2.3}$	$x_{1.3}$	$x_{2.3}$	$x_{3.3}$	$x_{4.3}$	$x_{5.3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i$	$y_{1.i}$	$y_{2.i}$	$x_{1.i}$	$x_{2.i}$	$x_{3.i}$	$x_{4.i}$	$x_{5.i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
27	$y_{1.27}$	$y_{2.27}$	$x_{1.27}$	$x_{2.27}$	$x_{3.27}$	$x_{4.27}$	$x_{5.27}$

### 3.2.2 Langkah-langkah Penentuan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus HIV dan AIDS dengan Model BZIPIGR

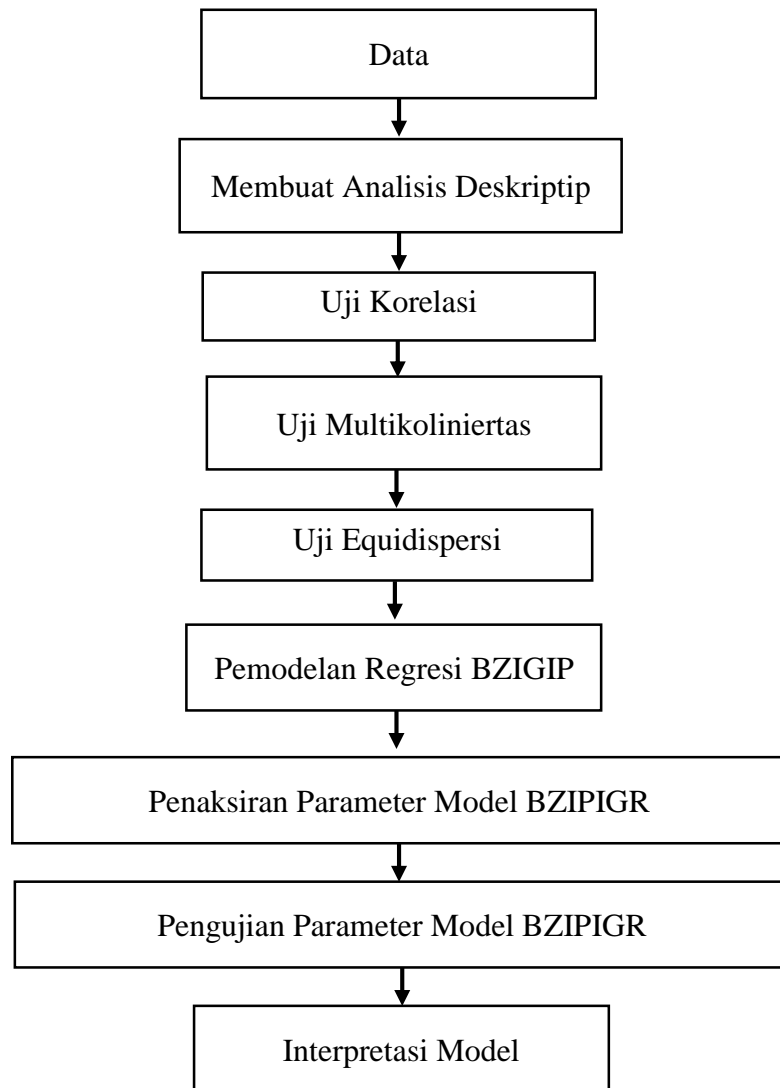
Berikut langkah-langkah untuk menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kasus HIV dan AIDS.

1. Membuat analisis deskriptif terhadap respon dan variabel prediktor seperti *mean*, standar deviasi, varians, maksimum dan minimum.
2. Menguji korelasi antara respon dengan variabel prediktor menggunakan uji *Pearson*.
3. Mendeteksi kasus multikolinearitas dari variabel prediktor dengan menggunakan kriteria uji VIF. Data mengalami multikolinearitas jika nilai  $VIF > 10$ .
4. Melakukan uji equidispersi menggunakan *Variance Test* (VT). Data mengalami underdispersi jika  $VT < 1$ , sebaliknya jika  $VT > 1$  maka data mengalami overdispersi.
5. Melakukan analisis data menggunakan model BZIPIGR.
  - a. Menentukan nilai penaksir parameter menggunakan MLE melalui algoritma BHHH.

- b. Melakukan pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter regresi.
- c. Melakukan pengujian hipotesis secara parsial terhadap parameter regresi.
- d. Melakukan interpretasi hasil analisis.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian mendapatkan Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis



Gambar 3.3 Langkah-langkah analisis data jumlah HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## BAB 4

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas penaksiran parameter menggunakan Maximum Likelihood Estimator (MLE) dan pengujian hipotesis menggunakan Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT). Selanjutnya dilakukan iterasi numerik menggunakan optimasi BHHH pada model BZIPIGR. Setelah diperoleh penaksiran parameter dan pengujian hipotesis, model BZIPIGR digunakan untuk memodelkan jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhinya.

#### 4.1. Penaksiran Parameter Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG)

Penaksiran parameter model BZIPIGR menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Adapun peluang distribusi BZIPIG.

$$P(y_{1i}, y_{2i}) = \begin{cases} p_2(\mathbf{x}_i)p_1(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau+1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) & \\ K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{2i}\tau+1} \right) + p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\lambda_{1i}\tau+1)^{\frac{1}{4}} & \\ K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\lambda_{1i}\tau+1} \right) + (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) & \\ (2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right) & y_{1i} = y_{2i} = 0 \\ (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) e^{\tau} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} & \\ \frac{\lambda_{1i}^{y_{1i}} \lambda_{2i}^{y_{2i}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{y_{1i}+y_{2i}-\frac{1}{2}}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)}{\left( \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} \right)^{y_{1i}+y_{2i}} y_{1i}! y_{2i}!} & y_{1i}; y_{2i} \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Model BZIPIGR.

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} & 1 - p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \\ p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} & 1 - p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \\ \text{logit}(p_1) &= \ln \left( \frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1 - p_1(\mathbf{x}_i)} \right) = -\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1 & \text{logit}(p_2) &= \ln \left( \frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1 - p_2(\mathbf{x}_i)} \right) = -\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2 \\ \lambda_{1i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) & \lambda_{2i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Substitusikan persamaan (4.2) pada persamaan (4.1) sehingga diperoleh

$$P(y_{1i}, y_{2i}) = \begin{cases} A_i, (y_{1i}, y_{2i}) = (0, 0) \\ B_i, (y_{1i}, y_{2i}) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (4.3)$$

untuk persamaan  $A_i$  dan  $B_i$  dapat dilihat pada Lampiran 2. Tahap pertama untuk melakukan penaksiran parameter menggunakan MLE dengan cara membentuk fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai berikut.

$$L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau) = \prod_{i=1}^n P(y_{1i}, y_{2i})$$

Tahap kedua yaitu menentukan  $\ln$  dari fungsi *likelihood* dari persamaan (4.2)

$$\ell = \ln L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau) = \ln \prod_{i=1}^n (A_i)^{1-b_i} (B_i)^{b_i}$$

$$\ell = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \ln(A_i) + \sum_{i=1}^n b_i \ln(B_i)$$

$b_i$  merupakan variabel dummy yang bernilai 1.

dimana  $\ln A_i$  dan  $\ln B_i$  dapat dilihat pada Lampiran 3. Tahap selanjutnya untuk mendapatkan penaksiran parameter maka fungsi  $\ell(\boldsymbol{\beta}_h, \theta_h, \tau; h=1,2)$  diturunkan terhadap parameter  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2$  dan  $\tau$  kemudian disamadengankan nol sehingga diperoleh turunan pertama pada Lampiran 4. Hasil turunan pertama terhadap masing-masing parameternya diperoleh persamaan yang eksplisit atau tidak *close form*, maka untuk mendapatkan estimasi parameter BZIPIGR dilakukan dengan menggunakan metode numerik yaitu iterasi *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH) dengan langkah-langkah sebagai berikut. (Cameron dan Trivedi, 2005)

- a. Menentukan nilai awalan (*initial value*)  $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{\beta}_2^T \theta_1 \theta_2 \tau]^T$  dan  $m = 0$  dengan  $\boldsymbol{\gamma}_{(0)} > 0$  sesuai dengan fungsi ZIPIGR untuk batas toleransi konvergensi. Nilai awalan untuk  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2$  diperoleh dari estimator pada model ZIPR sedangkan nilai awal untuk parameter  $\tau$  diperoleh dari nilai dispersi model ZIPIGR.

b. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)})$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = \left[ \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)^T \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)^T \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_1} \right) \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_2} \right) \quad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \tau} \right]^T$$

dengan  $L(\bullet) = \ln L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)$

c. Menentukan matriks Hessian.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m)^T$$

$$\text{dengan } \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) = \frac{\partial \ln L(y_i | X_i, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)}{\partial (\boldsymbol{\gamma}_m)}$$

d. Menstutitusikan nilai  $\boldsymbol{\gamma}_m$  ke dalam elemen-elemen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m)$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_m)$ .

e. Lakukan iterasi mulai dari  $m=0$  pada persamaan berikut.

$$\boldsymbol{\gamma}_{m+1} = \boldsymbol{\gamma}_m - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m). \text{ Iterasi akan berhenti jika nilai } \|\boldsymbol{\gamma}_{m+1} - \boldsymbol{\gamma}_m\| \leq \varepsilon, \text{ dengan } \varepsilon \text{ merupakan bilangan positif yang sangat kecil dan mendekati } 0.$$

Ulangi Langkah b dan seterusnya dengan  $m = m + 1$ .

## 4.2. Pengujian Hipotesis Parameter Model BZIPIG

Pengujian hipotesis merupakan pengujian parameter yang dilakukan secara serentak dan secara parsial untuk mengetahui signifikansi dari masing-masing parameter yang diperoleh.

### 4.2.1 Pengujian Serentak Parameter $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$

Pengujian hipotesis parameter model BZIPIGR, ditentukan oleh fungsi likelihood dari model yaitu  $L(\hat{\Omega})$  yang merupakan nilai Maximum Likelihood di bawah populasi yang melibatkan variabel prediktor dan  $L(\hat{\omega})$  yang merupakan fungsi likelihood dibawah  $H_0$  yang tidak melibatkan variabel prediktor.

Pengujian serentak parameter model BZIPIGR dilakukan untuk mengetahui signifikan parameter  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$  secara bersama-sama dengan hipotesis.

$H_0 : \beta_{1k} = \beta_{2k} = 0$  dengan  $k = 1, 2, \dots, p$

$H_1$  : paling sedikit ada satu  $\beta_{hk}$  dengan  $h = 1, 2$  dan  $k = 1, 2, \dots, p$

Pengujian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh variabel prediktor secara bersama-sama (simultan) terhadap respon. Sebelum menentukan statistik uji yang akan digunakan, akan di definisikan untuk himpunan parameter di bawah populasi ( $\Omega$ ) yaitu.  $\Omega = \{\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \tau\}$

Kemudian dari himpunan parameter tersebut dapat dibentuk fungsi *likelihood* di bawah populasi  $L(\Omega) = L(\beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \tau) = \prod_{i=1}^n P((y_{1i}, y_{2i}) | \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \tau)$

Model BZIPIGR.

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} & 1 - p_1(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \\ p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)} & 1 - p_2(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)} \\ \text{logit}(p_1) &= \ln\left(\frac{p_1(\mathbf{x}_i)}{1 - p_1(\mathbf{x}_i)}\right) = -\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1 & \text{logit}(p_2) &= \ln\left(\frac{p_2(\mathbf{x}_i)}{1 - p_2(\mathbf{x}_i)}\right) = -\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2 \\ \lambda_{1i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) & \lambda_{2i} &= \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) \end{aligned}$$

Nilai maksimum *likelihood* di bawah populasi  $L(\Omega)$  adalah  $L(\hat{\Omega})$  yang didapat dari subbab 4.1.

Sedangkan untuk himpunan parameter dibawah  $H_0$  yaitu:  $\omega = \{\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau\}$

Kemudian dari himpunan parameter tersebut dapat dibentuk fungsi *likelihood* di bawah populasi  $L(\omega) = L(\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau) = \prod_{i=1}^n P((y_{1i}, y_{2i}) | \beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau)$

Adapun fungsi peluang dari distribusi BZIPIG.

$$P(y_{1i}, y_{2i}) = \begin{cases} p_2 p_1 + (1 - p_2) p_1 \left(\frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\lambda_2 \tau + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\lambda_2 \tau + 1}) + p_2 (1 - p_1) \left(\frac{2}{\pi \tau}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\lambda_1 \tau + 1)^{\frac{1}{4}} \\ K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\lambda_1 \tau + 1}) + (1 - p_1)(1 - p_2) \left(\frac{2}{\pi \tau}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}) & y_{1i}; y_{2i} = 0 \quad (4.4) \\ (1 - p_1)(1 - p_2) e^{\tau} \left(\frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1^{y_{1i}} \lambda_2^{y_{2i}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{y_{1i} + y_{2i} - \frac{1}{2}}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1})}{\left(\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}\right)^{y_{1i} + y_{2i}} y_{1i}! y_{2i}!} & y_{1i}; y_{2i} \neq 0 \end{cases}$$

Model BZIPIGR tanpa variabel prediktor.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\exp(-\theta_1\beta_0)}{1 + \exp(-\theta_1\beta_0)} = \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} & 1 - p_1 &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \\
 p_2 &= \frac{\exp(-\theta_2\beta_0)}{1 + \exp(-\theta_2\beta_0)} = \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} & 1 - p_2 &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \\
 \lambda_1 &= \exp(\beta_{10}) & \lambda_2 &= \exp(\beta_{20})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nilai maksimum *likelihood* di bawah hipotesis nol  $L(\omega)$  adalah  $L(\hat{\omega})$  yang didapat dengan cara berikut. Subtitusikan persamaan (4.5) pada persamaan (4.4) sehingga diperoleh

$$P(y_{1i}, y_{2i}) = \begin{cases} C_i, (y_{1i}, y_{2i}) = (0, 0) \\ D_i, (y_{1i}, y_{2i}) \neq (0, 0) \end{cases} \tag{4.6}$$

untuk persamaan  $C_i$  dan  $D_i$  dapat dilihat pada Lampiran 5. Tahap pertama untuk melakukan penaksiran parameter menggunakan MLE dengan cara membentuk fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai berikut.

$$L(\omega) = L(\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau) = \prod_{i=1}^n P((y_{1i}, y_{2i}) | \beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau)$$

Tahap kedua yaitu menentukan ln dari fungsi *likelihood* dari persamaan (4.6)

$$I = \ln L(\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau) = \ln \prod_{i=1}^n (C_i)^{1-b_i} (D_i)^{b_i}$$

$$I = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \ln(C_i) + \sum_{i=1}^n b_i \ln(D_i)$$

$b_i$  merupakan variabel dummy bernilai 1.

dimana  $\ln C_i$  dan  $\ln D_i$  dapat dilihat pada Lampiran 5. Tahap selanjutnya untuk mendapatkan penaksiran parameter maka fungsi  $\ell(\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau)$  diturunkan terhadap parameter  $\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau$  kemudian disamadengankan nol sehingga diperoleh turunan pertama pada Lampiran 7. Hasil turunan pertama terhadap masing-masing parameternya diperoleh persamaan yang eksplisit atau tidak *close form*, maka untuk mendapatkan  $L(\hat{\omega})$  dilakukan dengan menggunakan metode numerik yaitu iterasi *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH) dengan langkah-langkah sebagai berikut. (Cameron dan Trivedi, 2005)

a. Menentukan nilai awalan (*initial value*)  $\boldsymbol{\gamma} = [\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau]^T$  dan  $m = 0$  dengan  $\boldsymbol{\gamma}_{(0)} > 0$  sesuai dengan fungsi ZIPIGR untuk batas toleransi konvergensi. Nilai awalan untuk  $\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}$  diperoleh dari estimator pada model ZIPR sedangkan nilai awal untuk parameter  $\tau$  diperoleh dari nilai dispersi model ZIPIGR.

b. Menentukan vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)})$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = \left[ \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \beta_{10}} \right) \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \beta_{20}} \right) \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_{10}} \right) \quad \left( \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \theta_{20}} \right) \quad \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \tau} \right]^T$$

dengan  $L(\bullet) = \ln L(\beta_{10}, \beta_{20}, \theta_{10}, \theta_{20}, \tau)$

c. Menentukan matriks Hessian.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_{(m)}) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m)^T$$

$$\text{dengan } \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\gamma}_m) = \frac{\partial \ln L(y_i | X_i, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau)}{\partial (\boldsymbol{\gamma}_m)}$$

d. Menstutitusikan nilai  $\boldsymbol{\gamma}_m$  ke dalam elemen-elemen vektor gradien  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m)$  dan matriks Hessian  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma}_m)$ .

e. Lakukan iterasi mulai dari  $m = 0$  pada persamaan berikut.

$$\boldsymbol{\gamma}_{m+1} = \boldsymbol{\gamma}_m - \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_m) \mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}_m). \text{ Iterasi akan berhenti jika nilai } \|\boldsymbol{\gamma}_{m+1} - \boldsymbol{\gamma}_m\| \leq \varepsilon,$$

dengan  $\varepsilon$  merupakan bilangan positif yang sangat kecil dan mendekati 0.

Ulangi Langkah b dan seterusnya dengan  $m = m + 1$ .

Dari kedua nilai maksimum *likelihood* ini akan dibentuk rasio antara nilai maksimum *likelihood* di bawah populasi  $L(\Omega)$  dan nilai maksimum *likelihood* di bawah  $H_0$   $L(\omega)$  yang disebut dengan odd rasio seperti berikut.

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

dengan daerah penolakan  $H_0$  jika  $\Lambda < \Lambda_0$  dimana  $0 < \Lambda_0 < 1$ .

Selanjutnya yaitu menentukan distribusi statistik uji dengan pendekatan n besar seperti berikut.

$$G^2 = -\ln(\Lambda^2)$$

$$\Lambda < \Lambda_0$$

$$\Lambda^2 < \Lambda_0^2$$

$$\ln \Lambda^2 < \ln \Lambda_0^2$$

$$-\ln \Lambda^2 > -\ln \Lambda_0^2$$

$$G^2 > -\ln(\Lambda_0^2)$$

dengan

$$G^2 > c$$

$$\alpha = P(G^2 > c \mid H_0 \text{ benar})$$

c diperoleh jika distribusi dari  $G^2$  diketahui, sehingga pengujian serentak ini menggunakan statistik uji

$$G^2 = -\ln(\Lambda^2)$$

$$= -2 \ln \left( \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right)$$

$$= 2 \left( \ln(L(\hat{\Omega})) - \ln(L(\hat{\omega})) \right).$$

yang akan dibandingkan dengan  $\chi_{\alpha, (a-b)}^2$  dengan a merupakan banyaknya parameter di bawah populasi dan b adalah banyak parameter di bawah  $H_0$ . Daerah penolakan

$$H_0 \text{ jika } |G^2| > \chi_{\alpha, (a-b)}^2.$$

#### 4.2.2 Pengujian Parameter Secara Parsial

Jika hasil pengujian menghasilkan kesimpulan tolak  $H_0$ , maka pengujian dapat dilanjutkan dengan menguji secara parsial dengan statistik uji wald. Pengujian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh variabel prediktor secara parsial terhadap respon, dengan hipotesis.

- i)  $H_0 : \beta_{hk} = 0$   
 $H_1 : \beta_{hk} \neq 0$  dengan  $h = 1, 2$  dan  $k = 1, 2, \dots, p$
- ii)  $H_0 : \theta_h = 0$   
 $H_1 : \theta_h \neq 0$  dengan  $h = 1, 2$
- iii)  $H_0 : \tau = 0$   
 $H_1 : \tau \neq 0$

dengan statistik uji yang digunakan yaitu:

$$Z_\beta = \frac{\hat{\beta}_{hk}}{se(\hat{\beta}_{hk})} \text{ dimana } se(\hat{\beta}_{hk}) = \sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\beta}_{hk})}$$

$$Z_\theta = \frac{\hat{\theta}_h}{se(\hat{\theta}_{hk})} \text{ dimana } se(\hat{\theta}_{hk}) = \sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\theta}_{hk})}$$

$$Z_\tau = \frac{\hat{\tau}}{se(\hat{\tau})} \text{ dimana } se(\hat{\tau}) = \sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\tau})}$$

dimana nilai  $\sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\beta}_{hk})}$ ,  $\sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\theta}_{hk})}$  dan  $\sqrt{\hat{v}\text{ar}(\hat{\tau})}$  diperoleh dari elemen diagonal utama matriks  $-\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\gamma})$ .  $H_0$  ditolak jika  $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ .

### 4.3. Model Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression (BZIPIG)

BZIPIG merupakan salah satu pemodelan yang dapat diaplikasikan pada data cacahan yang memiliki dua respon yang berkorelasi, memiliki overdispersi dan mengandung banyak nilai nol pada data pengamatan. Penelitian ini model BZIPIG diaplikasikan pada data jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Sehingga dapat diketahui faktor-faktor apa saja yang berpengaruh signifikan pada jumlah kasus.

#### 4.3.1 Statistika Deskriptif Respon dan Variabel Prediktor Penelitian

Tahun 2002 sampai 2010 jumlah kasus HIV dan AIDS di Indonesia mengalami peningkatan yang signifikan, karena banyak masyarakat yang sudah sadar akan kesehatan dan melakukan tes. Sejak virus ini pertama kali ditemukan pertama kalinya, jumlah kasus di Indonesia semakin meningkat dan menyebar ke seluruh Indonesia termasuk Provinsi Jawa Timur. Jawa Timur menempati posisi jumlah kasus kedua tertinggi. Semua Kabupaten di Jawa Timur terdeteksi adanya kasus HIV dan AIDS, diantaranya Kabupaten Ponorogo dan Trenggalek.



Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo memiliki 35 kecamatan yang terdiri dari 14 kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan 21 kecamatan di Kabupaten Ponorogo. Penelitian ini hanya menggunakan 27 kecamatan karena hanya kecamatan yang memiliki jumlah kasus HIV dan AIDS dan tidak memiliki jumlah kasus HIV dan AIDS yang dimasukkan pada penelitian ini.

Jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo merupakan dua respon dalam penelitian ini, dengan variabel prediktornya yaitu persentase kelompok umur 25 sampai 29 tahun, persentase penduduk yang memiliki tingkat pendidikan rendah, persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom, persentase kegiatan penyuluhan kesehatan tentang HIV dan AIDS dan persentase jaminan kesehatan pada masyarakat di setiap kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo. Statistika deskriptif dari dua respon dan variabel prediktor dengan menggunakan data pada Lampiran 1.

Tabel 4.1. Statistika Deskriptif Respon dan Variabel Prediktor

	<b>Variabel</b>	<b>Mean</b>	<b>Variance</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
$Y_1$	Jumlah kasus HIV	1,148	1,823	0,000	4,000
$Y_2$	Jumlah kasus AIDS	0,815	0,926	0,000	4,000
$X_1$	Persentase kelompok umur 25-29 tahun	6,721	0,317	5,711	7,821
$X_2$	Persentase penduduk yang memiliki tingkat pendidikan rendah (SMA)	15,43	41,78	6,49	34,95
$X_3$	Persentase PUS yang menggunakan kondom	3,283	0,7883	0,153	13,313
$X_4$	Persentase penduduk yang mengikuti kegiatan penyuluhan Kesehatan	0,6407	0,2593	0,0410	2,5120
$X_5$	Persentase penduduk yang mendapatkan Jaminan Kesehatan Masyarakat	42,75	98,63	21,61	60,98

Tabel 4.1 menunjukkan jumlah kasus terbanyak baik pada HIV maupun AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo yaitu sebanyak 4 kasus. Nilai varian yang cukup besar berada pada variabel persentase jaminan Kesehatan masyarakat (Jamkesmas) yaitu sebesar 98,63% . Rata-rata persentase kelompok umur 25-29 tahun sebanyak 6,721% dengan persentase terbanyak pada kecamatan Trenggalek dan yang paling sedikit pada kecamatan Watulimo. Rata-rata persentase penduduk memiliki tingkat Pendidikan rendah (SMA) sebanyak 15,43% dengan persentase terbanyak pada kecamatan Trenggalek dan yang paling sedikit pada kecamatan Pudak. Rata-rata persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom sebanyak 3,283% dengan persentase terbanyak pada kecamatan Tugu dan yang paling sedikit pada kecamatan Ngebel. Rata-rata persentase kegiatan penyuluhan kesehatan sebanyak 0,6407% dengan persentase terbanyak pada Kecamatan Pudak dan yang paling sedikit pada Kecamatan Gandusari. Rata-rata persentase jaminan kesehatan masyarakat (Jamkesmas) sebanyak 42,75% dengan persentase terbanyak pada kecamatan Pudak dan yang paling sedikit pada kecamatan Trenggalek.

Hubungan dari respon terhadap variabel prediktornya dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Koefisien Korelasi Respon dengan Variabel Prediktor

<b>Respon</b>		<b>Variabel Prediktor</b>				
		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$Y_1$	Koefisien Korelasi	0,208	0,501	0,302	-0,092	-0,231
	<i>p - value</i>	0,297	0,008	0,126	0,648	0,246
$Y_2$	Koefisien Korelasi	0,307	0,612	0,427	-0,012	-0,359
	<i>p - value</i>	0,119	0,001	0,026	0,952	0,066

Berdasarkan nilai koefisien korelasi pada table 4.2, dapat diketahui bahwa terdapat pola hubungan yang positif antara variabel persentase kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk memiliki tingkat Pendidikan rendah (SMA), dan persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom terhadap variabel jumlah kasus HIV dan AIDS. Variabel persentase kegiatan penyuluhan

kesehatan dan persentase jaminan kesehatan masyarakat (Jamkesmas) memiliki pola hubungan yang negatif terhadap respon.

#### 4.3.2 Uji Korelasi Respon

Analisis regresi bivariate kedua responnya harus memiliki korelasi. Penelitian ini menggunakan dua respon yaitu jumlah kasus HIV dan jumlah kasus AIDS. Cara mengetahui ada tidaknya hubungan antara respon dilakukan pengujian menggunakan koefisien korelasi *Pearson* dengan hipotesis sebagai berikut.

$$H_0 : \rho_{y_1, y_2} = 0 \text{ (Tidak ada hubungan antar kedua variabel)}$$

$$H_1 : \rho_{y_1, y_2} \neq 0 \text{ (Terdapat hubungan antar kedua variabel)}$$

Statistik uji:

$$T = \frac{r_{y_1, y_2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,851 \sqrt{27-2}}{\sqrt{1-0,851^2}} = 8,102205$$

Nilai  $T$  yang diperoleh dari statistik uji yang digunakan yaitu 8,102205 lebih besar dari pada  $t_{0,025;25} = 2,05954$  sehingga keputusan tolak  $H_0$  atau terdapat hubungan antar kedua respon. Kesimpulan yang diperoleh yaitu ada hubungan antara variabel jumlah kasus HIV dan jumlah kasus AIDS, sehingga penelitian ini dapat dilanjutkan dengan metode BPIGR.

#### 4.3.3 Uji Multikolinearitas

Uji multikolinearitas dilakukan untuk mengetahui apakah antar variabel prediktor memiliki korelasi atau tidak. Penelitian ini menggunakan 5 variabel prediktor, yang menyebabkan adanya kemungkinan antar variabel prediktor memiliki korelasi. Salah satu caranya untuk menguji multikolinearitas dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) atau nilai yang menggambarkan kenaikan varians dari dugaan parameter antar variabel prediktor dengan persamaan (2.23). Menurut Gujarati (2004) apabila nilai  $VIF > 10$  maka dapat dikatakan terjadi multikolinearitas, sebaliknya jika  $VIF < 10$  maka tidak terjadi multikolinearitas. Nilai VIF dari masing-masing variabel dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Nilai VIF Variabel Prediktor

	$X_1$	$X_2$	$X_2$	$X_4$	$X_5$
VIF	1,22	2,32	1,93	1,06	1,60

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa nilai VIF pada masing-masing variabel prediktor lebih kecil dari angka 10 sehingga dapat disimpulkan bahwa variabel prediktor tidak mengalami multikolinearitas, atau tidak terdapatnya korelasi antar variabel prediktor.

#### 4.3.4 Uji Equidispersi

Regresi Poisson memiliki asumsi yang harus terpenuhi yaitu nilai *mean* dan *variance* respon harus sama (*equidispersion*). Penelitian ini dilakukan uji equidispersi untuk mengetahui apakah data yang digunakan melanggar asumsi atau tidak. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mendeteksi ada atau tidaknya pelanggaran asumsi pada respon yang akan diteliti dengan melihat nilai dari *The variance test* (VT), yaitu sebagai berikut.

$$VT_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} = \frac{47,4074074}{1,148148} = 41,29$$

$$VT_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} = \frac{24,0740741}{0,814815} = 29,545$$

Data dikatakan mengalami underdispersi ketika  $VT < 1$ , dan sebaliknya jika nilai  $VT > 1$  maka data mengalami overdispersi. Hasil deteksi pada penelitian ini untuk masing-masing respon baik pada jumlah kasus HIV maupun AIDS memiliki nilai  $VT > 1$  atau dapat disimpulkan bahwa data mengalami permasalahan overdispersi sehingga penelitian ini dapat di lanjutkan menggunakan metode BZIPIGR. Hasil perhitungan lengkap dapat dilihat pada Lampiran 10.

#### 4.3.5 Pemodelan Regresi Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo dengan metode *Bivariate Zero Inflated Poisson Inverse Gaussian (BZIPIG)*

Jumlah kasus HIV dan AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo merupakan data cacahan yang saling berkorelasi dan mengalami masalah overdispersi. Variabel prediktor persentase kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk memiliki tingkat Pendidikan rendah (SMA), persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom, persentase kegiatan penyuluhan kesehatan dan persentase jaminan kesehatan masyarakat (Jamkesmas) tidak memiliki masalah multikolinearitas. Pemodelan regresi menggunakan *Bivariate Zero Inflated Poisson Invers Gaussian* dapat dilakukan untuk penelitian ini. Pendugaan parameter pada (Lampiran 14) menghasilkan pendugaan yang bersifat sama atau global untuk masing-masing kecamatan di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Pengujian parameter secara serentak terhadap parameter dilakukan untuk mengetahui variabel signifikan parameter  $\beta_1, \beta_2$  secara bersama-sama mempengaruhi respon atau tidak. Pengujian serentak parameter model BZIPIGR dengan hipotesis.

$$H_0 : \beta_{1k} = \beta_{2k} = 0 \text{ dengan } k = 1, 2, \dots, 5$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{hk} \text{ dengan } h = 1, 2 \text{ dan } k = 1, 2, \dots, 5$$

Berdasarkan Lampiran 11 Statistik uji G yang diperoleh sebesar 73.18336. Nilai G lebih besar dari  $\chi^2_{(0,05;10)}$  yaitu 18,30704, sehingga keputusan yang diambil adalah tolak  $H_0$ . Kesimpulan yang diperoleh yaitu variabel prediktor secara bersama-sama memiliki pengaruh respon.

Tabel 4.4. Estimasi Parameter Model BZIPIGR

Parameter	Estimate	SE	Z	P – value
$\beta_{1.0}$	-1,1169	0,0014	-788,2571	0,0000
$\beta_{1.1}$	-0,0966	0,0014	-68,2005	0,0000
$\beta_{1.2}$	0,0643	0,0014	45,4008	0,0000
$\beta_{1.3}$	-0,0423	0,0014	-29,8865	0,0000
$\beta_{1.4}$	-0,2703	0,0014	-190,7445	0,0000
$\beta_{1.5}$	-0,0150	0,0014	-10,5835	0,0000
$\beta_{2.0}$	-1,9625	0,0015	-1294,9407	0,0000
$\beta_{2.1}$	-0,0187	0,0015	-12,3434	0,0000
$\beta_{2.2}$	0,0560	0,0015	36,9414	0,0000
$\beta_{2.3}$	-0,0141	0,0015	-9,2870	0,0000
$\beta_{2.4}$	-0,0103	0,0015	-6,8062	0,0000
$\beta_{2.5}$	-0,0221	0,0015	-14,5659	0,0000
$\theta_1$	0,0500	0,0140	358267,7000	0,0000
$\theta_2$	0,0570	0,0259	219858,600	0,0000
$\tau$	0,0060	0,0982	61,1307	0,0000

Setelah dilakukan pengujian secara simultan, selanjutnya dilakukan pengujian parameter model BZIPIG secara parsial. Berdasarkan Lampiran 13, pengujian hipotesis parsial terhadap parameter model regresi BZIPIG dapat dilihat pada Tabel 4.4. Semua nilai *P – value* dari variabel prediktor, zero-infaltd maupun dispersi kurang dari nilai  $\alpha = 0,05$ , sehingga keputusan yang diambil adalah tolak  $H_0$ . Keputusan yang diperoleh yaitu variabel prediktor persentase kelompok umur 25-29 tahun, persentase penduduk memiliki tingkat Pendidikan rendah (SMA), persentase pasangan usia subur (PUS) yang menggunakan kondom, persentase kegiatan penyuluhan kesehatan dan persentase jaminan kesehatan masyarakat (Jamkesmas) memiliki pengaruh terhadap jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo.

Persamaan model regresi BZIPIG untuk jumlah kasus HIV sebagai berikut.

$$\hat{\lambda}_1 = \exp(-1,1169 - 0,0966X_{1i} + 0,0643X_{2i} - 0,0423X_{3i} - 0,2703X_{4i} - 0,0150X_{5i})$$

Pendugaan parameter model pada persamaan di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

1. Setiap peningkatan 1% penduduk berusia 25-29 tahun ( $X_1$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus HIV di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,0966) = 0,9079$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
2. Setiap peningkatan 1% penduduk berpendidikan rendah ( $X_2$ ) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus HIV di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(0,0643) = 1,0664$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
3. Setiap peningkatan 1% pasangan berusia subur menggunakan kondom ( $X_3$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus HIV di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,0423) = 0,9586$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
4. Setiap peningkatan 1% penduduk mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan ( $X_4$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus HIV di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,2703) = 0,7632$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
5. Setiap peningkatan 1% penduduk memiliki jaminan Kesehatan (Jamkesmas) ( $X_5$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus HIV di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,015) = 0,9851$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.

Persamaan model regresi BZIPIG untuk jumlah kasus AIDS sebagai berikut.

$$\hat{\lambda}_2 = \exp(-1,9625 - 0,0187X_1 + 0,0560X_2 - 0,0141X_3 - 0,0103X_4 - 0,0221X_5)$$

Pendugaan parameter model pada persamaan di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

1. Setiap peningkatan 1% penduduk berusia 25-29 tahun ( $X_1$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,187) = 0,9815$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
2. Setiap peningkatan 1% penduduk berpendidikan rendah ( $X_2$ ) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(0,0560) = 1,0576$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
3. Setiap peningkatan 1% pasangan berusia subur menggunakan kondom ( $X_3$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,0141) = 0,9860$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
4. Setiap peningkatan 1% penduduk mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan ( $X_4$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,0103) = 0,9898$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.
5. Setiap peningkatan 1% penduduk memiliki jaminan Kesehatan (Jamkesmas) ( $X_5$ ) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus AIDS di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo sebesar  $\exp(-0,0221) = 0,9781$  kali dengan asumsi variabel yang lain konstan.

Persamaan model logit BZIPIG untuk jumlah kasus HIV sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{logit}(\hat{p}_i) &= -0,05(-1,1169 - 0,0966X_{1i} + 0,0643X_{2i} - 0,0423X_{3i} - 0,2703X_{4i} - 0,0150X_{5i}) \\ &= 0,0558 + 0,0048X_{1i} - 0,0032X_{2i} + 0,0021X_{3i} + 0,0135X_{4i} + 0,0008X_{5i} \end{aligned}$$

Persamaan model logit di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

1. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus HIV meningkat sebesar  $\exp(0,0048) = 1,0048$  kali jika terjadi



peningkatan 1% penduduk berusia 25-29 tahun ( $X_1$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.

2. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus HIV menurun sebesar  $\exp(-0,0032) = 0,9968$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk berpendidikan rendah ( $X_2$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
3. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus HIV meningkat sebesar  $\exp(0,0021) = 1,0021$  kali jika terjadi peningkatan 1% pasangan berusia subur menggunakan kondom ( $X_3$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
4. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus HIV meningkat sebesar  $\exp(0,0135) = 1,0136$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan ( $X_4$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
5. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus HIV meningkat sebesar  $\exp(0,0008) = 1,0008$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk memiliki jaminan Kesehatan (Jamkesmas) ( $X_5$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.

Persamaan model logit BZIPIG untuk jumlah kasus AIDS sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{logit}(\hat{p}_{2i}) &= -0,057(-1,9625 - 0,0187X_1 + 0,0560X_2 - 0,0141X_3 - 0,0103X_4 - 0,0221X_5) \\ &= 0,1119 + 0,0011X_{1i} - 0,0032X_{2i} + 0,0008X_{3i} + 0,0006X_{4i} + 0,0013X_{5i} \end{aligned}$$

Persamaan model logit di atas dapat diinterpretasikan sebagai berikut.

1. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus AIDS meningkat sebesar  $\exp(0,0011) = 1,0011$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk berusia 25-29 tahun ( $X_1$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.

2. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus AIDS menurun sebesar  $\exp(-0,0032) = 0,9968$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk berpendidikan rendah ( $X_2$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
3. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus AIDS meningkat sebesar  $\exp(0,0008) = 1,0008$  kali jika terjadi peningkatan 1% pasangan berusia subur menggunakan kondom ( $X_3$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
4. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus AIDS meningkat sebesar  $\exp(0,0006) = 1,0006$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk mengikuti kegiatan penyuluhan kesehatan ( $X_4$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.
5. Peluang di tiap kecamatan pada Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tidak memiliki kasus AIDS meningkat sebesar  $\exp(0,0013) = 1,0013$  kali jika terjadi peningkatan 1% penduduk memiliki jaminan Kesehatan (Jamkesmas) ( $X_5$ ) dengan asumsi variabel yang lain konstan.

Estimasi parameter yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan nilai *Akaike Information Criterion Corrected* (AICc). Nilai AICc digunakan apabila tujuan dari pemodelan regresi adalah untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi. Berdasarkan Lampiran 14, nilai AICc didapatkan sebesar 317,96. Sehingga dapat disimpulkan bahwa data jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo layak menggunakan metode BZIPIGR.

## **BAB 5**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **5.1. Kesimpulan**

Berdasarkan hasil penelitian dari data analisis pada jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo dengan menggunakan model BZIPIGR maka bisa disimpulkan bahwa.

1. Penaksiran estimasi parameter model BZIPIGR dilakukan dengan menggunakan metode MLE menghasilkan persamaan yang tidak *close form* sehingga diselesaikan menggunakan iterasi numerik *Berndt Hall Hall Hausman* (BHHH).
2. Pengujian hipotesis serentak model BZIPIGR menggunakan metode MLRT dan menghasilkan statistik uji yang mengikuti distribusi *Chi-square*.
3. Berdasarkan nilai AICc yang didapatkan dari model BZIPIGR merupakan model yang layak untuk diterapkan pada data jumlah kasus HIV dan AIDS. Seluruh variabel prediktor berpengaruh pada jumlah kasus HIV dan AIDS. Variabel yang memiliki pengaruh dapat meningkatkan jumlah kasus HIV dan AIDS yaitu persentase penduduk berpendidikan rendah (SMA). Variabel yang memiliki pengaruh dapat menurunkan jumlah kasus HIV dan AIDS yaitu persentase penduduk yang berumur 25-29 tahun, persentase pasangan usia subur (PUS) dengan pemakaian kondom, persentase kegiatan penyuluhan Kesehatan dan persentase jaminan Kesehatan masyarakat (Jamkesmas).

#### **5.2. Saran**

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah.

1. Penelitian ini menggunakan solusi untuk menyelesaikan penaksiran parameter dengan metode MLE yang tidak *close form* adalah iterasi numerik BHHH dimana belum ada paket program untuk taksiran nilai awal. Sehingga dilakukan *trial error* dengan melihat *mean square error* terkecil. Pengembangan penelitian selanjutnya disarankan dapat menggunakan metode iterasi numerik lainnya seperti interpolasi linear, metode *scant* dan lainnya.

2. Saran untuk Dinas Kesehatan Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo dapat lebih memperhatikan variabel apa saja yang dapat mengurangi jumlah kasus HIV dan AIDS.

## DAFTAR PUSTAKA

- AlMuhayfith, F.E., Alzaid, A.A., dan Omair, M.A. (2016), "On Bivariate Poisson Regression Models." *Journal of King Saud University*, Vol.28, No.2, hal. 178-189.
- Bedrick, E.J. dan Tsai, C.L (1994), "Model Selection for Multivariate Regression in Small Samples", *Biometrics*, Vol. 50, No. 1, hal. 226-231.
- Cameron, A.C & Trivedi, P.K. (1998), *Regression Analysis of Count Data*. Cambridge University Press, USA
- Cameron, C., dan Trivedi, P. K. (2005). *Microeconomic Methods and applications*. UK: Cambridge University Press.
- Consul, P.C. dan Famoye, F. (1992), "Generalized Poisson Regression Model", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 21, No. 1, hal. 89109.
- Dean, C., Lawless, J. F. dan Willmot, G.E. (1989a), "A Mixed Poisson-inverse-Gaussian Regression Model", *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 17, No. 2, hal. 171-181.
- Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur (2014), Profil Kesehatan Provinsi Jawa Timur 2014, Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Timur, Surabaya.
- Famoye, F. dan Singh, K.P. (2006), "Zero-Inflated Generalized Poisson Regression Model with an Application to Domestic Violence Data", *Journal of Data Science 4*, hal. 117-130.
- Gujarati, D.N. (2004), *Basic Econometrics*, 4<sup>th</sup> ed, McGraw Hill, New York.
- Hilbe, J.M. (2007), *Negative Binomial Regression*, 1st edition, Cambridge University, Press., New York.
- Hilbe, J.M. (2014), *Modeling Count Data*, Cambridge University Press, New York.
- Hu, M.C., Pavlicova, M. dan Nunes, E.V. (2011), "Zero-Inflated and Hurdle Models of Count Data with Extra Zeros: Examples from an HIV-Risk Reduction Intervention Trial", *The American Journal of Drug and Alcohol Abuse*, Vol. 37, hal. 367-375.
- Jung, C. R. & Winkelman, R. (1993), "Two Aspect of Labor Mobility: A Bivariate Poisson Regression Approach", *Journal Emperical Economics*, 543-556.

- Karlis, D. dan Xekalaki, E. (2000), "A Simulation Comparison of Several Procedures for Testing the Poisson Assumption", *The Statistician*, Vol. 49, No. 3, hal. 355-382.
- Karlis, D. dan Nikoloulopoulos, E. (2005), "Mixed Poisson Distribution. International Statistical Review", Vol.73, No.1, hal.35-58.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (2014), *Situasi dan Analisis HIV dan AIDS*, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta Selatan.
- Lambert, D. (1992), "Zero-Inflated Poisson Regression with an Application to Defects in Manufacturing", *Technometrics*, Vol. 34, No. 1, hal. 1-14.
- Pangulimang, J., Puhadi, dan Sutikno (2016), "Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically Weighted Bivariate Zero-Inflated Poisson", *Proceeding of 3<sup>rd</sup> International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Science*, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, hal. 73-78.
- Purnamasari, I. (2016), *Penaksiran Parameter dan Statistik Uji dalam Model Regresi Geographically Weighted Poisson inverse Gaussian*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Rahayuning, H.A.R. dan Puhadi (2020), *Pemodelan menggunakan Regresi Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian (Studi Kasus: Jumlah Kematian Ibu Nifas di Karesidenan Pekalongan Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017)*, Skripsi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Rantau, D.C.M dan Zain, I. (2013), "Analisis Regresi Double Hurdle terhadap Faktor-faktor yang Mempengaruhi Partisipasi Perempuan Kawin dalam Kegiatan Ekonomi di Jawa Timur", *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol. 2, No.2.
- Ratnasari, N.T. dan Puhadi. (2014), "Pemodelan Faktor yang Mempengaruhi Jumlah HIV dan AIDS Propinsi Jawa Timur Menggunakan Regresi Poisson Bivariat", *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, Vol. 2, No.2, hal. 213-218.
- Ridout, M., Demetrio, C.G.B., dan Hinde, J. (1998), "Models for Count Data with Many Zeros", *Proceedings of the XIXth International Biometric Conference*, hal. 179-192.

- Shoukri, M.M., Asyali, M.H., Vandorp, R. dan Kelton, R. (2004), “The Poisson Inverse Gaussian Regression Model in the Analysis of Clustered Counts Data”. *Journal of Data Science*, Vol. 2, No. 2, hal. 17-32.
- Stasinopoulos, D. M., & Rigby, R. A. (2007), “Generalized Additive Models for Location Scale and Shape (GAMLSS) in R”. *Journal of Statistical Software*.
- Syafi’i, S.I., (2013). Minimalisasi Penuluran HIV dan AIDS di Lokalisasi PSK Surabaya. Intstitut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Triola, M. (2010), *Elementary Statistics*. 11th edition, Addison Wesley, Press., New York.
- Umami, R.L. (2015), Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Bivariate Zero-Inflated Poisson Regression (Studi Kasus: Jumlah Kasus Penderita HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012), Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Widiari, S.M. (2016), *Penaksiran Parameter dan Statistik Uji dalam Model Regresi Poisson Inverse Gaussian (PIG) (Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013)*, Program Pasca Sarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Wijaya, S.U. (2017), *Pendugaan Parameter dan Pengujian Hipotesis pada Bivariate Poisson Inverse Gaussian Regression (Studi Kasus: Jumlah Kasus Baru HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo Tahun 2012)*, Program Pasca Sarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Zhang, C., Tian, G. dan Huang, X. (2015), “Two New Bivariate Zero-Inflated Generalized Poisson Distribution with a Flexible Correlation Structure”, *Statistics, Optimization and Information Computing*, Vol. 3, hal. 105-137
- Zha, L., Lord, D. dan Zou, Y. (2014), “The Poisson Inverse Gaussian (PIG) Generalized Linear Regression Model for Analyzing Motor Vehicle Crash Data”, *Journal of Transportation Safety and Security*, DOI:20.2080/19439962.2014.977502.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Data jumlah kasus HIV dan AIDS di Kabupaten Trenggalek dan Ponorogo tahun 2012

No	Kecamatan	$Y_1$	$Y_2$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
1	Badengan	0	0	7,056	12,664	1,434	0,8782	48,449
2	Balong	0	0	7,055	12,84	1,611	0,5919	58,09
3	Bedungan	4	2	7,083	21,11	2,97	0,593	44,921
4	Bungkal	3	2	6,771	9,456	3,953	0,809	55,551
5	Dongko	2	2	6,837	21,393	2,082	0,798	37,548
6	Durenan	2	1	6,961	23,436	2,701	0,12	49,768
7	Gandusari	0	0	6,034	15,553	4,621	0,041	37,585
8	Jambon	0	0	7,058	12,036	0,725	0,2974	39,125
9	Jetis	1	1	7,056	12,296	3,198	0,3752	39,014
10	Kampak	4	1	6,827	16,562	2,658	0,374	34,87
11	Karangan	2	2	6,229	15,183	3,725	0,613	37,02
12	Mlarak	0	0	7,055	12,456	0,431	0,1779	33,747
13	Mujungan	0	0	6,318	10,877	4,072	0,731	37,712
14	Ngebel	0	0	7,056	12,643	0,153	0,0943	58,866
15	Ngerayun	0	0	5,896	17,081	3,763	0,647	44,436
16	Panggul	1	1	6,028	11,071	2,92	0,728	51,234
17	Pogalan	1	1	7,458	25,746	3,216	1,401	33,74
18	Pudak	0	0	7,268	6,491	0,331	2,512	60,98
19	Pule	2	1	5,723	17,811	6,612	0,182	52,243
20	Sambit	2	1	6,175	10,924	2,142	0,856	41,236
21	Sawoo	1	1	6,357	13,766	2,409	0,781	46,328
22	Slahung	0	0	6,906	14,499	5,152	0,359	44,214
23	Sooko	0	0	6,245	9,296	1,406	1,023	48,363
24	Suruh	1	1	7,144	6,789	1,096	0,088	41,707
25	Trenggalek	4	4	7,821	34,954	9,121	0,764	21,615
26	Tugu	1	1	7,337	25,927	13,313	0,352	24,591
27	Watulimo	0	0	5,711	13,748	2,821	1,112	31,253

**Lampiran 2.** Fungsi kepadatan peluang BZIPIGR

$$A_i = \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + O_1 + O_2 + O_3$$

dimana:

$$O_1 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2 \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \tau + 1} \right)$$

$$O_2 = \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left( 2 \tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 1 \right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 1} \right)$$

$$O_3 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left( 2 \tau \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + 1 \right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \tau \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + 1} \right)$$

$$B_i = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} e^{\frac{1}{\tau}} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2 \tau \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} P_1$$

dimana:

$$P_1 = \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_1} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_2} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \tau \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + 1} \right)}{\left( \sqrt{1 + 2 \tau \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right)} \right)^{y_1 + y_2} y_1! y_2!}$$

**Lampiran 3.** Fungsi ln *likelihood*  $L(\Omega)$  BZIPIGR

$$\begin{aligned} \ln A_i &= \ln \left( \prod_{i=1}^n P((y_{1i} = 0, y_{2i} = 0) | \boldsymbol{\beta}_h, \theta_h, \tau; h = 1, 2) \right) \\ &= \ln \prod_{i=1}^n \left( \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + O_1 + O_2 + O_3 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} + O_1 + O_2 + O_3 \right) \end{aligned}$$

dimana:

$$O_1 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2 \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \tau + 1} \right)$$

$$O_2 = \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 1} \right)$$

$$O_3 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
\ln B_i(\boldsymbol{\beta}_h, \theta_h, \tau; h=1, 2) &= \ln \left( \prod_{i=1}^n P(y_{1i}, y_{2i} \neq 0 \mid \boldsymbol{\beta}_h, \theta_h, \tau; h=1, 2) \right) \\
&= \ln \prod_{i=1}^n \left( \frac{\frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right)^{\frac{1}{2}}}}{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_1} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_2} \exp(\tau^{-1}) K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right)} \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\left( \sqrt{1 + 2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))} \right)^{y_1 + y_2} y_1! y_2!} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \right) + \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) + \ln \left( \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_1} \right) + \ln \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)^{y_2} \right) + \ln \left( \exp(\tau^{-1}) \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right) \right) - \ln \left( \left( \sqrt{1 + 2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))} \right)^{y_1 + y_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \ln(y_{1i}!) - \ln(y_{2i}!) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \right) + \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + y_{1i} \ln \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + y_{2i} \ln \left( \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) + \tau^{-1} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( K_{-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right) \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \ln \left( \sqrt{1 + 2\tau (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))} \right) \right. \\
&\quad \left. - \ln(y_{1i}!) - \ln(y_{2i}!) \right)
\end{aligned}$$

#### Lampiran 4. Turunan pertama fungsi ln *likelihood* BZIPIGR

Turunan pertama  $A$  terhadap  $\beta_1$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \beta_1^T} = \frac{1}{A_i} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} + \frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} + \frac{\partial A_4}{\partial \beta_1} \right]$$

Dimana:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = p_1(\mathbf{x}_i) p_2(\mathbf{x}_i)$$

$$A_2 = (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1})$$

$$A_3 = p_2(\mathbf{x}_i) (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1})$$

$$A_4 = (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1})$$

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_i^T} = \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i)\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1) + p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1) + (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1)}$$

$$\left[ \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} - \frac{\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \right]$$

$$+ \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left[ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{-\tau}{2} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \bar{x}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) + \frac{\tau}{(1 + 2\tau\lambda_{1i})^{\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \mathbf{x}_i} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left[ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \mathbf{x}_i \right]$$

$$+ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{-\tau}{2} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \mathbf{x}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) + \frac{\tau}{(1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \mathbf{x}_i} \right]$$

Turunan pertama A terhadap  $\boldsymbol{\beta}_2$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{1}{A_i} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} + \frac{\partial A_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} + \frac{\partial A_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \right]$$

Dimana:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = p_1(\mathbf{x}_i) p_2(\mathbf{x}_i)$$

$$A_2 = (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1})$$

$$A_3 = p_2(\mathbf{x}_i) (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1})$$

$$A_4 = (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1})$$

$$\frac{\partial \ln L(A)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i) p_2(\mathbf{x}_i) + (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1}) + p_2(\mathbf{x}_i) (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1}) + (1 - p_1(\mathbf{x}_i)) (1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1})} \left[ \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) - \theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) (1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \right. \\ \left. + \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \tau (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(1 + 2\tau\lambda_{2i})^{\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right] \right] \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \tau (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right] \right] \end{bmatrix}$$

Turunan pertama  $A$  terhadap  $\theta_1$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{A_i} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial A_3}{\partial \theta_1} + \frac{\partial A_4}{\partial \theta_1} \right]$$

Dimana:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i)$$

$$A_2 = (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1})$$

$$A_3 = p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1})$$

$$A_4 = (1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1})$$

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\left[ \begin{array}{l} p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1}) + \\ p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1}) + \\ (1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1}) \end{array} \right]} \left[ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \\ + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \end{array} \right]$$

Turunan pertama  $A$  terhadap  $\theta_2$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(A_i)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{A_i} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \theta_2} + \frac{\partial A_3}{\partial \theta_2} + \frac{\partial A_4}{\partial \theta_2} \right]$$



Dimana:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i)$$

$$A_2 = (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i)\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}+1})$$

$$A_3 = p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1})$$

$$A_4 = (1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1})$$

$$\frac{\partial \ln L(A)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{\left[ \begin{array}{l} p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i)\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}+1}) + \\ p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1}) + \\ (1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1}) \end{array} \right]} \left[ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\ + \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}+1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1}\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \end{array} \right]$$

Turunan pertama  $A$  terhadap  $\tau$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(A)}{\partial \tau} = \frac{1}{A_i} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + \frac{\partial A_3}{\partial \tau} + \frac{\partial A_4}{\partial \tau} \right]$$

Dimana:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_1 = p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i)$$

$$A_2 = (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i)\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{2i} + 1})$$

$$A_3 = p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{1i} + 1})$$

$$A_4 = (1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(A)}{\partial \tau} = & \left[ \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i)\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1) +} \right. \\
& \left. \frac{p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1) +}{(1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i))\left(\frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\tau^{-1})K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1)} \right] \\
& + \left[ \frac{\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)}{1+\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1+\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)} \right. \\
& + \left. \frac{\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)}{1+\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1+\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)} \right] \\
& + \left[ \frac{1}{1+\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1+\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)} \right. \\
& + \left. \frac{1}{1+\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)} \frac{1}{1+\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned}
& \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}} \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^2} \right) \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{2i}}{2} (2\lambda_{2i}\tau+1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_{2i}\tau+1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}} \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{2i}}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{\lambda_{2i}}{2} \right) \right. \\
& \left. \left( (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{5}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} (-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}} \right) \right]
\end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned}
& \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}} \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^2} \right) \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{1i}}{2} (2\lambda_{1i}\tau+1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_{1i}\tau+1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}} \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau\lambda_{1i}}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{\lambda_{1i}}{2} \right) (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{5}{4}} \right. \\
& \left. \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} (-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}} \right]
\end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{aligned}
& \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})} \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^2} \right) \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})} \\
& + \frac{1}{1+\exp(-\theta_2\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1+\exp(-\theta_1\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}{2} (2(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})\tau+1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})\tau+1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}} \\
& + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}+1 \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}{2} \right) (1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \right. \\
& \left. \exp(-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})} + \left( \frac{\pi}{2}\tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} (-\tau^{-1})\sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})} \right]
\end{aligned} \right]$$

Turunan pertama  $B$  terhadap  $\beta_1$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(B_i)}{\partial \beta_1^T} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))^2} + \frac{1}{2(2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right) + y_{1i} (\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \left( \left( -K_{y_1+y_2+\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)}{\left( \sqrt{2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)) + 1} \right)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \left( 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1)) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \right) - \tau(y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1)} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right) \right] \right.$$

Turunan pertama  $B$  terhadap  $\beta_2$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(B_i)}{\partial \beta_2^T} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2))^2} + \frac{1}{2(2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) \mathbf{x}_i \right) + y_{2i} (\mathbf{x}_i^T \beta_2) \mathbf{x}_i \right) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \left( \left( -K_{y_1+y_2+\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)}{\left( \sqrt{2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)) + 1} \right)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( \left( 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) \mathbf{x}_i \right) \right] \right.$$

Turunan pertama  $B$  terhadap  $\theta_1$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(B_i)}{\partial \theta_1} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1))^2} \right) \right]$$

Turunan pertama  $B$  terhadap  $\theta_2$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(B_i)}{\partial \theta_2} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{(-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \right) \right]$$

Turunan pertama  $B$  terhadap  $\tau$  yaitu

$$\frac{\partial \ln L(B_i)}{\partial \tau} = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{(2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right) + (-\tau^{-2}) \right) \right) + \left( \left( -K_{y_1+y_2+\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)}{\left( \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}) + 1} \right)} \right) \right) \right) \left( \frac{\left( \frac{(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}{2} (2(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})\tau + 1)^{-\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})\tau + 1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\tau} \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} (2\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 2\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right)$$

Sehingga turunan pertama masing-masing parameter dari fungsi *ln likelihood* sebagai berikut:

Turunan pertama  $\ell$  terhadap  $\beta_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \beta_1^T} = & \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1) +} \right. \\
& \left. p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1) + \right. \\
& \left. (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1) \right] \\
& \left[ \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2) - \theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2) (1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))^2} \right. \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))^2} \\
& + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)} \exp(\tau^{-1}) + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \tau (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{-\tau}{2} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \bar{\mathbf{x}}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) + \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{(1 + 2\tau\lambda_{1i})^{\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}})} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right] \right] \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \beta_2)} \exp(\tau^{-1}) + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))^2} \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \tau (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{-\tau}{2} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \right. \\
& \left. \left. + (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((- \tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right] \right] \\
& + \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{-\theta_1 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))}{(1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \beta_1))^2} + \frac{1}{2(2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2))) \right)^{\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i + y_{1i} (\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right] + \\
& \left( \left( -K_{y_1 + y_2 + \frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1) + \frac{\tau(y_1 + y_2 - \frac{1}{2}) K_{y_1 + y_2 - \frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1)}{\sqrt{2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) + 1)}} \right) \right. \\
& \left. \left( (2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2) + 1))^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \right) - \tau(y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_2)} \exp(\mathbf{x}_i^T \beta_1) \mathbf{x}_i \right)
\end{aligned}$$

Turunan pertama  $\ell$  terhadap  $\beta_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \beta_2^T} = & \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1-p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1) + \right. \\
& \left. p_2(\mathbf{x}_i)(1-p_1(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1) + \right. \\
& \left. (1-p_1(\mathbf{x}_i))(1-p_2(\mathbf{x}_i)) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1) \right] \\
& + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) - \theta_2 \bar{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\
& + \frac{\exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \\
& + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \bar{x}_i \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}}) + \right. \\
& \left. (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_{2i}}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right] \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_{1i}}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1)} \exp(\tau^{-1}) + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{3}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \\
& + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) + \right. \\
& \left. (1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp((-\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right] \\
& + \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{-\theta_2 \mathbf{x}_i^T (\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))}{(1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2))^2} + \frac{1}{2(2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1+2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)))^{\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right) + y_{2i} (\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right] \\
& + \sum_{i=1}^n \left[ \left( -K_{\frac{y_1+y_2+1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{\frac{y_1+y_2-1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1)}{\left( \sqrt{2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1} \right)} \right) \right. \\
& \left. \left( \left( 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1+2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right)
\end{aligned}$$





Turunan pertama  $\ell$  terhadap  $\tau$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ell}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n (1 - b_i) & \left[ \frac{1}{p_1(\mathbf{x}_i)p_2(\mathbf{x}_i) + (1 - p_2(\mathbf{x}_i))p_1(\mathbf{x}_i) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1) +} \right. \\
 & \left. \frac{1}{p_2(\mathbf{x}_i)(1 - p_1(\mathbf{x}_i)) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1) +} \right. \\
 & \left. \frac{1}{(1 - p_1(\mathbf{x}_i))(1 - p_2(\mathbf{x}_i)) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1)} \right] \\
 & + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_1)} \left[ \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\
 & + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{2i}}{2} (2\lambda_{2i}\tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_{2i}\tau + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} \\
 & + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{2i}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\lambda_{2i}}{2}\right) \right) \\
 & \left. \left( (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{3}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{2i})^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{2i}}) \right) \right] \\
 & + \frac{\exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_2)}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_1)} \left[ \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\
 & + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{1i}}{2} (2\lambda_{1i}\tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_{1i}\tau + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} \\
 & + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_{1i}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\lambda_{1i}}{2}\right) (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{5}{4}} \right) \\
 & \left. \left( \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_{1i})^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_{1i}}) \right) \right] \\
 & + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_2)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1 \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}_1)} \left[ \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\
 & + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \\
 & \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}{2} (2(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})\tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})\tau + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} + \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi\tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}{2}\right) (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{5}{4}} \right) \\
 & \left. \left( \exp(-(\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) + \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i}))^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1})\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_{1i} + \lambda_{2i})}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{(2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2) \mathbf{x}_i \right) + (-\tau^{-2}) \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n b_i \left( \left( -K_{y_1+y_2+\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})+1}) + \frac{\tau(y_1+y_2-\frac{1}{2})K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})+1})}{(\sqrt{2\tau(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})+1})} \right) \right) \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})}{2} (2(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})\tau+1)^{-\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_{1i}+\lambda_{2i})\tau+1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 2\tau \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)} (2\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1) + 2\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2)) \right)
\end{aligned}$$

**Lampiran 5.** Fungsi kepadatan peluang di bawah  $H_0$   $L(\omega)$  BZIPIGR

$$C_i = \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} + O_1 + O_2 + O_3$$

dimana:

$$O_1 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\exp(\beta_{20})\tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{-1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\exp(\beta_{20})\tau + 1} \right)$$

$$O_2 = \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau \exp(\beta_{10}) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{-1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau \exp(\beta_{10}) + 1} \right)$$

$$O_3 = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{-1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1} \right)$$

$$D_i = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_1)} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_2)} e^{\frac{1}{\tau}} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} P_1$$

dimana:

$$P_1 = \frac{\exp(\beta_{20})^{y_1} \exp(\beta_{20})^{y_2} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{-1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1} \right)}{\left( \sqrt{1 + 2\tau (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20}))} \right)^{y_1 + y_2} y_1! y_2!}$$

**Lampiran 6.** Fungsi *ln likelihood* di bawah  $H_0$   $L(\omega)$  BZIPIGR

$$\begin{aligned}\ln C_i &= \ln \left( \prod_{i=1}^n P(y_{10} = 0, y_{20} = 0) \mid \boldsymbol{\beta}_{h0}, \theta_{h0}, \tau; h = 1, 2 \right) \\ &= \ln \prod_{i=1}^n \left( \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} + O_1 + O_2 + O_3 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} + O_1 + O_2 + O_3 \right)\end{aligned}$$

dimana:

$$\begin{aligned}O_1 &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2 \exp(\boldsymbol{\beta}_{20}) \tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2 \exp(\boldsymbol{\beta}_{20}) \tau + 1} \right) \\ O_2 &= \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau \exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau \exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + 1} \right) \\ O_3 &= \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) (2\tau (\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + 1)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + 1} \right) \\ \ln D_i &= \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \right) + \ln \left( \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau (\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + 1} \right) \right) \\ &\quad \left( + y_{1i} \ln(\exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + y_{2i} \ln(\exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + \tau^{-1} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( K_{\frac{1}{2}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau (\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + 1} \right) \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \ln \left( \sqrt{1 + 2\tau (\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20}))} \right) \right) \\ &\quad \left( - \ln(y_{1i}!) - \ln(y_{2i}!) \right)\end{aligned}$$

**Lampiran 7.** Turunan pertama fungsi ln *likelihood* di bawah  $H_0$   $L(\omega)$  BZIPIGR

Turunan pertama  $l$  terhadap  $\beta_{10}$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_{10}} = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1 p_2 + (1-p_2) p_1 \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau \lambda_2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau \lambda_2 + 1}) + p_2 (1-p_1) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau \lambda_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau \lambda_1 + 1}) + (1-p_1)(1-p_2) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1})} \right] \left[ \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau \lambda_1)^{\frac{1}{4}} \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau \lambda_1} \right) \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1 + 2\tau \lambda_1)^{-\frac{3}{4}} \exp(\beta_{10}) + \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau \lambda_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1 + 2\tau \lambda_1)^{\frac{5}{4}} \exp(\beta_{10}) \mathbf{x}_i \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau \lambda_1} \right) + (1 + 2\tau \lambda_1)^{\frac{1}{4}} \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau \lambda_1} \right) \exp(\beta_{10}) \right] \right] + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{1}{4}} \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1 + 2\tau \lambda_1)^{-\frac{3}{4}} \exp(\beta_{10}) + \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{5}{4}} \exp(\beta_{10}) \mathbf{x}_i \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) + (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{1}{4}} \exp\left( (-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) \exp(\beta_{10}) \right] \right] \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2(2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\beta_{10}) \right) + y_{1i}(\beta_{10}) \right) + \left( \left( -K_{\frac{y_1 + y_2 + 1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}) + \frac{\tau \left( y_{1i} + y_{2i} - \frac{1}{2} \right) K_{\frac{y_1 + y_2 - 1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1})}{\left( \sqrt{2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1} \right)} \right) \right) \right]$$

$$\left[ \left( (2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta_{10}) \right) - \tau(y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\beta_{10}) + 2\tau \exp(\beta_{20})} \exp(\beta_{10}) \right]$$

Turunan pertama  $I$  terhadap  $\beta_{20}$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_{20}^T} = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1 p_2 + (1-p_2) p_1 \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_2} + 1) + p_2 (1-p_1) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_1} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_1} + 1) + (1-p_1)(1-p_2) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \exp(\tau^{-1}) \left[ \left(\frac{\pi}{2} \tau\right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau\lambda_2)^{\frac{1}{4}} \exp\left((- \tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_2}\right) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_2)^{-\frac{3}{4}} \exp(\beta_{20}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \tau\right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_2)^{\frac{5}{4}} \exp(\beta_{20}) \exp\left((- \tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. (1+2\tau\lambda_2)^{\frac{1}{4}} \exp\left((- \tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau\lambda_2}\right) \exp(\beta_{20}) \right] \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{2} \tau\right)^{\frac{1}{2}} (1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{1}{4}} \exp\left(-(\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}\right) \left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (1+2\tau\lambda_2)^{-\frac{3}{4}} \exp(\beta_{20}) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \tau\right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{\tau}{2} (1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{5}{4}} \exp(\beta_{20}) \exp\left((\tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{\frac{1}{4}} \exp\left((- \tau^{-1}) \sqrt{1+2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}\right) \exp(\beta_{20}) \right] \right] \right] \\ + \sum_{i=1}^n b_i \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2(2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1+2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})))^{\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\beta_{20}) \right) + y_{2i}(\beta_{20}) \right) + \right. \\ \left. \left( \left( -K_{\frac{y_1+y_2+\frac{1}{2}}{\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1 \right) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{\frac{y_1+y_2-\frac{1}{2}}{\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1}} \left( \tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} + 1 \right)}{\left( \sqrt{2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1} \right)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left( (2\tau(\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20})) + 1)^{\frac{1}{2}} \exp(\beta_{20}) \right) - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1+2\tau \exp(\beta_{10}) + 2\tau \exp(\beta_{20})} 2\tau \exp(\beta_{20}) \right) \right] \right]$$

Turunan pertama  $I$  terhadap  $\theta_{10}$

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_{10}} = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1 p_2 + (1-p_2) p_1 \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}) + p_2 (1-p_1) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}) + (1-p_1)(1-p_2) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1})} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{-\theta_{10} \exp(-\theta_{10})}{(1 + \exp(-\theta_{10}))^2} \right] \right] \\ \left[ \frac{\exp(-\theta_{20}) - \theta_{10} \exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{20}) (1 + \exp(-\theta_{10}))^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} \exp((-r^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) \frac{-\theta_{10} \exp(-\theta_{10})}{(1 + \exp(-\theta_{10}))^2} \right. \\ \left. + \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} \exp((-r^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) \frac{-\theta_{10} \exp(-\theta_{10})}{(1 + \exp(-\theta_{10}))^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} \exp(-r^{-1}\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) \frac{-\theta_{10} \exp(-\theta_{10})}{(1 + \exp(-\theta_{10}))^2} \right]$$

Turunan pertama  $I$  terhadap  $\theta_{20}$

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_{20}} = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \frac{1}{p_1 p_2 + (1-p_2) p_1 \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}) + p_2 (1-p_1) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}) + (1-p_1)(1-p_2) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1})} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{-\theta_{20} \exp(-\theta_{20})}{(1 + \exp(-\theta_{20}))^2} \right] \right] \\ \left[ \frac{\exp(-\theta_{10}) - \theta_{20} \exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{10}) (1 + \exp(-\theta_{20}))^2} \right. \\ \left. + \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} \exp((-r^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) \frac{-\theta_{20} \exp(-\theta_{20})}{(1 + \exp(-\theta_{20}))^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} \exp((-r^{-1})\sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) \frac{-\theta_{20} \exp(-\theta_{20})}{(1 + \exp(-\theta_{20}))^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \exp(\tau^{-1}) \left(\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\tau\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} \exp(-r^{-1}\sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) \frac{-\theta_{20} \exp(-\theta_{20})}{(1 + \exp(-\theta_{20}))^2} \right]$$

Turunan pertama  $I$  terhadap  $\tau$

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n (1-b_i) \left[ \begin{array}{l} p_1 p_2 + (1-p_2) p_1 \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1}) + \\ p_2 (1-p_1) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1}) + \\ (1-p_1)(1-p_2) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(\tau^{-1}) K_{\frac{1}{2}}(\tau^{-1} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \frac{\exp(-\theta_{10})}{1 + \exp(-\theta_{10})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\ + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_2 (2\lambda_2 \tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_2 \tau + 1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}}}{\tau} \\ + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi \tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{\lambda_2}{2} \right) \\ (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{5}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_2)^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_2}) \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \frac{\exp(-\theta_{20})}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\ + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1 (2\lambda_1 \tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2\lambda_1 \tau + 1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}}}{\tau} \\ + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau\lambda_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi \tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{\lambda_1}{2} \right) (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{5}{4}} \\ \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau\lambda_1)^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau\lambda_1}) \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{20})} \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{10})} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) \left( -\frac{\exp(\tau^{-1})}{\tau^{-2}} \right) \\ + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) \\ \left( \frac{2}{\pi \tau} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) (2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau + 1)^{\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_1 + \lambda_2) \tau + 1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{\frac{1}{2}}}{\tau} + \exp(\tau^{-1}) \left( \frac{2}{\pi \tau} \sqrt{2\tau(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} (\pi \tau)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \right) (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{5}{4}} \\ \exp(-(\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) + \left( \frac{\pi}{2} \tau \right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2))^{-\frac{1}{4}} ((-\tau^{-1}) \sqrt{1 + 2\tau(\lambda_1 + \lambda_2)}) \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{(2\tau(\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} (1 + 2\tau(\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})))^{-\frac{1}{2}} 2\tau \exp(\boldsymbol{\beta}_{20}) \right) \right) + (-\tau^{-2}) \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n b_i \left( \left( -K_{y_1+y_2+\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_1+\lambda_2)+1}) + \frac{\tau \left( y_1 + y_2 - \frac{1}{2} \right) K_{y_1+y_2-\frac{1}{2}}(\tau^{-1}\sqrt{2\tau(\lambda_1+\lambda_2)+1})}{(\sqrt{2\tau(\lambda_1+\lambda_2)+1})} \right) \right) \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \left( \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} (2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau + 1)^{-\frac{3}{4}} (\tau)^{\frac{1}{2}} - (2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau + 1)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (\tau)^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (y_{1i} + y_{2i}) \frac{1}{1 + 2\tau \exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + 2\tau \exp(\boldsymbol{\beta}_{20})} (2\exp(\boldsymbol{\beta}_{10}) + 2\exp(\boldsymbol{\beta}_{20})) \right)
\end{aligned}$$

**Lampiran 8.** Pemeriksaan Korelasi antar Variabel

Variabel	$Y_1$	$Y_2$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$Y_2$	0.851					
<i>P-value</i>	0					
$X_1$	0.208	0.307				
<i>P-value</i>	0.297	0.119				
$X_2$	0.501	0.612	0.362			
<i>P-value</i>	0.008	0.001	0.064			
$X_3$	0.302	0.427	0.079	0.647		
<i>P-value</i>	0.126	0.026	0.696	0		
$X_4$	-0.092	-0.012	0.079	-0.131	-0.18	
<i>P-value</i>	0.648	0.952	0.696	0.515	0.369	
$X_5$	-0.231	-0.359	-0.155	-0.57	-0.525	0.183
<i>P-value</i>	0.246	0.066	0.44	0.002	0.005	0.361

**Lampiran 9. Uji Multikolinearitas**

<b>Term</b>	<b>Coef</b>	<b>SE Coef</b>	<b>T-Value</b>	<b>P-Value</b>	<b>VIF</b>
Constant	-1.45	3.59	-0.40	0.690	
X1	0.071	0.499	0.14	0.887	1.22
X2	0.1128	0.0598	1.89	0.073	2.32
X3	-0.007	0.126	-0.06	0.956	1.93
X4	-0.109	0.513	-0.21	0.833	1.06
X5	0.0110	0.0323	0.34	0.737	1.60

<b>Term</b>	<b>Coef</b>	<b>SE Coef</b>	<b>T-Value</b>	<b>P-Value</b>	<b>VIF</b>
Constant	-1.72	2.31	-0.74	0.467	
X1	0.181	0.322	0.56	0.580	1.22
X2	0.0770	0.0386	1.99	0.059	2.32
X3	0.0305	0.0810	0.38	0.710	1.93
X4	0.124	0.331	0.37	0.712	1.06
X5	-0.0013	0.0209	-0.06	0.953	1

**Lampiran 10. Uji Equidisersi**

Kecamatan	$Y_1$	$Y_2$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(y_2 - \bar{y})^2$	$\frac{(y_1 - \bar{y})^2}{y}$	$\frac{(y_2 - \bar{y})^2}{y}$
1	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
2	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
3	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
4	4	1	8.13305898	0.03429355	7.083632019	0.042087542
5	2	2	0.72565158	1.40466392	0.632019116	1.723905724
6	2	1	0.72565158	0.03429355	0.632019116	0.042087542
7	2	2	0.72565158	1.40466392	0.632019116	1.723905724
8	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
9	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
10	2	1	0.72565158	0.03429355	0.632019116	0.042087542
11	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
12	4	4	8.13305898	10.1454047	7.083632019	12.45117845
13	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
14	4	2	8.13305898	1.40466392	7.083632019	1.723905724
15	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
16	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
17	3	2	3.42935528	1.40466392	2.986857826	1.723905724
18	2	1	0.72565158	0.03429355	0.632019116	0.042087542
19	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
20	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
21	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
22	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
23	1	1	0.02194787	0.03429355	0.01911589	0.042087542
24	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
25	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
26	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
27	0	0	1.31824417	0.66392318	1.148148148	0.814814815
Mean	1.148148	0.814815			41.29032258	29.54545455

**Lampiran 11. Uji Serentak Model BZIPIGR**

Uji Serentak Parameter BZIPIGR		
Ghitung 73.18336	Daerah kritis 18.30704	kesimpulan tolak $H_0$ dengan alpha 5%

**Lampiran 12. Uji Parsial Model BZIPIGR**

Uji Parsial Parameter $\beta$ BZIPIGR			
	Z hitung	Daerah kritis	kesimpulan
1	-788.25705980991	0	tolak Ho dengan alpha 5%
2	-68.2004572700956	0	tolak Ho dengan alpha 5%
3	45.4008300557003	0	tolak Ho dengan alpha 5%
4	-29.8865373965626	0	tolak Ho dengan alpha 5%
5	-190.744504914526	0	tolak Ho dengan alpha 5%
6	-10.5835383353264	0	tolak Ho dengan alpha 5%
7	-1294.94073556387	0	tolak Ho dengan alpha 5%
8	-12.3434459665519	0	tolak Ho dengan alpha 5%
9	36.9413865375732	0	tolak Ho dengan alpha 5%
10	-9.28699677852781	0	tolak Ho dengan alpha 5%
11	-6.80622808385629	0	tolak Ho dengan alpha 5%
12	-14.565944507614	0	tolak Ho dengan alpha 5%

Uji Parsial Parameter $\theta$ BZIPIGR		
Z tabel	Daerah kritis	kesimpulan
1 358267.686460785	0	tolak Ho dengan alpha 5%
2 219858.599294794	0	tolak Ho dengan alpha 5%

Uji Parsial Parameter $\tau$ BZIPIGR		
Z tabel	Daerah kritis	kesimpulan
1 61.1306598468518	0	tolak Ho dengan alpha 5%

### Lampiran 13. Syntax BZIPIGR

```
library(gamlss)
library(MASS)
library(MixedPoisson)
library(gaussquad)

data<-read.csv(file.choose(),header=T,sep=",")
maxit=1000
y=as.matrix(data[,1:2])
y1=as.matrix(data[,1])
y2=as.matrix(data[,2])

estdelta1=est.delta(y1+5)
tau0=1/(estdelta1$ll.delta.max)^2
n=nrow(data)
x=as.matrix(cbind(rep(1,n),data[,-c(1,2)]))
p=ncol(x)

t1=lambda_start(y1,x)
beta10=t1$beta

t2=lambda_start(y2,x)
beta20=t2$beta

beta1=as.matrix(beta10)
beta2=as.matrix(beta20)
t=1/(abs(estdelta1$ll.delta.max))
teta1=0.05
teta2=0.057
phi=3.14

###dummy##
b=matrix(0,n,1)
c=matrix(0,n,1)
a=matrix(0,n,2)
for(i in 1:n)
{
  if ((y[i,1]!=0)&(y[i,2]!=0))
  {
    b[i]=1
    c[i]=0
  }
  c[i]=1-b[i]
  a[i,]=cbind(b[i],c[i])
}
b=a[,1]
c=a[,2]

## iterasi
set.seed(100)
eps=100
iterasi=0
while (eps > 0.000000001 && iterasi<500)
{

  ### turunan pertama #####
  gammaawal<- as.matrix(c(beta1,beta2,teta1,teta2,t))
  b1=matrix(0,n,1)
  b2=matrix(0,n,1)
  t1x=as.matrix(c(rep(0.82,1,6)))
  t2x=as.matrix(c(rep(0.87,1,6)))
  b1x=x%*%beta1
```

```

b2x=x%%beta2
xt1=x%%t1x
xt2=x%%t2x
mtxb1=-tb1*(b1x)
mtxb2=-tb2*(b2x)
etxb1=exp(mtxb1)
etxb2=exp(mtxb2)
lambda1=exp(b1x)
lambda2=exp(b2x)
lambda12=exp(b1x)+exp(b2x)
pi1=etxb1/(1+etxb1)
pi2=etxb2/(1+etxb2)
pi10=1/(1+etxb1)
pi20=1/(1+etxb1)
turp1=xt1*pi1*pi10
turp2=xt2*pi2*pi20

#turunan 1/A
a11=matrix(0,n,p)
a21=matrix(0,n,p)
a31=matrix(0,n,p)
a41=matrix(0,n,p)
A1=matrix(0,n,p)
per=matrix(0,n,p)

###untukAB1##
k1=matrix(0,n,p)
k2=matrix(0,n,p)
k12=matrix(0,n,p)
PA11=matrix(0,n,p)
Pa21=matrix(0,n,p)
Pa31=matrix(0,n,p)
Pa32=matrix(0,n,p)
Pa33=matrix(0,n,p)
Pa3=matrix(0,n,p)
Pa41=matrix(0,n,p)
Pa42=matrix(0,n,p)
Pa43=matrix(0,n,p)
Pa4=matrix(0,n,p)
PAB1=matrix(0,n,p)
perAB1=matrix(0,n,p)
c2=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda2[i]+1)*exp(1/t))
k2=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda2[i])
ck2=c2*k2
c1=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda1[i]+1))
k1=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda1[i])
ck1=c1*k1
c12=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*sqrt(phi*t/2)
k12=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda12[i])
ck12=c12*k12
d1=(t/2)*(1+2*t*lambda1[i])^-3/4*lambda1[i]
dk1=d1*k1*x[i,]
e1=- (t/2)*(1+2*t*lambda1[i])^-5/4*lambda1[i]*exp(-
1/t*(sqrt(1+2*t*lambda1[i])))
e2=(1+2*t*lambda12[i])^1/4*exp(-1/t*(1+2*t*lambda12[i]))*lambda1[i]
e11=e1*x[i,]
e21=e2*x[i,]
e=e11+e21
f1=d1*k12*x[i,]
g1=- (t/2)*(1+2*t*lambda12[i])^-5/4*lambda1[i]*exp(-
1/t*(sqrt(1+2*t*lambda12[i])))

```



```

g11=g1*x[i,]
g=g11+e21
###untukBB1##
PB11=matrix(0,n,p)
PB21=matrix(0,n,1)
perBB1=matrix(0,n,p)
i1=matrix(0,n,1)
h1=1/2*sqrt(2*t*lambda12[i]+1)*(1/2*(1+2*t*lambda12[i]))^-
1/2*(2*t*lambda1[i])
h=h1*x[i,]
i1=y1*b1x
for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
z1=(1/t)*sqrt(2*t*lambda1[i])
ky1=sqrt(phi/(2*z1))*exp(-z1)*faktor*(2*z1)^(-m)
z2=(1/t)*sqrt(2*t*lambda2[i])
ky2=sqrt(phi/(2*z2))*exp(-z2)*faktor*(2*z2)^(-m)
z12=(1/t)*sqrt(2*t*lambda12[i])
ky12=sqrt(phi/(2*z12))*exp(-z12)*faktor*(2*z12)^(-m)
}
j1=(t*(y1[i]+y2[i]-1/2)*ky12)/sqrt(2*t*lambda12[i]+1)
j2=1/sqrt(2*t*lambda12[i])*b1x
j=j1*j2
l=t*(y1+y2)*(1/1+2*t*lambda12[i])*b1x
PB21=-k12+j-l
## turunan beta1 #####
for (j in 1:p)
{
for (i in 1:n)
{
#persamaan 1/A
a11[i,]=pi1[i]*pi2[i]
a21[i,]=pi20[i]*pi1[i]*ck2
a31[i,]=pi2[i]*pi10[i]*ck1
a41[i,]=pi20[i]*pi10[i]*ck12
A1[i,]=a11[i,]+a21[i,]+a31[i,]+a41[i,]

#persamaan AB1
PA11[i,]=turp1[i]*pi2[i]
Pa21[i,]=turp1[i]*pi20[i]*ck2
Pa31[i,]=turp1[i]*ck1
Pa32[i,]=pi1[i]*dk1
Pa33[i,]=pi1[i]*e
Pa3[i,]=pi2[i]*exp(1/t)*(Pa31[i,]+Pa32[i,]+Pa33[i,])
Pa41[i,]=turp1[i]*ck12
Pa42[i,]=pi1[i]*f1
Pa43[i,]=pi1[i]*g
Pa4[i,]=pi20[i]*exp(1/t)*(Pa41[i,]+Pa42[i,]+Pa43[i,])
PAB1[i,]=PA11[i,]+Pa21[i,]+Pa3[i,]+Pa4[i,]
perAB1=c[i]*(PAB1/A1)

#perBB1
PB11[i,]=turp1[i,]+h+i1[i,]
PB21
perBB1=b[i]*(PB11[i,]+PB21[i,])
}
}
dbeta1=perAB1+perBB1
dbeta1=ifelse(is.nan(dbeta1),0,dbeta1)
dbeta1

```

```

###untukAB2##
k21=matrix(0,n,p)
k22=matrix(0,n,p)
k212=matrix(0,n,p)
PA211=matrix(0,n,p)
Pa231=matrix(0,n,p)
Pa221=matrix(0,n,p)
Pa222=matrix(0,n,p)
Pa223=matrix(0,n,p)
Pa22=matrix(0,n,p)
Pa241=matrix(0,n,p)
Pa242=matrix(0,n,p)
Pa243=matrix(0,n,p)
Pa24=matrix(0,n,p)
PAB2=matrix(0,n,p)
perAB2=matrix(0,n,p)
c22=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda2[i]+1))
k2=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda2[i])
ck22=c22*k2
c21=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda1[i]+1)*exp(1/t))
k1=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda1[i])
ck21=c21*k1
c212=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))
k12=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda12[i])
ck12=c12*k12
d21=(t/2)*(1+2*t*lambda2[i])^-3/4*lambda2[i]
dk21=d21*k2*x[i,]
e21=- (t/2)*(1+2*t*lambda2[i])^-5/4*lambda2[i]*exp(-
1/t*(sqrt(1+2*t*lambda2[i])))
e22=(1+2*t*lambda2[i])^1/4*exp(-1/t*(1+2*t*lambda12[i]))*lambda2[i]
e211=e21*x[i,]
e221=e22*x[i,]
e2=e211+e221
f21=d21*k12*x[i,]
g21=- (t/2)*(1+2*t*lambda12[i])^-5/4*lambda2[i]*exp(-
1/t*(sqrt(1+2*t*lambda12[i])))
g211=g21*x[i,]
g2=g211+e221

###untukBB2##
PB211=matrix(0,n,p)
PB221=matrix(0,n,1)
perBB2=matrix(0,n,p)
i2=matrix(0,n,1)
h21=1/2*sqrt(2*t*lambda12[i]+1)*(1/2*(1+2*t*lambda12[i]))^-
1/2*(2*t*lambda2[i])
h2=h21*x[i,]
i2=y2*b2x
for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
z1=(1/t)*sqrt(2*t*lambda1[i])
ky1=sqrt(phi/(2*z1))*exp(-z1)*faktor*(2*z1)^(-m)
z2=(1/t)*sqrt(2*t*lambda2[i])
ky2=sqrt(phi/(2*z2))*exp(-z2)*faktor*(2*z2)^(-m)
z12=(1/t)*sqrt(2*t*lambda12[i])
ky12=sqrt(phi/(2*z12))*exp(-z12)*faktor*(2*z12)^(-m)
}

```

```

j21=(t*(y1[i]+y2[i]-1/2)*ky12)/sqrt(2*t*lambda12[i]+1)
j22=1/sqrt(2*t*lambda12[i])*b1x
j2=j21*j22
l2=t*(y1+y2)*(1/1+2*t*lambda12[i])*lambda2[i]
PB221=-k12+j2-l2

## turunan beta2 #####
for (j in 1:p)
{
  for (i in 1:n)
  {
    #persamaan AB2
    PA211[i,]=turp2[i]*pi1[i]
    Pa221[i,]=turp2[i]*ck22
    Pa222[i,]=pi1[i]*dk21
    Pa223[i,]=pi1[i]*e2
    Pa22[i,]=pi1[i]*exp(1/t)*(Pa221[i,]+Pa222[i,]+Pa223[i,])
    Pa231[i,]=turp2[i]*pi10[i]*ck21
    Pa241[i,]=turp2[i]*ck12
    Pa242[i,]=pi1[i]*f21
    Pa243[i,]=pi1[i]*g2
    Pa24[i,]=pi10[i]*exp(1/t)*(Pa241[i,]+Pa242[i,]+Pa243[i,])
    PAB2[i,]=PA211[i,]+Pa22[i,]+Pa231[i,]+Pa24[i,]
    perAB2=c[i]*(PAB2/A1)

    #perBB2
    PB211[i,]=turp2[i,]+h+i2[i,]
    PB21
    perBB1=b[i]*(PB11[i,]+PB21[i])
  }
}
dbeta2=perAB2+perBB2
dbeta2=ifelse(is.nan(dbeta2),0,dbeta2)
dbeta2

###untukAT1##
turpt1=(-b1x)*pi1[i]*pi10[i]
k1=matrix(0,n,p)
k2=matrix(0,n,p)
k12=matrix(0,n,p)
PA11=matrix(0,n,p)
Pat21=matrix(0,n,p)
Pat31=matrix(0,n,p)
Pat41=matrix(0,n,p)
PA1=matrix(0,n,p)
perAt1=matrix(0,n,p)
c2=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda2[i]+1)*exp(1/t))
k2=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda2[i])
ck2=c2*k2
c1=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda1[i]+1))
k1=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda1[i])
ck1=c1*k1
c12=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*sqrt(phi*t/2)
k12=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda12[i])
ck12=c12*k12

###untukBT1##
perBt1=matrix(0,n,p)

## turunan teta1 #####

```

```

for (j in 1:p)
{
  for (i in 1:n)
  {

    #persamaan AT1
    PAt11[i,]=turpt1[i]*pi2[i]
    Pat21[i,]=turpt1[i]*pi20[i]*ck2
    Pat31[i,]=turpt1[i]*pi2[i]*ck1
    Pat41[i,]=turpt1[i]*pi20[i]*ck12
    PAt1[i,]=PAt11[i]+Pat21[i]+Pat31[i,]+Pat41[i]
    perAt1=c[i]*(PAt1/A1)

    #perBt1
    perBt1=b[i]*turpt1[i]
  }
}
dteta1=perAt1+perBt1
dteta1=ifelse(is.nan(dteta1),0,dteta1)
dteta1
sumteta1=sum(dteta1)

###untukAT2##
turpt2=(-b2x)*pi2[i]*pi20[i]
k1=matrix(0,n,p)
k2=matrix(0,n,p)
k12=matrix(0,n,p)
PAt12=matrix(0,n,p)
Pat22=matrix(0,n,p)
Pat32=matrix(0,n,p)
Pat42=matrix(0,n,p)
PAt2=matrix(0,n,p)
perAt2=matrix(0,n,p)
c2=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda2[i]+1)*exp(1/t)
k2=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda2[i])
ck2=c2*k2
c1=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda1[i]+1)
k1=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda1[i])
ck1=c1*k1
c12=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*sqrt(phi*t/2)
k12=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-1/4)*exp(-
1/t)*sqrt(1+2*t*lambda12[i])
ck12=c12*k12

###untukBT2##
perBt2=matrix(0,n,p)

## turunan teta2 #####
for (j in 1:p)
{
  for (i in 1:n)
  {

    #persamaan AT2
    PAt12[i,]=turpt2[i]*pi1[i]
    Pat22[i,]=turpt2[i]*pi10[i]*ck2
    Pat32[i,]=turpt2[i]*pi1[i]*ck1
    Pat42[i,]=turpt2[i]*pi10[i]*ck12
    PAt2[i,]=PAt12[i]+Pat22[i]+Pat32[i]+Pat42[i]
    perAt2=c[i]*(PAt2/A1)
  }
}

```

```

#perBt1
  perBt2=b[i]*turpt2[i]
}
}
dteta2=perAt2+perBt2
dteta2=ifelse(is.nan(dteta2),0,dteta2)
dteta2
sumteta2=sum(dteta2)

###untukAta##
Pata1=matrix(0,n,p)
Pata2=matrix(0,n,p)
Pata3=matrix(0,n,p)
PAta1=matrix(0,n,p)
perAta1=matrix(0,n,p)
c2=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda2[i]+1))
k2=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-1/4)*sqrt(1+2*t*lambda2[i])
ck2=c2*k2
c1=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda1[i]+1))
k1=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-1/4)*sqrt(1+2*t*lambda1[i])
ck1=c1*k1
c12=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*sqrt(phi*t/2)
k12=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-1/4)*sqrt(1+2*t*lambda12[i])
ck12=c12*k12
dt11=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda2[i]+1))*k2*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
dt121=k2*sqrt(2/phi*t)
dt122=(lambda2[i]/2)*((1+2*t*lambda2[i])^-3/4)*sqrt(t)
dt123=(1+2*t*lambda2[i])^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
dt124=(dt122-dt123)/t
dt12=dt121*dt124
dt131=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lambda2[i])^-
1/4)*exp((1+2*t*lambda2[i]))
dt132=sqrt(phi*t/2)*(-(lambda2[i]/2))*(1+2*t*lambda2[i])^-
5/4*exp((1+2*t*lambda2[i]))
dt133=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lambda2[i])^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lambda2[i]))
dt13=(dt131+dt132+dt133)
dt=dt11+dt12+dt13
et11=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda1[i]+1))*k1*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
et121=k1*sqrt(2/phi*t)
et122=(lambda1[i]/2)*((1+2*t*lambda1[i])^-3/4)*sqrt(t)
et123=(1+2*t*lambda1[i])^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
et124=(et122-et123)/t
et12=et121*et124
et131=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lambda1[i])^-
1/4)*exp((1+2*t*lambda1[i]))
et132=sqrt(phi*t/2)*(-(lambda1[i]/2))*(1+2*t*lambda1[i])^-
5/4*exp((1+2*t*lambda1[i]))
et133=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lambda1[i])^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lambda1[i]))
et13=c1*(et131+et132+et133)
et=et11+et12+et13
ft11=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*k1*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
ft121=k12*sqrt(2/phi*t)
ft122=(lambda12[i]/2)*((1+2*t*lambda12[i])^-3/4)*sqrt(t)
ft123=(1+2*t*lambda12[i])^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
ft124=(ft122-ft123)/t
ft12=ft121*ft124
ft131=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lambda12[i])^-
1/4)*exp((1+2*t*lambda12[i]))
ft132=sqrt(phi*t/2)*(-(lambda12[i]/2))*(1+2*t*lambda12[i])^-
5/4*exp((1+2*t*lambda12[i]))
ft133=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lambda12[i])^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lambda12[i]))
ft13=c12*(ft131+ft132+ft133)
ft=ft11+ft12+ft13

```

```

###untukBB1##
PBta1=matrix(0,n,1)
PBta2=matrix(0,n,1)
perBta1=matrix(0,n,1)
u1=1/2*((-1/t)+sqrt(2*t*lambda12[i]+1))*(1/2*(1+2*t*lambda12[i]))^-
1/2*(2*t*lambda2[i])
u=u1*x[i,]
for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
z1=(1/t)*sqrt(2*t*lambda1[i])
ky1=sqrt(phi/(2*z1))*exp(-z1)*faktor*(2*z1)^(-m)
z2=(1/t)*sqrt(2*t*lambda2[i])
ky2=sqrt(phi/(2*z2))*exp(-z2)*faktor*(2*z2)^(-m)
z12=(1/t)*sqrt(2*t*lambda12[i])
ky12=sqrt(phi/(2*z12))*exp(-z12)*faktor*(2*z12)^(-m)
}
v11=(t*(y1[i]+y2[i]-1/2)*ky12)/sqrt(2*t*lambda12[i]+1)
v1=-ky12+v11
v21=((lambda1[i]+lambda2[i])/2*(1+2*t*lambda12[i]))^-3/4*sqrt(t))-
((1+2*t*lambda12[i])^1/4*1/2*t^-1/2)
v2=v21/t
v3=(y1[i]+y2[i])/2*1/(1+2*t*lambda12[i])*lambda12[i]
v=v1+v2+v3
## turunan tau1 #####
for (j in 1:p)
{
for (i in 1:n)
{
#persamaan Atau1
Pata1[i,]=pi1[i]*pi20[i]*dt
Pata2[i,]=pi10[i]*pi2[i]*et
Pata3[i,]=pi10[i]*pi20[i]*ft
PAta1[i,]=Pata1[i]+Pata2[i]+Pata3[i,]
perAta1=c[i]*(PAta1/A1)

#perBB1
perBta1=(u+v)*b[i]
}
}
dtau1=perAta1+perBta1
dtau=ifelse(is.nan(dtau1),0,dtau1)
dtau1
sumtau=sum(dtau)
sumtau

beta1b=rep(NA,p)
for (l in 1:p)
for(i in 1:n)
{
beta1b[l]=sum(dbeta1[,l])
}
beta2b=rep(NA,p)
for (l in 1:p)
for(i in 1:n)
{
beta2b[l]=sum(dbeta2[,l])
}

#parameter
I=cbind(dbeta1,dbeta2,sumteta1,sumteta2,sumtau)
g=as.matrix(c(beta1b,beta2b,sumteta1,sumteta2,sumtau))
Hinv=ginv(t(I)%*%I)

```



```

amma1<-gammaawal-(Hinv%*%g)
eps<-(norm(gamma1-gammaawal,type=c("1")))
pbeta1<-gamma1[1:6]
pbeta2<-gamma1[7:12]
#gama1<-ifelse(gama1>0,gama1,0.1)
pteta1<-gamma1[13]
pteta2<-gamma1[14]
ptau=gamma1[15]
gamma1=as.matrix(c(pbeta1,pbeta2,pteta1,pteta2,ptau))
error=gamma1-gammaawal
eps=sqrt(sum(error^2))
iterasi<-iterasi+1
print(gamma1)
print(eps)
cat(paste('BPIG (Iterasi ke : ',iterasi,', epsilon : ',eps,')\n',sep=""))
}

gamma1
se=sqrt(diag(Hinv))
Z=gamma1/se
pval=2*pnorm(abs(Z), lower.tail = FALSE)

pb1x=x%*%pbeta1
pb2x=x%*%pbeta2
y1had=exp(pb1x)
y2had=exp(pb2x)
MSE1=mean((y1had-y1)^2)
MSE2=mean((y2had-y2)^2)
MSE1
MSE2

```

#### Lampiran 14. Syntax BZIPIGR dibawah populasi

```
library(gamlss)
library(MASS)
library(MixedPoisson)
library(gaussquad)
d=matrix(0,n,1)
e=matrix(0,n,1)
f=matrix(0,n,2)
for(i in 1:n)
{
  if ((y[i,1]!=0)&(y[i,2]!=0))
  {
    d[i]=1
    e[i]=0
  }
  e[i]=1-d[i]
  f[i,]=cbind(d[i],e[i])
}
d=a[,1]
e=a[,2]

b10=as.numeric(beta1)
b20=as.numeric(beta2)

p10=exp(-teta1)/(1+exp(-teta1))
mp10=1/(1+exp(-teta1))
p20=exp(-teta2)/(1+exp(-teta2))
mp20=1/(1+exp(-teta2))
lam10=exp(b10[1])
lam20=exp(b20[1])
lam120=exp(beta1[1])+exp(beta2[1])
## iterasi
set.seed(100)
eps=100
iterasi=0
while (eps > 0.0000000001 && iterasi<500)
{
  ###turunanawal###
  gammaawal0<- as.matrix(c(b10[1],b20[1],teta1,teta2,t))
  ####untuk A####
  c20=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam20+1))
  k20=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam20)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam20)
  ck20=c20*k20
```



```

c10=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam10+1))
k10=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam10)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam10)
ck10=c10*k10
c120=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam120+1))
k120=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam120)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam120)
ck120=c120*k120

#####A1#####
a10=p10*p20
a20=mp20*p10*ck20
a30=mp10*p20*ck10
a40=mp10*mp20*ck120
a0=a10+a20+a30+a40

###untukAB10##
c20=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam20+1))
k20=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam20)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam20)
ck20=c20*k20
c10=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam10+1))
k10=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam10)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam10)
ck10=c10*k10
c120=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam120+1))
k120=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam120)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam120)
ck120=c120*k120

d10=k10*(t/2)*(1+2*t*lam10)^-3/4*lam10**sqrt(2/phi*t)
d210=- (t/2)*(1+2*t*lam10)^-5/4*lam10*exp((sqrt(1+2*t*lam10)))
d220=(1+2*t*lam10)^1/4*exp((1+2*t*lam10))*lam10
d20=sqrt(2/phi*t*sqrt(2*t*lam10+1))*sqrt(phi*t/2)*(d210+d220)

e10=k120*(t/2)*(1+2*t*lam10)^-3/4*lam10*sqrt(2/phi*t)
e210=- (t/2)*(1+2*t*lam120)^-5/4*lam10*exp((sqrt(1+2*t*lam120)))
e220=(1+2*t*lam120)^1/4*exp((1+2*t*lam120))*lam10
e20=sqrt(2/phi*t*sqrt(2*t*lam120+1))*sqrt(phi*t/2)*(e210+e220)

###untukBB10##
h1=(1/2*sqrt(2*t*lam120+1))*(1/2*(1+2*t*lam120))^-1/2*(2*t*lam10)
for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
    faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
    z10=(1/t)*sqrt(2*t*lam10)
    ky10=sqrt(phi/(2*z10))*exp(-z10)*faktor*(2*z10)^(-m)
}

```

```

z20=(1/t)*sqrt(2*t*lam20[i])
ky20=sqrt(phi/(2*z20))*exp(-z20)*faktor*(2*z20)^(-m)
z120=(1/t)*sqrt(2*t*lam120)
ky120=sqrt(phi/(2*z120))*exp(-z120)*faktor*(2*z120)^(-m)
}

j10=(t*(y[i,1]+y[i,2]-1/2)*ky120)/sqrt(2*t*lam120+1)
j20=sqrt(2*t*lam120)*lam10
j0=j10*j20

l=1/2*(y1[i]+y2[i])*(1/1+2*t*lam120)*lam10*(2*t)
## turunan beta1 #####
for (i in 1:n)
{
#persamaan AB1
PA110=p20*mp10*(d10+d20)
Pa210=mp20*mp10*(e10+e20)
PAB10=PA110+Pa210
perAB10=e[i]*(PAB10/a0)

#perBB1
PB110=h1+(y1[i]*lam10)
PB210=(-ky120)+j0+l
perBB10=b[i]*(PB110+PB210)

}
dbeta10=perAB10+perBB10
dbeta10=ifelse(is.nan(dbeta10), 0, dbeta10)
dbeta10

###untukAB20##
c20=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam20+1))
k20=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam20)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam20)
ck20=c20*k20
c10=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam10+1))
k10=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam10)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam10)
ck10=c10*k10
c120=sqrt(2/(phi*t)*sqrt(2*t*lam120+1))
k120=sqrt((phi*t)/2)*((1+2*t*lam120)^-1/4)*sqrt(1+2*t*lam120)
ck120=c120*k120

d210=k20*(t/2)*(1+2*t*lam10)^-3/4*lam20*sqrt(2/phi*t)
d2210=-(t/2)*(1+2*t*lam20)^-5/4*lam20*exp((sqrt(1+2*t*lam20)))

```

```

d2220=(1+2*t*lam20)^1/4*exp((1+2*t*lam20))*lam20
d220=sqrt((2/phi*t)*sqrt(2*t*lam20+1))*sqrt(phi*t/2)*(d2210+d2220)

e210=k120*(t/2)*(1+2*t*lam20)^-3/4*lam20*sqrt(2/phi*t)
e2210=-(t/2)*(1+2*t*lam120)^-5/4*lam10*exp((sqrt(1+2*t*lam120)))
e2220=(1+2*t*lam120)^1/4*exp((1+2*t*lam120))*lam20
e220=sqrt(2/phi*t*sqrt(2*t*lam120+1))*sqrt(phi*t/2)*(e2210+e2220)

###untukBB10##
h20=(1/2*sqrt(2*t*lam120+1))*(1/2*(1+2*t*lam120))^-1/2*(2*t*lam20)
for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
z10=(1/t)*sqrt(2*t*lam10)
ky10=sqrt(phi/(2*z10))*exp(-z10)*faktor*(2*z10)^(-m)
z20=(1/t)*sqrt(2*t*lam20[i])
ky20=sqrt(phi/(2*z20))*exp(-z20)*faktor*(2*z20)^(-m)
z120=(1/t)*sqrt(2*t*lam120)
ky120=sqrt(phi/(2*z120))*exp(-z120)*faktor*(2*z120)^(-m)
}

j210=(t*(y[i,1]+y[i,2]-1/2)*ky120)/sqrt(2*t*lam120+1)
j220=sqrt(2*t*lam120)*lam20
j20=j210*j220

l20=1/2*(y1[i]+y2[i])*(1/1+2*t*lam120)*lam20*(2*t)
## turunan beta2 #####
for (i in 1:n)
{
#persamaan AB1
PA2110=p10*mp20*(d210+d220)
Pa2210=mp20*mp10*(e210+e220)
PAB20=PA2110+Pa2210
perAB20=e[i]*(PAB20/a0)

#perBB1
PB2110=h20+(y2[i]*lam20)
PB2210=(-ky120)+j20+l20
perBB20=b[i]*(PB2110+PB2210)

}

```

```

dbeta20=perAB20+perBB20
dbeta20=ifelse(is.nan(dbeta20),0,dbeta20)
dbeta20

## turunan teta10 #####
turpt10=(-teta1)*p10*mp10
for (i in 1:n)
{
#persamaan AT10
PA110=turpt10*p20
Pat210=turpt10*p20*ck20
Pat310=turpt10*p20*ck10
Pat410=turpt10*mp20*ck120
PAT10=PA110+Pat210+Pat310+Pat410
perAt10=c[i]*(PAT10/a0)

#perBt1
perBt10=b[i]*turpt10

}

dteta10=perAt10+perBt10
dteta10=ifelse(is.nan(dteta10),0,dteta10)
dteta10

## turunan teta20 #####
turpt20=(-teta2)*p20*mp20
for (i in 1:n)
{
#persamaan AT20
PA120=turpt20*p10
Pat220=turpt20*p10*ck20
Pat320=turpt20*mp10*ck10
Pat420=turpt20*mp10*ck120
PAT20=PA120+Pat220+Pat320+Pat420
perAt20=c[i]*(PAT20/a0)

#perBt1
perBt20=b[i]*turpt20

}

```

```

dteta20=perAt20+perBt20
dteta20=ifelse(is.nan(dteta20),0,dteta20)
dteta20

###untukAta0##
dt10=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam20+1))*k20*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
dt210=k20*sqrt(2/phi*t)
dt2210=(lam20/2)*((1+2*t*lam20)^-3/4)*sqrt(t)
dt2220=(1+2*t*lam20)^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
dt220=(dt2210-dt2220)/t
dt20=dt210*dt220
dt310=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lam20)^-
1/4)*exp((1+2*t*lam20))
dt320=sqrt(phi*t/2)*(-(lam20/2))*(1+2*t*lam20)^-5/4*exp((1+2*t*lam20))
dt330=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lam20)^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lam20))
dt30=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam20+1))*(dt310+dt320+dt330)
dt0=dt10+dt20+dt30

et10=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam10+1))*k10*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
et210=k10*sqrt(2/phi*t)
et2210=(lam10/2)*((1+2*t*lam10)^-3/4)*sqrt(t)
et2220=(1+2*t*lam10)^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
et220=(et2210-et2220)/t
et20=et210*et220
et310=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lam10)^-
1/4)*exp((1+2*t*lam10))
et320=sqrt(phi*t/2)*(-(lam10/2))*(1+2*t*lam10)^-5/4*exp((1+2*t*lam10))
et330=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lam10)^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lam10))
et30=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam10+1))*(et310+et320+et330)
et0=et10+et20+et30

ft10=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam120+1))*k120*((exp(-t)^1)/(t)^-2)
ft210=k120*sqrt(2/phi*t)
ft2210=(lam120/2)*((1+2*t*lam120)^-3/4)*sqrt(t)
ft2220=(1+2*t*lam120)^1/4*(1/2*(sqrt(t)))
ft220=(ft2210-ft2220)/t
ft20=ft210*ft220
ft310=(sqrt(1/2)*(phi/2)*sqrt(1/phi*t)*(1+2*t*lam120)^-
1/4)*exp((1+2*t*lam120))
ft320=sqrt(phi*t/2)*(-(lam120/2))*(1+2*t*lam120)^-5/4*exp((1+2*t*lam120))
ft330=sqrt(phi*t/2)*(1+2*t*lam120)^-1/4*(-1/t*(1+2*t*lam120))
ft30=sqrt(2/(phi*t))*sqrt(2*t*lam120+1))*(ft310+ft320+ft330)
ft0=ft10+ft20+ft30

```

```

###untukBB1##
u0=1/2*((-1/t)+sqrt(2*t*lam120+1))*(1/2*(1+2*t*lam120))^-1/2*(2*t*lam20))

for(m in 0:(y[i,1]+y[i,2]))
{
  faktor=(factorial(y[i,1]+y[i,2]+m)/((factorial(y[i,1]+y[i,2]-
m))*factorial(m)))
  z10=(1/t)*sqrt(2*t*lam10)
  ky10=sqrt(phi/(2*z10))*exp(-z10)*faktor*(2*z10)^(-m)
  z20=(1/t)*sqrt(2*t*lam20)
  ky20=sqrt(phi/(2*z20))*exp(-z20)*faktor*(2*z20)^(-m)
  z120=(1/t)*sqrt(2*t*lam120)
  ky120=sqrt(phi/(2*z120))*exp(-z120)*faktor*(2*z120)^(-m)
}
v110=(t*(y1[i]+y2[i]-1/2)*ky120)/sqrt(2*t*lam120+1)
v10=-ky120+v110
v210=((lam10+lam20)/2*(1+2*t*lam120)^-3/4*sqrt(t))-
((1+2*t*lam120)^1/4*1/2*t^-1/2)
v20=v210/t
v30=((y1[i]+y2[i])/2)*1/(1+2*t*lam120)*lam120
v0=v10+v20+v30
## turunan tau1 #####
for (i in 1:n)
{
  #persamaan Atau1
  Pata10=p10*p20*dt0
  Pata20=mp10*p20*et0
  Pata30=p10*mp20*ft0
  PAta0=Pata10+Pata20+Pata30
  perAta0=c[i]*(PAta0/a0)

  #perBB1
  perBta0=(u0+v0)*b[i]
}

dtau0=perAta0+perBta0
dtau0=ifelse(is.nan(dtau0),0,dtau0)
dtau0
sumtau0=sum(dtau0)
sumtau0

#parameter

```

```

I0=cbind(dbeta10,dbeta20,dteta10,dteta20,dtau0)
g0=as.matrix(c(dbeta10,dbeta20,dteta10,dteta20,dtau0))
Hinv0=ginv(-t(I0)%*%I0)
gamma10<-gammaawal0-(Hinv0%*%g0)
eps<-(norm(gamma10-gammaawal0,type=c("1")))
pbeta10<-gamma10[1]
pbeta20<-gamma10[2]
#gama1<-ifelse(gama1>0,gama1,0.1)
pteta10<-gamma10[3]
pteta20<-gamma10[4]
ptau0=gamma10[5]
gamma10=as.matrix(c(pbeta10,pbeta20,pteta10,pteta20,ptau0))
error0=gamma10-gammaawal0
eps=sqrt(sum(error0^2))
iterasi<-iterasi+1
print(gamma10)
print(eps)
cat(paste('BPIG (Iterasi ke : ',iterasi,', epsilon : ',eps,')\n',sep=""))
}

LOMEA=sum(dbeta1)+sum(dbeta2)+sum(dteta1)+sum(dteta2)+sum(dtau)
LOMEB=sum(dbeta10)+sum(dbeta20)+sum(dteta10)+sum(dteta20)+sum(dtau0)

##### uji serentak BZIPIGR #####
p=5
df=2*p
csqtb1=qchisq(0.05,df,lower.tail = FALSE)
Gsquare=(2*log(LOMEA)-(LOMEB))

##### uji parsial #####
H0=diag(Hinv)
p_beta12=H0[1:12]
p_teta12=H0[13:14]
p_tau=H0[15]

se_beta12=sqrt(-p_beta12)
se_teta12=sqrt(-p_teta12)
se_tau=sqrt(-p_tau)

beta_12=gamma1[1:12]

```

```
teta_12=gamma1[13:14]
tau_1=gamma1[15]
Z_beta<-beta_12/se_beta12
Z_teta<-teta_12/se_teta12
Z_tau<-tau_1/se_tau

Zbeta=abs(Z_beta)
Zteta=abs(Z_teta)
Ztau=abs(Z_tau)

pval_beta=2*pnorm(abs(Z_beta), lower.tail = FALSE)
pval_teta=2*pnorm(abs(Z_teta), lower.tail = FALSE)
pval_tau=2*pnorm(abs(Z_tau), lower.tail = FALSE)

AICC=27*(log(LOMEA)+2)+((2*27/(27-(5+2+1)))*(2*5+0.5*(2+1)))
```



## BIOGRAFI PENULIS



**Rosy Noviyana** lahir di Jakarta pada tanggal 15 November 1996. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Zulyadi dan Ibu Lenhaida.

Pada tahun 2002 penulis terdaftar sebagai siswa SDN Pejagalan 012 dan lulus pada tahun 2008. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 112 Jakarta dan lulus pada tahun 2011, selama di SMP penulis aktif dalam organisasi Paskibraka dan Pramuka. Setelah itu penulis melanjutkan pendidikan di SMAN 111 Jakarta dan lulus pada tahun 2014, penulis aktif dalam organisasi Teater dan menjadi Ketua pada periode 2012-2013. Tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan strata satu di Universitas Pakuan dengan mengambil program studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Selama menjadi mahasiswa di Universitas Pakuan Bogor, penulis aktif dalam unit kegiatan mahasiswa Marching Band Gema Pakuan Siliwangi Universitas Pakuan Bogor dan menjadi calon ketua Marching Band GPS periode 2016-2017. Penulis juga aktif dalam Organisasi HIMATIKA. Selain itu penulis tercatat sebagai Asisten Dosen mata kuliah Desain Analisis Eksperimen program studi Farmasi periode 2017-2018. Pada tahun 2018 penulis mendapatkan kesempatan melanjutkan studi S2 di Departemen Statistika Intitut Teknologi Sepuluh Nopember. Jika ada kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini dapat disampaikan melalui email penulis: [rssynvyn@gmail.com](mailto:rssynvyn@gmail.com).