TUGAS AKHIR – SF 184801

PERSAMAAN DIRAC PADA RUANG WAKTU LENGKUNG

GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP 01111640000011

Dosen Pembimbing
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR - SF184801

PERSAMAAN DIRAC PADA RUANG WAKTU LENGKUNG

GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP 01111640000011

Dosen Pembimbing:
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

FINAL PROJECT - SF184801

DIRAC EQUATION IN CURVED SPACETIME

GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP 01111640000011

Supervisor:
Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

DEPARTMENT OF PHYSICS
Faculty Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

LEMBAR PENGESAHAN

PERSAMAAN DIRAC PADA RUANG WAKTU LENGKUNG

DIRAC EQUATION IN CURVED SPACETIME

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Fisika Teori
Program Studi S-1 Departemen Fisika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Oleh

GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP.01111640000011

Menyetujui

Dosen Pembimbing

Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo
NIP.19790719 200501.1.015

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
DEPARTEMEN FISIKA

Surabaya, Juli 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

PERSAMAAN DIRAC PADA RUANG WAKTU LENGKUNG

Nama	: GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP	: 01111640000011
Departemen	: Fisika
Pembimbing	: Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

Abstrak

Dalam tugas akhir ini, persamaan Dirac yang diperlakukan pada geometri melengkung yang diberlakukan secara klasik dengan teori relativitas umum. Perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu yang melengkung dituliskan dalam medan kerangka tetrad dan koneksi spin gravitasional. Tetrad mendefinisikan kerangka diam lokal. Persamaan Dirac dirumuskan dalam koordinat bola, ruang-waktu Schwarzschild, ruang-waktu Reissner-Nordstrom, dan ruang-waktu FLRW 1+1 dimensi. Dari perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild dan Reissner-Nordstrom menghasilkan dua persamaan terkopel untuk suku radial. Persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild akan kembali ke bentuk persamaan Dirac pada koordinat bola pada jarak yang cukup jauh dari sumber gravitasi. Pada jarak yang jauh dari sumber, persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom akan kembali ke bentuk persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild. Pada laporan ini juga dirumuskan solusi dari Persamaan Dirac pada ruang-waktu Milne 1+1 dimensi.

Kata kunci : Mekanika Kuantum, Persamaan Dirac, Relativitas Umum, Ruang Waktu Lengkung.

Halaman ini sengaja dikosongkan

DIRAC EQUATION IN CURVED SPACETIME

Name	: GUTIVAN ALIEF SYAHPUTRA
NRP	: 01111640000011
Department	: Physics
Supervisor 1	: Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

Abstract

In this final project, Dirac equation is concidered within gravitational geometry point of view and reviewed classically with the theory of general relativity. Formulation of the Dirac equations in curved spacetime are written by using tetrad and gravitational spin connection. Tetrad can be defined as local rest frame. Dirac equatins are considered in spherical coordinate, Schawarzschild spacetime, Reissner-Nordstorm spacetime, and 1+1 dimension Milne spacetime. Based on the formulation of Dirac equation in Schwarzschild and Reissner-Nordstorm spacetime, the two couple equations for the radial terms can be obtained. Dirac equation in spherical coordinates at the far limit region are approaching Dirac equation in Scharzschild spacetime background. Furthermore, Dirac equation in Reissner-Nordstorm will also recover Dirac equation in Schawarzschild spacetime when approaching far field region. We discuss also the solutions of Dirac equation in 1+1 dimensional spacetime background in term of Bessel functions.

Keywords : Curved Spacetime, Dirac Equation,
General Relativity, Quantum Mechanics.

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT karena telah melimpahkan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan, dan rejeki, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

PERSAMAAN DIRAC PADA RUANG WAKTU LENGKUNG

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika FSAD ITS.

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, dapat terselesaikan dengan baik berkat adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya Tugas Akhir ini:

1. Seluruh keluarga khususnya kedua orangtua, keluarga dan saudara yang telah memberikan dukungan, bimbingan, doa, nasihat kepada penulis, dan banyak hal lain yang telah diberikan.

2. Bapak Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo selaku dosen pembimbing yang telah membimbing, mengarahkan, memberi masukan dan memotivasi penulis yang akhirnya dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

3. Bapak Prof. Dr. Drs Agus Rubiyanto M.Eng.Sc. selaku dosen wali penulis yang telah memberikan semangat, masukan, dan motivasi selama penulis kuliah S1 ini.

4. Bapak Agus Purwanto, D.Sc selaku dosen penguji, dan dosen fisika teori yang telah memberikan banyak nasihat dan ilmu.

5. Bapak Dr Gatut Yudoyono M.T. selaku kepala departemen fisika yang telah memberikan masukan-masukan saat kuliah.

6. Bapak Dr. Sungkono dan Bang Indra yang telah memberikan masukan saat penulis ada kesulitan dan canda tawanya.

7. Bapak Dr. Lila Yuwana sebagai kepala laboratorium Fisika Teori yang telah memberikan banyak nasihat dan ilmu penulis.

8. Teman-teman seperjuangan Randy, Rakha, Maria, Kanzul, Deo, Maman, Rayhan, Septi, Barok, Yusuf, Dayat, Ari sebagai anggota calon-calon mawapres dan teman-teman yang tidak bisa disebutkan satu-persatu yang telah memberikan semangat dan canda tawa, dan juga teman-teman SIRIUS yang telah mendukung, menyemangati, dan canda tawa bersama penulis, dan juga adek-adek 2017, 2018 dan 2019.

9. Teman-teman dan dosen Laboratorium Fisika Teori (LaFTiFA), Mas Doni, Mas Bayu, Mba Rafika, Pak Nengah, Mas Dwi, Mas Nusur, Mas Kasyfil, Mbak Siska, Andri, Afif, Lindung,dan Iqbal, Egi dan Amru atas canda tawa, diskusi, bantuan, semangat, dan pengalaman.

10. Teman-teman organisasi LMB ITS, ITS Astronomy Club, dan UKM Catur ITS yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas canda tawa, diskusi, bantuan, semangat, dan pengalaman.

11. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi

dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih terdapat kekurangan, sehingga segala kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya, Juni 2020

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan

Daftar Isi

Daftar Tabel

Halaman ini sengaja dikosongkan

Daftar Gambar

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Mekanika kuantum merupakan cabang paling dasar dari fisika modern. Konsep awal dari keadaan diskret stasioner diusulkan oleh Neils Bohr pada 1913. Pada 1923 Louis de Broglie mengusulkan teori gelombang partikel, bahwa partikel dapat dipandang sebagai gelombang dan sebaliknya. Pada 1925 mekanika kuantum modern dibangun berdasarkan konsep gelombang partikel de Broglie yang diperumum oleh Erwin Schrodinger dalam mekanika gelombangnya.

Pada 1905 Einstein mempublikasikan relativitas khusus. Pada publikasinya, beliau menunjukkan definisi baru mengenai ruang dan waktu, dan mengaitkan bahwa keduanya adalah suatu kesatuan. Einstein mempostulatkan dua hal yaitu prinsip relativitas dan kecepatan cahaya pada ruang hampa yang konstan. Pada akhir 1920-an, Oskar Klein dan Walter Gordon mulai mencoba untuk menyambungkan antara teori relativitas khusus Einstein dengan mekanika kuantum untuk menjelaskan elektron yang bergerak sangat cepat (relativistik). Kemudian Paul Dirac mencoba untuk membuat sebuah formulisme matematik tentang mekanika kuantum relativistik yang berorde satu. Dengan menggunakan mekanika matriks, paul dirac berhasil memodelkan spin dari partikel yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Dirac. Persamaan Klein-Gordon secara benar mendeskripsikan partikel komposit tak berspin, atau spin bulat. Dengan percobaan menggabungkan antara relativitas khusus dengan mekanika kuantum, memunculkan bidang fisika baru yaitu teori medan kuantum. Teori medan kuantum adalah teori yang menjelaskan interaksi materi.

Pada 1915 Einstein menemukan relativitas umum. Teori relativitas umum memberikan cara pandang yang berbeda mengenai gravitasi. Einstein mengenalkan gravitasi sebagai efek akibat ruang-waktu yang dilengkungkan akibat adanya benda bermassa. Pada tahun 1916, Karl Schwarzchild menyelesaikan persamaan medan Einstein secara eksak. Seperti sebelumnya, adanya pembaruan konsep gravitasi yang dikenalkan Einstein membuat para fisikawan mencoba untuk menggabungkan interaksi gravitasi dengan interaksi-interaksi lainnya di alam semesta. Einstein sendiri juga tertarik untuk menciptakan sebuah teori untuk menggabungkan semua fisika menjadi satu. Pada tahun 1921 dengan keisengannya, theodor Kaluza mencoba untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein dalam ruang-waktu lima dimensi (4 dimensi ruang dan 1 dimensi waktu). Hasil yang menarik yang didapatkan Theodor kaluza yaitu bahwa penyelesaian dengan menambahkan satu dimensi ini memiliki sebuah kemiripan dengan persamaan elektromagnetik Maxwell. Dia menemukan sebuah cara untuk menggabungkan gravitasi dengan elektromagnetik. Hanya saja, dia gagal untuk mencoba memasukkan elektron dalam pemodelannya.

Menggabungkan semua teori fisika menjadi suatu teori kemanunggalan memanglah cukup menarik. Pada tahun 1963, Sheldon Glashow menunjukkan bahwa gaya nuklir lemah dan elektromagnetisme mungkin keduanya muncul dari suatu kesatuan. Pada 1967, Abdus Salam dan Steven Wienberg secara terpisah menunjukkan bahwa keduanya memanglah berasal dari sebuah teori kesatuan yang disebut dengan Elektrolemah yang dimediasi oleh empat partikel. Kemudian penelitian selanjutnya oleh Howard Georgi dan Sheldon Glashow mengajukan penyatuan interaksi kuat dan elektrolemah menjadi sebuah kesatuan Teori Kemanunggalan Agung (*Grand Unified Theory*)[3][8].

Dari keempat interaksi dasar alam semesta, hanya gravitasi saja yang belum berhasil disatukan hingga saat ini. Hal yang menyulitkan fisikawan untuk menyatukan gravitasi dengan interaksi lain adalah karena gravitasi merupakan efek dari geometri ruang waktu. Teori segalanya (*Theory of Everything*) adalah tujuan utama fisikawan sekarang. Untuk menuju kesana, gravitasi kuantum menjadi area yang tepat untuk diteliti. Contoh teori yang paling menjanjikan adalah teori dawai. Dalam menjelaskan penggabungkan gravitasi relativitas umum dan mekanika kuantum, dapat dilakukan dengan memformulasikan sebuah persamaan medan kuantum ketika materi berada di daerah yang terdapat medan gravitasi, tidak lain ruang-waktu yang melengkung. Teori ini disebut dengan teori medan kuantum pada ruang waktu yang melengkung (*Quantum Field Theory in Curved SpaceTime*)[4][19]. Teori ini tidak diharapkan menjadi teori eksak di alam, namun ini mungkin bisa menjadi pendekatan untuk mendeksripsikan keadaan dari partikel ketika berada pada medan gravitasi yang tidak dominan[6]. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan dikaji bagaimana persamaan Dirac yang merupakan dasar dari teori medan kuantum bekerja pada ruang-waktu lengkung.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari tugas akhir ini adalah bagaimana bentuk dari persamaan dirac pada ruang-waktu lengkung.

1.3 Tujuan

Tujuan yang akan diperoleh dalam tugas akhir ini adalah merumuskan kembali bentuk dari persamaan Dirac pada berbagai ruang-waktu lengkung.

1.4 Batasan Masalah

Tugas akhir ini dibatasi hanya untuk perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu lengkung.

1.5 Metode Penelitian

Pada tugas akhir ini digunakan metode analitis dari studi literatur dan membandingkan dengan referensi yang telah ada.

1.6 Sistematika Penelitian

Dalam penulisan tugas akhir ini, pada bab 1 tentang pendahuluan, kemudian pada bab 2 diberikan gambaran singkat mengenai ruang-waktu lengkung dan berbagai formulasi matematik pada geometri yang melengkung. Pada bab 3 akan dibahas bagaimana bentuk perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu datar dan bagaimana bentuk perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu yang melengkung. Pada bab 5 dibahas inti dari penelitian ini, yaitu membangun bentuk persamaan Dirac pada berbagai ruang-waktu yang melengung. Dalam tugas akhir ini, dibentuk persamaan Dirac pada koordinat bola, ruang-waktu Schwarzschild, ruang-waktu Reissner-Nordstrom, dan ruang-waktu FLRW.

Halaman ini sengaja dikosongkan

Bab 2

Ruang Waktu Lengkung

2.1 Manifold

Sifat geometri dari benda-benda yang ada di kehidupan sehari-hari, benda tidak hanya memiliki bentuk yang datar, namun lebih banyak benda yang terlihat lengkung. Kurva parabola adalah contoh dari benda lengkung 1 dimensi, sedangkan permukaan bola dan permukaan piring adalah contoh dari benda lengkung 2 dimensi. Namun, untuk melihat benda lengkung 3 dimensi cukup sulit dibayangkan. Hanya saja kita dapat merumuskan ruang lengkung 3 dimensi dari bentuk umum ruang lengkung 2 dimensi. Ruang lengkung n dimensi berada pada ruang datar $n+1$ dimensi [9].

Bentuk umum dari ruang datar ini disebut dengan **manifold**. Manifold dapat dipandang sebagai bentuk umum dari titik, garis, permukaan dan ruang kontinu berdimensi tinggi lainnya. Manifold M yang berdimensi n secara lokal mirip dengan ruang Euclid datar R^n. Artinya, ruang singgung pada setiap titik p pada manifold M, yaitu $T_p(M)$ ekivalen dengan

R^n.[10] Contoh dari manifold antara lain:

1. R^n sendiri, termasuk garis R^1, bidang R^2 dan seterusnya.

2. Permukaan bola-n S^n. Permukaan bola ini dapat dipandang sebagai tempat dari semua titik dari titik asal pada R^{n+1} yang tetap. Lingkaran adalah contoh dari permukaan bola-1, S^1. Permukaan bola itu sendiri adalah contoh dari S^2, dan seterusnya.

3. Torus-n, T^n dapat dibentuk dari sebuah kubus n-dimensi dan mempertemukan setiap sisinya. Donat adalah contoh dari Torus-2, yauti T^2.

Dua manifold dikatakan homeomorfis jika salah satu manifold merupakan perubahan kontinu dari manifold yang satunya. Contohnya adalah bahwa sebuah cangkir homeomorfis dengan donat, karena kita kita bisa mengubah secara kontinu dari cangkir ke donat. Namun, sebuah bola tidak homeomorfis dengan donat, karena tidak ada perubahan kontinu yang bisa dilakukan. Perubahan kontinu yang dapat dilakukan hanyalah menarik atau memampatkan, hanya saja tidak boleh dipotong atau dilubangi. Sejangan difeomorfis adalah homeomorfis yang dapat diturunkan, atau disebut dengan perubahan terturun. Jadi, selama proses perubahan tidak boleh terdapat sebuah ujung tajam, atau turunanya haruslah ada [13].

Kita bisa menunjukkan bahwa himpunan dari titik M adalah manifold, jika setiap titik pada M memiliki daerah sekeliling yang terbuka (*open neighborhood*) yang memiliki sebuah pemetaan kontinu satu-satu ke himpunan terbuka dari R^n. Apabila terdapat sebuah himpunan fungsi yang memetakan secara homeomorfis dari suatu himpunan terbuka pada M ke himpunan terbuka lain pada R^n, jika himpunan fungsi itu dapat diturunkan (*diferensiabel*), maka manifold dikatakan **manifold diferensiabel** (mulus). Geometri yang bekerja pada manifold mulus disebut dengan **geometri Riemannian**[11].

2.2 Geometri Riemannian

Geometri Riemannian adalah cabang dari geometri diferensial yang mempelajari manifold Riemannian, yaitu manifold mulus, yang terdiferensiabel. Manifold Riemannian ditandakan oleh metrik Riemannian yang merupakan hasil kali dalam yang bersifat simetri, bilinier dan definit positif pada semua ruang singgung pada manifold[15].

2.2.1 Tensor Metrik

Berawal dari elemen garis pada manifold,

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = (\vec{e_\mu} dx^\mu) \cdot (\vec{e_\nu} dx^\nu), \tag{2.1}$$

tensor metrik didefinisikan

$$g_{\mu\nu} = \vec{e_\mu} \cdot \vec{e_\nu}, \tag{2.2}$$

sehingga didapatkan perumusan elemen panjang,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.3}$$

Tensor metrik $g_{\mu\nu}$ adalah fungsi dari koordinat yang digunakan, x^α. Metrik ds^2 invarian terhadap pemilihan sistem koordinat pada manifold Riemannian. sehingga, ketika kita menggunakan sistem koordinat lain x', maka metrik ds^2 menjadi

$$ds^2 \quad = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \tag{2.4}$$

Karena metrik invarian, maka

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{n} u = g'_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{2.5}$$

dimana turunan total $dx^{\alpha} = \sum \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta}$,

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} &= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta} \\ \left(g'_{\alpha\beta} - g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \right) dx'^{\alpha} dx'^{\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

yang mengakibatkan

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}. \tag{2.7}$$

Transformasi ini seperti memiliki bentuk persis sesuai aturan transformasi tensor kovarian rank-2, sehingga $g_{\mu\nu}$ adalah tensor kovarian rank-2. Kontraksi dengan tensor metrik mengubah vektor kontravarian ke kovarian:

$$V_{\nu} = g_{\mu\nu} V^{\mu}. \tag{2.8}$$

Hal yang sama ketika diterapkan pada tensor dengan rank lebih. Didefinisikan tensor metrik kontravarian $g^{\mu\nu}$ dengan hubungan

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = \delta^{\nu}_{\alpha} \tag{2.9}$$

dengan δ^{ν}_{α} adalah delta Kronecker. Untuk ruang Minkowski koordinat Kartesian, elemen garis memiliki bentuk

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.10}$$

Kita kenalkan tensor metrik Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ yang memenuhi bentuk (2.10) dan (2.1),

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Manifold Riemannian dicirikan oleh metrik yang komponennya definit positif. Namun, ketika kita meninjau ruang waktu, komponen ruang dan waktu memiliki tanda yang berbeda, sehingga metrik tidak definit positif. Sebuah manifold yang mulus namun komponen tensor metriknya tidak definit positif disebut manifold **pseudo-Riemannian**[16].

2.2.2 Geodesik dan Simbol Christoffel

Ketika kita ingin mencari jarak terdekat antara dua titik pada ruang lengkung, kita tidak dapat semerta-merta membuah garis lurus dari satu titik ke titik yang lain tersebut. Untuk mencari jarak terdekat antara dua titik di ruang lengkung memerlukan kurva khusus yang dikenal dengan **geodesik**[17]. Geodesik adalah jarak terlurus yang paling mungkin pada ruang lengkung. Ketika berada pada ruang datar, kita dikatakan melewati jalur lurus jika kita tidak merasakan percepatan ketika kita bergerak dengan kecepatan konstan. Namun, ketika kita bergerak dengan kecepatan yang konstan pada ruang lengkung, kita akan merasakan percepatan sentripetal. Pada ruang lengkung, sebuah jalur lurus memiliki percepatan tangensial nol ketika kita melaluinya dengan kecepatan konstan. Artinya vektor percepatan selalu mengarah *normal* dari permukaan. Untuk menghitung kurva geodesik, kita perlu untuk mengetahui kurva ketika vektor percepatan hanya *normal* terhadap permukaan. Misalkan kita memiliki sebuah vektor $\vec{V}(x^\alpha)$. Kita tahu bahwa turunan $\vec{V}$ terhadap x^μ adalah vektor singgung ke arah x^μ

$$\vec{e_\mu} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu}. \tag{2.12}$$

Jika kita memiliki kurva yang diparameterisasi oleh λ, maka turunan $\vec{V}$ terhadap λ adalah vektor singgung sepanjang kurva yang diparameterisasi oleh λ. Untuk mengetahui vektor percepatan sepanjang kurva, kita dapat menurunkan dua kali vektor $\vec{V}$ terhadap λ. Vektor kecepatan,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu}, \tag{2.13}$$

sehingga kita dapatkan vektor percepatan

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\vec{V}}{d\lambda}\right) &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu}\right)\\ &= \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu}\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan aturan rantai, kita tahu

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

sehingga, untuk suku kedua persamaan (2.14) kita dapatkan

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu} &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu}\right)\\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^\nu\partial x^\mu},\end{aligned} \tag{2.15}$$

sehingga, (2.14) menjadi

$$\frac{d^2\vec{V}}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right). \tag{2.16}$$

Suku pertama dari $\vec{V}$, sehingga arah dari vektor percepatan menyinggung (tangensial) terhadap permukaan. Namun, kita tidak tahu suku kedua arah dari vektor percepatannya tangensial atau normal. Suku kedua, bagian $\partial^2\vec{V}/\partial x^\nu\partial x^\mu$ adalah bagian yang perlu diketahui, apakah menyinggung atau normal terhadap permukaan. kita bisa menjabarkan vektor itu sebagai kombinasi linear dari basis vektor singgung $\partial\vec{V}/\partial x^{\alpha}$ dan vektor normal $\hat{n}$. Karena kita tidak mengetahui bagian mana yang menyinggung dan bagian mana yang normal, maka kita bisa mengenalkan variabel baru,

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\alpha}} + L_{\nu\mu}\hat{n}, \tag{2.17}$$

suku $L_{\nu\mu}$ disebut dengan **bentuk dasar kedua** (*second fundamental form*) yang memberikan komponen normal dari $\partial^2\vec{V}$ $/\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}$. Sedangkan $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ disebut dengan **simbol Christoffel** yang memberikan komponen tangensial dari $\partial^2\vec{V}/\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}$. Karena vektor normal $\hat{n}$ secara definisi selalu normal (tegak lurus) terhadap bidang singgung, sehingga perkalian dot antara vektor normal dengan vektor singgung pasti nol. Kita bisa mengalikan dot (2.17) dengan vektor singgung $\partial\vec{V}/\partial x^{\beta}$.

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\alpha}} + L_{\nu\mu}\hat{n}\right)\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}}, \tag{2.18}$$

dimana suku kedua dari (2.18) hilang karena normal tegak lurus terhadap vektor singgung. Sehingga didapatkan

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial .x^{\beta}} \tag{2.19}$$

Karena hasil kali dalam dari vektor singgung tidak lain adalah tensor metrik, maka

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}g_{\alpha\beta}. \tag{2.20}$$

Untuk mendapatkan bentuk simbol Christoffel, kita bisa gunakan hubungan (2.9) untuk menghilangkan tensor metrik di sisi kanan.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} g^{\beta\kappa} &= \Gamma^\alpha_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} g^{\beta\kappa} \\
&= \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \delta^\kappa_\alpha \\
&= \Gamma^\kappa_{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

kita substitusikan (2.17) ke (2.16), didapatkan

$$\frac{d^2 \vec{V}}{d\lambda^2} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left(\Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\alpha} + L_{\nu\mu} \hat{n} \right). \tag{2.22}$$

Jika kita ganti peubah boneka(*dummy*) suku pertama sisi kanan dengan $\mu \to \alpha$, dan kita susun, kita dapatkan

$$\frac{d^2 \vec{V}}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\alpha} + L_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \hat{n}. \tag{2.23}$$

Karena tujuan kita mencari kurva geodesik, yang disyaratkan jika dan hanya jika vektor percepatan normal terhadap permukaan, kita memisah vektor percepatan (2.23) menjadi bagian tangensial dan normal, sehingga suku tangensial haruslah nol.

$$\frac{d^2 \vec{V}}{d\lambda^2} = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda} \right)^{tangensial} + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda} \right)^{normal} \tag{2.24}$$

sehingga suku pertama di sisi kanan persamaan (2.23) yang merupakan suku tangensial haruslah nol, yang menyebabkan

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) ini disebut dengan **persamaan geodesik**.

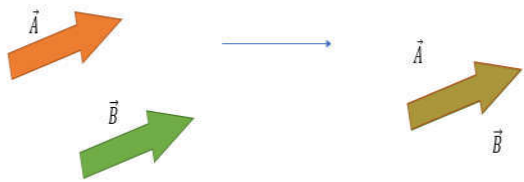
2.2.3 Turunan Kovarian dan Pengangkutan Sejajar

Turunan kovarian adalah turunan berarah pada kalkulus vektor yang diperumum[18]. Untuk menurunkan medan vektor itu, kita perlu menurunkan komponen dari vektor begitupula basis vektornya.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(v^\mu \hat{e}_\mu) \\ &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha}\hat{e}_\mu + v^\mu \frac{\partial \hat{e}_\mu}{\partial x^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

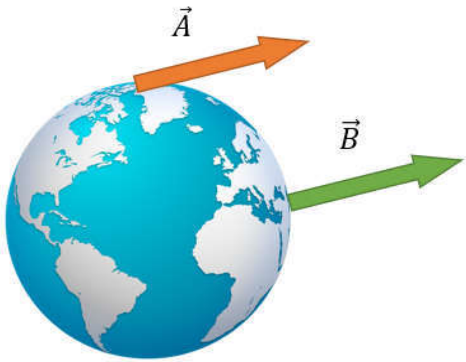
Dengan persamaan (2.26) kita bisa menunjukkan bahwa suku kedua akan nol pada ruang datar karena vektor basisnya konstan.

Apabila kita memiliki dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$, kedua vektor dikatakan sama apabila memiliki arah dan besar yang sama. Untuk membuktikannya, kita bisa mengangkut salah satu vektor ke vektor yang lain dan menunjukkan bahwa kedua vektor itu saling berimpitan.



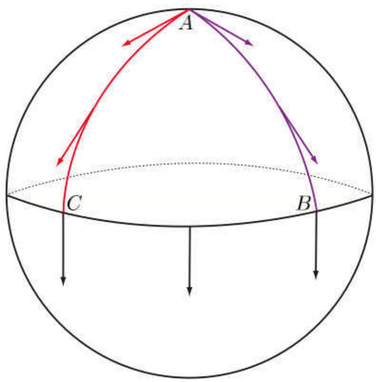
Gambar 2.1: Dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ pada ruang datar dikatakan sama apabila ketika salah satu vektor diangkut ke posisi vektor yang laiinya, maka kedua vektor tersebut akan berimpit

Hanya saja, masalah akan muncul ketika kita ingin melihat apakah dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ sama pada sebuah ruang yang melengkung. kita tidak dapat semerta-merta mengangkut salah satu vektor ke vektor yang lain dan melihat apakah kedua vektor tersebut berimpitan atau tidak. Misalkan kita tinjau dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ pada ruang lengkung, yaitu bumi yang berbentuk bola. Vektor $\vec{A}$ berada di kutub utara dan vektor $\vec{B}$ berada di khatulistiwa. Apabila kita mengangkut vektor $\vec{A}$ ke vektor $\vec{B}$, maka kita bisa memastikan bahwa kedua vektor tersebut akan berimpitan. Namun, ketika kita melihat vektor $\vec{A}$ sebagai orang yang ada di kutub utara, kita bisa memastikan bahwa vektor $\vec{A}$ akan mengarah ke horizon dengan sedikit keatas. Namun, ketika kita melihat vektor $\vec{B}$ sebagai orang yang ada di khatulistiwa, maka kita bisa memastikan bahwa vektor $\vec{B}$ tersebut mengarah ke langit. Ada perbedaan pandangan disini. Walaupun keduanya akan berimpit ketika diangkut, namun, menurut penglihatan orang yang ada dalam ruang lengkung tersebut, kedua vektor tersebut tidaklah sama.



Gambar 2.2: Dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ pada ruang lengkung

Maka untuk menyelidiki apakah dua buah vektor sama, kita kenalkan pengangkutan sejajar (*parallel transport*). Pengankutan sejajar adalah langkah untuk mengangkut atau memindahkan vektor di sepanjang kurva lengkung dengan sebisa mungkin menjaga vektor yang diangkut tersebut selurus mungkin. Misalkan kita ingin mengankut vektor dari A ke B. Yang perlu dilakukan hanyalah bergerak membawa vektor melalui lintasan AB yang memungkinkan membawa vektor tetap selurus mungkin. Dengan konsep pengangkutan sejajar ini, kita bisa memastikan bahwa vektor yang ada pada A dan pada B adalah vektor yang sama menurut orang yang ada di dalam permukaan.



Gambar 2.3: Adanya pembalikan arah antara vektor awal dan vektor akhir ketika melakukan pengangkutan sejajar dari A ke B lalu ke C dan kembali lagi di A.

Masalah akan datang ketika kita melanjutkan melakukan pengangkutan sejajar dari titik B ke sepanjang khatulistiwa hingga ke C dan kemudian menuju ke kutub utara kembali ke titik A. Walaupun dalam perjalanan pengangkutan kita mencoba untuk membawa vektor dari A selurus mungkin, pada akhirnya ketika kita melakukan pengangkutan terus-menerus hingga kembali ke titik A, vektor yang datang bukanlah vektor yang sama dengan vektor awalnya. Ada perputaran arah yang membuat vektor akhir dan awal berbeda. Hal ini dikarenakan pengangkutan sejajar tidaklah pasti membuat vektor tersebut konstan dan dengan ini memanglah mustahil untuk mendefinisikan medan vektor yang konstan pada permukaan yang melengkung dalam sudut pandang orang yang berada pada permukaan lengkung itu. Pengangkutan sejajar mencoba untuk mengangkut vektor sekonstan mungkin ketika kita melakukan perjalanan.[19] Adanya pembalikan arah antara vektor awal dan akhir ketika melakukan pengangkutan sejajar memanglah sesuatu hal yang tidak dapat dihindarkan.

Ambil dua titik di antara A dan B.Lalu, kita bandingkan vektor hasil pengangkutan sejajarnya. Kita dapat memastikan bahwa selisih kedua vektor hasil pengangkutan sejajar itu akan mengarah ke pusat. Artinya, perubahan kedua vektor hasil pengangkutan sejajar yang berdekatan mengarah normal terhadap permukaan, $\vec{n}$. Jika vektor diangkut sejajar sepanjang kurva λ, maka secara matematis

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{d\lambda} &= \vec{n} \\ \frac{d\vec{V}}{d\lambda} - \vec{n} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Turunan kovarian akan sangat membantu untuk mendefinisikan pengangkutan sejajar. Turunan kovarian $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ adalah tingkat perubahan vektor $\vec{V}$ di arah vektor $\vec{U}$ dan dikurangkan dengan komponen normalnya, $\vec{n}$. Misalkan sebuah vektor $\vec{V}$ akan diangkut melalui sebuah kurva λ. Maka turunan kovarian dari vektor $\vec{V}$ di sepanjang arah singgung λ,$d/d\lambda$ adalah

$$\nabla_{d/d\lambda}\vec{V} = \frac{d\vec{V}}{d\lambda} - \vec{n}. \tag{2.28}$$

Turunan kocarian dari vektor $\vec{V}$ akan nol jika vektor $\vec{V}$ tersebut berhasil diangkut sejajar di sepanjang kurva. Kemudian kita tinjau turunan kovarian dari vektor singgung $\vec{V}$ di arah koordinat x^α,

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\alpha} - \vec{n}. \tag{2.29}$$

Karena vektor $\vec{V}$ adalah vektor singgung, maka kita bisa mengekspansikan komponennya dalam komponen vektor basis e_α, sehingga

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(v^\mu \hat{e}_\mu) - \vec{n} \tag{2.30}$$

dengan aturan perkalian untuk turunan, kita dapatkan

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha}\hat{e}_\mu + v^\mu \frac{\partial \hat{e}_\mu}{\partial x^\alpha} - \vec{n} \tag{2.31}$$

karena vektor basis tidak lain adalah turunan dari vektor posisi di titik tersebut terhadap koordinat, maka kita bisa mengganti $\partial\hat{e}_\mu/\partial x^\alpha \to \partial(\partial\vec{V})/\partial x^\alpha \partial x^\mu$, dan digunakan persamaan (2.17) sehingga (2.31) menjadi

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha}\hat{e}_\mu + v^\mu \left(\Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\hat{e}_\kappa + L_{\alpha\mu}\hat{n}\right) - \vec{n} \tag{2.32}$$

untuk mengumpulkan suku yang menyinggung sumbu koordinat, kita tukar indeks suku pertama di kanan sama dengan, $\mu \to \kappa$ dan mengumpulkan suku normal sehingga,

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \left(\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha} + v^\mu \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\right)\hat{e}_\kappa + v^\mu L_{\alpha\mu}\hat{n} - \vec{n} \tag{2.33}$$

karena $v^\mu L_{\alpha\mu}\hat{n}$ tidak lain adalah komponen normal dari hasil tingkat perubahan vektor ketika diangkut, maka akan saling menghilangkan dengan $\vec{n}$,

$$\nabla_{d/dx^\alpha}\vec{V} = \left(\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\alpha} + v^\mu \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\right)\hat{e}_\kappa. \tag{2.34}$$

Dalam persoalan relativitas umum, sangat sulit ketika kita ingin mengetahui vektor basis $\hat{e}_\alpha$ pada ruang waktu yang melengkung, yang tidak lain didefinisikan sebagai turunan vektor posisi terhadap koordinat di titik itu. Dalam relativitas umum, ruang waktu adalah manifold, ruang lengkung 4-Dimensi. Dimana, ruang waktu lengkung 4-Dimensi ini, jika kita ingin mendefinisikan basis vektor sebagai turunan vektor posisi terhadap koordinat, maka kita memerlukan ruang 5-Dimensi sedemikian sehingga ruang 4-Dimensi terbenam didalamnya. Namun, kita tidak mengenal ruang 5-Dimensi tersebut, sehingga kita tidak dapat mendefinisikan titik acuan di luar ruang-waktu untuk mendefinisikan vektor posisi. Maka dari itu, kita memandang ruang waktu adalah **ruang lengkung intrinsik** dengan tidak ada ruang lain diluar alam semesta. Dengan ini, vektor basis yang sebelumnya didefinisikan sebagai turunan vektor posisi terhadap koordinat dititik itu, diganti dengan operator turunan itu sendiri pada geometri intrinsik[14], $\hat{e}_\mu = \partial/\partial x^\mu$.

Turunan kovarian dari sebuah medan vektor adalah turunan biasa dari medan vektor dikurangi dengan komponen normalnya. Namun, pada geometri intrinsik, tidak ada komponen normal. Jika kita menganggap ada komponen normal, maka harus ada ruang yang berdimensi lebih tinggi untuk komponen normal itu hidup, sehingga kita perlu hilangkan komponen normalnya.

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\vec{V} &= \frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\alpha}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(v^\mu\hat{e}_\mu\right)\\ &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha}\hat{e}_\mu + v^\mu\frac{\partial\hat{e}_\mu}{\partial x^\alpha}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Walaupun dengan (2.17) kita mendefinisikan turunan vektor basis sebagai kombinasi suku singgung dan suku normal, ketika kita bekerja pada geometri intrinsik, tidak ada suku normal. Sehingga kita gunakan (2.17) dengan menghilangkan suku normalnya dan substitusi ke (2.35) didapat

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x^\mu}\vec{V} &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha}\hat{e}_\mu + v^\mu\Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\hat{e}_\kappa \\ &= \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\alpha} + v^\mu\Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\right)\hat{e}_\kappa.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Untuk mendapatkan simbol Christoffel, kita perlu gunakan persamaan (2.21),amun, memerlukan perkalian dot antara vektor basis dan turunan vektor basis, sedangkan vektor basis sendiri sulit didapatkan. Maka dari itu, kita perlu mencari cara lain untuk mencari komponen simbol Christoffel. Dari (2.36) apabila vektor $\vec{V}$ yang diturunkan kovarian adalah berupa basis vektor, maka kita dapatkan relasi simbol Christoffel dengan turunan kovarian dari basis vektor:

$$\nabla_{\hat{e}_\mu}\hat{e}_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\hat{e}_\alpha. \tag{2.37}$$

Untuk mendefinisikan ulang simbol Christoffel, kita memerlukan dua properti baru yaitu **kebebasan torsi** (*torsion free*) dan **kompatibilitas metrik** (*metric compatibility*). properti kebebasan torsi didefinisikan

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = \nabla_{\vec{V}}\vec{U}, \tag{2.38}$$

atau

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} - \nabla_{\vec{V}}\vec{U} = [\vec{V},\vec{U}] = 0, \tag{2.39}$$

dimana $[\vec{V},\vec{U}]$ disebut *Lie Bracket* atau komutator. Untuk basis vektor $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, Lie bracketnya,

$$[\partial_\alpha,\partial_\beta] = \partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^\beta\partial x^\alpha} = 0, \tag{2.40}$$

yang artinya

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{e}_\mu}\hat{e}_\nu &= \nabla_{\hat{e}_\nu}\hat{e}_\mu \\ \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\hat{e}_\alpha &= \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\hat{e}_\alpha. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Sehingga properti bebas torsi membolehkan kita menukar indeks bawah dari simbol Christoffel tanpa mengubah nilainya. Properti kedua adalah kompatibilitas metrik, yaitu aturan khusus untuk turunan perkalian dot. Kompatibilitas metrik menunjukkan ketika kita mencoba untuk melakukan pengangkutan sejajar dua vektor, hasil perkalian dotnya akan tetap sama.

$$\nabla_{\vec{U}}(\vec{V}\cdot\vec{W}) = (\nabla_{\vec{U}}\vec{V})\cdot\vec{W} + \vec{V}\cdot(\nabla_{\vec{U}}\vec{W}). \tag{2.42}$$

Kita tinjau definisi (2.2) tetang tensor metrik. Tensor metrik adalah hasil kali dalam antara dua vektor basis. Karena perkalian dot bernilai sama ketika ditukar, maka kita bisa membuktikan bahwa tensor metrik simetri terhadap indeks μ dan ν. Dengan properti-properti yang diperlukan, kita bisa membangun ulang bentuk simbol Christoffel. Mula-mula, kita coba turunkan tensor metrik,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\hat{e}_\mu\cdot\hat{e}_\nu), \tag{2.43}$$

dengan properti kompatibilitas metrik,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}g_{\mu\nu} = \frac{\partial\hat{e}_\mu}{\partial x^\alpha}\cdot\hat{e}_\nu + \hat{e}_\mu\cdot\frac{\partial\hat{e}_\nu}{\partial x^\alpha}, \tag{2.44}$$

dengan hubungan turuna vektor basis dan simbol Christoffel, didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}g_{\mu\nu} &= \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}\hat{e}_\kappa\cdot\hat{e}_\nu + \hat{e}_\mu\cdot(\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\hat{e}_\beta) \\ &= \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}(\hat{e}_\kappa\cdot\hat{e}_\nu) + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}(\hat{e}_\mu\cdot\hat{e}_\beta) \\ &= \Gamma^\kappa_{\alpha\mu}g_{\kappa\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

untuk suku kedua, tukar $\beta \to \kappa$ dan dengan sifat simetri dari tensor metrik, untuk suku pertama tukar κ dengan ν, maka

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\alpha\mu} g_{\nu\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\alpha\nu} g_{\mu\kappa}, \tag{2.46}$$

kemudian hitung turunan tensor metrik yang sama, namun dengan mengganti indeksnya, misal $g_{\alpha\mu}$, dengan cara yang sama didapatkan

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\kappa}_{\nu\alpha} g_{\mu\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} g_{\alpha\kappa}, \tag{2.47}$$

dan kita coba menurunkan $g_{\nu\alpha}$,

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} g_{\alpha\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\alpha\mu} g_{\nu\kappa}. \tag{2.48}$$

Kita bisa lihat bahwa suku pertama (2.46) identik dengan suku kedua (2.48), suku kedua (2.46) sama dengan suku pertama (2.47) dan suku kedua (2.47) sama dengan suku pertama (2.48). Sehingga kita bisa menjumlahkan (2.46) dengan (2.47) kemudian mengurangkan dengan (2.48) sehingga mendapatkan

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} = 2\Gamma^{\kappa}_{\alpha\nu} g_{\mu\kappa}. \tag{2.49}$$

Dengan demikian kita memiliki bentuk lain dari simbol Christoffel

$$\Gamma^{\kappa}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right). \tag{2.50}$$

Terkadang, operator turunan kovarian disebut dengan **koneksi**(*connection*). Ketika kita ingin mengangkut vektor dari titik A ke titik B melalui kurva yang diparameterisasi oleh λ sepanjang AB. Vektor tersebut dikatakan terangkut sejajar jika memenuhi turunan kovarian ke arah kurva λ adalah nol. Apa yang dilakukan oleh pengangkutan sejajar adalah mengkoneksi ruang vektor singgung di titik A dengan ruang vektor singgung di titik B. Pengangkutan sejajar dikatakan mengkoneksi karena menunjukkan seberapa besar pemutaran arah vektor singgung yang harus dilakukan. Karena pengangkutan sejajar didefinisikan melalui turunan kovarian, maka kita bisa mengatakan bahwa turunan kovarian memberikan koneksi antar ruang vektor singgung pada ruang lengkung. Dengan mengatakan bahwa turunan kovarian adalah koneksi, simbol Christoffel terkadang disebut dengan koefisien koneksi. Turunan kovarian yang menggunakan simbol Christoffel dalam bentuk (2.50) disebut **koneksi Levi-Civita**.

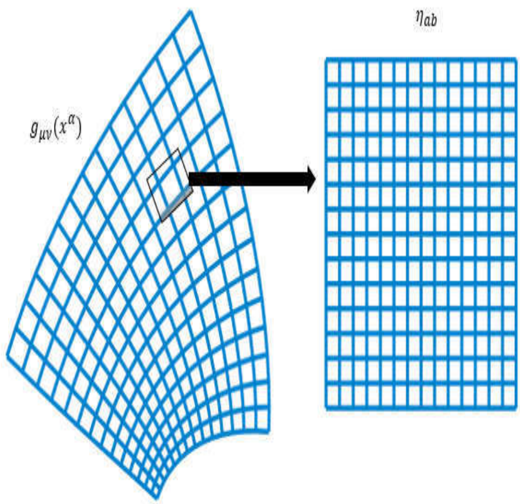
Bab 3

Persamaan Dirac

3.1 Formalisme Tetrad

Dalam sebuah manifold ruang-waktu Riemannian, kita selalu bisa memandang bahwa setiap daerah pada ruang-waktu secara lokal terlihat sebagai ruang-waktu Minkowski. Dalam setiap titik pada ruang waktu, selalu ada ruang singgung di titik tersebut. Ruang singgung itu berisi vektor-vektor yang menyinggung titik pada ruang-waktu tersebut. Hal yang sama, ketika kita melihat secara lokal daerah di sekitar suatu titik pada ruang-waktu. Di titik tersebut juga terdapat ruang singgung yang berkaitan terhadap komponen ruang waktu, namun ketika dipandang dalam daerah Minkowski, kita bisa menemukan ruang singgung dengan tatanan koordinat yang berbeda. Untuk mengetahui hubungan pemilihan basis untuk ruang singgung dari sebuah basis koordinat ke pilihan basis lokal, kita bisa gunakan seperangkat empat medan vektor yang bebas linear yang secara lokal terdefinisi yang disebut dengan tetrad.[22][21]

Untuk mempermudah perumusan dalam geometri, kita sepakati untuk menggunakan huruf Yunani (α, β, μ, ν, dll) untuk



Gambar 3.1: Sebuah Ruang lengkung yang ditandakan oleh metrik $g_{\mu\nu}$ yang secara lokal datar.

indeks yang berhubungan dengan ruang-waktu dan huruf Latin (a, b, c, d, dll) untuk indeks yang berhubungan dengan kerangka lokal yang mana ruang singgungnya berupa ruang Minkowski. Koordinat dari ruang waktu diberikan oleh $\{x^\mu\}$, sedangkan koordinat pada daerah lokal diberikan oleh $\{x^a\}$. Dalam kedua koordinat tersebut didefinisikan basis vektor yang dibentuk oleh gradien $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ dalam ruang waktu dan $\partial_a = \partial/\partial x^a$ pada koordinat lokal dan juga membentuk basis kovektor dx^μ dan dx^a. Dimana basis kovektor adalah dual dari basis vektor yang memenuhi $dx^\mu \partial_\nu = \delta^\mu_\nu$ dan $dx^a \partial_b = \delta^a_b$.

Notasi e_a merupakan basis dari koordinat lokal yang dapat dituliskan dalam anggota dari basis yang lain

$$e_a = e_a^{\ \mu} \partial_\mu \tag{3.1}$$

dan basis medan kovektor e^a dinyatakan dalam

$$e^a = e^a_{\ \mu} dx^\mu, \tag{3.2}$$

dimana e_a^μ adalah medan vektor tetrad dengan $e^a_{\ \mu}$ adalah medan kovektor. Artinya, ketika kita ingin mengetahui basis vektor pada koordinat lokal, kita bisa menggunakan tetrad untuk mencari basis dengan menjumlahkan komponennya dalam koordinat ruang-waktu dengan jumlahan Einstein yang kita kenal. Dengan cara yang sama, kita bisa mencari basis vektor ruang-waktu dari basis koordinat lokal melalui tetrad

$$e_\mu = e^a_{\ \mu} e_a \tag{3.3}$$

dari hubungan (2.51) dengan (2.53) kita bisa mendapatkan sifat

$$e_\mu = e^a_{\ \mu} e_a^{\ \nu} e_\nu \tag{3.4}$$

sehingga

$$e^a_{\ \mu} e_a^{\ \nu} = \delta^\nu_\mu \tag{3.5}$$

dengan cara yang sama kita bisa membuktikan

$$e^a_{\ \mu} e_b^{\ \mu} = \delta^a_b. \tag{3.6}$$

Kita pandang metrik dari ruang waktu, g , dengan komponen metrik $g_{\mu\nu}$ dalam basis dual dx^α,

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.7}$$

dan dari hubungan (2.52) dengan (2.55) kita bisa memperoleh bentuk metrik:

$$ds^2 = g = g_{\mu\nu} e_a^{\ \mu} e^{\ \nu}_{\ b} dx^a dx^b. \tag{3.8}$$

Tetrad $e^{\ \mu}_{\ a}$ dapat dipandang sebgai basis linier yang menghubungkan antara metrik pada ruang waktu g dengan metrik pada koordinat lokal pada ruang waktu η.

$$\eta = \eta_{ab} dx^a dx^b. \tag{3.9}$$

Karena besar dari elemen garis pada ruang waktu dan koordinat lokal sama, maka dengan menghubungkan persamaan (2.58) dengan (2.59) kita bisa mendapatkan

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds^2 \\ \eta &= g \\ \eta_{ab} &= g_{\mu\nu} e_a^{\ \mu} e_b^{\ \nu}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Misalkan kita ingin mentransformasi tetrad $e^a_{\ \mu}$ ke $h^a_{\ \mu}$, maka tetrad akan bertransformasi dengan bentuk

$$h^a_{\ \mu}(x) = L^a_{\ b}(x) e^b_{\ \mu} \tag{3.11}$$

dimana,

$$L^a_{\ c}(x) L^b_{\ d}(x) \eta_{ab} = \eta^{cd}. \tag{3.12}$$

$L^a_{\ b}$ adalah matriks yang merepresentasikan transformasi Lorentz lokal.[1] Pandang sebuah vektor $A^\mu(x)$. Dapat digunakan formalisme tetrad untuk menghubungkan komponennya dari sistem koordinat umum ke kerangka ortonormal lokal dengan sifat

$$A^a(x) = e^a_{\ \mu}(x) A^\mu. \tag{3.13}$$

Apabila dilakukan transformasi Lorentz,

$$A^a(x) \rightarrow A'^a(x) = L^a_{\ b}(x) A^b(x) \tag{3.14}$$

dan transformasi koordinat umum dari vektor dalam koordinat ortonormal lokal,

$$A^a(x) \rightarrow A^a(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A^a(x), \tag{3.15}$$

turunan kovarian $\nabla_\mu A^a$ harus bertransformasi dalam bentuk

$$\nabla_\mu A'^a(x) = L^a_{\ c} \nabla_\mu A^c(x) \tag{3.16}$$

dalam transformasi koordinal ortonormal lokal dan,

$$\nabla'_\mu A'^a(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu}\nabla_\nu A^\mu \tag{3.17}$$

dalam transformasi koordinat umum. Kemudian dikenalkan sebuah koneksi $\omega_{\mu\ b}^{\ a}(x)$ yang mendefinisikan turunan kovarian dari vektor pada koordinat ortonormal lokal

$$\nabla_\mu A^a = \partial_\mu A^a + \omega_{\mu\ b}^{\ a} A^b. \tag{3.18}$$

Dari hubungan (2.57) dan (2.58) kita bisa mendapatkan bentuk transformasi koordinat umum dari turunan kovariannya,

$$\nabla'_\mu A'^a(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} L^a_b \left(\partial_\nu A^b + \omega_{\nu\ c}^{\ b} A^b\right) \tag{3.19}$$

dimana

$$\begin{aligned}\nabla'_\mu A'^a(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} A'^a + \omega'^{\ a}_{\mu\ b} A'^b \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} L^a_{\ b} A^b + \omega'^{\ a}_{\mu\ b} L^b_{\ c} Ac^c\end{aligned} \tag{3.20}$$

sehingga kita bisa mendapatkan

$$\omega'^{\ a}_{\mu\ b} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left(L^a_{\ d}\omega_{\nu\ c}^{\ d}(L^{-1})^c_{\ b} - \partial_\nu L^a_{\ c}(L^{-1})^c_{\ b}\right). \tag{3.21}$$

Transformasi koneksi pada koordinat umum memiliki bentuk seperti (2.61), dimana transformasi pada Lorentz lokal dapat dicari dengan menggunakan sifat $\partial x^\nu/\partial x'^\mu = \delta^\nu_\mu$. Pandang turunan kovarian dari tetrad. Karena tetrad bertransformasi dalam bentuk (2.51) pada transformasi Lorentz lokal, dan akan mirip seperti vektor kovarian ketika bertransformasi dibawah transformasi koordinat umum, maka kita bisa mendapatkan turunan kovarian dari tetrad. Turunan kovarian vektor pada kerangka ortonormal lokal,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A^a &= \nabla_\mu (e^a_{\ \mu} A^\mu) \\ &= (\nabla_\mu e^a_{\ \mu}) A^\mu + e^a_{\ \mu} \nabla_\mu A^\mu .\end{aligned} \tag{3.22}$$

Turunan kovarian dari sebuah vektor $\mathbf{A}$, $\nabla_\mu \mathbf{A} = \nabla_\mu (A^a e_a) = \nabla_\mu (A^\nu e_\nu)$,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \mathbf{A} &= \nabla_{\partial_\mu} (A^a) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e_a} \\ &= \nabla_{\partial_\mu} (e^a_{\ \nu} A^\nu) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e_a} \\ &= (\partial_\mu (e^a_{\ \nu} A^\nu + \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \nu} A^\nu) \mathbf{dx}^\mu e_a^{\ \lambda} \mathbf{e}_\lambda \\ &= (e^a_{\ \nu} \partial_\mu A^\nu + (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \nu} A^\nu) \mathbf{dx}^\mu e_a^{\ \lambda} \mathbf{e}_\lambda \\ &= e_a^{\ \lambda} \bigg(e^a_{\ \nu} \partial_\mu A^\nu + (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + \omega_{\mu\ b}^{\ a} A^b \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\lambda \\ &= \bigg(\delta^\lambda_\nu \partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \lambda} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \lambda} \omega_{\mu\ b}^{\ a} A^b \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\lambda \\ &= \bigg(\partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \nu} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \nu} \omega_{\mu\ b}^{\ a} A^b \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\nu\end{aligned}$$

Dengan demikian, dengan memisahkan komponen vektor dan basis vektornya, kita dapatkan relasi turunan kovarian:

$$\begin{aligned}\nabla_{dx^\mu} A^\nu \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\nu &= \bigg(\partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \nu} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \nu} \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \theta} A^\theta \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\nu \\ \bigg(\partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\beta \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\nu &= \bigg(\partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \nu} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \nu} \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \theta} A^\theta \bigg) \mathbf{dx}^\mu \mathbf{e}_\nu \\ \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^\beta &= \partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \nu} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \nu} \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \theta} A^\theta\end{aligned} \tag{3.23}$$

untuk suku ketika sisi kanan, dengan mengubah $\theta \to \nu$, maka

$$\partial_\mu A^\nu + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} A^\nu = \partial_\mu A^\nu + e_a^{\ \nu} (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) A^\nu + e_a^{\ \eta} \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \nu} A^\nu \tag{3.24}$$

sehingga didapatkan

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} = e_a^{\ \nu}(\partial_\mu e^a_{\ \nu}) \ + e_a^{\ \eta}\omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_\nu \tag{3.25}$$

dan juga didapatkan

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\ b}^{\ a} &= \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} e_b^{\ \nu} e^a_{\ \eta} - e_b^{\ \nu}(\partial_\mu e^a_{\ \nu}) \\ &= -e_b^{\ \nu}(\partial_\mu e^a_{\ \nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Postulad tetrad mengatakan bahwa turunan kovarian dari tetrad hilang, $\nabla_\mu e^a_{\ \nu} = 0$. sehingga kita bisa gunakan (2.76) untuk mengetahui hubungan antara koneksi affine dan koneksi spin. Dengan mengakilan $e^b_{\ \nu}$ kita mendapatkan:

$$\omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \lambda} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda} e_b^{\ \nu} e^a_{\ \eta} e^b_{\ \lambda} - e_b^{\ \nu} e^b_{\ \lambda}(\partial_\mu e^a_{\ \lambda}) \tag{3.27}$$

dengan hubungan (2.55), kta dapatkan

$$\omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \nu} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} e^a_{\ \eta} - (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) \tag{3.28}$$

sehingga porstulat tetrad memberikan

$$\nabla_\mu e^a_{\ \nu} = (\partial_\mu e^a_{\ \nu}) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} e^a_{\ \eta} + \omega_{\mu\ b}^{\ a} e^b_{\ \nu} \tag{3.29}$$

3.2 Persamaan Dirac pada Ruang Waktu Minkowski

Pada mekanika kuantum dasar, dikenal persamaan Schrodinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\Big)\psi. \tag{3.30}$$

Untuk membangun persamaan gelombang Schrodinger relativistik, kita tinjau partikel bebas relativistik, dengan kesetaraan energi-momentum akibat relativitas khusus[24]. Tinjsu hubungan

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} + \vec{p}\cdot\vec{p} = m_0^2 c^2 \tag{3.31}$$

dengan mengganti momentum empat p^μ sebagai operator momentum empat $\hat{p}^\mu$,

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu &= i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial ct}, \hat{\vec{p}}\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla}\right),\end{aligned} \tag{3.32}$$

sehingga kita memiliki persamaan Klein-Gordon untuk partikel bebas

$$\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu\psi = m_0^2c^2\psi. \tag{3.33}$$

Persamaan Klein-Gordon adalah persamaan orde dua terhadap turunan waktu dan ini mengarah ke definisi rapat probabilitas yang merupakan turunan orde pertama terhadap waktu. Paul Dirac mencoba untuk membangun persamaan Schrodinger relativistik orde pertama[25]. Dia mempostulatkaan, jika persamaan tersebut ada, maka persamaan tersebut haruslah berbentuk

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}\psi = H\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2)\psi, \tag{3.34}$$

Untuk mengetahui nilai α dan β, kita harus memahami jika bentuk orde kedua persamaan ini haruslah serupa dengan persamaan Klein-Gordon (2.83), yaitu

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2)}\psi = H^2\psi = (p^2 + m^2c^4)\psi \tag{3.35}$$

Kita kuadratkan (2.84),

$$\begin{aligned}-\hbar^2\frac{\partial^2}{c^2\partial^2 t}\psi &= (\alpha_a p_a + \beta mc^2)(\alpha_b p_b + \beta mc^2)\psi \\ &= (\alpha_a^2 p_a^2 + [\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a]p_a p_b + [\alpha_a\beta + \beta\alpha_a] + \beta^2 m^2c^4)\psi,\end{aligned} \tag{3.36}$$

dimana pada suku kedua,$a \neq b$. Dengan membandingkan (2.86) dengan (2.85), kita dapat memastikan bahwa $\alpha_a^2 = I$ dan $\beta^2 = I$. Begitupula untuk suku kedua dan ketiga haruslah menghilang. Karena momentumnya tidak nol, maka didapat hubungan antikomutasi $\{\alpha_a, \alpha_b\} = 0$ dan $\{\alpha_a, \beta\} = 0$. Jika α dan β hanyalah sebuah angka, maka pastilah keduanya akan komut dan mustahil untuk antikomut. Sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa α dan β adalah matriks. Kemudian kita tinjau trace dari β.

$$Tr(\beta) = Tr(I\beta) \tag{3.37}$$

karena sifat $\alpha_a^2 = I$, maka

$$Tr(\beta) = Tr(\alpha_a^2\beta) \tag{3.38}$$

dengan sifat siklik dari trace,

$$Tr(\beta)Tr(\alpha_a\beta\alpha_a) \tag{3.39}$$

dengan sifat antikomutasi $\{\alpha_a, \beta\} = 0$ kita dapat menunjukkan $\beta\alpha_a = -\alpha_a\beta$, sehingga

$$Tr(\beta) = -Tr(\alpha_a^2\beta) = -Tr(\beta) \tag{3.40}$$

kondisi ini dipenuhi jika dan hanya jika $Tr(\beta = 0)$. Dengan cara yang sama, kita dapat membuktikan bahwa $Tr(\alpha_a) = 0$. Karena trase adalah jumlahan dari nilai eigen, pastinya nilai eigen dari matriks α dan β haruslah kombinasi dari $+1$ dan -1, dan tentu saja dimensi dari matriks α dan β haruslah genap. kemudian kita tinjau determinan β.

$$\begin{aligned} \det(\beta^2) &= \det(I) \\ \det(\beta)\det(\beta) &= 1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

dengan sifat determinan kita bisa menunjukkan bahwa $\det(\beta) = 1$ atau $\det(\beta) = -1$. Begitupula dengan α. Dengan merujuk persamaan (2.84), karena H hermitian, p hermitian, maka pastilah α dan β hermitian. Jadi kita membutuhkan 4 matriks yang tracenya nol, hermitian, memiliki nilai eigen ± 1, memiliki determinan ± 1 dan harus berdimensi genap. Kita memiliki matriks pauli yang bersifat seperti itu. namun, matriks pauli hanyalah memiliki 3 matriks, sedangkan kita membutuhkan 4. Alhasil, kita perlu menaikkan dimensi kita yang sebelumnya 2 menjadi 4, sehingga, kita memiliki keempat matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

atau jika dibentuk dalam suku matriks Pauli

$$\begin{aligned}
\beta &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\
\alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \\
\alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \\
\alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Persamaan Dirac dapat dibentuk dengan mengalikan (2.84) dengan β dan mendefinisikan empat matriks, yang disebut matriks Dirac atau matriks gamma, dengan

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \beta, \\
\gamma^1 &= \beta\alpha_1, \\
\gamma^2 &= \beta\alpha_2, \\
\gamma^3 &= \beta\alpha_3.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Apabila persamaan Dirac (3.34), dikalikan dengan β dari kiri, kita dapatkan bentuk

$$i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial x^0} = \big(\beta\alpha^i p_i + Imc^2\big)\psi. \tag{3.45}$$

Menggunakan relasi (3.44), kita dapatkan

$$\begin{aligned}
i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} &= \big(-i\hbar\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + Imc^2\big)\psi \\
\big(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - Imc^2\big)\psi &= 0,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

atau dengan mengambil $\hbar = c = 1$,

$$\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - Im\big)\psi = 0. \tag{3.47}$$

3.3 Persamaan Dirac Pada Ruang-Waktu Lengkung

Untuk membangun persamaan Dirac pada ruang lengkung, kita perkenalkan matriks bergantung waktu $\tilde{\gamma}^{\alpha}$. Matriks $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ ini berhubungan dengan matriks gamma pada relativitas khusus, γ^{a} dengan hubungan

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}(x) = e_{a}^{\ \alpha}(x)\gamma^{a} \tag{3.48}$$

Dengan sifat antikomutasi matriks gamma,

$$\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\} = 2\eta^{ab} I \tag{3.49}$$

sehingga, kita bisa mendapatkan sifat antikomutasi dari matriks gamma bergantung ruang waktu,

$$\begin{aligned} \{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} &= \tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu} \\ &= e_{a}^{\ \mu}\gamma^{a} e_{b}^{\ \nu}\gamma^{b} + e_{b}^{\ nu}\gamma^{b} e_{a}^{\ \mu}\gamma^{a} \\ &= e_{a}^{\ \mu} e_{b}^{\ \nu}\Big(\gamma^{a}\gamma^{b} + \gamma^{b}\gamma^{a}\Big) \\ &= e_{a}^{\ \mu} e_{b}^{\ \nu}\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\} \\ &= e_{a}^{\ \mu} e_{b}^{\ \nu} 2\eta^{ab} I \\ &= 2g^{\mu\nu} I \end{aligned} \tag{3.50}$$

Sebuah spinor, ψ, adalah kuantitas yang bertransformasi seperti

$$\tilde{\psi}_{e} = L\psi_{h}, \tag{3.51}$$

dimana $L = L(x)$ adalah representasi spinor bergantung ruang waktu untuk rotasi tetrad $\Lambda = \Lambda(x)$. Turunan dari spinor tidak bertransformasi seperti spinor, karena

$$\tilde{\psi}_{,\mu} = L\psi_{,\mu} + L_{,\mu}\psi. \tag{3.52}$$

Selanjutnya, kita definisikan turunan kovarian dari spinor dalam bentuk

$$\begin{aligned} D_\mu &= I\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu \psi \\ &= (I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi \end{aligned} \tag{3.53}$$

dengan koneksi affine spinor, Γ_μ. Turunan ini harus bertransformasi seperti spinor.

$$\tilde{D_\mu}\tilde{\psi} = LD_\mu \psi, \tag{3.54}$$

dimana,

$$\begin{aligned} \tilde{D_\mu}\tilde{\psi} &= I\tilde{\psi}_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\psi} \\ &= I(L\psi)_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\psi} \\ &= I(L\partial_\mu \psi + L_{,\mu}\psi) + \tilde{\Gamma}_\mu \psi. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Hubungan antara (2.100), (2.101), dan (2.102) memberikan

$$\begin{aligned} L(I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi &= (IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu)\psi \\ LI\partial_\mu + L\Gamma_\mu &= IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu L \\ IL\partial_\mu + L\Gamma_\mu - IL\partial_\mu - IL_{,\mu} &= \tilde{\Gamma}_\mu L \\ L\Gamma_\mu L^{-1} - IL_{,\mu}L^{-1} &= \tilde{\Gamma}_\mu. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Operator D_μ dapat bekerja ke medan bernilai matriks, M. Dengan menuliskan M sebagai hasil perkalian tensor antara vektor dan kovektor, turunan kovarian dari M didefinisikan[23]:

$$D_\mu \mathbf{M} = \nabla_\mu \mathbf{M} + [\Gamma_\mu, \mathbf{M}] \tag{3.57}$$

Jika M adalah identitas, tentu saja $D_\mu I = 0$, dan juga turunan kovarian dari metrik:

$$D_\mu g^{\alpha\beta} = 0. \tag{3.58}$$

Tinjau persamaan (2.97)

$$\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}I$$

maka

$$D_{\mu}\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = D_{\mu}(\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu}) = 0 \tag{3.59}$$

sehingga

$$D_{\mu}\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\mu}D_{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + D_{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu} + \tilde{\gamma}^{\nu}D_{\mu}\tilde{\gamma}^{\mu} = 0. \tag{3.60}$$

Kondisi ini dipenuhi jika

$$D_{\mu}\tilde{\gamma}^{\alpha} = 0 \tag{3.61}$$

Kita tinjau turunan kovarian dari metrik Minkowski

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}\eta_{ab} &= \partial_{\mu}\eta_{ab} - \omega_{\mu\ a}^{\ c}\eta_{cb} - \omega_{\mu\ b}^{\ c}\eta_{ac} \\ &= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba} = 0 = \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} \end{aligned} \tag{3.62}$$

mengingat

$$\eta_{ab} = e^{\mu}_{\ a}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta} \tag{3.63}$$

maka

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}\eta_{ab} &= \nabla_{\mu}(e^{\alpha}_{\ a}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta}) \\ &= e^{\beta}_{\ b}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\ a}g_{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\ a}\nabla_{\mu}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\ a}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta} \\ &= e^{\beta}_{\ b}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\ a}g_{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\ a}\nabla_{\mu}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

oleh karena (2.110), maka

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} &= e^{\beta}_{\ b}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\ a}g_{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\ a}\nabla_{\mu}e^{\beta}_{\ b}g_{\alpha\beta} \\ &= e_{\alpha b}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\ a} + e_{\beta a}\nabla_{\mu}e^{\beta}_{\ b}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Sehingga kita dapatkan bentuk eksplisit dari $\omega_{\mu ab}$,

$$\omega_{\mu ab} = e_{\alpha b}\nabla_{\mu}e^{\alpha}_{\ a}. \tag{3.66}$$

Tinjau kembali persamaan (2.100)[1][E.6], dapat didapatkan

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

dengan $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$. Didefinisikan koefisien Fock-Ivanenko, yaitu

$$\Gamma_c = e^\mu_{\ c}\Gamma_\mu. \tag{3.68}$$

Dengan turunan kovarian spinor pada koordinat ortonormal lokal

$$D_c\psi = (\partial_c + \Gamma_c)\psi \tag{3.69}$$

dimana $\partial_c = e^\lambda_{\ c}\partial_\lambda$. Sehingga persamaan Dirac untuk partikel bebas pada ruang lengkung memiliki bentuk

$$\begin{aligned} i\gamma^c D_c\psi - m\psi = 0 \\ i\gamma^c e^\mu_{\ c}(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi + m\psi = 0 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Bab 4

Persamaan Dirac Pada Ruang-Waktu Lengkung

Dalam bab ini akan dikerjakan beberapa contoh aplikasi perumusan persamaan Dirac pada berbagai ruang-lengkung. Dalam perumusan persamaan Dirac diperlukan simbol Christoffel, koefisien koneksi spin dan koefisien Fock-ivanenko yang telah dikerjakan secara penuh pada lampiran [A-D]. Dalam perumusan ini, digunakan tanda tensor metrik (-,+,+,+). Persamaan Dirac diselesaikan pada 3+1 koordinat bola dan ditinjau persamaan pada ruang-waktu Schwarzschild dan Reissner-Nordstrom yang akan dibuktikan konsisten dengan perumusan relativitas umum.

4.1 Persamaan Dirac Pada Koordinat Bola

Kita tinjau metrik bola

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.1}$$

didapatkan tensor metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

dengan tensor metrik kontravariannya memiliki bentuk:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Dari hubungan (3.10) kita bisa mendapatkan:

$$\begin{aligned} \eta_{ab} e^a_{\ \mu} e^b_{\ \nu} &= g_{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu}\eta^{ab} &= e^a_{\ \mu} e^b_{\ \nu}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

sehingga kita dapat menentukan komponen tetradnya.

Dalam mencari komponen tetrad, kita memiliki dua simbol yang berjalan, yaitu pada koordinat umum (ditandai huruf yunani) dan pada koordinat ortonormal lokal (ditandai huruf latin), untuk membedakannya, ketika kita menjalankan koordinat umum kita gunakan sistem untuk $\mu = 0 \rightarrow t$, $\mu = 1 \rightarrow r$,$\mu = 2 \rightarrow \theta$, dan $\mu = 3 \rightarrow \phi$, sedangkan untuk koordinat orthonormal lokal kita jalankan tetap dari $a = 0$

hingga $a = 3$, dan kita dapatkan komponen tetrad:

$$\begin{aligned} e^a_{\ \mu} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix} \\ e_a^{\ \mu} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r\sin\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dalam perumusan persamaan Dirac (3.70), kita memerlukan koefisien Fock Ivanenko, yang mana dalam penentuan koefisien Fock-Ivanenko memerlukan koneksi spin seperti pada persamaan (3.66). Dalam perumusan koneksi spin, kita memerlukan simbol Christoffel untuk koordinat bola. Simbol Christoffer pada koordinat bola yang tidak nol dengan sifat simetri simbol Christoffel adalah:

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r\sin^2\theta \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dari hasil perhitungan (A.1), kita dapatkan komponen koneksi spin yang tidak nol beserta sifat antisimetri koneksi spin untuk pertukaran indeks koordinat lokal seperti pada persamaan

(3.62):

$$
\begin{aligned}
\omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -1 \\
\omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -\sin\theta \\
\omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -\cos\theta.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Menggunakan persamaan (3.68) dan (3.67) kita dapatkan koefisien Fock-Ivanenko seperti yang telah dihitung pada (A.2):

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &= 0 \\
\Gamma_1 &= 0 \\
\Gamma_2 &= \frac{1}{2r}\gamma^2\gamma^1 \\
\Gamma_3 &= \frac{1}{2r}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Turunan kovarian spinor sesuai persamaan (3.69) didapat:

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \partial_t \\
D_1 &= \partial_r \\
D_2 &= \frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\gamma^2\gamma^1 \\
D_3 &= \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\gamma^3\gamma^2 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Sehingga persamaan Dirac pada koordinat bola menjadi;

$$
\begin{aligned}
&\bigg(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_r + i\gamma^2\Big(\frac{1}{r}\partial\theta + \frac{1}{2r}\gamma^2\gamma^1\Big) + i\gamma^3\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \\
&+ \frac{1}{2r}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2\Big) - m\bigg)\psi = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Karena matriks gamma pada (3.44) adalah perkalian matriks beta dan matriks alfa (3.43), dan kedua matriks beta dan matriks alfa memiliki sifat kuadrat identitas, maka kuadrat matriks gamma jugalah identitas. Sehingga, persamaan (4.8) dapat kita sederhanakan menjadi:

$$
\begin{aligned}
i\Big[\gamma^0\partial_t + \gamma^1\Big(\partial_r + \frac{1}{r}\Big) + \Big(\frac{1}{r}\Big)\gamma^2\Big(\partial_\theta + \frac{\cot\theta}{2}\Big) + \\
\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\Big)\gamma^3\partial_\phi\Big]\psi = m\psi.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Apabila persamaan (4.9) kita kalikan $(-i\gamma^0)$ dari kiri, maka kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
(\gamma^0)^2\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma^0\gamma^1\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big)\psi + \Big(\frac{1}{r}\Big)\gamma^0\gamma^2\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \\
+ \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\Big)\psi + \Big(\frac{1}{r\sin\theta}\Big)\gamma^0\gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = -im\gamma^0\psi.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Jika kita ambil

$$
\psi(t,r,\theta,\phi) = (\sin\theta)^{-1/2}\varphi(t,r\theta,\phi), \tag{4.13}
$$

kita miliki relasi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\
\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big)\psi &= (\sin\theta)^{-1/2}\Big(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big)\varphi \\
\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\Big)\psi &= \Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\Big)(\sin\theta)^{-1/2}\varphi \\
&= \Big(\frac{\partial[(\sin\theta)^{-1/2}\varphi]}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(\sin\theta)^{-1/2}\varphi\Big) \\
&= -\frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi + (\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi \\
&= (\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\
\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= \frac{1}{r(\sin\theta)^{3/2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Dengan demikian, persamaan (4.10) bisa kita ubah

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\gamma^0\gamma^1\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)\varphi+\frac{1}{r}\gamma^0\gamma^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\\&\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\Big)\gamma^0\gamma^3\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}=-im\gamma^0\varphi.\end{aligned}\tag{4.15}$$

atau

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{\partial}{\partial t}+im\gamma^0 0\Big]\varphi=\Big[-\gamma^0\gamma^1\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)-\frac{1}{r}\gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}\\&-\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\Big)\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]\varphi.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Dalam perumusan persamaan diferensial pada koordinat bola, kita bisa memisahkan komponen radial dan waktu dengan komponen sudutnya. Dalam perumusan solusi sudut dari persamaan diferensial parsial pada koordinat bola, kita kenalkan operator harmonika bola[22]:

$$\hat{K}(\theta,\phi)=\gamma^0(-\gamma^1)\Big(-\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}-\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)\tag{4.17}$$

yang memenuhi persamaan nilai eigen

$$\hat{K}(\theta,\phi)Y(\theta,\phi)=\kappa Y(\theta,\phi),\tag{4.18}$$

dimana $Y(\theta,\phi)$ adalah fungsi harmonik bola dan $\kappa=0,\pm1,\pm2,...$ yang merupakan nilai eigen dari operator $\hat{K}(\theta,\phi)$. Dengan demikian, persamaan (4.16) menjadi

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}+im\gamma^0\Big]\varphi=\Big[-\gamma^0\gamma^1\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)-\frac{1}{r}\gamma^1\hat{K}(\theta,\phi)\Big]\varphi.\tag{4.19}$$

Kemudian kita lakukan pemisahan variabel untuk fungsi sudut dan fungsi radial dan waktu dalam bentuk spinor:

$$\varphi(t,r,\theta,\phi)=Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\\chi(t,r)\end{bmatrix}.\tag{4.20}$$

Kita substitusikan (4.20) ke dalam (4.19),

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\right)Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}\\ &=\left(-\begin{bmatrix} 0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)-\frac{\kappa}{r}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_x\\ -\sigma_x & 0\end{bmatrix}\right)Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Dengan demikian, kita dapatkan persamaan terkopel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+im\right)\xi(t,r)&=\left(-\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)-\frac{\kappa}{r}\right)\sigma_1\chi(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-im\right)\chi(t,r)&=\left(-\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)+\frac{\kappa}{r}\right)\sigma_1\xi(t,r).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Untuk menyelesaikan persamaan terkopel diatas, kita gunakan ansatz untuk keadaan stasioner[26]:

$$\begin{aligned}\xi(r,t)&=R(r)e^{-iEt}\\ \chi(r,t)&=\rho(r)e^{-iEt}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Persamaan (4.22) menjadi

$$\begin{aligned}i\Big(-E+m\Big)R&=\left(-\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)-\frac{\kappa}{r}\right)\rho\\ -i\Big(E+m\Big)\rho&=\left(-\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big)+\frac{\kappa}{r}\right)R\end{aligned} \tag{4.24}$$

atau

$$-(E+m)(E-m)\rho=\Big(-\frac{d}{dr}+\frac{\kappa-1}{r}\Big)\Big(-\frac{d}{dr}-\frac{\kappa+1}{r}\Big)\rho \tag{4.25}$$

sehingga

$$\begin{aligned}-(E+m)(E-m)\rho &= \Big(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa+1}{r^2} + \frac{\kappa+1}{r}\frac{d}{dr} - \\ &\qquad \frac{\kappa-1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\kappa^2-1}{r^2}\Big)\rho \\ &= \Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\kappa^2+\kappa}{r^2}\Big)\rho\end{aligned} \tag{4.26}$$

atau

$$r^2\frac{\partial^2\rho}{dr^2} + 2r\frac{d\rho}{dr} + \Big[(E^2-m^2)r^2 - \kappa(\kappa+1)\Big]\rho = 0 \tag{4.27}$$

Persamaan ini memiliki bentuk yang mirip dengan persamaan Bessel bola[27]:

$$r^2\frac{\partial^2\rho}{dr^2} + 2r\frac{d\rho}{dr} + \Big[k^2r^2 - l(l+1)\Big]\rho = 0 \tag{4.28}$$

dengan solusi

$$\rho = Aj_l(kr) + Bn_l(kr) \tag{4.29}$$

dengan mencocokkan persamaan (4.27) dan (4.28), kita dapatkan:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{E^2-m^2} \\ l &= \kappa \end{aligned} \tag{4.30}$$

Sehingga persamaan (4.27) memiliki solusi

$$\rho(r) = Aj_\kappa(\sqrt{E^2-m^2}r) + Bn_\kappa(\sqrt{E^2-m^2}r) \tag{4.31}$$

dengan cara yang sama, kita dapatkan persamaan untuk $R(r)$,

$$\begin{aligned}-(E+m)(E-m)R &= \Big(-\frac{d}{dr} - \frac{\kappa+1}{r}\Big)\Big(-\frac{d}{dr} + \frac{\kappa-1}{r}\Big)R \\ &= \Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\kappa^2-\kappa}{r^2}\Big)R\end{aligned} \tag{4.32}$$

atau

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\Big[(E^2-m^2)r^2-\kappa(\kappa-1)\Big]R=0. \quad (4.33)$$

Jika persamaan (4.33) kita ambil $\delta=\kappa-1$, maka

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\Big[(E^2-m^2)r^2-\delta(\delta+1)\Big]R=0. \quad (4.34)$$

Persamaan ini memiliki bentuk yang mirip dengan persamaan Bessel bola (4.28) dengan mencocokkan persamaan (4.25) dan (4.26), kita dapatkan:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{E^2-m^2} \\ l &= \delta \end{aligned} \quad (4.35)$$

Sehingga persamaan (4.25) memiliki solusi

$$R(r)=Cj_\delta(\sqrt{E^2-m^2}r)+Dn_\delta(\sqrt{E^2-m^2}r) \quad (4.36)$$

atau

$$R(r)=Cj_{\kappa-1}(\sqrt{E^2-m^2}r)+Dn_{\kappa-1}(\sqrt{E^2-m^2}r) \quad (4.37)$$

Solusi persamaan Dirac pada koordinat bola memiliki suku fungsi Bessel dan harmonika bola. Apabila partikel bebas di koordinat bola, maka suku fungsi Neumann bola akan menghilang, dikarenakan fungsi Neumann akan divergen di titik asal.

4.2 Persamaan Dirac Pada Ruang-Waktu Schwarzschild

Pada Lampiran [B.1], kita telah mempelajari bahwa ruang-waktu Schwarzschild merupakan solusi persamaan medan Einstein dengan sumber statik dan simetri bola pada vakum. Dari hasil perhitungan, kita tinjau ulang elemen garis ruang-waktu Schwarzschild seperti pada persamaan (B.68):

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{r})c^2dt^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{4.38}$$

dengan

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \tag{4.39}$$

Tensor metrik Schwarzschild dapat dinyatakan dalam:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{r_s}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{4.40}$$

begitupula tensor metrik kontravariannya kita dapatkan:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{r_s}{r})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Setelah kita mendapatkan tensor metrik dari ruang-waktu Schwarzschild, dengan (4.4) kita dapatkan komponen tetrad:

$$e^a_\mu = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r})^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r})^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}, \tag{4.42}$$

dengan inversnya:

$$e^\mu_a = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r})^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r})^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Dengan menggunakan (3.66), kita bisa mendapatkan komponen $\omega_{\mu ab}$ yang tidak nol pada ruang-waktru Schwarzschild, seperti yang telah dihitung pada lampiran [A.1]:

$$\begin{aligned}
\omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{r_s}{2r^2} \\
\omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \\
\omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -\sin\theta\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \\
\omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -\cos\theta.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Merujuk (3.69) dan dengan perhitungan pada (A.2), kita dapatkan turunan kovarian spinor:

$$D_c = e_c^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_c, \tag{4.45}$$

dan kita dapatkan keseluruhan turunan Fock-Ivanenko

$$\begin{aligned}
D_0 &= e_0^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_0 \\
&= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\partial_t - \frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\gamma^0\gamma^1 \\
D_1 &= e_1^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_1 \\
&= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\partial_r \\
D_2 &= e_2^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_2 \\
&= \frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\gamma^2\gamma^1 \\
D_3 &= e_3^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_3 \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Setelah mendapatkan seluruh komponen turunan Fock-Ivanenko, kita bisa membangun persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild. Tinjau persamaan Dirac pada ruang-waktu lengkung (3.70),

$$\big(i\gamma^c D_c - m\big)\psi = 0. \tag{4.47}$$

Persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild menjadi:

$$\Bigg(i\gamma^0\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\partial_t - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\gamma^0\gamma^1\bigg) + i\gamma^1\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\partial_r\bigg)$$
$$+\, i\gamma^2\bigg(\frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1\bigg) + i\gamma^3\bigg(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}$$
$$\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2\bigg) - m\Bigg)\psi = 0. \tag{4.48}$$

atau

$$i\Bigg(\gamma^0\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\partial_t - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\gamma^0\gamma^1\bigg) + \gamma^1\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\partial_r\bigg)$$
$$+\, \gamma^2\bigg(\frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1\bigg) + \gamma^3\bigg(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}$$
$$\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2\bigg)\Bigg)\psi = m\psi. \tag{4.49}$$

dengan sifat kuadrat matriks gamma, $(\gamma^i)^2 = I$, kita sederhanakan

$$i\Bigg(\gamma^0\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\partial_t - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\gamma^1 + \gamma^1\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\partial_r$$
$$+\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^1 + \gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}$$
$$\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^2\Bigg)\psi = m\psi. \tag{4.50}$$

dan dikumpulkan

$$i\Bigg(\gamma^0\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\partial_t + \gamma^1\Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\partial_r - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)$$
$$+\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} + +\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big] + \gamma^2\frac{1}{r}\Big[\partial_\theta + +\frac{\cot\theta}{2}\Big]$$
$$+\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Bigg)\psi = m\psi. \tag{4.51}$$

Kita kalikan persamaan (4.40) dengan $-i\gamma^0$ dari kiri,

$$\Bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\partial_t + \gamma^0\gamma^1\Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\partial_r - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)$$
$$+\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} + \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big] + \gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\Big[\partial_\theta + \frac{\cot\theta}{2}\Big]$$
$$+\gamma^0\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Bigg)\psi = -i\gamma^0 m\psi. \tag{4.52}$$

Dalam perumusan solusi persamaan (4.52), kita misalkan solusi ψ memiliki bentuk:

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = (\sin\theta)^{-1/2}\varphi(t,r,\theta,\phi), \tag{4.53}$$

dengan demikian, kita substitusikan ke masing-masing komponen (4.52) dan dapatkan relasi

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}(\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\psi &= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}(\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\\
\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)(\sin\theta)^{-1/2}\varphi\\
&= \left(\frac{\partial[(\sin\theta)^{-1/2}\varphi]}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(\sin\theta)^{-1/2}\varphi\right)\\
&= -\frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi+(\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi\\
&= (\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\
\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= \frac{1}{r(\sin\theta)^{3/2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Kita substitusikan relasi (4.53) dan (4.54) ke persamaan (4.52) dan menjadi

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\gamma^0\gamma^1\Bigg[\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\\
&+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\Bigg]\varphi+\gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\
&+\gamma^0\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = -i\gamma^0 m\varphi.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Ruang-waktu Schwarzschild adalah ruang-waktu dengan tensor metrik simetri bola. Artinya, perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild untuk suku sudut θ dan ϕ, sama persis dengan kasus persamaan Dirac pada koordinat bola, hanya saja suku radial dan waktunya yang tidak sama dengan koordinat bola karena mengandung suku $(1 - r_r/r)$. Dengan demikian kita bisa mencari solusi sudut untuk persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild dengan meninjau operator harmonik bola seperti pada persamaan (4.17) dan (4.18). Persamaan (4.55) dapat dituliskan

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\gamma^0\gamma^1\left[\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right]\varphi+\gamma^1\frac{1}{r}\hat{K}(\theta,\phi)\varphi=-i\gamma^0 m\varphi.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Kemudian kita lakukan pemisahan variabel untuk fungsi sudut dan fungsi radial dan waktu dalam bentuk spinor:

$$\varphi(t,r,\theta,\phi)=Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}, \tag{4.57}$$

sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned}&\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}+i\gamma^0 m\right)Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}=-\Bigg(\gamma^0\gamma^1\\&\left[\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right]+\\&\gamma^1\frac{\hat{K}}{r}\Bigg)Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Apabila dikalikan dengan $(1 - r_s/r)^{1/2}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\gamma^0 m\right)Y(\theta,\phi)\left[\begin{array}{c}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{array}\right] = -\left(\gamma^0\gamma^1\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right.\right.$$
$$\left.\left.- \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right] + \gamma^1\frac{\kappa}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)Y(\theta,\phi)\left[\begin{array}{c}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{array}\right]. \tag{4.59}$$

atau

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\left[\begin{array}{cc} I & 0\\ 0 & -I\end{array}\right]m\right)\left[\begin{array}{c}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{array}\right] = -\left(\left[\begin{array}{cc} 0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{array}\right]\right.$$
$$\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & \sigma_x\\ -\sigma_x & 0\end{array}\right]$$
$$\left.\frac{k}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)\left[\begin{array}{c}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{array}\right]. \tag{4.60}$$

Dari (4.60) kita bisa memisahkan persamaan tersebut dan didapatkan persamaan terkopel

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} m\right)\xi = -\left(\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) + \frac{k}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)\sigma_x\chi \tag{4.61}$$

dan

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} m\right)\chi = -\left(\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{k}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)\sigma_x\xi. \tag{4.62}$$

Dalam ruang-waktu Schwarzschild, walaupun tensor metrik untuk g_{00} tidaklah bernilai -1, namun suku g_{00} hanya bergantung pada r dan tidak bergantung pada t. Dengan demikian, kita bisa mengetahui bahwa persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild tidak mengandung suku t dan hanya terdapat turunan $\partial/\partial t$ saja, sama persis dengan bentuk persamaan pada koordinat bola. Selain itu, kita juga bisa menyadarinya dari definisi solusi Schwarzschild, yaitu solusi persamaan medan Einstein dengan sumber simetri bola dan statik. Maka kita gunakan kembali ansatz untuk keadaan stasioner, pada persamaan (4.32):

$$\begin{aligned} \xi(r,t) &= R(r)e^{-iEt} \\ \chi(r,t) &= \rho(r)e^{-iEt}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Dengan mensubstitusikan (4.63) ke persamaan (4.61) dan (4.62), kita dapatkan

$$\begin{aligned} &-i\left(E-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}m\right)R = -\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{d}{dr}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right. \\ &\left.+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\frac{k}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)\sigma_x\rho \end{aligned} \tag{4.64}$$

dan

$$\begin{aligned} &-i\left(E+\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}m\right)\rho = -\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{d}{dr}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right. \\ &\left.+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)-\frac{k}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right)\sigma_x R. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Kemudian, Agar kita bisa menyelesaikan persamaan terkopel (4.64) dan (4.65), kita perlu memisahkan kedua persamaan tersebut. Misalkan, mula-mula kita ingin menjcari bentuk persamaan untuk ρ, kita bisa gunakan persamaan (4.65), dengan memasukkan nilai R dari persamaan (4.64). Dengan menggunakan sifat kuadrat matriks pauli $\sigma_i^2 = I$, maka kita dapatkan bentuk persamaan untuk ρ;

$$
\begin{aligned}
-\left(E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)m^2\right)\rho = &\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{d}{dr} - \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right. \\
&\left. + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{k}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right] \\
&\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{d}{dr} - \frac{r_s}{4r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\right. \\
&\left. + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) + \frac{k}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right]\rho
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

Kita operasikan suku di dalam kurung siku kiri dengan kanan dan kita dapatkan bentuk

$$
\begin{aligned}
&\Bigg[\Bigg\{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d^2}{dr^2}+\frac{r_s}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{d}{dr}+\frac{r_s}{2r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}-\\
&\frac{3r_s^2}{8r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2+\\
&\frac{r_s}{r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d}{dr}-\frac{k}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}+\\
&\frac{kr_s}{2r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{k}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\frac{d}{dr}\Bigg\}+\Bigg\{-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\frac{d}{dr}+\\
&\frac{r_s^2}{16r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3-\frac{r_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}-\frac{kr_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\Bigg\}+\\
&\Bigg\{\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d}{dr}-\frac{r_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2+\\
&\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\Bigg\}+\Bigg\{-\frac{\kappa}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\frac{d}{dr}+\frac{\kappa r_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2-\\
&\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\Bigg\}\Bigg]\rho+\left(E^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)m^2\right)\rho=0
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Persamaan (4.67) memiliki beberapa suku yang sama dan yang saling menghilangkan. Dengan menyederhanakan persamaan (4.67), kita bisa mendapatkan persamaan diferensial orde dua untuk ρ:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d^2\rho}{dr^2}+\Bigg\{\frac{2}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2+\frac{r_s}{r}\left(1-\frac{r_s}{r^2}\right)-\frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\Bigg\}\frac{d\rho}{dr}+\\
&\Bigg\{-\frac{3r_s^2}{8r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}+\frac{r_s}{r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\frac{\kappa r_s}{2r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{r_s^2}{16r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3\\
&-\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\left(E^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)m^2\right)\Bigg\}\rho=0
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Dalam kasus limit $r_s \to 0$, persamaan (4.68) akan membentuk:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa^2+\kappa}{r^2} + \big(E^2 + m^2\big)\Big)\rho = 0 \tag{4.69}$$

yang mana memeliki bentuk serupa dengan persamaan Dirac pada koordinat bola (4.24). Hal ini sesuai dengan sifat bahwa pada jarak yang sangat jauh dari sumber, kelengkungan di sekitar benda masif itu menjadi sangat kecil, dengan demikian, metrik Schwarzschild akan kembali ke metrik bola. Dengan cara yang sama, kita dapatkan bentuk persamaan untuk R,

$$\begin{aligned}
-\Big(E^2 - \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)m^2\Big)R = {} & \Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\frac{d}{dr} - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{3/2} + \\
& \frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big) + \frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big] \\
& \Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\frac{d}{dr} - \frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{3/2} + \\
& \frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big) - \frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big]R \\
= {} & \Big[\Big\{\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^2\frac{d^2}{dr^2} + \frac{r_s}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)\frac{d}{dr} - \frac{r_s}{4r^2} \\
& \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{5/2}\frac{d}{dr} + \frac{r_s}{2r^3}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{5/2} - \\
& \frac{3r_s^2}{8r^4}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{3/2} - \frac{1}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^2 + \frac{r_s}{r^3} \\
& \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big) + \frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^2\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r^2} \\
& \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{3/2} - \frac{\kappa r_s}{2r^3}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} - \frac{\kappa}{r}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\frac{d}{dr}\Bigg\}+\Bigg\{-\frac{r_s}{4r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\frac{d}{dr}\\
&+\frac{r_s^2}{16r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3-\frac{r_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}+\frac{\kappa r_s}{4r^3}\\
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\Bigg\}+\Bigg\{\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d}{dr}-\frac{r_s}{4r^3}\\
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2-\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\frac{\kappa}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}\frac{d}{dr}-\frac{\kappa r_s}{4r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2+\frac{\kappa}{r^2}\\
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\Bigg\}\Bigg]R
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Apabila dilakukan penyederhanaan, persamaan (4.67) akan memiliki bentuk:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2\frac{d^2R}{dr^2}+\left\{\frac{2}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2+\frac{r_s}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)-\frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\right\}\frac{dR}{dr}+\\
&\left\{\frac{r_s}{r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)-\frac{3r_s^2}{8r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa r_s}{2r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{r_s^2}{16r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3+\right.\\
&\left.\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\left(E^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)m^2\right)\right\}R=0
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Persamaan R pada ruang-waktu Schwarzschild juga kembali ke persamaan R pada koordinat bola apabila diambil limit jauh dari sumber gravitasi. Dengan demikian, limit tak hingga dari R pada ruang-waktu Schwarzschild haruslah memiliki bentuk fungsi Bessel bola.

4.3 Persamaan Dirac Pada Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom

Ruang-waktu Reissner-Nordstrom adalah solusi persamaan medan Einstein dengan sumber masif yang bermuatan, statik dan simetri bola. Artinya, medan listrik yang diberikan oleh sumber masif itu hanya bergantung pada jarak radialnya saja, dan memenuhi hukum Coulomb. Pada lampiran [C.1] kita telah mencoba untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein Reissner-Nordstrom, dan kita dapatkan metrik Reissner-Nordstrom seperti pada persamaan (C.14) sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q}{r^2}\right)c^2dt^2+\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.73}$$

dengan

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ r_Q &= \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Dari metrik ruang-waktu Reissner-Nordstrom, kita dapatkan tensor metrik Reissner-Nordstrom:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{4.75}$$

begitupula tensor metrik kontravariannya:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}. \tag{4.76}$$

Setelah mendapatkan tensor metrik, kita bisa menemukan tetrad Reissner-Nordstrom dalam bentuk:

$$e^a_{\ \mu} = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}, \tag{4.77}$$

begitupula inversnya;

$$e_a^{\ \mu} = \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2})^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{4.78}$$

Setelah dilakukan perhitungan pada [C.2], kita bisa mendapatkan komponen koneksi spinorial yang tidak nol:

$$\begin{aligned} \omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{2r_Q^2}{r^3}\Big) \\ \omega_{\theta12} &= -\omega_{\theta21} = -\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2} \\ \omega_{\phi13} &= -\omega_{\phi31} = -\sin\theta\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2} \\ \omega_{\phi23} &= -\omega_{\phi32} = -\cos\theta. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Dalam perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstorm, dengan menggunakan [3.70], kita memerlukan koefisien Fock-ivanenko dalam membangun turunan kovarian spinor Fock-Ivanenko. Setelah dilakukan perhitungan koefisien Fock-Ivanenko pada [C.3], kita dapatkan komponen turunan kovarian spinor:

$$\begin{aligned}
D_0 &= e_0^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_0 \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\partial_t + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\gamma^0\gamma^1 \\
D_1 &= e_1^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_1 \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\partial_r
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= e_2^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_2 \\
&= \frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1 \\
D_3 &= e_3^{\ \mu}\partial_\mu + \Gamma_3 \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned}$$

Dalam ruang-waktu Reissner-Nordstorm, fermion bermuatan q berinteraksi dengan muatan lubang hitam Q, sehingga partikel mengalami interaksi elektrostatik, Maka fermion akan berada pada potensial Coulomb. Persamaan Dirac pada ruang-waktu lengkung (3.70), apabila berada pada potensial menjadi

$$\big(i\gamma^c D_c - \gamma^0\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m\big)\psi = 0 \tag{4.81}$$

Persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstorm menjadi:

$$\Bigg(i\gamma^0\Bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\partial_t-\frac{1}{4}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\gamma^0\gamma^1\Bigg)$$
$$+i\gamma^1\Bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\partial_r\Bigg)+i\gamma^2\Bigg(\frac{1}{r}\partial_\theta+\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1\Bigg)$$
$$+i\gamma^3\Bigg(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi+\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^3\gamma^1+\frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2\Bigg)$$
$$-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}-m\Bigg)\psi=0 \tag{4.82}$$

Dari bentuk persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstorm ini, secara definisi, bahwa ruang-waktu Reissner-Nordstorm menandakan lubang hitam yang diberi muatan Q. Ketika lubang hitam memiliki muatan, partikel bermuatan yang bergerak di sekitar lubang hitam akan mengalami interaksi elektrostatik. Maka dari itu, dalam persamaan Dirac memunculkan suku A_0, yaitu vektor potensial elektrostatik. Pada limit ketika muatan pada lubang hitam dihilangkan, maka lubang hitam akan kembali ke lubang hitam Schwarzschild, mengingat dari persamaan (4.12), bahwa ketika muatan pada lubang hitam Reissner-Nordstorm dihilangkan maka r_Q juga menghilang, yang mengakibatkan bentuk metrik Reissner-Nordstorm akan kembali ke Schwarzschild. Ketika membandingkan hasil perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild (4.10) dengan perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstorm pada (4.19). Bentuk persamaannya serupa, dan dengan menghilangkan muatan pada lubang hitam Reissner-Nordstorm, bentuk persamaan Dirac (4.19) akan sama dengan (4.10).

Dari sifat matriks gamma, $(\gamma^i)^2 = I$, maka persamaan (4.77) bisa dibentuk:

$$\Bigg(i\gamma^0\Big(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\partial_t - i\frac{1}{4}\gamma^1\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)$$
$$+ i\gamma^1\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\partial_r + i\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta + i\frac{1}{2r}\gamma^1\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}$$
$$+ i\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + i\gamma^1\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2} + i\gamma^2\frac{\cot\theta}{2r}$$
$$-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} - m\Bigg)\psi = 0 \tag{4.83}$$

Jika dikalikan dengan $-i\gamma^0$ dari kiri, kita mendapatkan bentuk:

$$\Bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\partial_t - \gamma^0\gamma^1\frac{1}{4}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)$$
$$+ \gamma^0\gamma^1\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\partial_r + \gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta + \gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}$$
$$+ \gamma^0\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi + \gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2} + \gamma^0\gamma^2\frac{\cot\theta}{2r}\Bigg)\psi$$
$$= -i\gamma^0\left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + m\right)\psi \tag{4.84}$$

Ketika melihat bentuk persamaan (4.84), suku sudut dari persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom identik dengan suku sudut dari persamaan Dirac pada koordinat bola, maupun ruang-waktu Schwarzschild. Hal ini memang sesuai bahwa ruang-waktu Reissner-Nordstrom adalah solusi persamaan medan Einstein oleh sumber yang simetri bola, artinya, suku sudut dari metrik Reissner-Nordstrom sama dengan bola, yaitu sudut ruang. Dengan demikian, kita bisa memisahkan persamaan (4.84) menjadi suku sudut, waktu dan suku radialnya. Dengan cara yang sama seperti pada koordinat bola, kita ambil:

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = (\sin\theta)^{-1/2}\varphi(t,r,\theta,\phi) \tag{4.85}$$

Apabila bentuk ψ yang kita definisikan disubstitusikan ke persamaan (4.84), kita memiliki hubungan untuk setiap komponen (4.84):

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (\sin\theta)^{-1/2}\left(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\
\left(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\psi &= (\sin\theta)^{-1/2}\left(1-\frac{r_s}{r}-\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\\
\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)(\sin\theta)^{-1/2}\varphi\\
&= \left(\frac{\partial[(\sin\theta)^{-1/2}\varphi]}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(\sin\theta)^{-1/2}\varphi\right)\\
&= -\frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi+(\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{2(\sin\theta)^{3/2}}\varphi\\
&= (\sin\theta)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\
\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\phi} &= \frac{1}{r(\sin\theta)^{3/2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Dari hubungan (4.86), kita kembalikan ke (4.84) dan didapatkan :

$$\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\gamma^0\gamma^1\Bigg[\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}$$
$$\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)\Bigg]\varphi+$$
$$\gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\gamma^0\gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}=-i\gamma^0\left[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\right]\varphi. \tag{4.87}$$

Kita tinjau operator harmonik bola (4.17) dan (4.18), kita dapatkan bentuk persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom:

$$\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\gamma^0\gamma^1\Bigg[\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}$$
$$\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)\Bigg]\varphi+$$
$$\gamma^1\frac{1}{r}\hat{K}(\theta,\phi)\varphi=-i\gamma^0\left[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\right]\varphi, \tag{4.88}$$

atau

$$\left(\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\gamma^0\left[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\right]\right)\varphi=-\Bigg(\gamma^0\gamma^1$$
$$\Bigg[\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\right)$$
$$\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)\Bigg]+\gamma^1\frac{1}{r}\hat{K}(\theta,\phi)\Bigg)\varphi. \tag{4.89}$$

Persamaan (4.89) dikalikan dengan $(1-r_s/r+r_Q^2/r^2)^{1/2}$:

$$\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\gamma^0\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big)\varphi=-\Big(\gamma^0\gamma^1$$
$$\Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\Big]+\gamma^1\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\hat{K}(\theta,\phi)\Big)\varphi. \tag{4.90}$$

Dalam menyelesaikan (4.90), dilakukan pemisahan variabel untuk fungsi sudut dan fungsi radial dan waktu dalam bentuk spinor:

$$\varphi(t,r,\theta,\phi)=Y(\theta,\phi)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}. \tag{4.91}$$

Dengan demikian, (4.90) menjadi

$$\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{bmatrix}\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r^2}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}$$
$$=-\Big(\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{bmatrix}\Big[\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)-\frac{1}{4}$$
$$\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\Big]+\begin{bmatrix}0 & \sigma_x\\ -\sigma_x & 0\end{bmatrix}\frac{\kappa}{r}$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big)\begin{bmatrix}\xi(t,r)\\ \chi(t,r)\end{bmatrix}. \tag{4.92}$$

Persamaan tersebut dapat dipisah menjadi dua persamaan terkopel:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\right)\xi(t,r)\\&=-\left(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\right.\\&\left.-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}+\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\right)\chi(t,r)\end{aligned} \tag{4.93}$$

dan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\right)\chi(t,r)\\&=-\left(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\right.\\&\left.-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}-\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\right)\xi(t,r).\end{aligned} \tag{4.94}$$

Sekali lagi, karena melihat tensor metrik (4.75) dan persamaan (4.94), pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom, tensor metriknya tidak memiliki fungsi waktu, begitupula dari persamaan Diracnya hanya mengandung turunan dari waktu dan yang lainnya adalah fungsi dari jarak radialnya. Hal ini memang sesuai bahwa ruang-waktu Reissner-Nordstrom adalah solusi statik persamaan medan Einstein (B.1), begitupula medan listrik yang diakibatkan oleh muatan sumber adalah medan elektrostatik. Sehingga kita bisa gunakan kembali ansatz untuk solusi pada keadaan stasioner:

$$\begin{aligned}\xi(r,t)&=R(r)e^{-iEt}\\\chi(r,t)&=\rho(r)e^{-iEt}.\end{aligned} \tag{4.95}$$

Dengan mensubstitusi (4.95) ke (4.93) dan (4.94), kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
&-i\bigg(E-\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\bigg)R \\
&=-\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}+\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\bigg)\rho
\end{aligned} \tag{4.96}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&-i\bigg(E+\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\bigg)\rho \\
&=-\bigg(\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}-\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\bigg)R.
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

Dalam penyelesaian persamaan terkopel ini, kita bisa memisahkan persamaan ρ dan R. Misalkan kita mula-mula mencari bentuk persamaan ρ. Dengan menggunakan (4.97) dan mensubstitusi R dari (4.96) kita miliki bentuk persamaan untuk ρ:

$$
\begin{aligned}
&-\left(E^2-\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]^2\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\right)\rho \\
&=\Big\{\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}-\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\Big\{\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}+\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big\}\rho
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

sehingga kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\frac{d^2\rho}{dr^2}+\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d\rho}{dr} \\
&+\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\frac{d\rho}{dr}+\frac{1}{r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\rho \\
&-\frac{1}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\rho-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\frac{d\rho}{dr} \\
&-\frac{3}{8}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)^2\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\rho+\frac{1}{4}\Big(\frac{2r_s}{r^3}-\frac{6r_Q^2}{r^4}\Big) \\
&\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\rho+\frac{\kappa}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\frac{d\rho}{dr}-\frac{\kappa}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\rho \\
&+\frac{\kappa}{2r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\rho\Big\}+\Big\{\frac{1}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\frac{d\rho}{dr} \\
&+\frac{1}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\rho-\frac{1}{4r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\rho
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\kappa}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\rho\Big\}+\Big\{-\frac{1}{4}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\frac{d\rho}{dr}$$
$$-\frac{1}{4r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\rho+\frac{1}{16}\Big(\frac{r-s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)^2$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^3\rho-\frac{\kappa}{4r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\rho\Big\}+\Big\{-\frac{\kappa}{r}$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\frac{d\rho}{dr}-\frac{\kappa}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\rho+\frac{\kappa}{4r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\rho$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2\rho-\frac{\kappa^2}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\rho\Big\}+\Big\{E^2-\Big[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\Big]^2$$
$$\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big\}\rho=0. \tag{4.99}$$

Persamaan (4.99) memiliki beberapa suku yang identik, sehingga kita bisa menyederhanakaannya. Dengan demikian, hasil penyederhanaannya memiliki bentuk:

$$\begin{aligned}
&\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\frac{d^2\rho}{dr^2}+\Big\{\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\\
&+\frac{2}{r}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}\Big\}\frac{d\rho}{dr}\\
&+\Big\{\frac{1}{r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)-\frac{3}{8}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)^2\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}\\
&+\frac{1}{4}\Big(\frac{2r_s}{r^3}-\frac{6r_Q^2}{r^4}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}+\frac{\kappa}{2r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\\
&-\frac{1}{2r}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{5/2}+\frac{1}{16}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{2r_Q^2}{r^3}\Big)^2\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^3\\
&-\frac{\kappa}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)+E^2
\end{aligned}$$

$$-\left[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r}+m\right]^2\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)\Bigg\}\rho=0 \tag{4.100}$$

Apabila dikembalikan dengan menghilangkan muatan pada lubang hitam, berdasar definisi r_Q pada persamaan (4.74), dan dari bentuk metriknya, maka, tentu saja lubang hitam akan kembali menjadi Schwarzschild. Bisa dibuktikan bahwa pada limit $Q \to 0$, persamaan (4.96) akan menjadi:

$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{d^2\rho}{dr^2}+\left\{\frac{r_s}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+\frac{2}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2-\frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{5/2}\right\}\frac{d}{dr}$$
$$\left\{\frac{r_s}{r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)-\frac{3r_s^2}{8r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}+\frac{\kappa r_s}{2r^3}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}+\frac{r_s^2}{16r^4}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3\right.$$
$$\left.-\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{3/2}-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)+E^2-m^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\right\}\rho=0 \tag{4.101}$$

yang mana, persamaan (4.101) sama persis dengan bentuk persamaan ρ pada ruang waktu Schwarzschild pada persamaan (4.68), dan dengan cara yang sama, mengambil limit dimana $r_s \to 0$, kita akan mendapatkan bentuk persamaan ρ pada koordinat bola (4.27).

4.4 Persamaan Dirac Pada Semesta FLRW

Dalam perumusan persamaan Dirac (3.70), persamaan itu dapat diselesaikan untuk ruang-waktu 1+1 dimensi. Dalam subbab ini, kita akan mencoba mengerjakan persamaan Dirac pada ruang-waktu 1+1 yang melengkung. Setelah merumuskan persamaan Dirac pada Semesta Milne 1+1 Dimensi, kita bisa memperumum dengan mendapatkan persamaan Dirac pada semesta Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker(LFRW) 1+1 Dimensi. Metrik FLRW memiliki bentuk:

$$ds^2dt^2-f(r)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right) \tag{4.102}$$

sedangan metrik pada koordinat komoving diberikan oleh:

$$ds^2 = dt^2 - f(t)^2\Big(dx^2 + \Sigma^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\Big). \quad (4.103)$$

Apabila dilakukan pemotongan koordinat, atau ditinjau nilai θ dan ϕ tertentu, maka didapatkan metrik FLRW 1+1 dimensi:

$$ds^2 = dt^2 - f(t)^2 dx^2, \quad (4.104)$$

dengan tensor metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -f(t)^2 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

dan tensor metrik kontravariannya:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f(t)^2} \end{bmatrix}. \quad (4.106)$$

Setelah mendapatkan tensor metrik semesta Milne 1+1, kita bisa mendapatkan komponen tetrad:

$$e^a_{\ \mu} e^b_{\ \nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

ayau

$$e^a_{\ \mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(t) \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

dengan inversnya:

$$e_a^{\ \mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(t)} \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Dalam perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu lengkung, kita memerlukan koefisien koneksi spin. Untuk mendapatkan komponen koefisien spin, kita memerlukan simbol

Christoffel. Setelah dilakukan perhitungan pada lampiran [D.1], kita dapatkan simbol Christoffel yang tidak nol:

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{xx} &= \dot{f}(t)f(t) \\ \Gamma^x_{tx} &= \Gamma^x_{xt} = \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Dengan demikian, kita bisa menghitung komponen koneksi spin pada [D.2]. Komponen koneksi spin yang tidak nol:

$$\omega_{x01} = -\omega_{x10} = -\dot{f}(t). \tag{4.111}$$

Setelah mendapat komponen koneksi spin, kita bisa mendapat koefisien Fock-Ivanenko:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 0 \\ \Gamma_1 &= -\frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\gamma^1\gamma^0. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Merujuk persamaan (3.70), kita sudah mengumpulkan komponen-komponen yang diperlukan dalam membangun persamaan Dirac pada ruang lengkung, yaitu:

$$ie^\mu{}_c\gamma^c\partial_\mu\psi + i\gamma^c\Gamma_c\psi - m\psi = 0 \tag{4.113}$$

sehingga

$$\begin{aligned} ie^t{}_0\gamma^0\partial_t\psi + ie^x{}_1\gamma^1\partial_x\psi + i\gamma^0\Gamma_0\psi + i\gamma^1\Gamma_1\psi - m\psi = 0 \\ i\gamma^0\partial_t\psi + \frac{i}{f(t)}\gamma^1\partial_x\psi - i\frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\gamma^1\gamma^1\gamma^0\psi - m\psi = 0. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Selanjutnya kita membatasi pada representasi kiral (Weyl) untuk matriks γ, secara khusus diambil [1],

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &. \end{aligned} \tag{4.115}$$

dengan hubungan

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I \\ (\gamma^1)^2 &= -I \end{aligned} \tag{4.116}$$

dan kita ambil,

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{4.117}$$

sehingga, persamaan (4.140) menjadi

$$\begin{aligned} & i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + \frac{i}{f(t)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ & + i \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{4.118}$$

dan kita dapatkan persamaan terkopel

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi_2 - \frac{i}{f(t)} \partial_x \psi_2 + i \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)} \psi_2 - m\psi_1 = 0 \\ i\partial_t \psi_1 + \frac{i}{f(t)} \partial_x \psi_1 + i \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)} \psi_1 - m\psi_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.119}$$

x

atau

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{i}{m}\bigg(\partial_t - \frac{1}{f(t)}\partial_x + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\bigg)\psi_2 \\
\psi_2 &= \frac{i}{m}\bigg(\partial_t + \frac{1}{f(t)}\partial_x + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\bigg)\psi_1.
\end{aligned} \tag{4.120}$$

substitusikan persamaan (4.146) bawah ke atas,dan dapatkan

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -\frac{1}{m^2}\bigg(\partial_t - \frac{1}{f(t)}\partial_x + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\bigg)\bigg(\partial_t + \frac{1}{f(t)}\partial_x + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\bigg)\psi_1 \\
-m^2\psi_1 &= \bigg(\partial_t - \frac{1}{f(t)}\partial_x + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\bigg)\bigg(\partial_t\psi_1 + \frac{1}{f(t)}\partial_x\psi_1 + \frac{\dot{f}(t)\psi_1}{2f(t)}\bigg) \\
&= \bigg(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{f(t)}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\dot{f}(t)\psi_1}{2f(t)}\Big) - \frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{f(t)^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\dot{f}(t)^2\psi_1}{4f(t)^2}\bigg) \\
&= \bigg(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + \Big(\frac{\ddot{f}(t)}{2f(t)} - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\Big) \\
&\quad + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} - \frac{1}{f(t)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{f}(t)^2}{4f(t)^2}\bigg)\psi_1 \\
&= \bigg(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\ddot{f}(t)}{2f(t)} - \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)^2}\Big) \\
&\quad - \frac{1}{f(t)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\frac{\partial}{\partial t}\bigg)\psi_1.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Contoh bentuk khusus semesta FLRW pada kasus densitas energi nol, yaitu semesta Milne yang telah dibahas pada [4.4], dengan mengambil $f(t) = \xi t$ dengan ξ adalah konstan, maka kita akan mendapatkan perumusan:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{i}{m}\left(\partial_t - \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\psi_2 \\ \psi_2 &= \frac{i}{m}\left(\partial_t + \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\psi_1.\end{aligned} \tag{4.122}$$

substitusikan persamaan (4.122) bawah ke atas,dan dapatkan

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{1}{m^2}\left(\partial_t - \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\left(\partial_t + \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\psi_1 \\ -m^2\psi_1 &= \left(\partial_t - \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\left(\partial_t\psi_1 + \frac{1}{\xi t}\partial_x\psi_1 + \frac{\psi_1}{2t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\xi t}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi_1}{2t}\right) - \frac{1}{\xi t}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial t}\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\xi^2 t^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\xi t^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{1}{2t}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2\xi t^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\psi_1}{4t^2}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\xi t^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\xi t}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\xi t}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\xi^2 t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2\xi t^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\xi t^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4t^2}\right)\psi_1 \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\xi t^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{\xi^2 t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1\end{aligned} \tag{4.123}$$

Karena melihat metrik pada semesta Milne 1+1, bahwa komponen tensor metriknya tidak bergantung pada variabel x, maka kita bisa ambil bentuk:

$$\psi(x,t) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = e^{-ip_x x}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \tag{4.124}$$

dan dengan hubungan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\psi_1(x,t)\\ \psi_2(x,t)\end{bmatrix} = -ip_x e^{-ip_x x}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{bmatrix}\psi_1(x,t)\\ \psi_2(x,t)\end{bmatrix} = -p_x^2 e^{-ip_x x}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.125}
$$

maka, persamaan (4.123) menjadi

$$
\begin{aligned}
-m^2\psi_1 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\xi t^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{\xi^2 t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-ip_x x}\varphi_1\\
-m^2 e^{-ip_x x}\varphi_1 &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt} + \frac{ip_x}{\xi t^2} + \frac{p_x^2}{\xi^2 t^2} - \frac{1}{4t^2}\right)e^{-ip_x x}\varphi_1\\
-m^2 t^2\varphi_1 &= \left(t^2\frac{d^2}{dt^2} + t\frac{t}{2}\frac{d}{dt} - (\frac{1}{4} - \frac{ip_x}{\xi} - \frac{p_x^2}{\xi^2})\right)\varphi_1\\
0 &= \left(t^2\frac{d^2}{dt^2} + t\frac{d}{dt} + \left(m^2t^2 - (\frac{1}{2} - \frac{ip_x}{\xi})^2\right)\right)\varphi_1.
\end{aligned}
\tag{4.126}
$$

Misalkan kita ambil $p = 1/2 - ip_x/\xi$, maka (4.126) menjadi

$$
t^2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + t\frac{d\varphi_1}{d\partial t} + \left(m^2t^2 - p^2\right)\varphi_1 = 0 \tag{4.127}
$$

bentuk ini memiliki bentuk yang mirip dengan persamaan diferensial Bessel, sehingga solusi persamaan ini adalah

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= AJ_p(mt) + BN_p(mt)\\
\psi_1 &= e^{-ip_x x}\left(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\right)
\end{aligned}
\tag{4.128}
$$

Dan dari (4.122), kita bisa mendapatkan ψ_2,

$$
\psi_2 = \frac{i}{m}\left(\partial_t + \frac{1}{\xi t}\partial_x + \frac{1}{2t}\right)\psi_1. \tag{4.129}
$$

dari hubungan rekursi fungsi Bessel, kita memiliki

$$J_p'(mt) = -\frac{p}{mt}J_p(mt) + J_{p-1}(mt)N_p'(mt) = -\frac{p}{mt}N_p(mt) + N_{p-1}(mt) \tag{4.130}$$

sehingga

$$\psi_2 = \frac{i}{m}\Bigg(-\frac{p}{t}\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big) + m\Big(AJ_{p-1}(mt) + BN_{p-1}(mt)\Big) - \frac{ip_x}{\xi t}\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big) + \frac{\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big)}{2t}\Bigg)e^{-ip_x x} \tag{4.131}$$

Dengan memasukkan kembali nilai p, maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{i}{m}\Bigg(-\frac{1/2 - ip_x/\xi}{t}\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big) + m\Big(AJ_{p-1}(mt) \\ &\quad + BN_{p-1}(mt)\Big) - \frac{ip_x}{\xi t}\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big) \\ &\quad + \frac{\Big(AJ_p(mt) + BN_p(mt)\Big)}{2t}\Bigg)e^{-ip_x x} \\ &= \Big(iAJ_{p-1}(mt) + iBJ_{p-1}(mt)\Big)e^{-ip_x x}\end{aligned} \tag{4.132}$$

Sehingga solusi persamaan Dirac pada semesta Milne 1+1 adalah

$$\psi(x,t) = e^{-ip_x x}\begin{bmatrix} AJ_p(mt) + BN_p(mt) \\ iAJ_{p-1}(mt) + iBN_{p-1}(mt) \end{bmatrix} \tag{4.133}$$

Apabila semesta memiliki faktor skala $f(t)$ yang konstan, ambil $f(t) = 1$ pada koordinat komoving, maka didapat perumusan:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{i}{m}\left(\partial_t - \partial_x\right)\psi_2 \\ \psi_2 &= \frac{i}{m}\left(\partial_t + \partial_x\right)\psi_1. \end{aligned} \tag{4.134}$$

yang didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + m^2\psi_1 = 0 \\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + m^2\psi_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.135}$$

yang mana tidak lain adalah persamaan yang mirip dengan persamaan pada ruang waktu Minkowski. Dengan demikian, apabila diambil $f(t) = 1$, persamaan Dirac pada ruang-waktu FLRW 1+1 koordinat komoving akan memiliki bentuk sama halnya pada Minkowski.

Bab 5

Penutup

5.1 Kesimpulan

Dari pengerjaan Tugas Akhir ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu yang melengkung dapat dicari dengan memandang partikel pada medan kerangka tetrad.

2. Dalam perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Schwarzschild, ketika benda sangat jauh dari sumber, akan memiliki bentuk persamaan yang sama dengan persamaan Dirac pada koordinat Bola.

3. Pada perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstorm, memiliki bentuk serupa dengan Schwarzschild..

4. Persamaan Dirac pada ruang-waktu lengkung dikerjakan pada ruang-waktu FLRW 1+1 dimensi koordinat komoving. Solusi persamaan Dirac pada semesta Milne 1+1 didapatkan sebagai kasus khusus dari semesta FLRW.

Apabila semesta FLRW pada koordinat komoving memiliki faktor skala $f(t) = 1$, maka persamaan Diracnya akan memiliki bentuk yang sama dengan ruang-waktu Minkowski.

5.2 Saran

Ada beberapa masalah yang belum diteliti : Solusi persamaan Dirac, informasi yang terkandung pada partikel di ruang-waktu lengkung, dan sebagainya. Saran untyk penelitian selanjutnya adalah menyelesaikan dan memperoleh solusi persamaan Dirac pada ruang waktu lengkung. Penelitian lain yang dapat dikerjakan adalah teori medan kuantum dalam ruang-waktu lengkung.

Daftar Pustaka

[1] P. Collas, D.Klein. *The Dirac Equations in Curved Spacetime*, Springer, California. (2019).

[2] C.W. Misner,K.S.Thorne,J.A.Wheeler. *Gravitation*, W.H Freeman and Company, San Fransisco. (1973).

[3] C. Rovelli. *Notes for a Brief History of Quantum Gravity*,arXiv:gr-qc/0006061v3.(2008)

[4] S. Weinberg. *The Search for unity: Notes for a History of Quantum Field Theory,Daedalus* Vol.106,No.4.(1977).

[5] R.M. Wald. *The History and Present Status of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, arXiv:gr-qc/0608018. (2006).

[6] L.H. Ford. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime.* arXiv:gr-qc/9707062. (1997).

[7] T. Jacobson. Phys. Rev. D**44**, 1731 (1991); **48**, 728(1993), hep-th/9303103

[8] F. Nusur. *Teori Kemanunggalan Agung Berbasis Grup* $SU(5)$ *Tanpa Peluruhan Proton*, TUGAS AKHIR,FISIKA ITS. (2018).

[9] S.E. Gautama. *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi*, Paradoks Softbook Publisher. (2018).

[10] P. Renteln. *Manifold, Tensors, and Forms*, Cambride University Press, New York. (2014).

[11] H.S. Ramadhan. *Pendekatan Geometri Diferensial dalam Teori Relativitas Umum dan Solusi 2 Soliton Persamaan Medan Einstein Axisimetrik*, TUGAS AKHIR,FISIKA UI. (2005).

[12] S. Caroll.*Spacetime and Geometry*, Pearson, Essex. (2014).

[13] D. Martin. *Manifold Theory*, Horwood,Chichester. (2002).

[14] F. Morgan. *Riemannian Geometry*, Routledge, Massachusetts. (1998).

[15] B.C. Kalita. *Tensor Calculus and Application*,CRC, Florida. (2019).

[16] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, Boston. (1983).

[17] E. S. S. Filho. *Tensor Calculus for Engineers and Physicist*, Springer, Switzerland. (2016)

[18] D.F.Lawden. *Introduction to Tensor Calculus. Relativity, and Cosmology*, Dover, New York.(1982).

[19] R.M. Wald. *General Relativity*, University of Chichago Press, Cichago.(1984)

[20] B. S. DeWitt. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Phys. Rev. D**18**, 1798. (1978).

[21] L. Parker, D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Cambridge University Press.(2009)

[22] Supardi. *Solusi Medan Fundamental Dalam Teleparallel Gravity*, Disertasi, ITB. (2011).

[23] R. A. Bertlmann.*Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, New York. (1996).

[24] R.D. Klauber. *Student Friendly Quantum Field Theory*,Sandtrove, Iowa. (2013).

[25] A. Das. *Lecture on Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore.(2008).

[26] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer, Berlin. 2000.

[27] G.B. Arfken, F.E. Harris, H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicist*, Elsevier, Oxford. 2012.

[28] M.L. Boas. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*, Wiley, USA. 2006.

[29] G. Mammadov. *Reissner-Nordstorm Metric*. Departmen of Physics, Syracuse University, NY. 2009.

Lampiran A

Persamaan Dirac Pada Koordinat Bola

A.1 Koefisien Koneksi Spin Metrik Bola

Dengan menggunakan persamaan (3.66) dan dengan komponen tetrad yang kita dapatkan di (4.5), kita bisa mendapatkan komponen koneksi spin untuk koordinat bola. Kita tinjau ulang (3.66):

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab} &= e_{a\beta}\nabla_\mu e_b^{\ \beta} \\ &= g_{\gamma\beta} e_a^{\ \gamma}(\partial_\mu e_b^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} e_b^{\ \alpha}). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Sehingga untuk $\mu = t$, $a = 0, b = 0$, kita dapatkan

$$\omega_{t00} = g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma}(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha t} e_0^{\ \alpha}). \tag{A.2}$$

Karena kita tahu bahwa komponen tetrad dan tensor metrik bola hanya memiliki komponen diagonal saja, kita bisa memastikan bahwa hasil jumlahan tensor yang tidak nol ketika

$\gamma = \beta = t$ dan $\alpha = t$, sehingga

$$\begin{aligned}
\omega_{t00} &= g_{tt} e_0^{\ t} (\partial_t e_0^{\ t} + \Gamma^t_{tt} e_0^{\ t}) \\
&= -\Big(\partial_t(1) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan untuk komponen koneksi spinor lainnya. Untuk $\mu = t, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t01} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha t} e_1^{\ \alpha}) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} (\partial_t e_1^{\ t} + \Gamma^t_{rt} e_1^{\ r}) \\
&= -\Big(\partial_t 0 + 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t02} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha t} e_2^{\ \alpha}) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} (\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\theta t} e_2^{\ \theta}) \\
&= -\Big(\partial_t 0 + 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t03} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha t} e_3^{\ \alpha}) \\
&= g_t t e_0^{\ t} (\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^t_{\phi t} e_3^{\ \phi}) \\
&= -\Big(\partial_t 0 + 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{t10} &= g_{\gamma\beta}e_1{}^{\gamma}(\partial_t e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t}e_0{}^{\alpha}) \\ &= g_{rr}e_1{}^{r}(\partial_t e_0{}^{r} + \Gamma^{r}_{tt}e_0{}^{t}) \\ &= \left(\partial_t 0 + 0\right) \\ &= 9\end{aligned} \tag{A.7}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{t11} &= g_{\gamma\beta}e_1{}^{\gamma}(\partial_t e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t}e_0{}^{\alpha}) \\ &= g_{rr}e_1{}^{r}(\partial_t e_1{}^{r} + \Gamma^{r}_{rt}e_1{}^{r}) \\ &= \left(\partial_t(1) + 0\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.8}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{t12} &= g_{\gamma\beta}e_1{}^{\gamma}(\partial_t e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t}e_2{}^{\alpha}) \\ &= g_{rr}e_1{}^{r}(\partial_t e_2{}^{r} + \Gamma^{r}_{\theta t}e_2{}^{r}) \\ &= \left(\partial_t 0 + 0\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.9}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{t13} &= g_{\gamma\beta}e_1{}^{\gamma}(\partial_t e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t}e_3{}^{\alpha}) \\ &= g_{rr}w_1{}^{r}(\partial_t e_3{}^{r} + \Gamma^{r}_{\phi r}e_3{}^{\phi}) \\ &= \left(\partial_t 0 + 0\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.10}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t20} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_0^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_0^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{tt} e_0^{\ t}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t 0 + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t21} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_1^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_1^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rt} e_1^{\ r}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t 0 + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t22} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_2^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_2^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta t} e_2^{\ \theta}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t (\frac{1}{r}) + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_2^{\ t} \big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t (0) + 0 \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{t30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{tt} e_0^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_t(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.15}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{t31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_1^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_t(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.16}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 2$,

$$\begin{aligned}\omega_{t32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_t(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.17}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 3$,

$$\begin{aligned}\omega_{t33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_t\big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.18}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{r00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{rt} e_0^{\ t}\big)\\ &= -\Big(\partial_r(1) + 0\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{A.19}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{r01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{rr} e_1^{\ r}\big)\\ &= -\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.20}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{r02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big)\\ &= -\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.21}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{r03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big)\\ &= -\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.22}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_{r10} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_r e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0{}^{\lambda} \right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_r e_0{}^{r} + \Gamma^{r}_{rt} e_0{}^{t} \right) \\ &\left(\partial_r (0) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 1$,

$$\begin{aligned} \omega_{r11} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_r e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1{}^{\lambda} \right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_r e_1{}^{t} + \Gamma^{r}_{rr} e_1{}^{r} \right) \\ &= \left(\partial_r (1) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 2$,

$$\begin{aligned} \omega_{r12} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_r e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2{}^{\lambda} \right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_r e_2{}^{t} + \Gamma^{r}_{r\theta} e_2{}^{\theta} \right) \\ &= \left(\partial_r (0) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 3$,

$$\begin{aligned} \omega_{r13} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_r e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3{}^{\lambda} \right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_r e_3{}^{t} + \Gamma^{r}_{r\phi} e_3{}^{\phi} \right) \\ &= \left(\partial_r (0) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{r20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_r e_0^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rt} e_0^{\ t}\right) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_r(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.27}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{r21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_r e_1^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rr} e_1^{\ r}\right) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_r(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.28}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{r22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_r e_2^{\ \theta} + \Gamma^{\theta} r\theta e_2^{\ \theta}\right) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_r\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{1}{r}\bigg) \\ &= r\bigg(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.29}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{r23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_r e_3^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_r(0) + 0\bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.30}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \left(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \left(\partial_r e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rt} e_0^{\ t}\right) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\Bigg(\partial_r(0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \left(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \left(\partial_r e_1^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rr} e_1^{\ r}\right) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\Bigg(\partial_r(0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \left(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \left(\partial_r e_2^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\right) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\Bigg(\partial_r(0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \left(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \left(\partial_r e_3^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_r \frac{1}{r\sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{1}{r\sin\theta}\right) \\
&= r\sin\theta\left(-\frac{1}{r^2\sin\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_0^{\ t} + \Gamma^t_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\ &= -\Bigg(\partial_\theta(1) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.35}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_1^{\ t} + \Gamma^t_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\ &= -\Bigg(\partial_\theta(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.36}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= -\Bigg(\partial_\theta(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.37}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_3^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= -\Bigg(\partial_\theta(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A.38}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_0^{\ r} + \Gamma^r_{\theta t} e_0^{\ t} \big) \\
&= \Bigg(\partial_\theta (0) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_1^{\ r} + \Gamma^r_{\theta r} e_1^{\ r} \big) \\
&= \Bigg(\partial_\theta (1) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_2^{\ r} + \Gamma^r_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big) \\
&= \Bigg(\partial_\theta (0) - r \frac{1}{r} \Bigg) \\
&= -1
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_3^{\ r} + \Gamma^r_{\theta\phi} e_3^{\ \phi} \big) \\
&= \Bigg(\partial_\theta (0) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_0^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\theta (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_1^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\theta (0) + \frac{1}{r}\Bigg) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_2^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\theta \big(\frac{1}{r}\big) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_3^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\theta (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_0^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_1^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_2^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_3^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta\big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + \cot\theta \frac{1}{r\sin\theta} \\
&= r\sin\theta\bigg(-\cot\theta\frac{1}{r\sin\theta} + \cot\theta\frac{1}{r\sin\theta}\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 00} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_0{}^{\lambda} \big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_\phi e_0{}^{t} + \Gamma^{t}_{\phi t} e_0{}^{t} \big) \\
&= -\bigg(\partial_\phi (1) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 01} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_1{}^{\lambda} \big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_\phi e_1{}^{t} + \Gamma^{t}_{\phi r} e_1{}^{r} \big) \\
&= -\bigg(\partial_\phi (0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 02} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_2{}^{\lambda} \big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_\phi e_2{}^{t} + \Gamma^{t}_{\phi\theta} e_2{}^{\theta} \big) \\
&= -\bigg(\partial_\phi (0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.53}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 03} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3{}^{\lambda} \big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_\phi e_3{}^{t} + \Gamma^{t}_{\phi\phi} e_3{}^{\phi} \big) \\
&= -\bigg(\partial_\phi (0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_0^{\ r} + \Gamma^r_{\phi t} e_0^{\ t}\big) \\
&= \Big(\partial_\phi(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_1^{\ r} + \Gamma^r_{\phi r} e_1^{\ r}\big) \\
&= \Big(\partial_\phi(1) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_2^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= \Big(\partial_\phi(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_3^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= \left(\partial_\phi(0) - r\sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\right) \\
&= -\sin\theta
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_\phi e_0^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi t} e_0^{\ t}\right) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\phi (0) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 21} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \left(\partial_\phi e_1^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi r} e_1^{\ r}\right) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\phi (0) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 22} &= g_{\beta\gamma} e_\theta^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_\phi e_2^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\right) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\phi (\frac{1}{r}) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \left(\partial_\phi e_3^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\phi (0) - \sin\theta\cos\theta \frac{1}{r\sin\theta}\right) \\
&= -\cos\theta.
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi t} e_0^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(0) + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.63}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_1^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi r} e_1^{\ r}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(0) + \frac{1}{r}\right) \\ &= \sin\theta. \end{aligned} \tag{A.64}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_2^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(0) + \cot\theta\frac{1}{r}\right) \\ &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{A.65}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned} \omega_{\phi 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_\phi^{\ t} \big(\partial_\phi e_3^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(\frac{1}{r\sin\theta} + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.66}$$

Dengan demikian, kita dapatkan komponen $\omega_{\mu ab}$ yang tidak nol:

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -1 \\
\omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -\sin\theta \\
\omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -\cos\theta
\end{aligned} \tag{A.67}$$

A.2 Koefisien Fock-Ivanenko Ruang-Waktu Schwarzschild

Berdasar persamaan (3.67), kita dapatkan koefisien Fock-Ivanenko

$$\begin{aligned}
\Gamma_c &= e_c^{\ \mu}\Gamma_\mu \\
&= e_c^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big).
\end{aligned} \tag{A.68}$$

Untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= e_0^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\
&= e_0^{\ t}(0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.69}$$

Untuk $c = 1$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= e_1^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^2\gamma^b\Big) \\
&= e_1^{\ r}(0) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.70}$$

Untuk $c = 2$,

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= e_2^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big)\\ &= e_2^{\ \theta}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\theta 12}\gamma^1\gamma^2 + \omega_{\theta 21}\gamma^2\gamma^1\Big)\\ &= \frac{1}{4r}\bigg(-\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1\bigg)\\ &= \frac{1}{4r}\big(\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2\big)\\ &= \frac{1}{4r}2\big(\gamma^2\gamma^1 - \eta^{21}\big)\\ &= \frac{1}{2r}\gamma^2\gamma^1,\end{aligned} \tag{A.71}$$

Untuk $c = 3$,

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= e_3^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big)\\ &= e_3^{\ \phi}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\phi 13}\gamma^1\gamma^3 + \omega_{\phi 31}\gamma^3\gamma^1 + \omega_{\phi 23}\gamma^2\gamma^3 + \omega_{\phi 32}\gamma^3\gamma^2\Big)\\ &= \frac{1}{4r\sin\theta}\Bigg(-\sin\theta\gamma^1\gamma^3 + \sin\theta\gamma^3\gamma^1 - \cos\theta\gamma^2\gamma^3 + \cos\theta\gamma^3\gamma^2\Bigg)\\ &= \frac{1}{4r\sin\theta}\bigg(\sin\theta\big(\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3\big) + \cos\theta\big(\gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3\big)\bigg)\\ &= \frac{1}{4r\sin\theta}\bigg(\sin\theta 2\big(\gamma^3\gamma^1 - \eta^{31}\big) + \cos\theta 2\big(\gamma^3\gamma^2 - \eta^{32}\big)\bigg)\\ &= \frac{1}{2r}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.\end{aligned} \tag{A.72}$$

Lampiran B

Persamaan Dirac Ruang Waktu Schwarzschild

B.1 Solusi Schwarzschild Persamaan Medan Einstein

Dari perumusan persamaan medan Einstein [E.4], persamaan tersebut menunjukkan hubungan keberadaan energi dan momentum dengan pengaruhnya terhadap kelengkungan ruang-waktu di sekitarnya. Solusi persamaan medan Einstein adalah berupa tensor metrik. Solusi Schwarzschild adalah solusi persamaan medan Einstein dalam keadaan vakum dan simetri bola. Dalam menyelesaikan persamaan medan Einstein pada metrik yang simetri bola, kita gunakan **ansatz** simetri bola. Ansatz adalah pemilihan nilai awal yang sesuai dengan asumsi fisika dan persoalan syarat batas. Kita ambil ansatz metrik untuk simetri bola:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}c^2dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad \text{(B.1)}$$

dan kita miliki tensor metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

dan tensor metrik kontravariannya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

B.1.1 Simbol Christoffel

Dalam perumusan suku kiri pada persamaan (E.36), kita dapatkan komponen simbol Christoffel dari metrik simetri bola (B.1). Dalam kasus solusi Schwarzschild, metrik statik, sehingga turunan terhadap waktunya adalah nol. Dengan menggunakan (B.1) dan (2.50), kita dapatkan komponen Simbol Christoffel $\Gamma^{\kappa}_{\alpha\nu}$. Untuk $\kappa = 0, \alpha = 0, \nu = 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0} \Big(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \Big) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \Big(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \Big) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha} \Big(0 + 0 - 0 \Big) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 0, \nu = 1$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial r} - 0\Big) \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \Gamma^0_{10}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 0, \nu = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{08}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{20}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 0, \nu = 3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{30}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}\Big)\\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{B.8}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 1, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0}\Big)\\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0 = \Gamma^0_{21}\end{aligned} \tag{B.9}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0}\Big)\\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0 = \Gamma^0_{31}\end{aligned} \tag{B.10}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}\Big)\\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{B.11}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 2, \nu = 3,$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^{\mu}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^{0}}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{32}
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 3, \nu = 3,$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2} g^{\mu 0}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{\mu}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\Big(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{0}}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 0, \nu = 0,$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{1}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 + \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial x^1}\Big) \\
&= e^{(2\alpha - 2\beta)} \frac{\partial \alpha}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\mu}\Big)\\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}\Big)\\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 - 0 - 0\Big)\\
&= 0 = \Gamma^0_{10}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 0, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^\mu}\Big)\\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1}\Big)\\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\
&= 0 = \Gamma^1_{20}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^\mu}\Big)\\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1}\Big)\\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\
&= 0 = \Gamma^1_{30}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{2\beta}\Big(\frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r}\Big) \\
&= \frac{\partial \beta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 1, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{2\beta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{21}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{31}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial r}\Big) \\
&= -re^{-2\beta}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Untuk $\kappa = 1, \alpha = 2, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\Big) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2\beta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{32}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Untuk $\kappa = 0, \alpha = 3, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}\Big(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\Big) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\Big(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial r}\Big) \\
&= -r\sin^2\theta e^{-2\beta}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 0, \nu = 1$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 - 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^2_{10}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 0, \nu = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^2_{20}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 0, \nu = 3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^2_{30}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 1, \nu = 1$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 1, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial r^2}{\partial r} + 0 - 0\Big) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma^0_{21}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2} g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^0_{31}
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} g^{\mu 1}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\Big(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 2, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2}g^{22}\Big(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0 = \Gamma^0_{32}\end{aligned} \tag{B.32}$$

Untuk $\kappa = 2, \alpha = 3, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{\mu 2}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2}g^{22}\Big(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\Big(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial \theta}\Big)\\ &= -\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{B.33}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2}g^{33}\Big(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{B.34}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{01} &= \frac{1}{2}g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\mu}\Big)\\ &= \frac{1}{2}g^{33}\Big(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(0 - 0 - 0\Big)\\ &= 0 = \Gamma^3_{10}\end{aligned} \tag{B.35}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 0, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^3_{20}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0 = \Gamma^3_{30}
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.38}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 1, \nu = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma^3_{21}
\end{aligned} \tag{B.39}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 1, \nu = 3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial r} + 0 - 0\Big) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 2, \nu = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\mu}\Big) \\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 2, \nu = 3,$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^\mu}\Big)\\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial \theta} + 0 - 0\Big)\\
&= \cot\theta = \Gamma^3_{32}
\end{aligned}
\tag{B.42}
$$

Untuk $\kappa = 3, \alpha = 3, \nu = 3,$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2} g^{\mu 3}\Big(\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{3\mu}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\mu}\Big)\\
&= \frac{1}{2} g^{33}\Big(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big(0 + 0 - 0\Big)\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{B.43}
$$

Dengan demikian kita dapatkan komponen simbol Christoffel

:

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_r\alpha & 0 & 0 \\ \partial_r\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_r\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{-2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\theta e^{-2\beta} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{B.44}$$

B.1.2 Tensor Ricci

Dari hubungan [E.2] dan persamaan (E.7), kita dapat menghitung tensor Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\nu} &= R^{\mu}_{\lambda\mu\nu} \\ &= \partial_\mu\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{B.45}$$

untuk $\lambda = 0$ dan $\nu = 0$,

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\mu_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0} \\ &= \{\partial_t \Gamma^0_{00} - \partial_t \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\} \\ &\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{00} - \partial_t \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^1_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\} \\ &\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{00} - \partial_t \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^2_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\} \\ &\quad + \{\partial_\phi \Gamma^3_{00} - \partial_t \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^3_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\} \\ &= \{0 - 0 + (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 0 + 0) - (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 \\ &\quad + 0 + 0)\} + \{\alpha'' e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'(\alpha' - \beta')e^{2(\alpha-\beta)} \\ &\quad - 0 + (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'\beta' + 0 + 0) - (e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 \\ &\quad - 0 + (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\frac{\alpha'}{r} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 - 0 \\ &\quad + (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\frac{\alpha'}{r} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} \\ &= e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) \end{aligned} \tag{B.46}$$

untuk $\lambda = 0$ dan $\nu = 1$,

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{10} - \partial_1 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^\mu_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0} \\ &= \{\partial_t \Gamma^0_{10} - \partial_r \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^0_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\} \\ &\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{10} - \partial_r \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\} \\ &\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{01} - \partial_r \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\} \\ &\quad + \{\partial_\phi \Gamma^3_{10} - \partial_r \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^3_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\} \\ &= \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 \\ &\quad + 0 + 0)\} + \{0 \\ &\quad - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 \end{aligned} \tag{B.47}$$

$$
\begin{aligned}
&- 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \{0 - 0 \\
&+ (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} \\
&= 0 = R_{10}
\end{aligned}
$$

untuk $\lambda = 0$ dan $\nu = 2$,

$$
\begin{aligned}
R_{02} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{20} - \partial_2 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{20} - \partial_\theta \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{20} - \partial_\theta \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{20} - \partial_\theta \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\} \\
&\quad + \{\partial_\phi \Gamma^3_{20} - \partial_\theta \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\} \\
&= \{0 - 0 + (0 + 00 + 0) - (0 + 0 \\
&\quad + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \{0 - 0 \\
&\quad + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} \\
&= 0 = R_{20}
\end{aligned} \tag{B.48}
$$

untuk $\lambda = 0$ dan $\nu = 3$,

$$
\begin{aligned}
R_{03} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{30} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{30} - \partial_\phi \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{30} - \partial_\phi \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{30} - \partial_\phi \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\}
\end{aligned} \tag{B.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\{\partial_\phi \Gamma^3_{30} - \partial_\phi \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\} \\
&= \{0 - 0 + (0 + 00 + 0) - (0 + 0 \\
&\quad + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 - 0 \\
&\quad + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} \\
&= 0 = R_{30}
\end{aligned}
$$

untuk $\lambda = 1$ dan $\nu = 1$,

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{11} - \partial_1 \Gamma^\mu_{\mu 1} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^\mu_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 1} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{11} - \partial_r \Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^0_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{01}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{11} - \partial_r \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{11} - \partial_r \Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21}\} \\
&\quad + \{\partial_\phi \Gamma^3_{11} - \partial_r \Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^3_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{31}\} \\
&= \{0 - \alpha'' + (0 + \alpha'\beta' + 0 + 0) - (\alpha'^2 + 0 \\
&\quad + 0 + 0)\} + \{\beta'' \\
&\quad - \beta'' + (0 + \beta'^2 + 0 + 0) - (0 + \beta'^2 + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} + (0 + \frac{\beta'}{r} + 0 + 0) - (0 + 0 + \frac{1}{r^2} + 0)\} + \{0 + \frac{1}{r^2} \\
&\quad + (0 + \frac{\beta'}{r} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + \frac{1}{r^2})\} \\
&= -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}
\end{aligned}
\tag{B.50}
$$

untuk $\lambda = 1$ dan $\nu = 2$,

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{21} - \partial_2 \Gamma^\mu_{\mu 1} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 1} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{21} - \partial_\theta \Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{01}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{21} - \partial_\theta \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{21} - \partial_\theta \Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{21}\}
\end{aligned}
\tag{B.51}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\{\partial_\phi\Gamma^3_{21}-\partial_\theta\Gamma^3_{31}+\Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{21}-\Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{31}\}\\
=&\{0-0+(0+0+0+0)-(0+0\\
&+0+0)\}+\{0\\
&-0+(0+0+0+0)-(0+0+0+0)\}+\{0\\
&-0+(0+0+0+0)-(0+0+0+0)\}+\{0+0\\
&+(0+0+\frac{\cot\theta}{r}+0)-(0+0+0+\frac{\cot\theta}{r})\}\\
=&\,0=R_{21}
\end{aligned}
$$

untuk $\lambda=1$ dan $\nu=3$,

$$
\begin{aligned}
R_{13}=&\,\partial_\mu\Gamma^\mu_{31}-\partial_3\Gamma^\mu_{\mu1}+\Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{31}-\Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu1}\\
=&\{\partial_t\Gamma^0_{31}-\partial_\phi\Gamma^0_{01}+\Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{31}-\Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{01}\}\\
&+\{\partial_r\Gamma^1_{31}-\partial_\phi\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{31}-\Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\}\\
&+\{\partial_\theta\Gamma^2_{31}-\partial_\phi\Gamma^2_{21}+\Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{31}-\Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{21}\}\\
&+\{\partial_\phi\Gamma^3_{31}-\partial_\phi\Gamma^3_{31}+\Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{31}-\Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{31}\}\\
=&\{0-0+(0+0+0+0)-0+0\\
&+0+0)\}+\{0\\
&-0+(0+0+0+0)-(0+0+0+0)\}+\{0\\
&-0+(0+0+0+0)-(0+0+0+0)\}+\{0-0\\
&+(0+0+0+0)-(0+0+0+0)\}\\
=&\,0=R_{31}
\end{aligned}
\tag{B.52}
$$

untuk $\lambda=2$ dan $\nu=2$,

$$
\begin{aligned}
R_{22}=&\,\partial_\mu\Gamma^\mu_{22}-\partial_2\Gamma^\mu_{\mu2}+\Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{22}-\Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu2}\\
=&\{\partial_t\Gamma^0_{22}-\partial_\theta\Gamma^0_{02}+\Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{22}-\Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{02}\}\\
&+\{\partial_r\Gamma^1_{22}-\partial_\theta\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{22}-\Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{12}\}
\end{aligned}
\tag{B.53}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \{\partial_\theta \Gamma^2_{22} - \partial_\theta \Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{22}\} \\
&+ \{\partial_\phi \Gamma^3_{22} - \partial_\theta \Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32}\} \\
= &\{0 - 0 + (0 - r\alpha' e^{-2\beta} + 0 + 0) - 0 + 0 \\
&+ 0 + 0)\} + \{-e^{-2\beta} + 2r\beta' e^{-2\beta} \\
&- 0 + (0 - r\beta' e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 - e^{-2\beta} + 0)\} + \{0 \\
&- 0 + (0 - e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 - e^{-2\beta} + 0 + 0)\} + \{0 + \csc^2\theta \\
&+ (0 - e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + \cot^2\theta)\} \\
= &-e^{-2\beta}\Big(r\alpha' - r\beta' + 1\Big) + 1
\end{aligned}
$$

untuk $\lambda = 2$ dan $\nu = 3$,

$$
\begin{aligned}
R_{23} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{32} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 2} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 2} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{32} - \partial_\phi \Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{02}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{32} - \partial_\phi \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{12}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{32} - \partial_\phi \Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{22}\} \\
&\quad + \{\partial_\phi \Gamma^3_{32} - \partial_\phi \Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{32}\} \\
&= \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 \\
&\quad + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 \\
&\quad - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 - 0 \\
&\quad + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} \\
&= 0 = R_{32}
\end{aligned}
\tag{B.54}
$$

untuk $\lambda = 3$ dan $\nu = 3$,

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 3} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 3} \\
&= \{\partial_t \Gamma^0_{33} - \partial_\phi \Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{03}\} \\
&\quad + \{\partial_r \Gamma^1_{33} - \partial_\phi \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{13}\} \\
&\quad + \{\partial_\theta \Gamma^2_{33} - \partial_\phi \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{23}\}
\end{aligned}
\tag{B.55}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\{\partial_\phi\Gamma^3_{33}-\partial_\phi\Gamma^3_{33}+\Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{33}-\Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{33}\}\\
=&\{0-0+(0-r\alpha'\sin^2\theta e^{-2\beta}+0+0)-(0+0\\
&+0+0)\}+\{-\sin^2\theta e^{-2\beta}+2r\sin^2\theta\beta' e^{-2\beta}\\
&-0+(0-r\sin^2\theta\beta' e^{-2\beta}+0+0)-(0+0+0+0)\}\\
&+\{-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-0+(0-\sin^2\theta e^{-2\beta}+0+0)-\\
&(0+0+0-\cos^2\theta)\}+\{0-0+(0+0-\cos^2\theta+0)-\\
&(0-\sin^2\theta e^{-2\beta}-\cos^2\theta+0)\}\\
=&-\sin^2\theta e^{-2\beta}\Big(r\alpha'-r\beta'+1)+\sin^2\theta\\
=&\sin^2\theta R_{22}
\end{aligned}
$$

Begitupula, dengan (E.10), kita bisa menghitung skalar Ricci:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}=&g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\\
=&-e^{-2\alpha}R_{00}+e^{-2\beta}R_{11}+\frac{1}{r^2}\Big(R_{22}+\frac{\sin^2 R_{22}}{\sin^2\theta}\Big)\\
=&-e^{-2\alpha}e^{2(\alpha-\beta)}\Big(\alpha''+\alpha'+\frac{2\alpha'}{r}-\alpha'\beta'\Big)\\
&+e^{-2\beta}\Big(-\alpha''-\alpha'^2+\alpha'\beta'+\frac{2\beta'}{r}\Big)\\
&+\frac{2}{r^2}\Big(-e^{-2\beta}\big(r\alpha'-r\beta'+1\big)+1\Big)\\
=&-2e^{-2\beta}\bigg(\alpha''+\alpha'^2+\frac{2}{r}(\alpha'-\beta')-\alpha'\beta'+\frac{1}{r^2}\big(1-e^{2\beta}\big)\bigg).
\end{aligned}
\tag{B.56}
$$

Setelah kita dapatkan tensor Ricci dan skalar Ricci, kita bisa mencari tensor Einstein. Dari persamaan (E.16), kita miliki:

$$
G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathfrak{R}. \tag{B.57}
$$

Kita dapatkan komponen tensor Einstein yang tidak nol, yaitu komponen diagonalnya. Untuk G_{00}:

$$\begin{aligned}G_{00} &= e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) - e^{2(\alpha-\beta)}\Bigg(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2}{r}(\alpha' - \beta') \\ &\quad - \alpha'\beta' + \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{2\beta}\right)\Bigg) \\ &= \frac{2e^{2(\alpha-\beta)}\beta'}{r} - \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2}.\end{aligned} \tag{B.58}$$

Untuk G_{11}:

$$\begin{aligned}G_{11} &= -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r} + \Bigg(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \\ &\quad \alpha'\beta' + \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{2\beta}\right)\Bigg) \\ &= \frac{2\alpha'}{r} - \frac{e^{2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2}\end{aligned} \tag{B.59}$$

Untuk G_{22}:

$$\begin{aligned}G_{22} &= -e^{-2\beta}\left(r\alpha' - r\beta' + 1\right) + 1 + 2r^2e^{-2\beta}\Bigg(\alpha'' + \alpha'^2 \\ &\quad + \frac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \alpha'\beta' + \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{2\beta}\right)\Bigg) \\ &= r^2e^{-2\beta}\left(\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\beta'}{r}\right) \\ &= \frac{G_{33}}{\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{B.60}$$

B.1.3 Solusi Schwarzschild

Metrik Schwarzschild adalah solusi vakum, maka dari itu, tensor energi-momentum adalah nol, $T_{\mu\nu} = 0$, sehingga semua komponen dari tensor Einstein adalah nol. Kemudian kita tinjau determinan metrik:

$$g = -e^{2(\alpha+\beta)} r^4 \sin^2\theta \tag{B.61}$$

Pada limit $r \ggg$, maka ruang waktu akan kembali ke ruang waktu datar. Dengan demikian kita memiliki relasi

$$\alpha = -\beta \tag{B.62}$$

Substitusikan relasi (B.62) ke (B.58) kita dapatkan;

$$\begin{aligned}
-\frac{2e^{4\alpha}\alpha'}{r} - \frac{e^{4\alpha}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} &= 0 \\
\frac{2e^{4\alpha}\alpha'}{r} + \frac{e^{4\alpha}}{r^2} &= \frac{e^{2\alpha}}{r^2} \\
2re^{2\alpha}\alpha' + e^{2\alpha} &= e^{2\alpha} \\
\frac{d(re^{2\alpha})}{dr} &= 1
\end{aligned} \tag{B.63}$$

maka:

$$\begin{aligned}
re^{2\alpha} &= \int dr \\
&= r - r_s
\end{aligned} \tag{B.64}$$

atau

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{r_s}{r}. \tag{B.65}$$

Karena pada limit medan lemah metrik tensor kembali ke metrik Minkowski, yang mana:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \tag{B.66}$$

dimana $\Phi = -GM/r$. Dengan demikian, kita dapatkan

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \tag{B.67}$$

Mensubstitusikan nilai (B.65) ke ansatz metrik statik simetri bola, diperoleh:

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)c^2dt^2 + \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{B.68}$$

B.2 Koefisien Koneksi Spin Metrik Schwarzschild

Dalam perumusan koefisien koneksi spin, dengan menggunakan (3.66), dan menyulihkan simbol Christoffel (B.44) dengan nilai α dan β (B.68),

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab} &= e_{a\beta}\nabla_\mu e_b^{\ \beta} \\ &= g_{\gamma\beta}e_a^{\ \gamma}(\partial_\mu e_b^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}e_b^{\ \alpha}). \end{aligned} \tag{B.69}$$

Sehingga untuk $\mu = t$, $a = 0, b = 0$, kita dapatkan

$$\omega_{t00} = g_{\gamma\beta}e_0^{\ \gamma}(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\alpha t}e_0^{\ \alpha}). \tag{B.70}$$

Karena kita tahu bahwa komponen tetrad dan tensor metrik Schwarzschild hanya memiliki komponen diagonal saja, kita bisa memastikan bahwa hasil jumlahan tensor yang tidak nol ketika $\gamma = \beta = t$ dan $\alpha = t$, sehingga

$$\begin{aligned} \omega_{t00} &= g_{tt}e_0^{\ t}(\partial_t e_0^{\ t} + \Gamma^t_{tt}e_0^{\ t}) \\ &= -(1 - \frac{r_s}{r})(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2}\Big(\partial_t(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2} + 0\Big) \\ &= -(1 - \frac{r_s}{r})^{1/2}(0 + 0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{B.71}$$

Menggunakan cara yang sama kita dapatkan untuk komponen koneksi spinor lainnya. Untuk $\mu = t, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t01} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_1^{\ \alpha}) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} (\partial_t e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{rt} e_1^{\ r}) \\
&= -(1 - \frac{r_s}{r})(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2} \left(\partial_t 0 + \frac{r_s}{2r^2} (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} (1 - \frac{r_s}{r})^{1/2} \right) \\
&= -\frac{r_s}{2r^2}.
\end{aligned} \tag{B.72}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t02} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_2^{\ \alpha}) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} (\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{\theta t} e_2^{\ \theta}) \\
&= -(1 - \frac{r_s}{r})(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2} \left(\partial_t 0 + 0 \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.73}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t03} &= g_{\gamma\beta} e_0^{\ \gamma} (\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_3^{\ \alpha}) \\
&= g_t t e_0^{\ t} (\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{\phi t} e_3^{\ \phi}) \\
&= -(1 - \frac{r_s}{r})(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2} \Big(\partial_t 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.74}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t10} &= g_{\gamma\beta} e_1^{\ \gamma}(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_0^{\ \alpha}) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r}(\partial_t e_0^{\ r} + \Gamma^{r}_{tt} e_0^{\ t}) \\
&= (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}(1 - \frac{r_s}{r})^{1/2}\left(\partial_t 0 + \frac{r_s}{2r^2}(1 - \frac{r_s}{r})(1 - \frac{r_s}{r})^{-1/2}\right) \\
&= \frac{r_s}{2r^2}.
\end{aligned} \tag{B.75}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t11} &= g_{\gamma\beta} e_1^{\ \gamma}(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_0^{\ \alpha}) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r}(\partial_t e_1^{\ r} + \Gamma^{r}_{rt} e_1^{\ r}) \\
&= (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}(1 - \frac{r_s}{r})^{1/2}\left(\partial_t \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.76}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t12} &= g_{\gamma\beta} e_1^{\ \gamma}(\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_2^{\ \alpha}) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r}(\partial_t e_2^{\ r} + \Gamma^{r}_{\theta t} e_2^{\ r}) \\
&= (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}(1 - \frac{r_s}{r})^{1/2}\left(\partial_t 0 + 0\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.77}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t13} &= g_{\gamma\beta} e_1^{\ \gamma}(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_3^{\ \alpha}) \\
&= g_{rr} w_1^{\ r}(\partial_t e_3^{\ r} + \Gamma^{r}_{\phi r} e_3^{\ \phi}) \\
&= (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}(1 - \frac{r_s}{r})^{1/2}\left(\partial_t 0 + 0\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.78}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t20} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_0^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_0^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{tt} e_0^{\ t}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t 0 + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.79}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t21} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_1^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_1^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rt} e_1^{\ r}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t 0 + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.80}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t22} &= g_{\gamma\beta} e_2^{\ \gamma} (\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha t} e_2^{\ \alpha}) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} (\partial_t e_2^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta t} e_2^{\ \theta}) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t (\frac{1}{r}) + 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.81}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{tt} e_2^{\ t} \big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t} \big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_t (0) + 0 \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.82}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_0^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{tt} e_0^{\ t} \big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_t(0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.83}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_1^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_1^{\ t} \big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_t(0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.84}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2^{\ t} \big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_t(0) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.85}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t} \big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_t \big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + 0 \bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.86}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_r e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \Bigg(\partial_r \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \\
&\quad + \frac{r_s}{2r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Bigg) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Bigg(- \frac{r_s}{2r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2} + \frac{r_s}{r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Bigg) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.87}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_r e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{rr} e_1^{\ r}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.88}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_r e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.89}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{r03} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_r e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_r e_3{}^{t} + \Gamma^{t}_{r\phi} e_3{}^{\phi}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2} \bigg(\partial_r (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.90}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{r10} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \big(\partial_r e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1{}^{r} \big(\partial_r e_0{}^{r} + \Gamma^{r}_{rt} e_0{}^{t}\big) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \bigg(\partial_r (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.91}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{r11} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \big(\partial_r e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1{}^{r} \big(\partial_r e_1{}^{t} + \Gamma^{r}_{rr} e_1{}^{r}\big) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \bigg(\partial_r \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \\
&\quad - \frac{r_s}{2r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\bigg) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2} \bigg(\frac{r_s}{2r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2} - \frac{r_s}{2r^2}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.92}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_r e_2^{\ t} + \Gamma^{r}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.93}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_r e_3^{\ t} + \Gamma^{r}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.94}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_r e_0^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.95}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_r e_1^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rr} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.96}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{r22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_r e_2^{\ \theta} + \Gamma^{\theta} r\theta e_2^{\ \theta}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_r \big(\frac{1}{r}\big) + \frac{1}{r}\frac{1}{r}\Bigg) \\ &= r\Bigg(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.97}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{r23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_r e_3^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.98}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{r30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.99}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{r31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_1^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rr} e_1^{\ r}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \Bigg(\partial_r (0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.100}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 2$,

$$\begin{aligned}\omega_{r32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma}\big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big(\partial_r e_2^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_r(0) + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.101}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 3$,

$$\begin{aligned}\omega_{r33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma}\big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big(\partial_r e_3^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_r \frac{1}{r\sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{1}{r\sin\theta}\bigg)\\ &= r\sin\theta\bigg(-\frac{1}{r^2\sin\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.102}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_\theta e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{\theta t} e_0^{\ t}\big)\\ &= -\bigg(1 - \frac{r_s}{r}\bigg)\bigg(1 - \frac{r_s}{r}\bigg)^{-1/2}\bigg(\partial_\theta\bigg(1 - \frac{r_s}{r}\bigg)^{-1/2} + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.103}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_\theta e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{\theta r} e_1^{\ r}\big)\\ &= -\bigg(1 - \frac{r_s}{r}\bigg)\bigg(1 - \frac{r_s}{r}\bigg)^{-1/2}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.104}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.105}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_3^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.106}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_0^{\ r} + \Gamma^r_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\ &= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.107}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\theta e_1^{\ r} + \Gamma^r_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\ &= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\Big(\partial_\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.108}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 12} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma}\big(\partial_\theta e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_2{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1{}^{r}\big(\partial_\theta e_2{}^{r} + \Gamma^{r}_{\theta\theta} e_2{}^{\theta}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\left(\partial_\theta(0) - r\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{B.109}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 13} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma}\big(\partial_\theta e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1{}^{r}\big(\partial_\theta e_3{}^{r} + \Gamma^{r}_{\theta\phi} e_3{}^{\phi}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.110}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 20} &= g_{\beta\gamma} e_2{}^{\gamma}\big(\partial_\theta e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_0{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0{}^{\theta}\big(\partial_\theta e_0{}^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta t} e_0{}^{t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.111}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_1^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\theta(0) + \frac{1}{r}\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\right) \\ &= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{B.112}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_2^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\theta\big(\frac{1}{r}\big) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.113}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_3^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_\theta(0) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.114}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_0^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_\theta(0) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.115}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_1^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.116}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_2^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.117}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_3^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta \big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + \cot\theta \frac{1}{r\sin\theta} \\
&= r\sin\theta\bigg(- \cot\theta\frac{1}{r\sin\theta} + \cot\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.118}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\phi e_0^{\ t} + \Gamma^t_{\phi t} e_0^{\ t}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\bigg(\partial_\phi \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2} + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.119}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \left(\partial_\phi e_1^{\ t} + \Gamma^t_{\phi r} e_1^{\ r}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.120}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \left(\partial_\phi e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.121}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \left(\partial_\phi e_3^{\ t} + \Gamma^t_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.122}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \left(\partial_\phi e_0^{\ r} + \Gamma^r_{\phi t} e_0^{\ t}\right) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.123}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_1^{\ r} + \Gamma^r_{\phi r} e_1^{\ r} \big) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \Bigg(\partial_\phi \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.124}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_2^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\theta} e_2^{\ \theta} \big) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \Bigg(\partial_\phi (0) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.125}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_\phi e_3^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big) \\
&= \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \Bigg(\partial_\phi (0) - r \sin^2\theta \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big) \frac{1}{r \sin\theta} \Bigg) \\
&= -\sin\theta \Big(1 - \frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{B.126}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda} \big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\phi e_0^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi t} e_0^{\ t} \big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\phi (0) + 0 \Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.127}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 21} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\phi e_1^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.128}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 22} &= g_{\beta\gamma} e_\theta^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\phi e_2^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi (\frac{1}{r}) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.129}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\phi e_3^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi (0) - \sin\theta \cos\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg) \\
&= -\cos\theta.
\end{aligned} \tag{B.130}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\phi 30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_0^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\phi t} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_\phi (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.131}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\gamma} \left(\partial_\phi e_1^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_1^{\lambda}\right) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} \left(\partial_\phi e_1^{\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi r} e_1^{r}\right) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_\phi(0) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}\right) \\ &= \sin\theta \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{B.132}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\gamma} \left(\partial_\phi e_2^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_2^{\lambda}\right) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} \left(\partial_\phi e_2^{\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} e_2^{\theta}\right) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_\phi(0) + \cot\theta \frac{1}{r}\right) \\ &= \cos\theta.\end{aligned} \tag{B.133}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\gamma} \left(\partial_\phi e_3^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3^{\lambda}\right) \\ &= g_{\phi\phi} e_\phi^{t} \left(\partial_\phi e_3^{\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} e_3^{\phi}\right) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_\phi\left(\frac{1}{r\sin\theta} + 0\right)\right. \\ &= 0.\end{aligned} \tag{B.134}$$

Dari sini, kita dapatkan komponen $\omega_{\mu ab}$ yang tidak nol

$$\begin{aligned}\omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{r_s}{2r^2} \\ \omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \\ \omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -\sin\theta\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \\ \omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -\cos\theta\end{aligned} \tag{B.135}$$

B.3 Koefisien Fock-Ivanenko Ruang-Waktu Schwarzschild

Berdasar persamaan (3.67), kita dapatkan koefisien Fock-Ivanenko

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= e_c^{\ \mu}\Gamma_\mu \\ &= e_c^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big).\end{aligned} \tag{B.136}$$

Untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= e_0^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\ &= e_0^{\ t}\frac{1}{4}\Big(\omega_{t01}\gamma^0\gamma^1 + \omega_{t10}\ \gamma^1\gamma^0\Big) \\ &= \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\frac{1}{4}\Bigg(-\frac{r_s}{2r^2}\gamma^0\gamma^1 + \frac{r_s}{2r^2}\gamma^1\gamma^0\Bigg) \\ &= -\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\frac{r_s}{8r^2}\Big)\big(\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0\big) \\ &= -\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\Big(\frac{r_s}{8r^2}\Big)2\big(\gamma^0\gamma^1 - \eta^{01}\big) \\ &= -\frac{r_s}{4r^2}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{-1/2}\gamma^0\gamma^1,\end{aligned} \tag{B.137}$$

Untuk $c = 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= e_1^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^2\gamma^b\Big) \\ &= e_1^{\ r}(0) \\ &= 0,\end{aligned} \tag{B.138}$$

Untuk $c = 2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= e_2^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\
&= e_2^{\ \theta}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\theta 12}\gamma^1\gamma^2 + \omega_{\theta 21}\gamma^2\gamma^1\Big) \\
&= \frac{1}{4r}\bigg(-\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^1\gamma^2 + \Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1\bigg) \\
&= \frac{1}{4r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}(\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2) \\
&= \frac{1}{4r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}2\big(\gamma^2\gamma^1 - \eta^{21}\big) \\
&= \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1,
\end{aligned} \tag{B.139}$$

Untuk $c = 3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= e_3^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\
&= e_3^{\ \phi}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\phi 13}\gamma^1\gamma^3 + \omega_{\phi 31}\gamma^3\gamma^1 + \omega_{\phi 23}\gamma^2\gamma^3 + \omega_{\phi 32}\gamma^3\gamma^2\Big) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\Bigg(-\sin\theta\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^1\gamma^3 + \sin\theta\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2} \\
&\qquad \gamma^3\gamma^1 - \cos\theta\gamma^2\gamma^3 + \cos\theta\gamma^3\gamma^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\bigg(\sin\theta\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}(\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3) + \cos\theta\big(\gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3\big)\bigg) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\bigg(\sin\theta\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}2\big(\gamma^3\gamma^1 - \eta^{31}\big) + \cos\theta 2\big(\gamma^3\gamma^2 - \eta^{32}\big)\bigg) \\
&= \frac{1}{2r}\Big(1-\frac{r_s}{r}\Big)^{1/2}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{B.140}$$

Lampiran C

Persamaan Dirac Ruang Waktu Reissner-Nordstorm

C.1 Solusi Reissner-Nordstorm Persamaan Medan Einsten

Solusi Reissner-Nordstrom adalah solusi vakum simetri bola persamaan medan Einstein dengan sumber yang memiliki muatan listrik. Sehingga, dalam menyelesaikan persamaan medan Einstein, kita tetap gunakan ansatz metrik simetri bola. Sehingga, kita memiliki tensor metrik (B.2) dan (B.3), begitupula, kita memiliki simbol Christoffel (B.44) dengan tensor Ricci dan Skalar Ricci seperti pada [B.1.2]. Sehingga, kita hanya perlu merumuskan tensor energi momentum. Dalam merumuskan tensor energi momentum, kita tinjau tensor medan elektromagnetik:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{C.1}$$

Berdasar hukum Coulomb, kita memiliki hubungan medan listrik:

$$E_1 = -\partial_r V \tag{C.2}$$

Karena pemilihan medan adalah simetri bola, maka suku sudut dari medan magnet maupun medan listrik dapat dipilih sama dengan nol dan kita mengambil keadaan dimana $B_1 = 0$. Sehingga, komponen medan elektromagnetik hanyalah E_1. Tensor medan elektromagnetiknya menjadi:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1/c & 0 & 0 \\ -E_1/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{C.3}$$

Karena tensor metrik ansatz adalah matriks diagonal, maka, kita bisa membangun tensor medan elektromagnetik kontravarian $F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F_{\mu\nu}$. Sehingga dengan persamaan Maxwell [29]:

$$(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\mu} = (g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\mu} = 0 \tag{C.4}$$

Untuk komponen $F_{10} = -F_{01}$, kita dapatkan relasi:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{E_1}{c} e^{-(\alpha-\beta)} r^2 \sin^2\theta\Big) = 0 \tag{C.5}$$

atau

$$\begin{aligned} E_1 e^{-(\alpha+\beta)} r^2 &= C \\ E_1 &= \frac{C}{r^2} e^{\alpha+\beta}, \end{aligned} \tag{C.6}$$

dengan C adalah tetapan integrasi. Membandingkan dengan limit ketika jarak cukup jauh dari sumber, maka medan listriknya akan kembali ke bentuk ruang Minkowski dengan:

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}. \tag{C.7}$$

Dengan demikian, kita memiliki tensor medan elektromagnetik:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} & 0 & 0 \\ -\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{C.8}$$

Setelah mendapatkan komponen tensor medan elektromagnetik, kita bisa membangun tensor energi-momentum [9]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\Big(F_{\mu\rho}F_{\alpha\nu}g^{\rho\alpha} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\Big). \tag{C.9}$$

Untuk komponen T_{00},

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{\mu_0}\Big(F_{0\rho}F_{\alpha 0}g^{\rho\alpha} + \frac{1}{4}g_{00}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\Big) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\Big(F_{01}F_{10}g^{11} + \frac{1}{4}g_{00}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10})\Big) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\Bigg[\Big(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr62}\Big)\Big(-\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\Big)(-e^{-2\beta}) - \frac{1}{4}e^{2\alpha} \\ &\quad \times 2e^{-2(\beta+\alpha)}\Big(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\Big)^2\Bigg] \\ &= \frac{e^{2\alpha}}{\mu_0}\Bigg[\Big(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\Big)^2\Bigg] \\ &= \frac{e^{2\alpha}}{2\mu_0}\Big(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\Big)^2 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Karena, $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, maka

$$T_{00} = \frac{e^{2\alpha}}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}. \tag{C.11}$$

Dengan tensor Einstein untuk suku G_{00} sesuai (B.58), dan substitusikan $\alpha = -\beta$ menggunakan tensor energi momentum

T_{00} seperti pada (C.11), kita dapatkan persamaan medan Einstein untuk suku 00:

$$\begin{aligned} -\frac{2\alpha' e^{4\alpha}}{r} - \frac{e^{4\alpha}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} &= \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0}\frac{e^{2\alpha}}{r^4} \\ e^{2\alpha} + 2\alpha' r e^{2\alpha} &= 1 - \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2} \\ \frac{\partial(re^{2\alpha})}{\partial r} &= 1 - \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2} \end{aligned} \tag{C.12}$$

Dengan mengintegralkan kedua sisi kita dapatkan:

$$\begin{aligned} re^{2\alpha} &= \int \Big(1 - \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}\Big) dr \\ &= r + \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r} + C \\ e^{2\alpha} &= 1 + \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2} + \frac{C}{r}. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Dalam kasus ketika muatan dihilangkan dari sumber, maka solusi (C.13) haruslah kembali ke solusi Schwarzschild (B.65), sehingga kita dapatkan $C = -r_s$. Dengan menulis $GQ^2/4\pi c^4 \epsilon_0 = r_Q^2$, maka kita dapatkan metrik Reissner-Nordstrom:

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)c^2 dt^2 + \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1} dr^2 + r^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big) \tag{C.14}$$

C.2 Koefisien Koneksi Spin Metrik Reissner-Nordstrom

Dengan cara yang sama dengan (B.2), kita bisa mendapatkan komponen koneksi spin pada ruang-waktu Reissner-

Nordstrom. Untuk $\mu = t, a = 0, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t00} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_t e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_0{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_t e_0{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_0{}^{t}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Bigg(\partial_t\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2} + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t01} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_t e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_1{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_t e_1{}^{t} + \Gamma^{t}_{tr} e_1{}^{r}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Bigg(\partial_t(0) + \\
&\quad \frac{1}{2}\big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Bigg) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{2r_Q^2}{r^3}\Big) \\
&.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t02} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \big(\partial_t e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2{}^{\lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0{}^{t} \big(\partial_t e_2{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2{}^{t}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_t(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{t03} &= g_{\beta\gamma}e_0{}^{\gamma}\big(\partial_t e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda}e_3{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{tt}e_0{}^{t}\big(\partial_t e_3{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt}e_3{}^{t}\big)\\ &= -\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_t(0)+0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.18}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{t10} &= g_{\beta\gamma}e_1{}^{\gamma}\big(\partial_t e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda}e_0{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{tt}e_0{}^{t}\big(\partial_t e_0{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt}e_0{}^{t}\big)\\ &= \Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_t(0)+\\ &\quad \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{r_Q^2}{2r^3}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2}-\frac{r_Q^2}{2r^3}\Big).\end{aligned} \tag{C.19}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{t11} &= g_{\beta\gamma}e_1{}^{\gamma}\big(\partial_t e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda}e_1{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{tt}e_1{}^{t}\big(\partial_t e_1{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt}e_1{}^{t}\big)\\ &= \Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big(\partial_t\Big(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}+0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.20}$$

Untuk $\mu = t, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_1^{\ t} \big(\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2^{\ t}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \Big(\partial_t(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Untuk $\mu = t, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_1^{\ t} \big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \Big(\partial_t(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_t e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_2^{\ t} \big(\partial_t e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Big(\partial_t(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{t21} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_t e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_2^{\ t} \big(\partial_t e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_1^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Big(\partial_t(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{t22} &= g_{\beta\gamma} e_2{}^{\gamma} \big(\partial_t e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2{}^{\lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_2{}^{t} \big(\partial_t e_2{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2{}^{t}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_t(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.25}$$

Untuk $\mu = t, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{t23} &= g_{\beta\gamma} e_2{}^{\gamma} \big(\partial_t e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3{}^{\lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_2{}^{t} \big(\partial_t e_3{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3{}^{t}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_t(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.26}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{t30} &= g_{\beta\gamma} e_3{}^{\gamma} \big(\partial_t e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_0{}^{\lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_3{}^{t} \big(\partial_t e_0{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_0{}^{t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \Bigg(\partial_t(\frac{1}{r\sin\theta}) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.27}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{t31} &= g_{\beta\gamma} e_3{}^{\gamma} \big(\partial_t e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_1{}^{\lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_3{}^{t} \big(\partial_t e_1{}^{t} + \Gamma^{t}_{tt} e_1{}^{t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \Bigg(\partial_t(0) + 0\Bigg) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.28}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma}\big(\partial_t e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_3^{\ t}\big(\partial_t e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_2^{\ t}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\Bigg(\partial_t(0) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Untuk $\mu = t, a = 3, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma}\big(\partial_t e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{t\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_3^{\ t}\big(\partial_t e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{tt} e_3^{\ t}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\Bigg(\partial_t\big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + 0\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Bigg(\partial_r\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2} + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Bigg) \\
&= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Bigg(-\frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big) \\
&\quad \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-3/2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-3/2}\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{r01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{rr} e_1^{\ r}\big)\\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.32}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 2$,

$$\begin{aligned}\omega_{r02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_2^{\ t} + \Gamma^{t}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big)\\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.33}$$

Untuk $\mu = r, a = 0, b = 3$,

$$\begin{aligned}\omega_{r03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma}\big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{tt} e_0^{\ t}\big(\partial_r e_3^{\ t} + \Gamma^{t}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big)\\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.34}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_r e_0^{\ r} + \Gamma^{r}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \Big(\partial_r (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_r e_1^{\ t} + \Gamma^{r}_{rr} e_1^{\ r}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \Bigg(\partial_r \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1} 2 - \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\Bigg) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \Bigg(\frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} - \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\Bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{r12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \big(\partial_r e_2^{\ t} + \Gamma^{r}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \Big(\partial_r (0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.37}$$

Untuk $\mu = r, a = 1, b = 3$,

$$\begin{aligned}\omega_{r13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma}\big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{rr} e_1^{\ r}\big(\partial_r e_3^{\ t} + \Gamma^{r}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big)\\ &= \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.38}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{r20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma}\big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big(\partial_r e_0^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rt} e_0^{\ t}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.39}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{r21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma}\big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big(\partial_r e_1^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{rr} e_1^{\ r}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r}\Big(\partial_r(0) + 0\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.40}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 2$,

$$\begin{aligned}\omega_{r22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma}\big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big(\partial_r e_2^{\ \theta} + \Gamma^{\theta} r\theta e_2^{\ \theta}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r}\Big(\partial_r\big(\frac{1}{r}\big) + \frac{1}{r}\frac{1}{r}\Big)\\ &= r\Big(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\Big)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.41}$$

Untuk $\mu = r, a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned} \omega_{r23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_r e_3^{\ \theta} + \Gamma^{\theta}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_r (0) + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{C.42}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned} \omega_{r30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rt} e_0^{\ t}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_r (0) + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{C.43}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned} \omega_{r31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_1^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{rr} e_1^{\ r}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_r (0) + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{C.44}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned} \omega_{r32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_2^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_r (0) + 0\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{C.45}$$

Untuk $\mu = r, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{r33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_r e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{r\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_r e_3^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{r\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_r \frac{1}{r\sin\theta} + \frac{1}{r}\frac{1}{r\sin\theta}\right) \\
&= r\sin\theta\left(-\frac{1}{r^2\sin\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.46}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_0^{\ t} + \Gamma^{t}_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\partial_\theta\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.47}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\theta e_1^{\ t} + \Gamma^{t}_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.48}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \left(\partial_\theta e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.49}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 03} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \left(\partial_\theta e_3^{\ t} + \Gamma^t_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.50}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta 10} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\right) \\ &= g_{rr} e_1^{\ r} \left(\partial_\theta e_0^{\ r} + \Gamma^r_{\theta t} e_0^{\ t}\right) \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\Big(\partial_\theta(0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.51}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 11} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \left(\partial_\theta e_1^{\ r} + \Gamma^r_{\theta r} e_1^{\ r}\right) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \left(\partial_\theta \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.52}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \left(\partial_\theta e_2^{\ r} + \Gamma^r_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\right) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \left(\partial_\theta (0) - r\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{C.53}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \left(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\right) \\
&= g_{rr} e_1^{\ r} \left(\partial_\theta e_3^{\ r} + \Gamma^r_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\right) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \left(\partial_\theta (0) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.54}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_0^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\theta (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.55}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 21} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_1^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \Bigg(\partial_\theta (0) + \frac{1}{r}\bigg(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\bigg)^{1/2}\Bigg) \\
&= \bigg(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\bigg)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{C.56}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 2$,

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 22} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_0^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_2^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\theta \big(\frac{1}{r}\big) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.57}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 2, b = 3$,

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 23} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta} \big(\partial_\theta e_3^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\theta (0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.58}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 30} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_0^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_0^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\theta t} e_0^{\ t}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.59}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_1^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_1^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\theta r} e_1^{\ r}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{[}{1}] r\sin\theta\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.60}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_2^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_2^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta(0) + 0\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.61}$$

Untuk $\mu = \theta, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\theta e_3^{\ \beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big) \\
&= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\theta e_3^{\ \phi} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} e_3^{\ \phi}\big) \\
&= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg(\partial_\theta\big(\frac{1}{r\sin\theta}\big) + \cot\theta \frac{1}{r\sin\theta} \\
&= r\sin\theta\bigg(- \cot\theta\frac{1}{r\sin\theta} + \cot\theta\frac{1}{r\sin\theta}\bigg) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.62}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 00} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\phi e_0^{\ t} + \Gamma^t_{\phi t} e_0^{\ t}\big) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(\partial_\phi \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.63}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 01} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\phi e_1^{\ t} + \Gamma^t_{\phi r} e_1^{\ r}\big) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.64}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 02} &= g_{\beta\gamma} e_0^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\big) \\ &= g_{tt} e_0^{\ t} \big(\partial_\phi e_2^{\ t} + \Gamma^t_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\big) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \Big(\partial_\phi (0) + 0\Big) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.65}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 0, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 03} &= g_{\beta\gamma} e_0{}^{\gamma} \left(\partial_\phi e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3{}^{\lambda}\right) \\ &= g_{tt} e_0{}^{t} \left(\partial_\phi e_3{}^{t} + \Gamma^{t}_{\phi\phi} e_3{}^{\phi}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\partial_\phi(0) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.66}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 10} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_\phi e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_0{}^{\lambda}\right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_\phi e_0{}^{r} + \Gamma^{r}_{\phi t} e_0{}^{t}\right) \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\left(\partial_\phi(0) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.67}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 11} &= g_{\beta\gamma} e_1{}^{\gamma} \left(\partial_\phi e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_1{}^{\lambda}\right) \\ &= g_{rr} e_1{}^{r} \left(\partial_\phi e_1{}^{r} + \Gamma^{r}_{\phi r} e_1{}^{r}\right) \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\left(\partial_\phi\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) + 0\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.68}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 12} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma}\left(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\right)\\ &= g_{rr} e_1^{\ r}\left(\partial_\phi e_2^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\right)\\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)6{-}1\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\Bigg(\partial_\phi(0) + 0\Bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.69}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 1, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 13} &= g_{\beta\gamma} e_1^{\ \gamma}\left(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\right)\\ &= g_{rr} e_1^{\ r}\left(\partial_\phi e_3^{\ r} + \Gamma^r_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\right)\\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\Bigg(\partial_\phi(0) -\\ &\quad r\sin^2\theta\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{r\sin\theta}\Bigg)\\ &= -\sin\theta\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{C.70}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 20} &= g_{\beta\gamma} e_2^{\ \gamma}\left(\partial_\phi e_0^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_0^{\ \lambda}\right)\\ &= g_{\theta\theta} e_2^{\ \theta}\left(\partial_\phi e_0^{\ \theta} + \Gamma^\theta_{\phi t} e_0^{\ t}\right)\\ &= r^2\frac{1}{r}\Bigg(\partial_\phi(0) + 0\Bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.71}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 21} &= g_{\beta\gamma} e_2{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_1{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_1{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_0{}^{\theta} \big(\partial_\phi e_1{}^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi r} e_1{}^{r}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi(0) + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.72}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 2$,

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 22} &= g_{\beta\gamma} e_\theta{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_2{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_2{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_2{}^{\theta} \big(\partial_\phi e_2{}^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} e_2{}^{\theta}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi(\frac{1}{r}) + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.73}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 2, b = 3$,

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 23} &= g_{\beta\gamma} e_2{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_3{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\theta\lambda} e_3{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{\theta\theta} e_2{}^{\theta} \big(\partial_\phi e_3{}^{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} e_3{}^{\phi}\big)\\ &= r^2 \frac{1}{r} \bigg(\partial_\phi(0) - \sin\theta\cos\theta \frac{1}{r\sin\theta}\bigg)\\ &= -\cos\theta.\end{aligned} \tag{C.74}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 30} &= g_{\beta\gamma} e_3{}^{\gamma} \big(\partial_\phi e_0{}^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\phi\lambda} e_0{}^{\lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_3{}^{\phi} \big(\partial_\phi e_0{}^{\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi t} e_0{}^{t}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta} \bigg(\partial_\phi(0) + 0\bigg)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.75}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 31} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_1^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_1^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_1^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\phi r} e_1^{\ r}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(0) + \frac{1}{r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\right)\\ &= \sin\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{C.76}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 32} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_2^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\phi\lambda} e_2^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_3^{\ \phi} \big(\partial_\phi e_2^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta} e_2^{\ \theta}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(0) + \cot\theta\frac{1}{r}\right)\\ &= \cos\theta.\end{aligned} \tag{C.77}$$

Untuk $\mu = \phi, a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 33} &= g_{\beta\gamma} e_3^{\ \gamma} \big(\partial_\phi e_3^{\ \beta} + \Gamma^\beta_{\theta\lambda} e_3^{\ \lambda}\big)\\ &= g_{\phi\phi} e_\phi^{\ t} \big(\partial_\phi e_3^{\ \phi} + \Gamma^\phi_{\phi\phi} e_3^{\ \phi}\big)\\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\phi(\frac{1}{r\sin\theta} + 0\right)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.78}$$

Dari sini, kita dapatkan komponen $\omega_{\mu ab}$ yang tidak nol

$$\begin{aligned}\omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\\ \omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\\ \omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -\sin\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\\ \omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -\cos\theta\end{aligned} \tag{C.79}$$

C.3 Koefisien Fock-Ivanenko Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom

Berdasar persamaan (3.67), kita dapatkan koefisien Fock-Ivanenko:

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= e_c^{\ \mu}\Gamma_\mu \\ &= e_c^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big).\end{aligned} \tag{C.80}$$

Untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= e_0^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\ &= e_0^{\ t}\frac{1}{4}\Big(\omega_{t01}\gamma^0\gamma^1 + \omega_{t10}\ \gamma^1\gamma^0\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\frac{1}{4}\Bigg(- \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\gamma^0\gamma^1 + \\ &\quad \frac{1}{2}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\gamma^1\gamma^0\Bigg) \\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\frac{1}{8}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\big(\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0\big) \\ &= -\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{-1/2}\frac{1}{8}\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)2\big(\gamma^0\gamma^1 - \eta^{01}\big) \\ &= -\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)\Big(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3}\Big)\gamma^0\gamma^1,\end{aligned} \tag{C.81}$$

Untuk $c = 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= e_1^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^2\gamma^b\Big) \\ &= w_1^{\ r}(0) \\ &= 0,\end{aligned} \tag{C.82}$$

Untuk $c = 2$,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 &= e_2^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\
&= e_2^{\ \theta}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\theta 12}\gamma^1\gamma^2 + \omega_{\theta 21}\gamma^2\gamma^1\Big) \\
&= \frac{1}{4r}\Bigg(-\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^1\gamma^2 + \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1\Bigg) \\
&= \frac{1}{4r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\big(\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2\big) \\
&= \frac{1}{4r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}2\big(\gamma^2\gamma^1 - \eta^{21}\big) \\
&= \frac{1}{2r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^2\gamma^1,
\end{aligned}
\tag{C.83}
$$

untuk $c = 3$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= e_3^{\ \mu}\Big(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\Big) \\
&= e_3^{\ \phi}\frac{1}{4}\Big(\omega_{\phi 13}\gamma^1\gamma^3 + \omega_{\phi 31}\gamma^3\gamma^1 + \omega_{\phi 23}\gamma^2\gamma^3 + \omega_{\phi 32}\gamma^3\gamma^2\Big) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\Bigg(-\sin\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^1\gamma^3 + \sin\theta \\
&\quad \Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^3\gamma^1 - \cos\theta\gamma^2\gamma^3 + \cos\theta\gamma^3\gamma^2\Bigg) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\Bigg(\sin\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\big(\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3\big) \\
&\quad + \cos\theta\big(\gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3\big) \\
&= \frac{1}{4r\sin\theta}\Bigg(\sin\theta\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}2\big(\gamma^3\gamma^1 - \eta^{31}\big) \\
&\quad + \cos\theta 2\big(\gamma^3\gamma^2 - \eta^{32}\big) \\
&= \frac{1}{2r}\Big(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\Big)^{1/2}\gamma^3\gamma^1 + \frac{\cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{C.84}$$

Lampiran D

Persamaan Dirac Pada Semesta FLRW 1+1 Dimensi

D.1 Simbol Christoffel

Untuk membangun koneksi spinorial kita perlu mencari simbol Christoffel pada semesta FLRW. Dari persamaan (2.50), kita bisa mencari simbol Christoffel:

$$\Gamma^{\kappa}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right). \tag{D.1}$$

untuk $\kappa = t, \alpha = t$, dan $\nu = t$, maka

$$\begin{aligned} \Gamma^{t}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{\mu t} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{t\mu}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^{\mu}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} g^{xt} \left(\frac{\partial g_{xt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tx}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{D.2}$$

dimana μ berjalan dari t dan x. Dikarenakan tensor metrik pada semesta FLRW, (4.131), berbentuk diagonal, maka komponen tensor metrik yang lain akan selalu nol selain jika $\mu = \kappa$ pada (E.1). Sehingga pada (E.2) menyisakan

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tt} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t}\right) + \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (1)}{\partial t} + \frac{\partial (1)}{\partial t} - \frac{\partial (1)}{\partial t}\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{D.3}$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan komponen simbol Christoffel yang lain. Untuk $\kappa = t, \alpha = t, \nu = x$,

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tx} &= \frac{1}{2}g^{\mu t}\left(\frac{\partial g_{\mu x}}{\partial t} + \frac{\partial g_{t\mu}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial x^\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(\frac{\partial g_{tx}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (0)}{\partial t} + \frac{\partial (1)}{\partial x} - \frac{\partial (0)}{\partial t}\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{D.4}$$

Untuk $\kappa = t, \alpha = x, \nu = t$,

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{xt} &= \frac{1}{2}g^{\mu t}\left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x} + \frac{\partial g_{x\mu}}{\partial t} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial x^\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (1)}{\partial x} + \frac{\partial (0)}{\partial t} - \frac{\partial (0)}{\partial t}\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{D.5}$$

Untuk $\kappa = t, \alpha = x, \nu = x,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{xx} &= \frac{1}{2} g^{\mu t} \left(\frac{\partial g_{\mu x}}{\partial x} + \frac{\partial g_{x\mu}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xt}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial t} \right) \\
&= f(t)\dot{f}(t).
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Untuk $\kappa = x, \alpha = t, \nu = t,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{tt} &= \frac{1}{2} g^{\mu x} \left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{t\mu}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{xx} \left(\frac{\partial g_{xt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tx}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{2} (-f(t)^2)^{-1} \left(\frac{\partial(0)}{\partial t} + \frac{\partial(0)}{\partial t} - \frac{\partial(1)}{\partial x} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Untuk $\kappa = x, \alpha = t, \nu = x,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{tx} &= \frac{1}{2} g^{\mu x} \left(\frac{\partial g_{\mu x}}{\partial t} + \frac{\partial g_{t\mu}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{xx} \left(\frac{\partial g_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial g_{tx}}{\partial x} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{2} (-f(t)^2)^{-1} \left(\frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial t} + \frac{\partial(0)}{\partial t} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Untuk $\kappa = x, \alpha = x, \nu = t$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{xt} &= \frac{1}{2}g^{\mu x}\left(\frac{\partial g_{\mu t}}{\partial x} + \frac{\partial g_{x\mu}}{\partial t} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{xx}\left(\frac{\partial g_{xt}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}(-f(t)^2)^{-1}\left(\frac{\partial(0)}{\partial t} + \frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial t} - \frac{\partial(0)}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Untuk $\kappa = x, \alpha = x, \nu = x$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{xx} &= \frac{1}{2}g^{\mu x}\left(\frac{\partial g_{\mu x}}{\partial x} + \frac{\partial g_{x\mu}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{xx}\left(\frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}(-f(t)^2)\left(\frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-f(t)^2)}{\partial x}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Sehingga simbol Christoffel semesta FLRW 1+1,

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{\alpha\nu} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(t)\dot{f}(t) \end{bmatrix} \\
\Gamma^x_{\alpha\nu} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \\ \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

.

D.2 Koefisien Koneksi Spinorial

Dalam perumusan persamaan Dirac, kita memerlukan koefisien Fock-Ivanenko, (3.67). Untuk mendapatkan koefisien

Fock-Ivanenko, kita memerlukan koneksi spinorial. Berdasar (3.66), kita memiliki bentuk koneksi spinorial:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab} &= e_{\gamma a} \nabla_{\mu} e^{\gamma}_{\ b} \\ &= g_{\beta} \gamma e^{\beta}_{\ a} \left(\partial_{\mu} e^{\gamma}_{\ b} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} e^{\alpha}_{\ b} \right) \end{aligned} \tag{D.12}$$

dimana μ, β, γ, dan α bergerak dari t dan x, menandakan koordinat sejati, sedangkan a dan b bergerak dari 0 dan 1, menandakan koordinat ortonormal. Untuk $\mu = t, a = 0, b = 0$, (E.12) menjadi:

$$\omega_{t00} = g_{\beta} \gamma e^{\beta}_{\ 0} \left(\partial_{t} e^{\gamma}_{\ 0} + \Gamma^{\gamma}_{t\alpha} e^{\alpha}_{\ 0} \right) \tag{D.13}$$

.

Dari hubungan tetrad (4.134-4.135), kita tahu bahwa komponen tetrad tidak nol ketika $\mu = t$ saat $a = 0$ dan ketika $\mu = x$ saat $a = 1$, maka,(E.13) mengharuskan $\beta = t, \gamma = t$, dan $\alpha = t$, menjadi

$$\begin{aligned} \omega_{t00} &= g_{t} t e^{t}_{\ 0} \left(\partial_{t} e^{t}_{\ 0} + \Gamma^{t}_{tt} e^{t}_{\ 0} \right) \\ . &= \left(\partial_{t}(1) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{D.14}$$

Untuk $\mu = t, a = 0$, dan $b = 1$,

$$\begin{aligned} \omega_{t01} &= g_{\beta} \gamma e^{\beta}_{\ 0} \left(\partial_{t} e^{\gamma}_{\ 1} + \Gamma^{\gamma}_{t\alpha} e^{\alpha}_{\ 1} \right) \\ &= g_{t} t e^{t}_{\ 0} \left(\partial_{t} e^{t}_{\ 1} + \Gamma^{t}_{tx} e^{x}_{\ 1} \right) \\ . &= \left(\partial_{t}(0) + 0 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{D.15}$$

Untuk $\mu = t, a = 1$, dan $b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t10} &= g_\beta \gamma e^\beta_{\ 1}\left(\partial_t e^\gamma_{\ 0} + \Gamma^\gamma_{t\alpha} e^\alpha_{\ 0}\right) \\
&= g_x x e^x_{\ 1}\left(\partial_t e^x_{\ 0} + \Gamma^x_{tt} e^t_{\ 0}\right) \\
. &= (-f(t)^2)\frac{1}{f(t)}\left(\partial_t(0) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Untuk $\mu = t, a = 1$, dan $b = 1$,

$$\begin{aligned}
\omega_{t11} &= g_{\beta\gamma} e^\beta_{\ 1}\left(\partial_t e^\gamma_{\ 1} + \Gamma^\gamma_{t\alpha} e^\alpha_{\ 1}\right) \\
&= g_{xx} e^x_{\ 1}\left(\partial_t e^x_{\ 1} + \Gamma^x_{tx} e^x_{\ 1}\right) \\
&= (-f(t)^2)\frac{1}{f(t)}\left(\partial_t(\frac{1}{f(t)}) + \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\frac{1}{f(t)}\right) \\
&= -f(t)\left(-\frac{\dot{f}(t)}{f(t)^2} + \frac{\dot{f}(t)}{f(t)^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.17}$$

Untuk $\mu = x, a = 0$, dan $b = 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_{x00} &= g_\beta \gamma e^\beta_{\ 0}\left(\partial_x e^\gamma_{\ 0} + \Gamma^\gamma_{x\alpha} e^\alpha_{\ 0}\right) \\
&= g_t t e^t_{\ 0}\left(\partial_x e^t_{\ 0} + \Gamma^t_{xx} e^x_{\ 0}\right) \\
. &= \left(\partial_x(1) + 0\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Untuk $\mu = x, a = 0$, dan $b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{x01} &= g_{\beta}\gamma e^{\beta}_{\ 0}\left(\partial_x e^{\gamma}_{\ 1} + \Gamma^{\gamma}_{x\alpha}e^{\alpha}_{\ 1}\right)\\ &= g_t t e^{t}_{\ 0}\left(\partial_x e^{t}_{\ 1} + \Gamma^{t}_{xx}e^{x}_{\ 1}\right)\\ . &= \left(\partial_t(0) + f(t)\dot{f}(t)(\frac{1}{f(t)})\right)\\ &= \dot{f}(t).\end{aligned} \tag{D.19}$$

Untuk $\mu = x, a = 1$, dan $b = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{x10} &= g_{\beta}\gamma e^{\beta}_{\ 1}\left(\partial_x e^{\gamma}_{\ 0} + \Gamma^{\gamma}_{x\alpha}e^{\alpha}_{\ 0}\right)\\ &= g_x x e^{x}_{\ 1}\left(\partial_x e^{x}_{\ 0} + \Gamma^{x}_{xt}e^{t}_{\ 0}\right)\\ . &= (-f(t)^2)\frac{1}{f(t)}\left(\partial_t(0) + \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\right)\\ &= -\dot{f}(t).\end{aligned} \tag{D.20}$$

Untuk $\mu = x, a = 1$, dan $b = 1$,

$$\begin{aligned}\omega_{x11} &= g_{\beta}\gamma e^{\beta}_{\ 1}\left(\partial_x e^{\gamma}_{\ 1} + \Gamma^{\gamma}_{x\alpha}e^{\alpha}_{\ 1}\right)\\ &= g_x x e^{x}_{\ 1}\left(\partial_x e^{1}_{\ 1} + \Gamma^{x}_{xx}e^{x}_{\ 1}\right)\\ . &= (-f(t)^2)\frac{1}{f(t)}\left(\partial_x(\frac{1}{f(t)}) + 0\right)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{D.21}$$

Dengan demikian, kita dapatkan komponen koneksi spin:

$$\begin{aligned}
\omega_{tab} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\omega_{xab} &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{f}(t) \\ -\dot{f}(t) & 0 \end{bmatrix} \\
.
\end{aligned} \tag{D.22}$$

D.3 Koefisien Fock-Ivanenko

Setelah mendapat komponen koneksi Spin, dengan (3.66), kita bisa mendapatkan koefisien Fock-ivanenko

$$\begin{aligned}
\Gamma_c &= e^{\mu}_{\ c}\Gamma_{\mu} \\
&= e^{\mu}_{\ c}(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b) \\
.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= e^{\mu}_{\ 0}(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b) \\
&= e^{t}_{\ 0}(\frac{1}{4}\omega_{tab}\gamma^a\gamma^b) \\
&= e^{t}_{\ 0}(\frac{1}{4}0) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D.24}$$

dan untuk $c = 1$,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= e^{\mu}_{\ 1}(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b) \\
&= e^{x}_{\ 1}(\frac{1}{4}\omega_{xab}\gamma^a\gamma^b) \\
&= e^{x}_{\ 1}\left(\frac{1}{4}(\omega_{x01}\gamma^0\gamma^1 + \omega_{x10}\gamma^1\gamma^0)\right) \\
&= e^{x}_{\ 1}\left(\frac{1}{4}(\dot{f}(t))\gamma^0\gamma^1 - \dot{f}(t)\gamma^1\gamma^0)\right) \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{f(t)})(\dot{f}(t))(\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0) \\
&= \frac{\dot{f}(t)}{4f(t)}\{\gamma^0, \gamma^1\},
\end{aligned}
\tag{D.25}
$$

karena $\{\gamma^0, \gamma^1\} = 2(\eta^{01} - \gamma^1\gamma^0)$, maka

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}(\eta^{01} - \gamma^1\gamma^0) \\
&= -\frac{\dot{f}(t)}{2f(t)}\gamma^1\gamma^0.
\end{aligned}
\tag{D.26}
$$

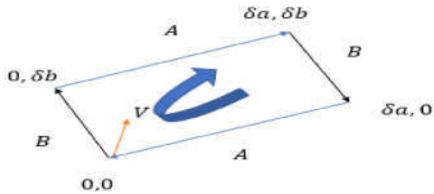
Lampiran E

Perumusan Matematik

E.1 Tensor Riemann

Agar kita bisa melihat bahwa ruang itu melengkung, kita dapat melakukan pengangkutan sejajar sebuah vektor pada sebuah *loop* tertutup yang infinitesimal. Setelah melakukan pengangkutan sejajar dalam sebuah *loop* tertutup, kita dapat membandingkan vektor awal dan akhir hasil pengangkutan sejajar. Misalkan, pada ruang-waktu yang lengkung (Minkowski), semua turunan dari tensor metrik $\eta_{\mu\nu}$ sama dengan nol, sehingga semua komponen koefisien koneksi (simbol Christoffel), artinya bahwa apabila sebuah vektor diangkut sejajar dalam sebuah *loop*, maka vektor itu tidak berubah, dan dengan definisi itu kita menyebut metrik datar.

Misalkan kita ambil lajur dari pengankutan sejajar sebuah vektor V melalui vektor A dan vektor B. Panjang sisi infinitesimal dari *loop* berturut turut adalah δa dan δb. Dengan intuisi. kita tahu bahwa pasti ada sebuah tensor yang memberitahu kita bagaimana vektor berubah setelah vektor kembali ke titik awal. Tensor itu akan menjadi transformasi linear pada vektor, dan tentusaja memiliki indeks atas dan bawah. Sebagai tambahan, tensor itu juga bergantung pada dua vektor A dan B yang mendefinisikan *loop*. Artinya, tensor itu memiliki dua indeks bawah agar mengontraksi A^μ dan B^ν.



Gambar E.1: Pengangkutan sejajar vektor V dalam *loop* tertutup yang dibangun oleh vektor A dan B

Dengan demikian, tensor tersebut haruslah antisimetrik, karena mengubah vektor akan memengaruhi arah pergerakaan *loop*, yaitu menjadi sebaliknya dan hasilnya kebalikan dari hasil awalnya. Dengan beberapa intuisi di atas, kita membangun perumusan perubahan vektor δV^β ketika diangkut sejajar dalam *loop*:

$$\delta V^\beta = (\delta a)(\delta b) A^\nu B^\mu R^\beta_{\alpha\mu\nu} V^\alpha \tag{E.1}$$

Dimana $R^\beta_{\alpha\mu\nu}$ disebut tensor Riemann atau tensor kelengkungan dan tensor itu antisimetrik terhadap dua indeks terakhir

$$R^\beta_{\alpha\mu\nu} = -R^\beta_{\alpha\nu\mu} \tag{E.2}$$

Secara umum, kita mendefinisikan tensor kurvatur sebagai pengaruh pengangkutan sejajar dari sebuah vektor dalam *loop*. Dengan definisi tersebut, kita mendapati bahwa tensor kurvatur pastilah berhubungan dengan koefisien koneksi.

Kita tinjau komutasi dari dua turunan kovarian. Komutasi dari dua turunan kovarian, menunjukkan ukuran seberapa beda hasil pengangkutan sejajar sebuah vektor lewat satu jalur ke jalur yang lain dan dengan cara kebalikannya. Misalkan sebuah medan vektor V^β, maka

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\nabla_\nu V^\beta) &= \nabla_\mu\Big(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}V^\lambda\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}V^\lambda\Big) + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Big(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}V^\sigma\Big)\\ &\quad - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\beta_{\sigma\lambda}V^\lambda\Big)\\ &= \partial_\mu\partial_\nu V^\beta + (\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\lambda})V^\lambda + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\partial_\nu V^\lambda\\ &+ \quad \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}V^\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma V^\beta - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\lambda}V^\lambda\end{aligned} \tag{E.3}$$

Jika ditukar $\mu \iff \nu$,

$$\begin{aligned}\nabla_\nu(\nabla_\mu V^\beta) &= \partial_\nu\partial_\mu V^\beta + (\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\lambda})V^\lambda + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\partial_\mu V^\lambda\\ &\quad + \Gamma^\beta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}V^\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\partial_\sigma V^\beta - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\Gamma^\beta_{\sigma\lambda}V^\lambda\end{aligned} \tag{E.4}$$

Komutatornya:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\beta = \nabla_\mu\Big(\nabla_\nu V^\beta\Big) - \nabla_\nu\Big(\nabla_\mu V^\beta\Big) \tag{E.5}$$

dilihat dari (E.3) dan (E.5), apabila dikurangkan, suku pertama, keenam, dan ketujuh akan saling menghilangkan. begitupula untuk suku ketiga dan keempat, dan untuk suku kelima kita tukar $\sigma \iff \lambda$ sehingga menyisakan:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\beta = \Big(\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\beta_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Big)V^\lambda \tag{E.6}$$

Karena sisi kiri berupa tensor, maka otomatis suku yang berada di dalam kurung jugalah tensor. Maka kita definisikan

$$R^\beta_{\lambda\mu\nu} = \Big(\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\beta_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Big)V^\lambda \tag{E.7}$$

yang didefinisikan sebagai tensor Riemann. Ketika kita melihat tensor Riemann, tensor Riemann dibangun dari turunan kovarian orde dua dari sebuah vektor. Dalam kalkulus kita tahu bahwa turunan orde dua menunjukkan kecekungan dari sebuah kurva. Maka dari itu, tensor Riemann menunjukkan kelengkungan dari sebuah manifold. Tensor Riemann juga dapat dinyatakan dalam bentuk kovarian

$$R_{\sigma\lambda\mu\nu} = g_{\beta\sigma} R^{\beta}_{\lambda\mu\nu} \tag{E.8}$$

E.2 Tensor Ricci

Tensor RIcci didapatkan dari tensor Riemaan yang diberikan oleh hubungan:

$$R_{\lambda\nu} = R^{\mu}_{\lambda\mu\nu} \tag{E.9}$$

secara geometrik, tensor Ricci adalah objek matematik yang mengontrol laju pertumbuhan volume bola metrik pada manifold. Tensor Ricci dapat dikontraksikan lagi dan kita dapatkan skalar Ricci. Skalar Ricci memberikan informasi mengenai kelengkungan ruang-waktu

$$\mathfrak{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{E.10}$$

E.3 Tensor Einstein

Tensor kelengkungan mengikuti beberapa identitas diferensial. Misalkan turunan kovarian dari tensor Riemann (E.8), dievaluasi pada sistem koordinat inersial lokal, dimana suku $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ hilang (namun bukan turunannya), maka

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= \partial_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial_{\lambda}\left(\partial_{\mu}\partial_{\sigma} g_{\rho\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\rho} g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma} g_{\rho\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\rho} g_{\mu\sigma}\right) \end{aligned} \tag{E.11}$$

jika kita lakukan permutasi pada tiga indeks awal, untuk bentuk kedua dan ketiga memiliki:

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\rho\big(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\lambda}\big)\\
\nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\sigma\big(\partial_\mu\partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho g_{\lambda\mu} + \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\rho}\big)
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Dari (E.12) dan (E.11) jika kita jumlahkan kita dapatkan hubungan

$$\begin{aligned}
&\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}\\
&= \frac{1}{2}\big(\partial_\lambda\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda\partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda\partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\lambda\partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}\\
&\quad + \partial_\rho\partial_\mu\partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho\partial_\nu\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\rho\partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\lambda}\\
&\quad + \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho g_{\lambda\mu} + \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\rho}\big)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Sifat tensor Riemann seperti ini disebut **identitas Bianchi**. Kemudian kita kontraksikan dua kali (E.13), dan dapatkan:

$$\begin{aligned}
0 &= g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}\big(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}\big)\\
&= \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho \mathfrak{R} + \nabla^\nu R_{\rho\nu}\\
&= 2\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho \mathfrak{R}
\end{aligned} \tag{E.14}$$

kemudian bagi persamaan (E.14) dan dapatkan hubungan:

$$\nabla^\mu\big(R_{\rho\mu} - \frac{1}{2}g_{\rho\mu}\mathfrak{R}\big) = 0 \tag{E.15}$$

kita definisikan tensor Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathfrak{R} \tag{E.16}$$

dan kita bisa menulis ulang identitas Bianchi dalam bentuk:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \tag{E.17}$$

E.4 Persamaan Medan Einstein

Persoalan yang dihadapi adalah bagaimana cara mengetahui hubungan antara metrik dengan energi dan momentum. Ide yang diharapkan adalah bahwa keberadaan energi akan melengkungkan ruang-waktu. Dalam merumuskan hubungan itu, kita tinjau persamaan Poisson untuk potensial Newtonian:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{E.18}$$

melihat bentuk persamaan Newtonian, ide dalam perumusan yang relativistik kita ambil:

1. pada sisi kiri persamaan (E.18) mengandung turunan orde dua yang bekerja pada potensial gravitasi dan di sisi kanan adalah ukuran distribusi masa.

2. Untuk memperumum dalam skala relativistik, persamaan harus memiliki bentuk persamaan tensor.

Generalisasi tensor dari rapat masa tidak lain adalah tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$. Karena sedari awal kita membuat ide bahwa energi/massa melengkungkan ruang-waktu, maka kita mengganti potensial gravitasi dengan tensor metrik, karena tensor metrik melambangkan bentuk ruang-waktu. Hal ini sesuai dengan ide no 2, bahwa dalam perumusan tensor, kita melihat bahwa tensor metrik adalah tensor rank 2, yang setara dengan tensor energi-momentum. Hanya saja, ketika kita melakukan limit Newtonian seperti pada halnya persamaan (E.18), dengan persamaan kiri kita ganti potensial gravitasi dengan tensor metrik, kita tahu bahwa turunan dari metrik adalah nol, dengan sifat kompatibilitas metrik pada subbab [2.2.2]. Sehingga kita memerlukan komponen lain yang bergantung pada metrik dan turunannya, dan juga nilainya tidak nol. Sebelumnya kita sudah mengenal tensor Riemann [E.1] dan tensor Ricci [E.2]. Apabila kita ambil tensor Riemann, ini sangat tidak memungkinkan, karena tensor Riemann adalah tensor rank-4, sedangkan kita mencari tensor rank-2. Maka dari itu, kita ambil tensor Ricci yang merupakan tensor rank-2. Sehingga kita ambil persamaan medan gravitasi:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{E.19}$$

Namun, ada persoalan yang muncul jika kita mengambil persamaan (E.19). Berdasar prinsip ekivalensi, kekekalan energi-momentum pada ruang-waktu lengkung haruslah:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{E.20}$$

yang mengharuskan kita memiliki

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \tag{E.21}$$

yang mana tidak valid pada geometri manapun. Maka dari itu, kita tidak dapat mengambil tensor Ricci. Namun di [E.3] kita memiliki tensor rank-2 yang dibangun dari tensor Ricci dan skalar Ricci, yaitu tensor Einstein, yang mana juga memenuhi sifat (E.17). Sehingga kita dapat merumuskan:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{E.22}$$

atau

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{R} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{E.23}$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa adanya energi-momentum memengaruhi kelengkungan ruang-waktu disekitarnya. Apabila kita kontraksi (E.23):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g_{\mu\nu} \big) \\ &= \mathfrak{R} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \kappa \mathfrak{T} \\ R &= -\kappa \mathfrak{T} \end{aligned} \tag{E.24}$$

dengan demikian kita bisa menulis (E.22) dalam bentuk lain:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}g_{\mu\nu}\big) \tag{E.25}$$

Dalam kasus khusus, apabila medan gravitasi sangat lemah, maka ruang-waktu disekitarnya akan melengkung cukup kecil, sehingga kita dapat dekati dengan metrik Minkowski dalam bentuk:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{E.26}$$

dimana $h_{\mu\nu} << 1$. Apabila medan gravitasi tidak bergantung waktu, maka

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{\mu\nu} = 0 \tag{E.27}$$

dengan simbol Christoffel:

$$\Gamma^{\beta}_{00} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(\partial_t g_{0\alpha} + \partial_t g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\partial_\alpha g_{00} \tag{E.28}$$

Dalam medan lemah, partikel bergerak dengan kecepatan rendah. Pada keadaan ini, energi diam $\rho c^2 = T_{00}$ akan mendominasi daripada komponen $T_{\mu\nu}$ lainnya. Sehingga trace dari tensor energi-momentum:

$$\mathfrak{T} = g^{00}T_{00} = -T_{00} \tag{E.29}$$

substitusikan ke (E.25) kita dapatkan:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00} \tag{E.30}$$

Dari definisi tensor Ricci:

$$R_{00} = R^{\lambda}_{0\lambda 0} \tag{E.31}$$

dan karena kita tahu bahwa $R^0_{000} = 0$, maka kita hanya perlu mencari R^i_{0i0}. Kita punya:

$$R^i_{0j0} = \partial_j\Gamma^i_{00} - \partial_t\Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{00} - \Gamma^i_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{j0} \tag{E.32}$$

dan kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
r_{00} &= r^{i}_{0i0} \\
&= \partial_I\Big(\frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00})\Big) \\
&- \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \\
&= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}
\end{aligned}
\tag{E.33}
$$

jika kita ambil $h_{00} = 2\Phi/c^2$, kita dapatkan hubungan

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{2}\kappa\rho c^4 \tag{E.34}$$

kita sandingkan dengan (E.18), kita dapatkan

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{E.35}$$

dan kita dapatkan bentuk persamaan medan Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathfrak{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{E.36}$$

E.5 Komutasi Matriks Gamma

Dari hubungan (3.49) kita miliki

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{E.37}$$

atau

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu \tag{E.38}$$

sehingga kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= 2\eta^{\mu\nu} - 2\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= 2\Big(\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\Big)
\end{aligned}
\tag{E.39}
$$

E.6 Koneksi Affine Spinor

Dalam merumuskan koefisien koneksi, kita ambil

$$\Gamma_\mu = a\omega_{\mu bc}\gamma^b\gamma^c, \tag{E.40}$$

dimana a adalah sebuah konstanta. Maka

$$\Gamma_\mu\gamma^d = a\omega_{\mu bc}\gamma^b\gamma^c\gamma^d \tag{E.41}$$

karena

$$\gamma^c\gamma^d = 2\eta^c d - \gamma^a\gamma^c \tag{E.42}$$

Substitusikan persamaan (E.42) ke (E.40):

$$\Gamma_\mu\gamma^d = a\omega_{\mu bc}\Big(2\eta^{cd}\gamma^b - \gamma^b\gamma^d\gamma^c\Big) \tag{E.43}$$

dengan cara yang sama, kita ambil

$$\gamma^b\gamma^d = 2\eta^{bd} - \gamma^d\gamma^b \tag{E.44}$$

Maka

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu\gamma^d &= a\omega_{\mu bc}\Big(2\eta^{cd}\gamma^b - 2\eta^{bd}\gamma^c + \gamma^d\gamma^b\gamma^c\Big)\\ &= 2a\omega_{\mu bc}\Big(\eta^{cd}\gamma^b - \eta^{bd}\gamma^c\Big) + \gamma^d\Gamma_\mu\end{aligned} \tag{E.45}$$

Kita tinjau suku kedua dalam kurung (E.45) bawah:

$$-2a\omega_{\mu bc}\eta^{bd}\gamma^c \tag{E.46}$$

gunakan sifat antisimetrik dari $\omega_{\mu bc}$, seperti pada (3.62), kita ubah (E.46):

$$-2a\omega_{\mu bc}\eta^{bd}\gamma^c = 2a\omega_{\mu cb}\eta^{bd}\gamma^c \tag{E.47}$$

kita ganti indeks dummy $b \iff c$, persamaan (E.47) kanan menjadi

$$2a\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b \tag{E.48}$$

kita kembalikan ke (E.45):

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu \gamma^d &= 2a\omega_\mu bc\Big(\eta^{cd}\gamma^b + \eta^{cd}\gamma^b\Big) + \gamma^d\Gamma_\mu \\ &= 4a\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b + \gamma^d\Gamma_\mu \end{aligned} \tag{E.49}$$

Menggunakan persamaan (3.57), kita bentuk turunan kovarian dari matriks gamma:

$$\begin{aligned} D_\mu\tilde{\gamma}^\nu &= \nabla_\mu\tilde{\gamma}^\nu + [\Gamma_\mu, \tilde{\gamma}^\nu] \\ &= \tilde{\gamma}^\nu_{\ ,\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\tilde{\gamma}^\lambda + \Gamma_\mu\tilde{\gamma}^\nu - \tilde{\gamma}^\nu\Gamma_\mu = 0 \end{aligned} \tag{E.50}$$

dengan sifat (3.48), kita miliki

$$\gamma^a\nabla_\mu e_a^{\ \nu} + e_a^{\ \nu}\Gamma_\mu\gamma^a - e_a^{\ \nu}\gamma^a\Gamma_\mu = 0 \tag{E.51}$$

Kita substitusikan (E.49) ke (E.51):

$$\gamma^d\nabla_\mu e_d^\nu + 4ae_d^\nu\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b = 0 \tag{E.52}$$

dengan sifat antisimetri $\omega_{\mu bc}$,

$$\begin{aligned} \gamma^d\nabla_\mu e_d^\nu - 4ae_d^\nu\omega_{\mu cb}\eta^{cd}\gamma^b &= 0 \\ \gamma^d\nabla_\mu e_d^\nu &= 4ae_d^\nu\omega_{\mu cb}\eta^{cd}\gamma^b \\ &= 4ae_d^\nu\Big(e_{c\beta}\nabla_\mu e_b^{\ \beta}\Big)\eta^{cd}\gamma^b \\ &= 4ae_d^\nu e^d_{\ \beta}\Big(\nabla_\mu e_b^{\ \beta}\Big)\gamma^b \\ &= 4a\delta^\nu_\beta\Big(\nabla_\mu e_b^{\ \beta}\Big)\gamma^b \\ &= 4a\gamma^b\nabla_\mu e_b^{\ \nu} \end{aligned} \tag{E.53}$$

Agar persamaan (E.53) kiri dan kanan sama, maka kita dapatkan $a = 1/4$.

E.7 Antikomutasi Matriks Gamma

Kita memiliki bentuk persamaan Dirac (3.47):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{E.54}$$

operasikan dengan $i\gamma^\mu\partial_m u + m$,

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = 0\\ (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = 0\end{aligned} \tag{E.55}$$

kita bentuk persamaan yang sama, dengan menukar $\mu \iff \nu$,

$$(\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = 0 \tag{E.56}$$

kemudian kita jumlahkan (E.55) dan (E.56), didapat:

$$\left[\left(\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\partial\mu\partial\nu\right) + 2m^2\right]\psi = 0 \tag{E.57}$$

kemudian (E.57) dibagi dengan 2:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\partial\mu\partial\nu\right) + m^2\right]\psi = 0 \tag{E.58}$$

Kita bandingkan dengan persamaan Klein-Gordon

$$\begin{aligned}\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\psi = 0\\ \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi = 0\end{aligned} \tag{E.59}$$

karena $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$, maka

$$\left[\frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right)\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right]\psi = 0 \tag{E.60}$$

dan kita dapatkan hubungan:

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right) = \eta^{\mu\nu} \tag{E.61}$$

atau

$$\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 2\eta^{\mu\nu} \tag{E.62}$$

E.8 Fungsi Bessel

Fungsi Bessel merupakan salah satu jari fungsi khusus yang merupakan solusi dari persamaan diferensial.Fungsi Bessel dapat direpresentasikan dalam deret pangkat, grafiknya dapat digambar dan banyak formula yang berkaitan dengannya. Bentuk persamaan diferensial Bessel yang memiliki solusi fungsi Bessel adalah:

$$r^2R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0 \tag{E.63}$$

dimana k dan n adalah sebuah konstanta, dan n disebut orde dari fungsi Bessel. Nilai n tidaklah harus bilangan bulat. Dalam menyelesaikan persamaan diferensial itu, kita ambil deret pangkat:

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p} \tag{E.64}$$

dan memiliki hubungan

$$\begin{aligned} r^2R'' &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+p)(i+p-1)x^{i+p} \\ rR' &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(i+p)x^{i+p} \\ k^2r^2R &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+p+2} \\ -n^2R^{=} &- \sum_{i=0}^{\infty} a_i n^2 r^{i+p} \end{aligned} \tag{E.65}$$

Dari hubungan ini, kita dapat membentuk persamaan (E.63) menjadi

$$a_0\left(p^2 - n^2\right)r^p + a_1\left((1+p)^2 - n^2\right)r^{p+1} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(a_i\left((i+p)^2 - n^2\right)\right.$$
$$\left. + a_{i-2}\right)r^{i+p} = 0 \tag{E.66}$$

Dikarenakan $x^{i+p} \neq 0$, maka suku di depan r^{i+p} haruslah nol. Dengan demikian, memberitahu kita bahwa:

$$\begin{aligned} p^2 - n^2 &= 0 \\ p^2 &= n^2 \\ p &= \pm n \end{aligned} \tag{E.67}$$

selain itu, agar memenuhi persamaan diatas, jika diambil nilai $p = \pm n$, suku didepan $r^p + 1$

$$(1 \pm n)^2 - n^2 = 1 \pm 2n + n^2 - n^2 \neq 0 \tag{E.68}$$

yang mengharuskan kita memilih bahwa $a_1 = 0$. Begitupula dengan suku dalam jumlahan

$$a_i\left((i+p)^2 - n^2\right) + a_{i-2} = 0 \tag{E.69}$$

yang memberikan kita hubungan

$$a_i = -a_{i-2}\frac{1}{(i+p)^2 - n^2} \tag{E.70}$$

untuk kasus pertama, kita ambil $p = +n$, maka (E.70) menjadi:

$$\begin{aligned} a_i &= -a_{i-2}\frac{1}{(i+n)^2 - n^2} \\ &= -a_{i-2}\frac{1}{(i^2+2in)} \\ &= -a_{i-2}\frac{1}{i(i+2n)} \end{aligned} \tag{E.71}$$

Karena sebelumnya kita mendapati bahwa a_1 nol, maka dengan hubungan (E.68), untuk nilai $i = 3, 5, 7, ..$ yang merupakan bilangan ganjil membutuhkan nilai a_1 yang bernilai nol, maka suku ganjil dari a_i haruslah nol. Sehingga, suku a_i yang tersisa hanyalah yang memiliki i genap. Kita ubah $i \rightarrow 2i$ yang pasti genap, maka (E.68) menjadi:

$$\begin{aligned} a_{2i} &= -a_{2i-2}\frac{1}{2i(2i+2n)} \\ &= -a_{2i-2}\frac{1}{2^2 i(i+n)} \end{aligned} \tag{E.72}$$

dengan demikian kita memiliki relasi

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0\frac{\Gamma(1+n)}{2^2\Gamma(2+n)} \\ a_4 &= a_0\frac{\Gamma(1+n)}{2!2^4\Gamma(3+n)} \\ a_6 &= -a_0\frac{\Gamma(1+n)}{3!2^6\Gamma(4+n)} \end{aligned} \tag{E.73}$$

dan seterusnya. Sehingga, kita dapatkan solusi dari persamaan Bessel (E.63):

$$R = a_0 r^n \Gamma(1+n)\Big[\frac{1}{\Gamma(1+n)} - \frac{1}{\Gamma(2+n)}\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\Gamma(3+n)}\left(\frac{r}{2}\right)^4 - ...\Big] \tag{E.74}$$

Apabila kita ambil:

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{E.75}$$

maka solusi R disebut dengan fungsi Bessel jenis pertama dengan orde n, $J_n(r)$,

$$J_n(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(i+n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2i+n} \tag{E.76}$$

Untuk kasus kedua dari (E.67), apabila kita ambil $p = -n$, maka:

$$\begin{aligned} a_i &= -a_{i-2} \frac{1}{(i+n)^2 - n^2} \\ &= -a_{i-2} \frac{1}{(i^2 - 2in)} \\ &= -a_{i-2} \frac{1}{i(i-2n)} \end{aligned} \tag{E.77}$$

Karena sebelumnya kita mendapati bahwa a_1 nol, maka dengan hubungan (E.71), untuk nilai $i = 3, 5, 7, ..$ yang merupakan bilangan ganjil membutuhkan nilai a_1 yang bernilai nol, maka suku ganjil dari a_i haruslah nol. Sehingga, suku a_i yang tersisa hanyalah yang memiliki i genap. Kita ubah $i \to 2i$ yang pasti genap, maka (E.77) menjadi:

$$\begin{aligned} a_{2i} &= -a_{2i-2} \frac{1}{2i(2i - 2n)} \\ &= -a_{2i-2} \frac{1}{2^2 i(i-n)} \end{aligned} \tag{E.78}$$

dengan demikian kita memiliki relasi

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\Gamma(1-n)}{2^2\Gamma(2-n)} \\ a_4 &= a_0 \frac{\Gamma(1-n)}{2!2^4\Gamma(3-n)} \\ a_6 &= -a_0 \frac{\Gamma(1-n)}{3!2^6\Gamma(4-n)} \end{aligned} \tag{E.79}$$

Apabila kita ambil:

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{E.80}$$

Kita definisikan fungsi Bessel jenis kedua, fungsi Neumann, $N_n(r)$,

$$N_n(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(i-n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2i-n} = J_{-n}(r) \tag{E.81}$$

Jadi, solusi persamaan diferensial Bessel (E.63) memiliki solusi fungsi Bessel $J_n(r)$ atau fungsi Neumann $N_n(r)$, atau kombinasi linear dari keduanya. Kemudian, kita tinjau, apabila suatu persamaan diferensial memiliki bentuk:

$$r^2 R'' + rR' + (k^2r^2 - n^2)R = 0 \tag{E.82}$$

untuk menyelesaikannya, kita substitusikan $r \to kr$ sehingga, $rdR/dr \to krdR/d(kr)$, yang nilainya sama saja. Begitu pula, kita substitusi $r^2 - n^2 \to k^2r^2 - n^2$, yang memiliki bentuk sama persis (E.63). Sehingga persamaan (E.82) memiliki solusi

$$R = AJ_n(kr) + bN_n(kr) \tag{E.83}$$

Selain itu, kita memiliki jenis lain dari fungsi Bessel, yaitu fungsi Bessel bola, yang memiliki bentuk

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - n(n-1)]R = 0 \tag{E.84}$$

untuk menyelesaikannya, kita ambil nilai R,

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}} \tag{E.85}$$

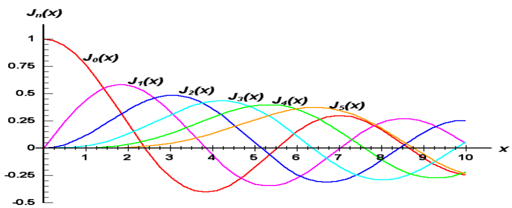
dimana $Z(kr)$ bisa beruka $J(kr)$ atau $N(kr)$ yang merupakan solusi dari persamaan Bessel. Apabila kita substitusikan (E.85) ke (E.63), kita dapatkan

$$r^2 Z'' + rZ' + [r^2 - (n + 1/2)^2]Z = 0 \tag{E.86}$$

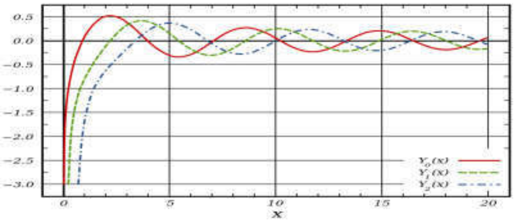
yang merupakan bentuk fungsi Bessel (E.63). Sehingga kita dapatkan $R(kr)$ yaitu fungsi Bessel bola, $z_n(kr)$, dengan definisi

$$\begin{aligned} z_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(kr)^{-1/2} Z_{n+1/2}(kr) \\ j_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(kr)^{-1/2} J_{n+1/2}(kr) \\ n_n(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(kr)^{-1/2} N_{n+1/2}(kr) \end{aligned} \tag{E.87}$$

Dari persamaan (E.76), kita bisa memplot fungsi Bessel:



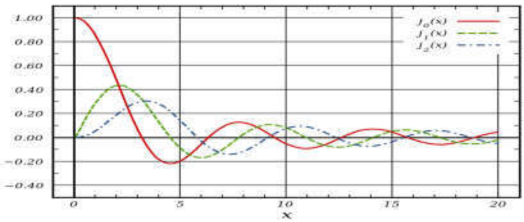
Gambar E.2: Fungsi Bessel



Gambar E.3: Fungsi Neumann

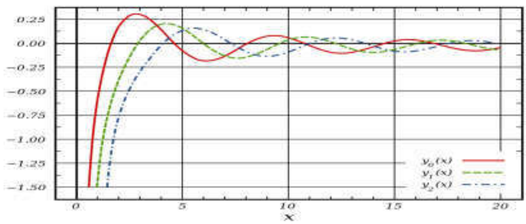
begitupula untuk fungsi Neumann, N_n atau Y_n

dapat diplot juga fungsi Bessel bola:



Gambar E.4: Fungsi Bessel bola

dan fungsi Neumann bola:



Gambar E.5: Fungsi Neumann bola

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Gutivan Alief Syahputra lahir di Ponorogo tahun 1997. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN 1 Bangunsari, SMPN 1 Ponorogo, SMAN 1 Ponorogo, dan kuliah di Departemen Fisika ITS. Penulis mengambil bidang minat di fisika teori. Penulis masuk ITS melalui jalur SNMPTN pada tahun 2015. Selama perkuliahan penulis aktif menjadi asisten laboratorium fisika dasar, asisten laboratorium laboratorium fisika modern dan optik(fisika madya), asisten laboratorium optoelektronika, asisten dosen fisika dasar dan asisten dosen kalkulus. Penulis juga aktif di organisasi UKM Catur ITS sebagai kepala departemen PSDK dan sebagai dewan penasehat, di UKM ITS Astronomy Club sebagai ketua dan di Lembaga Minat Bakat ITS sebagai Staff Ahli. Penulis juga telah mengikuti berbagai pelatihan akademik maupun nonakademik. penulis juga mengikuti olimbiade ONMIPA PT (KNMIPA) 2018-2020.