TUGAS AKHIR – KM 184801

SIFAT-SIFAT GRAF NON KOMUTATIF PADA GRUP DIHEDRAL D_{2n}

AHMAD MUHAJIR
NRP 06111540000087

Dosen Pembimbing
Soleha, M.Si.

Departemen Matematika
Fakultas Sains Dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM 184801

THE NON-COMMUTING GRAPH'S PROPERTIES OF DIHEDRAL GROUP D_{2n}

AHMAD MUHAJIR
NRP 06111540000087

Supervisors
Soleha, M.Si.

Mathematics Department
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute Of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

SIFAT-SIFAT GRAF NON-KOMUTATIF PADA GRUP DIHEDRAL D_{2n}

THE NON-COMMUTING GRAPH'S PROPERTIES IN DIHEDRAL GROUP D_{2n}

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Analisis Aljabar
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
AHMAD MUHAJIR
NRP. 06111540000087

Menyetujui,

DosenPembimbing,

Soleha, M.Si
NIP. 19830107 200604 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

Surabaya, …………

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
DEPARTEMEN MATEMATIKA

SIFAT-SIFAT GRAF NON-KOMUTATIF PADA GRUP DIHEDRAL D_{2n}

Nama Mahasiswa	: Ahmad Muhajir
NRP	: 06111540000087
Departemen	: Matematika
Dosen Pembimbing	: Soleha, M.Si

Abstrak

Salah satu perkembangan dari struktur aljabar adalah penelitian tentang graf yang dibangun dari suatu grup. Pada penelitian yang diajukan ini, akan dibahas kajian tentang grup, graf non-komutatif dan grup dihedral D_{2n} *berikut sifat-sifatnya. Metode yang diajukan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka dengan menggunakan rujukan beberapa buku, paper dan jurnal.*

Graf non-komutatif adalah graf sederhana Γ_G *yang dikaitkan kepada grup G, dimana* $V(\Gamma_G)$ *adalah* $G\backslash Z(G)$ *, dengan* $Z(G)$ *adalah senter dari G.* $E(\Gamma_G)$ *adalah semua pasangan (x,y) dengan* $xy \neq yx, \forall\, x, y \in G$*. Pada suatu graf* Γ_G *dapat diselidiki sifat-sifat keterhubungan, diameter, lingkar, nilai eigen dan energi graf.*

Lebih lanjut, akan didapatkan nilai eigen dan energi graf dari graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup dihedral D_{2n}*. Nilai eigen untuk* n *gasal adalah* $\lambda = 0$ *dengan multiplisitas* $(n-2)$*,* $\lambda = -1$ *dengan multiplisitas* $(n-1)$*, dan* $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$*. Sedangkan nilai eigen untuk* n *genap dan* $n > 4$ *adalah* $\lambda = 0$ *dengan multiplisitas* $(n-2)$*,* $\lambda = -1$ *dengan multiplisitas* $(n-1)$*, dan* $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$*.*

Kata kunci: *graf non-komutatif; grup dihedral* D_{2n}*; nilai eigen.; energi graf.*

THE NON-COMMUTING GRAPH'S PROPERTIES IN DIHEDRAL GROUP $\boldsymbol{D_{2n}}$

Name of Student	: Ahmad Muhajir
NRP	: 06111540000087
Departement	: Mathematics
Supervisors	: Soleha, M.Si

Abstract

One development of algebraic structure is the study of graphs that are built from a group. In this proposed research, a study of groups, non-commutative graphs and the dihedral group D_{2n} *will be discussed along with their properties. The method proposed in this study is a literature review using a reference to several books, journals and papers.*

Non-commutative graphs are simple graphs Γ_G *which is attached to* G *group, where the* $V(\Gamma_G)$ *is* $G\backslash Z(G)$, *with* $Z(G)$ *is center of* G. $E(\Gamma_G)$ *is all couples* (x, y) *with* $xy \neq yx$, $\forall\ x, y \in G$. *On a graph* Γ_G *we can investigate the relationship characteristics, diameter, circle, eigenvalues and graph energy.*

Furthermore, we will discuss the eigenvalues and graph energy of non-commutative graphs that are associated with dihedral groups D_{2n}. *The eigenvalue for n odd is* $\lambda = 0$ *with multiplicity* $(n-2)$, $\lambda = -1$ *with multiplicity* $(n-1)$, *and* $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$. *Whereas the eigenvalue for even n and* $n > 4$ *is* $\lambda = 0$ *with multiplicity* $(n-2)$, $\lambda = -1$ *with multiplicity* $(n-1)$, *and* $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$.

Keywords: *non-commuting graph; dihedral group* D_{2n}*; eigenvalue;energy graph.*

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena dengan limpahan rahmat, taufiq, dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul

"SIFAT-SIFAT GRAF NON-KOMUTATIF PADA GRUP DIHEDRAL D_{2n} "

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Sholawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal tersebut, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Subchan, Ph.D selalu Kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi S1 Departemen Matematika ITS.
3. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku Sekretaris Program Studi S1 Departemen Matematika ITS.
4. Ibu Soleha, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah membimbing penulis dengan penuh kesabaran dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
5. Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si, ibu Dr. Dra. Rinurwati, M.Si, dan bapak Dr. Darmaji, S.Si, M.T, selaku Dosen Penguji Tugas Akhir.
6. Bapak. Prof. Subiono, dan Prof. Isa Irawan selaku Dosen Wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.
7. Seluruh jajaran dosen dan staf Departemen Matematika ITS.

8. Abi, umi, mas Hadi dan adek Diyah beserta keluarga Bin Yasin dan Bani Musthofa, yang senantiasa memberikan dukungan dan do'a dengan tulus.
9. KH Masykur Hafidz dan KH Much Imam Chambali selaku *Murobbi Ruh.*
10. Teman-teman UKM Rebana ITS, LDJ Ibnu Muqlah, Matematika ITS angkatan 2015, teman se-jurusan yang telah membantu dalam pengerjaan tugas-tugas kuliah, Koloni Kecoa, segenap *crew* CAK Record, Sobat Glewo dan teman-teman Santri Ponpes Al-Jihad.
11. Lailatul Mufarrihah, yang selalu menyemangati setiap proses penulisan tugas akhir ini.
12. Hafidh Dhihas Okaviananda, selaku *partner* penulis yang selalu siap membantu dan mengarahkan penulis selama proses pembuatan Tugas Akhir ini.
13. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 27 Juli 2020

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar belakangi penulisan tugas akhir ini. Kemudian didapatkan rumusan masalah yang kemudian jawaban dari rumusan masalah tersebut ada pada subbab tujuan. Selain itu terdapat hal-hal yang membatasi masalah pada subbab batasan. Pada bab ini juga dijelaskan manfaat dan sistematika penulisan.

1.1 Latar Belakang

Pada dasarnya, manusia sudah mengenal perhitungan matematika sejak kecil. Salah satu buktinya adalah perhitungan dasar, yakni penjumlahan dan pengurangan, sebagai contoh menghitung jumlah jari yang ada pada kedua tangan maupun kedua kaki, hingga menghitung selisih antara tanggal tertentu dengan hari ini atau hari pada saat menghitung tersebut. Perhitungan tersebut tidaklah berbeda dengan perhitungan bilangan bulat dan bilangan riil, yaitu dengan menyertakan operator penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, hingga perpangkatan dan akarnya. Perhitungan-perhitungan tersebut pasti melibatkan himpunan dan operasi tertentu yang menjadi dasar bagi para ilmuwan merumuskan struktur aljabar.

Struktur Aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari perilaku anggota yang tergabung pada himpunan tertentu yang dikenakan operasi tertentu. Himpunan-himpunan yang dibahas dalam struktur aljabar ini bersifat umum. Begitu pula operator yang digunakan bukan hanya operator dasar yang digunakan dalam kehidupan sehari hari saja, namun juga mencakup sebarang operator yang dapat didefinisikan sendiri untuk suatu himpunan dengan karakteristik tertentu [1].

Dalam struktur aljabar, terdapat banyak struktur dengan aksioma dan operator yang bermacam-macam. Salah satu struktur yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah tentang graf. Graf merupakan kumpulan dari simpul yang dihubungkan oleh sebuah sisi sebagai penghubung. Sebuah graf H yang mempunyai sebuah sisi dari simpul *A* ke simpul *B* sama dengan sisi dari simpul *B* ke simpul *A* disebut graf tak berarah. Untuk graf berarah, sisi tersebut memiliki arah, sehingga untuk sisi dari simpul *A* ke simpul *B* tidak sama dengan sisi dari simpul *B* ke simpul *A* [2,3].

Kajian tentang Struktur aljabar, dengan sifat-sifat graf, menjadi topik penelitian yang cukup menarik bagi kalangan orang matematika. Fakta ini mengarah pada banyak hasil dan penemuan menarik dari pertanyaan-pertanyaan yang diajukan oleh para peneliti. Ada banyak jurnal yang menjelaskan tentang penetapan suatu graf pada sebuah grup, serta menyelidiki sifat aljabar dari grup tersebut.

Secara teori, graf H adalah pasangan $(V(H), E(H))$ dengan $V(H)$ adalah himpunan tak kosong berhingga dari objek-objek yang dinamakan simpul, dan $E(H)$ adalah himpunan (berkemungkinan kosong) pasangan tak berurutan dari simpul-simpul berbeda di $V(H)$ yang dinamakan sisi [3].

Salah satu peneliti yang mengembangkan teori graf aljabar aljabar adalah Abdollahi, yang mendefinisikan graf non-komutatif yaitu graf sederhana Γ_G yang dikaitkan kepada grup *G*, dimana himpunan simpulnya beranggotakan elemen dari $G \backslash Z(G)$, dengan $Z(G)$ adalah senter dari *G*. $E(\Gamma_G)$ adalah semua pasangan (*x*,*y*) dengan $xy \neq yx$, $\forall\ x, y \in G$. Pada setiap Γ_G dapat diselidiki sifat-sifat keterhubungan, diameter, lingkar, nilai eigen dan energi graf tersebut.

Salah satu hasil penelitian dari aljabar graf adalah paper yang ditulis oleh Rabiha Mahmoud, Nor Haniza Sarmin, Ahmad Erfanian dengan judul *On the energy of non-commuting graph of dihedral groups* pada tahun 2017 yang menjadi pembahasan terbaru dari struktur aljabar. Paper tersebut membahas tentang graf non-komutatif pada grup dihedral D_{2n} [6]. Pada paper tersebut dikaji mengenai sifat-sifat graf $\Gamma_{D_{2n}}$ terkait nilai eigen dan energi grafnya dengan pengelompokan berdasarkan nilai *n* gasal dan *n* genap [6].

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dapat diperoleh perumusan masalah berupa

1. Bagaimana menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n \geq 3$, dan n gasal?
2. Bagaimana menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap?
3. Bagaimana menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n \geq 3$, dan n gasal?
4. Bagaimana menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$ dan n genap?
5. Bagaimana menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4$?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, didapat tujuan sebagai berikut

1. Menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal.
2. Menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap.
3. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal.
4. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap.
5. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4$.

1.4 Manfaat

Manfaat yang diharapakan yaitu

1. Sebagai bahan acuan pembelajaran matematika bidang aljabar, lebih spesifiknya yang membahas tentang grup dihedral D_{2n} dan graf non-komutatif.
2. Memperluas pengetahuan tentang graf non-komutatif sehingga dapat dikembangkan lagi ataupun diterapkan pada ilmu yang membutuhkan pemahaman tentang graf non komutatif

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari penulisan ini yang meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini berisi tentang materi-materi pendukung, antara lain penelitian terdahulu, grup, grup dihedral D_{2n}, graf, dan graf non komutatif.

3. BAB III METODOLOGI PENELITIAN
   Pada bab ini berisi pembahasan tentang langkah-langkah yang digunakan mulai dari studi literatur hingga penarikan kesimpulan dan pembukuan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini berisi penjelasan secara rinci mengenai pembuktian proposisi dan teorema yang disampaikan oleh Rabiha Mahmoud, Nor Haniza Sarmin, Ahmad Erfanian dalam papernya yang berjudul *on the energy of non-commuting graph of dihedral groups*.

5. BAB V PENUTUP
   Pada bab ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan. Kemudian, berdasarkan penelitian tersebut, diberikan saran yang perlu dilakukan untuk penelitian berkaitan yang akan datang.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai dasar teori yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini. Dasar teori yang dijelaskan dibagi menjadi beberapa subbab yaitu penelitian terdahulu, grup, grup dihedral, graf, graf non-komutatif, matriks ketetanggaan, nilai eigen dan energi graf.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam aljabar abstrak, sebuah definisi sebuah graf dari suatu grup lengkap dengan sifat-sifatnya telah dipublikasikan oleh A. Abdollahi Bersama dengan S. Akbari and H. R. Maimani dalam jurnalnya yang berjudul *Non-commuting graph of a group-Journal of Algebra* pada tahun 2006. Dalam jurnalnya dijelaskan hubungan antara sebuah grup berhingga dengan graf, yaitu diambil dari elemen grup selain senter dari grup tersebut untuk dijadikan simpul-simpul dari graf. Dan untuk sisi dari graf adalah diambil dari hubungan non-komutatif antar elemen. Oleh karenanya graf tersebut disebut graf non-komutatif. Selain itu, juga dtambahkan definisi energi graf dari graf non-komutatif lengkap dengan contohnya.

Terdapat banyak grup berhingga khusus dengan sifat-sifat tertentu yang telah didefinisikan oleh banyak matematikawan diantaranya adalah grup permutasi, grup simetri, grup dihedral, dan masih banyak lainnya.

Terdapat beberapa penelitian dari graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup berhingga diatas, salah satunya paper dengan judul *On the energy of non-commuting graph of dihedral groups* pada tahun 2017 yang dipublikasikan oleh Rabiha Mahmoud, Nor Haniza Sarmin dan Ahmad Erfanian. Dalam papernya dibahas tentang matriks ketetangaan, nilai eigen, dan energi graf dari graf non-komutatif dari grup dihedral. Dalam paper tersebut diberikan proposisi-proposisi dan teorema dari graf non-komutatif dari grup dihedral, yang akan dibahas pada tugas akhir ini dengan beberapa perbedaan dari yang ada pada hasil paper tersebut.

2.2 Grup

Konsep dasar dari grup diambil dari himpunan yang dikenakan suatu operasi tertentu.

Definisi 2.1 [1] *Suatu himpunan tidak kosong G dengan suatu operasi biner (*) di dalamnya, disebut Grup, dengan notasi (G,*) jika dan hanya jika dapat memenuhi 4 aksioma grup, yaitu:*

a) *Tertutup, yaitu untuk setiap* $a, b \in G$ *berlaku* $a * b \in G$.
b) *Asosiatif, yaitu untuk setiap* $a, b, c \in G$ *berlaku* $a * (b * c) = (a * b) * c$.
c) *Identitas, yaitu terdapat suatu anggota* $e \in G$ *sedemikian hingga untuk semua* $g \in G$ *berlaku* $g * e = g = e * g$. *Anggota e dinamakan anggota identitas di* G.
d) *Invers, yaitu untuk setiap* $g \in G$ *terdapat anggota* $g^{-1} \in G$ *yang memenuhi* $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$.

jika diberikan suatu grup, maka dapat dibentuk suatu subgrup dari grup tersebut. Berikut dibahas definisi dari subgrup.

Definisi 2.2 [1] *Suatu himpunan bagian tak-kosong F dari suatu grup G adalah suatu subgrup dari G, dalam hal ini ditulis F terhadap operasi yang sama di G adalah grup. Dalam hal ini, subgrup ditulis* $F \leq G$*, bila himpunan* $F \subseteq G$ *dan ditulis* $F < G$*, bila himpunan* $F \subset G$.

Untuk sebarang grup G dengan anggota identitas e, $\{e\}$ adalah subgrup dari G dinamakan trivial subgrup dan G sendiri adalah subgrup dari G dinamakan subgrup tak-sejati. Sebarang subgrup selain $\{e\}$ dan G sendiri dinamakan subgrup sejati tak-trivial.
Contoh : $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$.

Definisi 2.3 [1] *Diberikan sebarang grup G, maka terdapat himpunan bagian dengan notasi $Z(G)$ yang disebut senter dari G, yang elemen-elemennya komutatif terhadap semua elemen di G.*

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G | xy = yx, untuk\ semua\ y \in G\}.$$

Catatan bahwa $ex = x = xe, \forall y \in G$. Maka $e \in Z(G)$, dengan demukian $Z(G) \neq \emptyset$.

Contoh : Diberikan grup $S_3 = \{e, (123), (132), (12), (13), (23)\}$ dengan operasi biner permutasi, maka $\exists e \in S_3$, sehingga $ex = x = xe$ dengan $x \in S_3$. Dengan demikian $Z(S_3) = \{e\}$.

2.2.1 Grup Permutasi dan Grup Simetri

Diberikan himpunan tak kosong *B*. Permutasi dari *B* adalah fungsi dari *B* ke *B* yang berkorespondensi satu-satu.

Contoh : Diberikan sebuah permutasi β dari himpunan $B = \{1,2,3\}$ dengan menetapkan $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 3$, dan $\beta(3) = 1$.

Untuk menunjukkan korespondensi tersebut, permutasi β dapat ditulis dengan bentuk seperti berikut:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta(1) & \beta(2) & \beta(3) \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutasi komposisi dari $\beta \circ \alpha$ dengan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

adalah :

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Atau dapat dijelaskan dengan $(\beta \circ \alpha)(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(2) = 4$, jadi $\beta\alpha$ merubah 1 menjadi 4, dan seterusnya. Permutasi tersebut dapat ditulis dengan (431) yang dinamakan bentuk *sikel*.

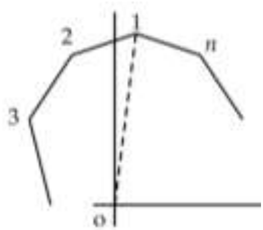
Grup permutasi adalah grup yang anggotanya adalah suatu permutasi dari himpunan tak kosong. Sedangkan Grup simetri adalah suatu grup yang anggotanya adalah semua permutasi dari suatu himpunan tak kosong.

Contoh :

Grup simetri S_3, yaitu himpunan permutasi yang mungkin dari $\{1,2,3\}$. $S_3 = \{(\ ), (123), (132), (12), (13), (23)\}$.

2.2.2 Grup Dihedral D_{2n}

Grup dihedral D_{2n} dapat juga diartikan sebagai himpunan hasil himpunan permutasi pencerminan dan refleksi dari grup simetri untuk segi-n beraturan. Misalkan untuk $n \geq 3$, segi-n beraturan pada bidang-x, y dengan pusat di O sebagaimana pada gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1 segi-n beraturan.

Misalkan a adalah rotasi pada titik pusat O berlawanan arah jarum jam sebesar $2\pi/n$ radian, dan b adalah pencerminan terhadap sumbu yang melalui titik 0 dan titik sudut 1, maka didapatkan :

$$D_{2n} = \{a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$$

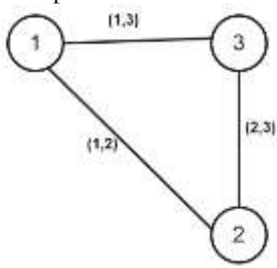
dimana a^0 adalah elemen identitas dan $ab = ba^{-1}$.
Grup $\boldsymbol{D_{2n}} \leq \boldsymbol{S_n}$, karena $\boldsymbol{S_n}$ adalah grup dengan anggota seluruh permutasi dari himpunan dengan jumlah anggota sebanyak $n!$, sedangkan $\boldsymbol{D_{2n}}$ adalah grup dengan anggota permutasi simetri dari himpunan dengan jumlah anggota sebanyak $2n$.
Contoh : $\boldsymbol{D_{2\times 3}} = \boldsymbol{D_6} = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a^2}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{ab}, \boldsymbol{a^2 b}\}$.

Jumlah anggota dari grup dinamakan *order grup*. Oleh karena order grup dihedral adalah berhingga, maka grup dihedral adalah grup berhingga. Berikut adalah defnisi dari order grup.

Definisi 2.3 [1] *Banyaknya anggota dari grup G dinamakan order G dan dinotasikan oleh $|G|$. Grup G dikatakan berhingga jika $|G|$ berhingga.*
Jadi $\mathbb{Z}$ dan $n\mathbb{Z}$ adalah grup dengan order tak-berhingga, sedangkan S_3, D_8 dan $\mathbb{Z}_n$ adalah grup dengan order berhingga.

2.3 Graf

Suatu graf H, dinotasikan sebagai $H = (V.E)$, merupakan pasangan *V* adalah himpinan simpul, dan *E* adalah himpunan sisi, dengan *V* himpunan simpul tak kosong dan *E* merupakan himpunan sisi. [3]
Sifat aljabar dari suatu graf dapat dikatakan sebagai sifat graf.
Contoh : diberikan sebuah graf lengkap $K_3 = (V, E)$, dengan $V = \{1,2,3\}$ dan $E = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$.
Graf K_3 dapat digambar seperti berikut :



Gambar 2.2 Graf K_3.

2.3.1 Keterhubungan

Dua simpul dikatakan terhubung/bertetangga, jika terdapat sisi yang menghubungkan antara keduanya secara langsung. Dalam graf tidak berarah, sebuah sisi dari simpul *A* ke simpul *B* dianggap sama dengan garis dari simpul *B* ke simpul *A*. Dalam graf berarah, garis tersebut memiliki arah.

Keterhubungan setiap simpul pada suatu graf dapat direpresentasikan sebagai suatu matriks, yang selanjutnya disebut matriks ketetanggaan. [3]

Definisi 2.4 [3] *Diberikan graf sederhana H yaitu graf yang tidak memuat loop dengan* $V(H) = \{1, \dots, n\}$ *dan* $E(H) = \{e_1. \dots . e_m\}$. *Matriks ketetanggaan dari H dinotasikan dengan* $A(H)$ *yaitu matriks simetri* $n \times n$ *dengan definisi sebagai berikut.*
Baris dan kolom dari $A(H)$. *jika* $i \neq j$ *maka entri ke-(i,j) dari* $A(H)$ *adalah 0 untuk simpul i dan j yang tak bertetangga, dan entri ke-(i,j) adalah 1 untuk i dan j bertetangga. Entri ke-(i,i) dari* $A(H)$ *adalah 0 untuk i=1,…,n..*

Untuk mencari nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari *H* adalah sebagai berikut :

$$det(A(H) - \lambda I) = 0.$$

Contoh : Keterhubungan dari graf K_3 dapat direpresentasikan dengan matriks ketetanggaan berikut :

$$A(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dan nilai eigennya adalah :

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} &= \lambda(\lambda^2 - 1) + 1(-\lambda - 1) - 1(1 + \lambda) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Didapat $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

2.3.2 Diameter graf

Lintasan yang panjangnya *n* dari simpul awal v_1 ke simpul tujuan v_n di dalam graf H ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf H .

Diberikan graf H dengan $V(H) = \{1, \ldots, n\}$ dan $E(H) = \{e_1. \ldots . e_m\}$, maka jarak $d(i,j)$ adalah lintasan terpendek dari simpul i menuju ke j . Nilai maksimum dari $d(i,j)$ untuk setiap $i,j \in V(H)$ adalah diameter dari graf H [3].

Contoh : diameter dari graf K_3 adalah 1.

2.3.3 Rank matriks

Rank matriks adalah banyaknya vektor baris atau vektor kolom yang bebas linier. Rank matriks dapat juga diperoleh dari banyaknya nilai eigen tak nol.

Contoh : nilai eigen dari $A(K_3)$ adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, maka rank $A(K_3) = 3$

2.3.4 Lingkar (*Girth*)

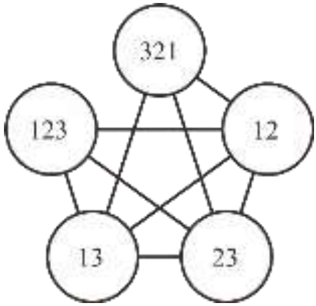
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut siklus. Lingkar dari suatu graf adalah panjang siklus terpendek yang termuat dalam graf [3].

Contoh : lingkar dari graf K_3 adalah 3.

2.3.5 Graf non-komutatif

Graf non-komutatif adalah graf sederhana Γ_G yang dikaitkan kepada grup G, dimana himpunan simpulnya adalah $G \backslash Z(G)$, dengan *Z(G)* adalah senter dari $G.E(\Gamma_G)$ *adalah semua pasangan (x,y) dengan* $xy \neq yx$, $\forall\, x, y \in G$, dengan kata lain, x bertetangga dengan y jika x dan y tidak komutatif. Graf ini dinamakan graf non-komutatif dari G [4].

Contoh : $\Gamma_{S_3} = \{(123), (321), (12), (13), (23)\}$



Teorema 2.1 [4] *Jika* G *merupakan grup komutatif, maka* Γ_G *merupakan graf kosong.*
Bukti. Diberikan G grup komutatif maka setiap anggota dari G saling komutatif, sehingga $G = Z(G)$, padahal $V(\Gamma_G) = G/Z(G) = \emptyset$, sehingga Γ_G merupakan graf kosong.

Teorema 2.2. [4] *Untuk sebarang grup non-komutatif* G, $diam(\Gamma_G) = 2$. *Selain itu,* Γ_G *terhubung, juga lingkar*$(\Gamma_G) = 3$.

2.3.6 Energi graf

Definisi 2.5 [4] *Diberikan sebarang graf* H, ***energi graf*** *didefinisikan dengan:*

$$\varepsilon(H) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Dengan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *adalah nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari* H.

Contoh :

Diberikan $D_6 = \{e, a,\ a^2, b, ab,\ a^2b\ \}$ merupakan grup dihedral berorder 6. Jelas bahwa $V\left(\Gamma_{D_6}\right) = \{\ a,\ a^2, b, ab,\ a^2b\}$. Berikut adalah matriks ketetanggaan dari Γ_{D_6}:

$$A\left(\Gamma_{D_6}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Didapat nilai eigen dari matriks ketetanggaan $\lambda_1 = 3.64, \lambda_2 = -1.64, \lambda_3 = \lambda_4 = -1, \lambda_5 = 0$
Sehingga

$$\varepsilon(D_6) = \sum_{i=1}^{5} |\lambda_i| = |3.64| + |-1.64| + |-1| + |0| = 7.28.$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai tahapan – tahapan dalam proses pengerjaan penelitian kajian sifat-sifat graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup dihedral D_{2n}. Tahapan-tahapan tersebut terdiri atas :

1. Studi Literatur

Pada tahap ini akan dicari referensi yang berkaitan dengan graf non-komutatif dan grup dihedral D_{2n}. Referensi yang dicari meliputi pengertian, sifat-sifat, dan teorema dari graf non komutatif pada grup dihedral D_{2n}, serta hal-hal lain yang berhubungan dengan penelitian yang akan diusulkan ini. Referensi yang dicari dapat diperoleh melalui buku teks yang sesuai dengan topik tugas akhir ini. Selain melalui buku teks yang terkait,studi literatur dapat diperoleh melalui jurnal yang berkaitan dengan graf non-komutatif pada grup dihedral D_{2n}.

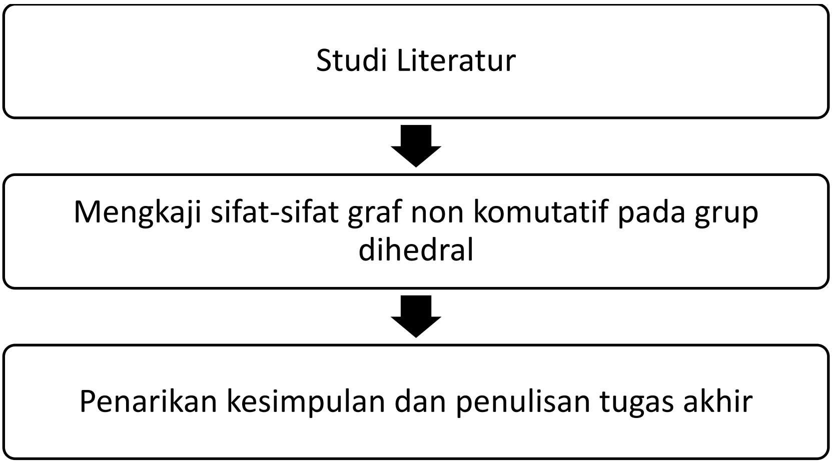
2. Mengkaji sifat-sifat graf non komutatif pada grup dihedral D_{2n}

Setelah mempelajari dan memahami referensi yang ada, pada tahap ini akan dikaji definisi, sifat-sifat, dan teorema dari graf non-komutatif dan graf dihedral D_{2n} dengan pengelompokan cara sebagai berikut :

1. Menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal.
2. Menentukan nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap.
3. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal.
4. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap.
5. Menentukan energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4$.

3. Penarikan Kesimpulan dan Pembukuan Tugas Akhir

Tahapan ini merupakan tahapan terakhir pada penelitian ini. Namun dapat dimulai sejak kajian materi tentang graf non-komutatif pada grup dihedral D_{2n}.



Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan secara rinci mengenai cara menentukan nilai eigen dan energi graf dari graf dihedral $\Gamma_{D_{2n}}$ untuk semua $n \geq 3$. Kemudian diberikan pula bukti-bukti dan contoh dari proposisi dan teorema tentang nilai eigen dan energi graf dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$.

4.1 Cara menentukan nilai eigen dari graf $\boldsymbol{\Gamma_{D_{2n}}}$

Pada bagian ini kita memperoleh nilai eigen dari graf non-komutatif dari grup dihedral ($\Gamma_{D_{2n}}$). Kami akan membagi menjadi dua kasus, yaitu ketika n adalah bilangan asli gasal dan ketika n adalah asli genap.

Proposisi 4.1

Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan order $2n$ dengan n adalah bilangan asli gasal dan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup D_{2n}, maka nilai eigen dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. $\lambda = 0$ *dengan multiplisitas* $(n-2)$,
2. $\lambda = -1$ *dengan multiplisitas* $(n-1)$, *dan*
3. $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$,

Bukti : Telah diketahui elemen grup dihedral adalah $D_{2n} \cong \langle a, b \colon a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Senter dari D_{2n} untuk n bilangan asli gasal adalah subgrup dari D_{2n} yang semua elemennya komutatif dengan semua elemen di D_{2n}. Salah satu elemen $Z(G)$ adalah e. Untuk selain e, ambil sebarang pasangan terurut $x, y \in D_{2n} \backslash e$ untuk n bilangan asli gasal dengan $xy = yx$ maka didapat $D_{2n} \backslash e = \emptyset$, atau dengan kata lain tidak ada elemen D_{2n} yang komutatif selain e. Maka hanya ada 1 anggota senter,

yaitu $Z(D_{2n}) = \{e\}$. Untuk penjelasan lebihnya dapat dilihat di paragraf berikutnya.
Maka dari definisi graf non-komutatif pada grup berhingga, kita dapatkan himpunan simpul grafnya adalah $V(\Gamma_{D_{2n}}) = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$, dengan demikian $V(\Gamma_{D_{2n}})$ mempunyai simpul sebanyak $2n - 1$ sehingga matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ berukuran $(2n-1) \times (2n-1)$. Berdasarkan permisalan grup dihedral D_{2n} dengan konstruksi dari grup simetri untuk segi-n beraturan pada tinjauan pustaka, elemen $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ didapatkan dari kelipatan rotasi pada titik pusat segi-n beraturan sebesar $2\pi/n$. Maka dari itu, untuk pasangan terurut dari masing-masing elemen $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ adalah dapat direpresentasikan dengan

$$a^i a^j = \left(\frac{2\pi}{n}\right) i + \left(\frac{2\pi}{n}\right) j = \left(\frac{2\pi}{n}\right) j + \left(\frac{2\pi}{n}\right) i = a^j a^i$$

dimana $i, j = 1,2, \dots., n-1$ menyebabkan $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ saling komutatif satu sama lain.
Sedangkan untuk elemen $b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b$ dengan n adalah bilangan asli gasal, tidak saling komutatif satu sama lain, karena

$$a^i(a^j b) = a^{i+j} b \neq a^j b a^i = (a^j b) a^i.$$

Maka untuk pasangan terurut a^i dengan $a^j b$, untuk $i = 1,2, \dots, n-1$ dan $j = 0,1,2, \dots., n-1$ tidak bertetangga.
Begitu pula untuk pasangan terurut $a^i b$ dengan $a^j b$ dengan $i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ dan $i \neq j$ dapat kita peroleh

$$(a^i b)(a^j b) = a^i b a^j b \neq a^j b a^i b = (a^j b)(a^i b)$$

yang menyebabkan $a^i b$ dengan $a^j b$ tidak bertetangga.
Maka untuk matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \begin{bmatrix} O_{(n-1)\times(n-1)} & J_{(n-1)\times(n)} \\ J_{(n)\times(n-1)}^{T} & B_{n\times n} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

dengan

- $O_{(n-1)\times(n-1)}$ adalah matriks nol, didapatkan dari pasangan terurut dari elemen $a. a^2. \dots . a^{n-1}$ yang saling komutatif satu sama lain. dengan kata lain, masing-masing simpulnya tidak bertetangga,
- $J_{(n-1)\times(n)}$ adalah matriks dengan semua elemennya adalah 1, didapatkan dari pasangan simpul $\left(a^i. a^i b\right)$ dengan $i = 1.2. \dots . n-1$ yang bertetangga satu sama lain, dan
- $B_{n\times n}$ adalah matriks dengan ukuran $n \times n$, yang elemen diagonalnya adalah nol, karena masing-masing simpul tidak mungkin bertetangga dengan dirinya sendiri dan sisanya adalah elemen 1, didapat dari pasangan terurut dari masing masing elemen $a^i b$, untuk $i = 1.2. \dots . n-1$ yang saling bertetangga.

Matriks tersebut dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.2).$$

Dapat dilihat bahwa A adalah matriks simetri, selanjutnya diperoleh polinomial karakteristik dari matriks $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ adalah

$$\det(\lambda I - A)_{(2n-1)\times(2n-1)} = \lambda^{2n-1} + a_1\lambda^{2n-2} + a_2\lambda^{2n-3} + \dots + a_{2n-2}\lambda^1 + a_{2n-1} = 0 \qquad (4.3)$$

dengan a_i bilangan bulat.
Karena pada matriks $(\lambda I - A)_{(2n-1)\times(2n-1)}$ terdapat baris yang yang tidak bebas linier sebanyak $n-2$ maka rank dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ adalah $(2n-1)-(n-2)=n+1$. Maka dari itu, multiplisitas aljabar dari nilai eigen 0 adalah $n-2$, dan nilai $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1} = 0$, sehingga persamaan (4.3) dapat diubah menjadi

$$\lambda^{2n-1} + a_1\lambda^{2n-2} + \cdots + a_n\lambda^{n-1} + a_{n+1}\lambda^{n-2} = 0. \qquad (4.4)$$

dari hasil peolehan rank di atas, yaitu $n+1$, maka terdapat nilai eigen tak nol sebanyak $n+1$. selanjutnya akan dicari nilai eigen tersebut. Dan untuk nilai eigen tak nol dapat diambil $\lambda = -1$. Jika dibentuk matriks $A + I(\lambda = -1)$ dengan A pada persamaan (4.2), maka terdapat baris yang tidak bebas linier pada matriks tersebut, khususnya di baris ke-n sampai baris ke $2n-1$.

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.5)$$

Hal ini berarti $\det(A+I) = 0$. Oleh karena itu,-1 adalah nilai eigen dari A dengan muliplisitas aljabar $n-1$. Selanjutnya tersisa nilai eigen sebanyak $(2n-1)-(n-2)-(n-1)=2$ nilai eigen lain. Dan persamaan karakteristik dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ ketika n bilangan asli gasal berdasarkan nilai eigen yang sudah diketahui dapat dikonstruksikan sebagai berikut:

$$\lambda^{n-2}(\lambda+1)^{n-1}(\lambda^2 - b\lambda - c) = 0$$

dengan λ^{n-2} dari nilai eigen 0 dengan multiplisitas aljabar $n-2$, $(\lambda+1)^{n-1}$ dari nilai eigen -1 dengan multiplisitas aljabar $n-1$, dan $(\lambda^2 - b\lambda - c)$ dari sisa 2 nilai eigen. Nilai b dan c diperoleh dari persamaan (4.4) dibagi dengan $(\lambda+1)^{n-1}$ menjadi:

$$\frac{(\lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda^1 + a_{n+1})}{(\lambda+1)^{n-1}} = 0. \qquad (4.6)$$

Dari persamaan (4.4) akan dibuktikan menggunakan induksi matematika bahwa :

$$\begin{aligned}
&\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)\right) = \\
&\lambda^{2n-1} + \left(1 + 2 + \cdots + n - 1 + n(n-1)\right)\lambda^{2n-3} + \cdots \\
&\quad - \left((n-1) + n(n-1)^2\right)\lambda^{n-1} \\
&\quad - (n-1)(n)\lambda^{n-2} \\
&\quad = \lambda^{n-2}(\lambda+1)^{n-1}\left(\lambda^2 - (n-1)\lambda - (n^2 - n)\right)
\end{aligned}$$

Untuk $n = 3$

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_6}\right)\right) &= \lambda^5 - 9\lambda^3 - 14\lambda^2 - 6\lambda \\
&= \lambda^1(\lambda+1)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 6) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Untuk $n = k$

$$\begin{aligned}
&\lambda^{2k-1} + \left(1 + 2 + \cdots + k - 1 + k(k-1)\right)\lambda^{2k-3} + \cdots \\
&\quad - \left((k-1) + k(k-1)^2\right)\lambda^{k-1} \\
&\quad - (k-1)(k)\lambda^{k-2} \\
&\quad = \lambda^{k-2}(\lambda+1)^{k-1}\left(\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k^2 - k)\right)
\end{aligned}$$

Untuk $n = k + 2$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{2k-1} + \big(1 + 2 + \cdots + k - 1 + k(k-1)\big)\lambda^{2k-3} + \cdots \\
&- \big((k-1) + k(k-1)^2\big)\lambda^{k-1} \\
&- (k-1)(k)\lambda^{k-2} \\
&= \lambda^{(k+2)-2}(\lambda+1)^{(k+2)-1}\Big(\lambda^2 - \big((k+2)-1\big)\lambda \\
&- \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{2k+1} + \big(1 + 2 + \cdots + (k+1) + (k+2)(k+1)\big)\lambda^{2k-1} + \cdots \\
&- \big((k+1) + (k+2)(k+1)^2\big)\lambda^{k+1} \\
&- (k+1)(k+2)\lambda^{k} \\
&= \lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2 - (k+1)\lambda \\
&- \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{k-2}(\lambda+1)^{k-1}\big(\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k^2-k)\big)\lambda^2(\lambda+1)^2 \\
&+ \lambda^{k-2}(\lambda+1)^{k-1}(-2\lambda - 4k + 2)\lambda^2(\lambda+1)^2 \\
&= \lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2 - (k+1)\lambda \\
&- \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\big(\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k^2-k)\big) + (-2\lambda - 4k + 2)\Big) \\
&= \lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2 - (k+1)\lambda \\
&- \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2 - (k+1)\lambda - \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big) \\
&= \lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2 - (k+1)\lambda \\
&- \big((k+2)^2 - (k+2)\big)\Big) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$\frac{\lambda^{n-2}(\lambda+1)^{n-1}\left(\lambda^2-(n-1)\lambda-(n^2-n)\right)}{\lambda^{n-2}(\lambda+1)^{n-1}}$$
$$=\lambda^2-(n-1)\lambda-(n^2-n)=0. \qquad (4.7)$$

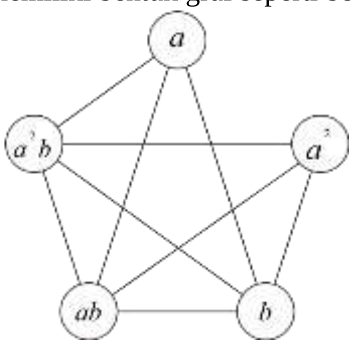
Maka kita peroleh dua nilai eigen terakhir

$$\lambda_{1,2}=\frac{\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

dengan $a=1, b=1-n$, dan $c=n-n^2$ yang di dapat dari dari persamaan (4.7). Maka diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}&=\frac{-(1-n)\pm\sqrt{(1-n)-4(1)(n-n^2)}}{2(1)}\\&=\frac{n-1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-2n+n^2-4n+4n^2}}{2}\\&=\frac{n-1}{2}\pm\sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Contoh 4.1 Γ_{D_6} memiliki bentuk graf seperti berikut



Dan bentuk matriks ketetanggaannya adalah

$$A\left(\Gamma_{D_6}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya:

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_6}\right)\right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda\big(\lambda(\lambda^3 - 3\lambda - 2) + 1(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 1(\lambda^2 + 2\lambda + 1) + 1(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)\big) - 1\big(-\lambda(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 1(0) + 1(0)\big) + 1\big(-\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 1(0) + 1(0)\big) - 1\big(-\lambda(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 1(0) + 1(0)\big)$

$= \lambda\big((\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda) - 3\lambda^2 - 6\lambda - 3\big) - 1(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda) + 1(-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda) - 1(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda)$

$$= \lambda(\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3) - 3\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda$$

$$= \lambda^5 - 6\lambda^3 - 8\lambda^2 - 3\lambda - 3\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda$$

$$= \lambda^5 - 9\lambda^3 - 14\lambda^2 - 6\lambda$$

$$= \lambda(\lambda^4 - 9\lambda^2 - 14\lambda - 6)$$

$$= \lambda(\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 6) = 0.$$

Maka dapat disimpulkan bahwa proposisi 4.1 tidak terdapat perbedaan dengan hasil yang didapat pada paper Rabiha.

Proposisi 4.2
Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dimana n adalah bilangan bilangan asli genap dan $n > 4$, dan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup dihedral D_{2n} maka nilai eigen dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. $\lambda = 0$ *dengan multiplisitas aljabar* $n - 3$,
2. $\lambda = -1$ *dengan multiplisitas aljabar* $n - 1$, *dan*
3. $\lambda = \left(\frac{n-1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{5n^2-10n+1}{4}}$.

Bukti : Telah diketahui elemen grup dihedral adalah $D_{2n} \cong \langle a, b: a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Senter dari D_{2n} untuk n bilangan asli genap adalah subgrup dari D_{2n} yang semua elemennya komutatif dengan semua elemen di D_{2n}. Salah satu elemen $Z(G)$ adalah e. Untuk selain e, ambil sebarang $x, y \in D_{2n} \backslash e$ untuk n bilangan asli genap dengan $xy = yx$ maka didapat $D_{2n} \backslash e = \left\{a^{\frac{n}{2}}\right\}$, atau dengan kata lain elemen D_{2n} yang komutatif selain e hanya $a^{\frac{n}{2}}$. Maka kita dapatkan 2 anggota senter, yaitu $Z(D_{2n}) = \left\{1, a^{\frac{n}{2}}\right\}$.
Dari definisi graf non-komutatif pada grup berhingga, kita dapatkan himpunan simpul grafnya adalah $V\left(\Gamma_{\mathrm{D}_{2\mathrm{n}}}\right) = \{a, a^2, \dots, a^{\frac{n}{2}-1}, a^{\frac{n}{2}+1}, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$, dengan demikian $V\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ mempunyai simpul sebanyak $2n - 2$ sehingga matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ berukuran $(2n - 2) \times (2n - 2)$. Berdasarkan permisalan grup dihedral D_{2n} dengan konstruksi dari grup simetri untuk segi-n beraturan pada tinjauan pustaka, elemen $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ didapatkan dari kelipatan rotasi pada titik pusat segi-n beraturan sebesar $2\pi/n$. Maka dari itu, untuk pasangan terurut dari masing-masing elemen $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ adalah dapat direpresentasikan dengan

$$a^i a^j = \left(\frac{2\pi}{n}\right) i + \left(\frac{2\pi}{n}\right) j = \left(\frac{2\pi}{n}\right) j + \left(\frac{2\pi}{n}\right) i = a^j a^i$$

dimana $i, j = 1,2, \dots., n-1$ menyebabkan $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ saling komutatif satu sama lain.
Sedangkan untuk elemen $b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b$ dengan n adalah bilangan asli genap, tidak saling komutatif satu sama lain, karena

$$a^i\left(a^j b\right) = a^{i+j} b \neq a^j b a^i = \left(a^j b\right) a^i.$$

Maka untuk pasangan terurut a^i dengan $a^j b$, untuk $i = 1,2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1$ dan $j = 0,1,2, \dots., n-1$ adalah tidak bertetangga.
Begitu pula untuk pasangan terurut $a^i b$ dengan $a^j b$ dengan $i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ dan $i \neq j$ dapat kita peroleh

$$\left(a^i b\right)\left(a^j b\right) = a^i b a^j b \neq a^j b a^i b = \left(a^j b\right)\left(a^i b\right)$$

yang menyebabkan simpul-simpul $a^i b$ dengan $a^j b$ tidak bertetangga.
Maka untuk matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = \begin{bmatrix} O_{(n-2)\times(n-2)} & J_{(n-2)\times(n)} \\ J^T_{(n)\times(n-2)} & B_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

dengan

- $O_{(n-2)\times(n-2)}$ adalah matriks nol, didapatkan dari pasangan terurut dari elemen $a, a^2, \dots, a^{\frac{n}{2}-1}, a^{\frac{n}{2}+1}, \dots, a^{n-1}$ yang saling komutatif satu sama lain. dengan kata lain, masing-masing simpulnya tidak bertetangga,
- $J_{(n-2)\times(n)}$ adalah matriks dengan semua elemennya adalah 1, didapatkan dari pasangan simpul $\left(a^i, a^i b\right)$ dengan $i =$

$1,2,\dots,a^{\frac{n}{2}-1},a^{\frac{n}{2}+1},\dots,n-1$ yang bertetangga satu sama lain, dan

- $B_{n\times n}$ adalah matriks dengan ukuran $n\times n$, yang elemen diagonalnya adalah nol, karena masing-masing simpul tidak mungkin bertetangga dengan dirinya sendiri dan sisanya adalah elemen 1, didapat dari pasangan terurut dari masing masing elemen a^ib, untuk $i=1,2,\dots,n-1$ yang saling bertetangga.

Matriks tersebut dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Dapat dilihat bahwa A adalah matriks simetri, selanjutnya diperoleh polinomial karakteristik dari matriks $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ adalah

$$\det(\lambda I-A)_{(2n-2)\times(2n-2)}=\lambda^{2n-2}+a_1\lambda^{2n-3}+\cdots+a_{2n-3}\lambda+a_{2n-2}=0 \tag{4.10}$$

dengan a_i bilangan bulat.

Karena pada matriks $(\lambda I-A)_{(2n-2)\times(2n-2)}$ terdapat baris yang yang tidak bebas linier sebanyak $n-3$ maka rank dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ adalah $(2n-2)-(n-3)=n+1$. Maka dari itu, multiplisitas aljabar dari nilai eigen 0 adalah $n-3$, dan nilai $a_{n+1},a_{n+2},\dots,a_{2n-2},a_{2n-1}=0$, sehingga persamaan (4.10) menjadi

$$\lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda^1 + a_n = 0 \quad (4.11).$$

dari hasil perolehan rank di atas, yaitu $n+1$, maka terdapat nilai eigen tak nol sebanyak $n+1$. selanjutnya akan dicari nilai eigen tersebut. Dan untuk nilai eigen tak nol dapat diambil $\lambda = -1$. Jika dibentuk matriks $A + I(\lambda = -1)$ dengan A pada persamaan (4.9), maka terdapat baris yang tidak bebas linier pada matriks tersebut, khususnya di baris ke-n sampai baris ke $2n-2$.

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4.12)$$

Hal ini berarti $\det(A + I) = 0$. Oleh karena itu,-1 adalah nilai eigen dari A dengan muliplisitas aljabar $n-1$. Selanjutnya tersisa nilai eigen sebanyak $(2\mathrm{n}-2)-(\mathrm{n}-3)-(\mathrm{n}-1)=2$ nilai eigen lain. Dan persamaan karakteristik dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ ketika n bilangan asli genap dan $n > 4$ berdasarkan nilai eigen yang sudah diketahui dapat dikonstruksikan sebagai berikut:

$$\lambda^{n-3}(\lambda+1)^{n-1}(\lambda^2 - b\lambda - c) = 0$$

Dengan λ^{n-3} dari nilai eigen 0 dengan multiplisitas aljabar $n-3$, $(\lambda+1)^{n-1}$ dari nilai eigen -1 dengan multiplisitas aljabar $n-1$, dan $(\lambda^2 - b\lambda - c)$ dari sisa 2 nilai eigen. Nilai b dan c diperoleh dari persamaan (4.11) dibagi dengan $(\lambda+1)^{n-1}$ menjadi

$$\frac{(\lambda^{n+1} + a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda^1 + a_n)}{(\lambda+1)^{n-1}} = 0 \dots (4.13).$$

Dari persamaan (4.11) akan dibuktikan menggunakan induksi matematika bahwa :

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)\right) =$$
$$\lambda^{2n-2} + \left(1 + 2 + \cdots + n - 1 + n(n-2)\right)\lambda^{2n-4} + \cdots$$
$$- \left((n-1) + n(n-1)^2\right)\lambda^{n-2}$$
$$- (n-1)(n)\lambda^{n-3}$$
$$= \lambda^{n-2}(\lambda+1)^{n-1}\left(\lambda^2 - (n-1)\lambda - (n^2 - 2n)\right)$$

Untuk $n = 6$

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)\right)$$
$$= \lambda^{10} - 39\lambda^8 - 160\lambda^7 - 285\lambda^6 - 264\lambda^5 - 125\lambda^4$$
$$- 24\lambda^3 = \lambda^3(\lambda+1)^5(\lambda^2 - 5\lambda - 24) \quad \blacksquare$$
$$= \lambda^3(\lambda+1)^5(\lambda^2 - 5\lambda - 24) \quad \blacksquare$$

Untuk $n = k$

$$\lambda^{2k-2} + \left(1 + 2 + \cdots + k - 1 + k(k-2)\right)\lambda^{2k-4} + \cdots$$
$$- \left((k-1) + k(k-1)^2\right)\lambda^{k-2}$$
$$- (k-1)(k)\lambda^{k-3}$$
$$= \lambda^{k-2}(\lambda+1)^{k-1}\left(\lambda^2 - (k-1)\lambda - (k^2 - 2k)\right)$$

Untuk $n = k + 2$

$$\lambda^{2k-2} + \left(1 + 2 + \cdots + k - 1 + k(k-1)\right)\lambda^{2k-3} + \cdots$$
$$- \left((k-1) + k(k-1)^2\right)\lambda^{k-1}$$
$$- (k-1)(k)\lambda^{k-2}$$
$$= \lambda^{(k+2)-2}(\lambda+1)^{(k+2)-1}\left(\lambda^2 - \left((k+2)-1\right)\lambda\right.$$
$$\left.- \left((k+2)^2 - 2(k+2)\right)\right)$$
$$\lambda^{2k} + \left(1 + 2 + \cdots + (k+1) + (k+2)(k+1)\right)\lambda^{2k-2} + \cdots$$
$$- \left((k+1) + (k+2)(k+1)^2\right)\lambda^{k}$$
$$- 2(k+1)(k+2)\lambda^{k-1}$$
$$= \lambda^{k}(\lambda+1)^{k+1}\left(\lambda^2 - (k+1)\lambda\right.$$
$$\left.- 2\left((k+2)^2 - (k+2)\right)\right)$$

$$\lambda^{k-3}(\lambda+1)^{k-1}\big(\lambda^2-(k-1)\lambda-(k^2-2k)\big)\lambda^2(\lambda+1)^2$$
$$+\lambda^{k-2}(\lambda+1)^{k-1}2(-2\lambda-4k+2)\lambda^2(\lambda+1)^2$$
$$=\lambda^{k-1}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2-(k+1)\lambda$$
$$-\big((k+2)^2-(k+2)\big)\Big)$$

$$\lambda^{k-1}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\big(\lambda^2-(k-1)\lambda-(k^2-2k)\big)$$
$$+2(-2\lambda-4k+2)\Big)$$
$$=\lambda^{k-1}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2-(k+1)\lambda$$
$$-2\big((k+2)^2-(k+2)\big)\Big)$$

$$\lambda^{k-1}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2-(k+1)\lambda-2\big((k+2)^2-(k+2)\big)\Big)$$
$$=\lambda^{k-1}(\lambda+1)^{k+1}\Big(\lambda^2-(k+1)\lambda$$
$$-2\big((k+2)^2-(k+2)\big)\Big)\ \blacksquare$$

sehingga persamaan (4.13) menjadi

$$\frac{\lambda^{n-3}(\lambda+1)^{n-1}\big(\lambda^2-(n-1)\lambda-(n^2-2n)\big)}{\lambda^{n-3}(\lambda+1)^{n-1}}$$
$$=\lambda^2-(n-1)\lambda-(n^2-2n)=0. \qquad (4.14)$$

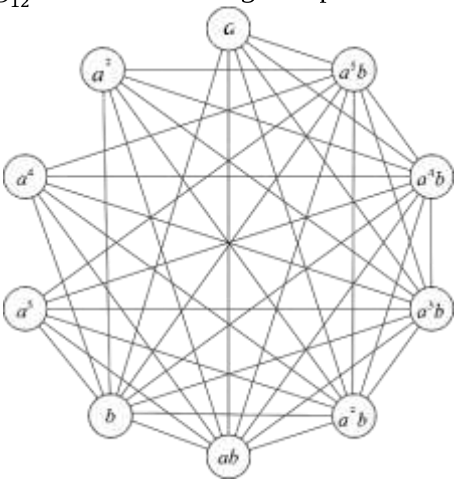
Maka kita peroleh dua nilai eigen terakhir

$$\lambda_{1,2}=\frac{\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

dengan $a=1, b=1-n$ dari persamaan (4.14), dan $c=n-n^2$ yang di dapat dari koefisien terakhir dari persamaan (4.13) yaitu $a_n=-(n^2-2n)$, sehingga

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1-n) \pm \sqrt{(1-n) - 4(1)(2n-n^2)}}{2(1)}$$
$$= \frac{n-1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-2n+n^2-8n+4n^2}}{2}$$
$$= \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-10n+1}{4}}. \blacksquare$$

Contoh 4.2 $\Gamma_{D_{12}}$ memiliki bentuk graf seperti berikut



Dan bentuk matriks ketetanggaannya adalah

$$A(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya :

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda\Bigg(\lambda\Bigg(\lambda\bigg(\lambda\bigg(\lambda\Big(\lambda\big(\lambda(\lambda^3 - 3\lambda - 2) - (-1)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) +$
$(-1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)\big) - (-1)(-\lambda^3 - 3\lambda^2 -$
$3\lambda - 1) + (-1)(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1) +$
$(-1)(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\ )\Big) - (-1)(-\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda - 1) +$
$(-1)(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4\lambda -$
$1) + (-1)(\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda^2 -$
$4\lambda - 1)\bigg) - (-1)(-\lambda^5 - 5\lambda^4 - 10\lambda^3 - 10\lambda^2 - 5\lambda - 1) + (-1)(\lambda^5 +$
$5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 10\lambda^2 + 5\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^5 - 5\lambda^4 - 10\lambda^3 - 10\lambda^2 -$
$5\lambda - 1) + (-1)(\lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 10\lambda^2 + 5\lambda + 1) - (-1)(-\lambda^5 -$
$5\lambda^4 - 10\lambda^3 - 10\lambda^2 - 5\lambda - 1) + (-1)(\lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 10\lambda^2 +$
$5\lambda + 1)\bigg) + (-1)(\lambda^6 + 5\lambda^5 + 10\lambda^4 + 10\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda) - (-1)(-\lambda^6 -$
$5\lambda^5 - 10\lambda^4 - 10\lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda) + (-1)(\lambda^6 + 5\lambda^5 + 10\lambda^4 + 10\lambda^3 +$
$5\lambda^2 + \lambda) - (-1)(-\lambda^6 - 5\lambda^5 - 10\lambda^4 - 10\lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda) + (-1)(\lambda^6 +$
$5\lambda^5 + 10\lambda^4 + 10\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda) - (-1)(-\lambda^6 - 5\lambda^5 - 10\lambda^4 - 10\lambda^3 -$
$5\lambda^2 - \lambda)\Bigg) - (-1)(-\lambda^7 - 5\lambda^6 - 10\lambda^5 - 10\lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2) +$
$(-1)(\lambda^7 + 5\lambda^6 + 10\lambda^5 + 10\lambda^4 + 5\lambda^3 + \lambda^2) - (-1)(-\lambda^7 - 5\lambda^6 -$

$10\lambda^5 - 10\lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2) + (-1)(\lambda^7 + 5\lambda^6 + 10\lambda^5 + 10\lambda^4 + 5\lambda^3 + \lambda^2) - (-1)(-\lambda^7 - 5\lambda^6 - 10\lambda^5 - 10\lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2) + (-1)(\lambda^7 + 5\lambda^6 + 10\lambda^5 + 10\lambda^4 + 5\lambda^3 + \lambda^2)\Bigg) + (-1)(\lambda^8 + 5\lambda^7 + 10\lambda^6 + 10\lambda^5 + 5\lambda^4 + \lambda^3) - (-1)(-\lambda^8 - 5\lambda^7 - 10\lambda^6 - 10\lambda^5 - 5\lambda^4 - \lambda^3) + (-1)(\lambda^8 + 5\lambda^7 + 10\lambda^6 + 10\lambda^5 + 5\lambda^4 + \lambda^3) - (-1)(-\lambda^8 - 5\lambda^7 - 10\lambda^6 - 10\lambda^5 - 5\lambda^4 - \lambda^3) + (-1)(\lambda^8 + 5\lambda^7 + 10\lambda^6 + 10\lambda^5 + 5\lambda^4 + \lambda^3) - (-1)(-\lambda^8 - 5\lambda^7 - 10\lambda^6 - 10\lambda^5 - 5\lambda^4 - \lambda^3)$

$$= \lambda^{10} - 39\lambda^8 - 160\lambda^7 - 285\lambda^6 - 264\lambda^5 - 125\lambda^4 - 24\lambda^3$$

$$= \lambda^3(\lambda + 1)^5(\lambda^2 - 5\lambda - 24) = 0$$

Maka dapat disimpulkan bahwa proposisi 4.2 terdapat perbedaan dengan hasil yang didapat pada paper Rabiha, yaitu pada rumusan nilai eigen yang didapat dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)$ dengan n nilangan asli genap dan $n > 4$. Pada proposisi di paper Rabiha dkk (2017) disebutkan bahwa nilai eigennya adalah

1. $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar $\frac{3n-6}{2}$,
2. $\lambda = -2$ dengan multiplisitas aljabar $\frac{n}{2} - 1$, dan
3. $\lambda = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \pm \sqrt{\frac{5n^2-12n-4}{4}}$,

dimana pernyataan tersebut terbukti salah dalam pembuktian di atas.

4.2 Cara menentukan energi graf $\boldsymbol{\Gamma_{D_{2n}}}$

Pada bagian ini kita memperoleh energi dari graf non-komutatif dari grup dihedral ($\Gamma_{D_{2n}}$). Disini juga kami akan membagi menjadi dua kasus, yaitu ketika n adalah bilangan asli gasal dan ketika n adalah asli genap.

Teorema 4.1 *Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$, dimana n adalah bilangan asli gasal dan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf non-komutatif yang dikaitkan dengan grup D_{2n}. Maka energi draf dari $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah*

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1) + \sqrt{5n^2 - 6n + 1}.$$

Bukti: Energi graf adalah jumlahan dari semua nilai eigen bernilai mutlak. Dari proposisi 1, telah kita dapatkan semua nilai eigen dari graf non-komutatif dari grup dihedral D_{2n} ketika n adalah bilangan asli gasal, yaitu $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar $n-2$, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas aljabar $n-1$ dan $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$, sehingga dari definisi energi graf kita dapatkan energi dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n adalah bilangan asli gasal adalah:

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) &= (n-2)|0| + (n-1)|-1| + \left|\frac{(n-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}\right| \\ &= (n-1) + \left|\frac{\left((n-1)+\sqrt{5n^2-6n+1}\right)}{2}\right| + \left|\frac{\left((n-1)-\sqrt{5n^2-6n+1}\right)}{2}\right| \\ &= (n-1) + \sqrt{5n^2-6n+1}.\end{aligned}$$

Berikut adalah contoh dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n adalah bilangan asli gasal.

Contoh 4.3

Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dan $n = 5$, maka $D_{2n} = D_{10} \cong \langle a, b : a^5 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, a^3 a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$ dan $\Gamma_{D_{10}}$ adalah graf non-komutatifnya dengan himpunan simpulnya adalah $V\left(\Gamma_{D_{10}}\right) = \{a, a^2, a^3 a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$.

Matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{10}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{10}}\right)_{9\times 9}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

Dan didapat

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1\\0&\lambda&0&0&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&\lambda&0&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&\lambda&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^9-30\lambda^7-100\lambda^6-135\lambda^5-84\lambda^4-20\lambda^3$$
$$=0$$

Maka $rank\left(A\left(\Gamma_{D_{10}}\right)_{9\times 9}\right)=6$ dan persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^9-30\lambda^7-100\lambda^6-135\lambda^5-84\lambda^4-20\lambda^3=$$
$$\lambda^3(\lambda+1)^4(\lambda^2-4\lambda-20)=0.$$

dan nilai eigennya adalah $\lambda=0$ dengan multiplisitas aljabar 3, $\lambda=-1$ dengan multiplisitas aljabar 4 dan $\lambda=2\pm 2\sqrt{6}$.
Maka didapatkan energi graf $\Gamma_{D_{10}}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\Gamma_{D_{10}}\right)&=(5-1)+\sqrt{5(5)^2-6(5)+1}\\&=4+\sqrt{125-30+1}\\&=4+\sqrt{96}\\&=4+4\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Contoh 4.4

Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dan $n = 7$, maka $D_{2n} = D_{14} \cong \langle a, b: a^7 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b\}$ dan $\Gamma_{D_{14}}$ adalah graf non-komutatifnya dengan himpunan simpulnya adalah $V\left(\Gamma_{D_{14}}\right) = \{a, a^2, a^3 a^4, a^5, a^6, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b\}$.

Matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{14}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{14}}\right)_{13\times 13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan didapat

$$\det(\lambda I - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{13} - 63\lambda^{11} - 322\lambda^{10} - 735\lambda^{9} - 924\lambda^{8} - 665\lambda^{7} - 258\lambda^{6} - 42\lambda^{5} = 0.$$

Maka rank $\left(A\left(\Gamma_{D_{14}}\right)_{13\times 13}\right) = 8$ dan persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^{13} - 63\lambda^{11} - 322\lambda^{10} - 735\lambda^{9} - 924\lambda^{8} - 665\lambda^{7} - 258\lambda^{6} - 42\lambda^{5} =$$
$$\lambda^{5}(\lambda+1)^{6}(\lambda^{2} - 6\lambda - 42) = 0.$$

dan nilai eigennya adalah $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar 5, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas aljabar 6 dan $\lambda = 3 \pm \sqrt{102}$.
Maka didapatkan energi graf $\Gamma_{D_{14}}$:

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{14}}\right) = (7-1) + \sqrt{5(7)^{2} - 6(7) + 1}$$
$$= 6 + \sqrt{204} = 6 + 2\sqrt{51}$$

Teorema 4.2 *Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan oreder $2n$, dengan n adalah bilangan asli genap dan $n > 4$, yaitu $G = D_{2n} \cong \langle a, b : a^{n} = b^{2} = 1, bab = a^{-1}\rangle$ dan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf non-*

komutatif yang dikaitkan dengan grup D_{2n}. Maka energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-1) + \sqrt{5n^2 - 10n + 1}.$$

Bukti : Energi graf adalah jumlahan dari semua nilai eigen bernilai mutlak. Dari proposisi 2, nilai eigen dari graf non-komutatif dari grup dihedral D_{2n}, untuk n bilangan asli genap dan $n > 4$, adalah $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar $n = 3$, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas aljabar $n-1$, dan $\lambda = \left(\frac{n-1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{5n^2-10n+1}{4}}$, sehingga dari definisi energi graf kita dapatkan energi graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n adalah bilangan asli genap dan $n > 4$ adalah :

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n-3)|0| + (n-1)|-1| + \left|\left(\frac{n-1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{5n^2-10n+1}{4}}\right|$$

$$= 0 + n - 1 + \left|\frac{(n-1)}{2} + \frac{\sqrt{5n^2-10n+1}}{2}\right| + \left|\frac{(n-1)}{2} - \frac{\sqrt{5n^2-10n+1}}{2}\right|$$

$$= (n-1) + \sqrt{5n^2 - 10n + 1}.$$

Berikut adalah contoh dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n adalah bilangan asli genap dan $n > 4$.

Contoh 4.5

Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dan $n = 6$, maka $D_{2n} = D_{12} \cong \langle a, b : a^6 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{e, a, a^2, a^3 a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$ dan $\Gamma_{D_{12}}$ adalah graf non-komutatifnya dengan himpunan simpulnya adalah $V\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = \{a, a^2, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{12}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)_{10\times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan didapat

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{10} - 39\lambda^8 - 160\lambda^7 - 285\lambda^6 - 264\lambda^5 - 125\lambda^4 - 24\lambda^3 = 0.$$

Maka $\operatorname{rank}\left(A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)_{10\times 10}\right) = 7$ persamaan karakteristik dari matriks tersebut adalah

$$\lambda^{10} - 39\lambda^8 - 160\lambda^7 - 285\lambda^6 - 264\lambda^5 - 125\lambda^4 - 24\lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)^5(\lambda^2 - 5\lambda - 24) = 0$$

dan nilai eigennya adalah $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar 3, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas aljabar 5,$\lambda = 8$ dan $\lambda = -3$.
Maka energi graf dari $\Gamma_{D_{12}}$:

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = (6 - 1) + \sqrt{5(6)^2 - 10(6) + 1}$$

$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = 5 + \sqrt{180 - 60 + 1}$$
$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = 5 + \sqrt{121}$$
$$\varepsilon\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = 5 + 11 = 16$$

Contoh 4.6

Diberikan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dan $n = 8$, maka $D_{2n} = D_{16} \cong \langle a, b : a^8 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$ dan $\Gamma_{D_{14}}$ adalah graf non-komutatifnya dengan himpunan simpulnya adalah $V\left(\Gamma_{D_{16}}\right) = \{a, a^2, a^3, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Matriks ketetanggaan dari graf $\Gamma_{D_{14}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{16}}\right)_{14\times14} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Dan didapat

$\det(\lambda I - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{14} - 76\lambda^{12} - 448\lambda^{11} - 1218\lambda^{10} - 1904\lambda^{9} - 1820\lambda^{8} - 1056\lambda^{7} - 343\lambda^{6} - 48\lambda^{5} = 0$$

Maka rank $\left(A(\Gamma_{D_{16}})_{14\times 14}\right) = 9$ dan persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^{14} - 76\lambda^{12} - 448\lambda^{11} - 1218\lambda^{10} - 1904\lambda^{9} - 1820\lambda^{8} - 1056\lambda^{7} - 343\lambda^{6} - 48\lambda^{5} =$$
$$\lambda^{5}(\lambda+1)^{7}(\lambda^{2} - 7\lambda - 48) = 0.$$

dan nilai eigennya adalah $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar 5, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas aljabar 7 dan $\lambda = 7 \pm \sqrt{241}$.
Maka didapatkan energi graf $\Gamma_{D_{16}}$:

$$\varepsilon(\Gamma_{D_{14}}) = (8-1) + \sqrt{5(8)^2 - 10(8) + 1}$$
$$\varepsilon(\Gamma_{D_{14}}) = 7 + \sqrt{241}$$

4.3 Cara menentukan energi dari graf dihedral khusus Γ_{D_8}

Untuk graf Γ_{D_8} (dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4$),terdapat keunikan dari graf dihedral lainnya, yaitu pada susunan matriks ketetanggaannya. Maka dari itu, akan kita bahas tersendiri khusus untuk graf Γ_{D_8}.

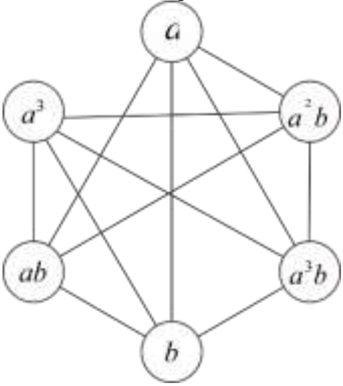
Proporsisi 4.3

Diberikan D_8 adalah grup dihedral dengan order 8, yaitu $D_8 \cong \langle a, b: a^4 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ dan diberikan Γ_{D_8} adalah graf non-komutatifnya. Maka energi dari graf Γ_{D_8} adalah $\varepsilon(\Gamma_{D_8}) = 8$.

Bukti:

Kita dapatkan senter dari D_8 adalah $Z(D_8) = \{e, a^2\}$ dari definisi grup dihedral. Dari definisi graf non-komutatif dari grup berhingga, himpunan simpul dari graf Γ_{D_8} adalah $V(\Gamma_{D_8}) = \{a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ dimana a dengan a^3 komutatif, b dengan a^2b komutatif dan ab dengan a^3b juga komutatif.

Bentuk graf Γ_{D_8}:



Maka dari itu, matriks ketetangaan dari graf Γ_{D_8} adalah :

$$A\left(\Gamma_{D_8}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan persamaan karakteristiknya adalah

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_8}\right)\right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda\Big(\lambda\big(\lambda(\lambda^3 - 2\lambda) - 2(\lambda^2)\big) + 1(-\lambda^3 - 2\lambda^2) - 1(\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ + 1(-\lambda^3 - 2\lambda^2) - 1(\lambda^3 + 2\lambda^2)\Big) + 1(0) \\ - 1(\lambda^4 - 2\lambda^3) + 1(-\lambda^4 + 2\lambda^3) - 1(\lambda^4 - 2\lambda^3) \\ + 1(-\lambda^4 + 2\lambda^3) = \lambda^6 - 12\lambda^4 - 16\lambda^3 = 0 \end{aligned}$$

Jadi nilai eigen dari matriks tersebut adalah $\lambda = 0$ dengan multiplisitas aljabar 3, $\lambda = -2$ dengan multiplisitas aljabar 2 dan $\lambda = 4$. Dari definisi energi grafnya kita dapatkan $\varepsilon\left(\Gamma_{D_8}\right) = 3|0| + 2|-2| + |4| = 8$.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan proses penelitian pada bab-bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal dapat ditentukan dengan rumus $\lambda = 0$ dengan multiplisitas $n - 2$, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas $n - 1$, dan $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-6n+1}{4}}$.
2. Nilai eigen pada $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap dapat ditentukan dengan rumus $\lambda = 0$ dengan multiplisitas $n - 3$, $\lambda = -1$ dengan multiplisitas $n - 1$, dan $\lambda = \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{5n^2-10n+1}{4}}$.
3. Energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n gasal dapat ditentukan dengan rumus $\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n - 1) + \sqrt{5n^2 - 6n + 1}$.
4. Energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n > 4$, dan n genap dapat ditentukan dengan rumus $\varepsilon\left(\Gamma_{D_{2n}}\right) = (n - 1) + \sqrt{5n^2 - 10n + 1}$.
5. Energi dari graf $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4$ adalah $\varepsilon\left(\Gamma_{D_8}\right) = 8$

5.2 Saran

Untuk pengembangan penelitian selanjutnya dapat dikaji juga sifat-sifat lainnya dari graf non-komutatif dari grup dihedral D_{2n} maupun grup lainnya, seperti grup simetri S_n atau yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, S. Akbari, H. R. Maimani. (2006). Non-Commuting Graph of a group. *Journal of Algebra*, 468-492.

Artin, M. (2010). *Algebra Second Edition.* McGraw Hill.

Bapat, R. (2014). *Graph and Matrices.* Springer.

J.B Fraleigh. (2018). *Abstract Algebra.*

Rabiha Mahmoud, Nor Hainza Samin, Ahmad Erfanian. (2017). On the energy of non-commuting graph off dihedral groups., (pp. 2-7).

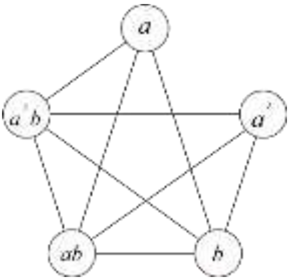
Subiono. (2015). *Aljabar Linear*.

Subiono. (2017). *Aljabar : Sebagai suatu pondasi Matematika.*

LAMPIRAN

Berikut telah kami lampirkan proses perhitungan mencari persamaan karakteristik dari Γ_{D_6}, $\Gamma_{D_{10}}$, $\Gamma_{D_{12}}$, $\Gamma_{D_{14}}$, dan $\Gamma_{D_{16}}$.

- Γ_{D_6}



Bentuk matriks ketetanggaan dari Γ_{D_6} adalah

$$A(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristiknya:

$$\det\left(\lambda I - A(\Gamma_{D_6})\right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Tabel uraian persamaan karakteristik

X	Koef				
	λ^5	λ^4	λ^3	λ^2	λ^1
1	1	0	-1		
2			-1	-1	
3			-1	-2	-1
3			-1	-2	-1

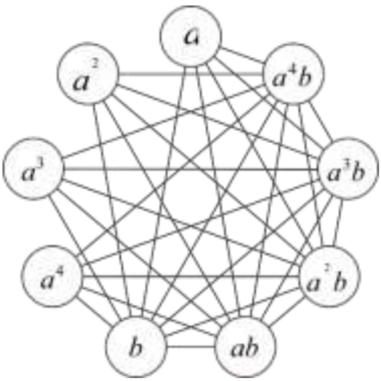
total	1	0	-9	-14	-6

Catatan : Cara membaca tabel karakteristik adalah $total = X \times Koef$*, dimana* X *adalah banyaknya kofaktor dikurangi satu pada matriks bagian dari matriks ketetanggaan.*

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya adalah

$$\det\left(\lambda I - A(\Gamma_{D_6})\right) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 8\lambda^2 - 3\lambda - 3\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda.$$

- $\Gamma_{D_{10}}$



Bentuk matriks ketetanggaan dari $\Gamma_{D_{10}}$ adalah

$$A(\Gamma_{D_{10}})_{9\times 9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristiknya:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

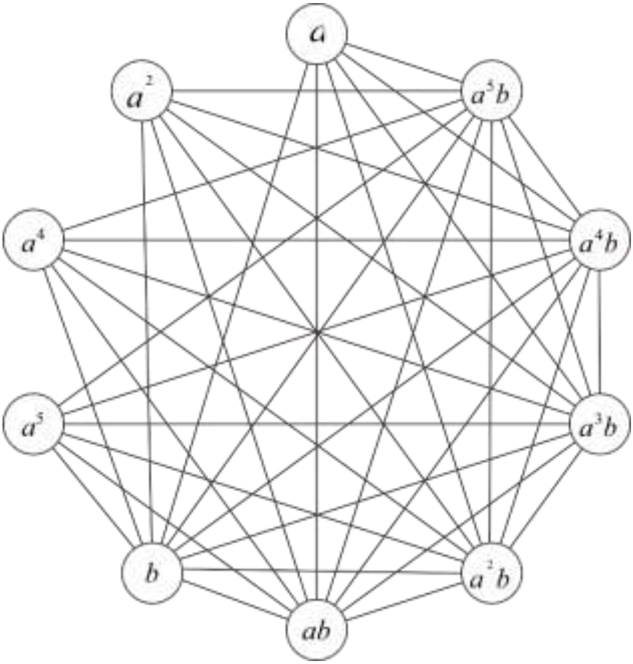
Tabel uraian persamaan karakteristik

X	Koef					
	λ^9	λ^8	λ^7	λ^6	λ^5	λ^4	λ^3
1	1	0	-1				
2			-1	-1			
3			-1	-2	-1		
4			-1	-3	-3	-1	
5			-1	-4	-6	-4	-1
5			-1	-4	-6	-4	-1
5			-1	-4	-6	-4	-1
5			-1	-4	-6	-4	-1
total	1	0	-30	-100	-135	-84	-20

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya adalah

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^9 - 30\lambda^7 - 100\lambda^6 - 135\lambda^5 - 84\lambda^4 - 20\lambda^3 = 0.$$

- $\Gamma_{D_{12}}$



Bentuk matriks ketetanggaan dari $\Gamma_{D_{12}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{12}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristiknya:

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)\right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

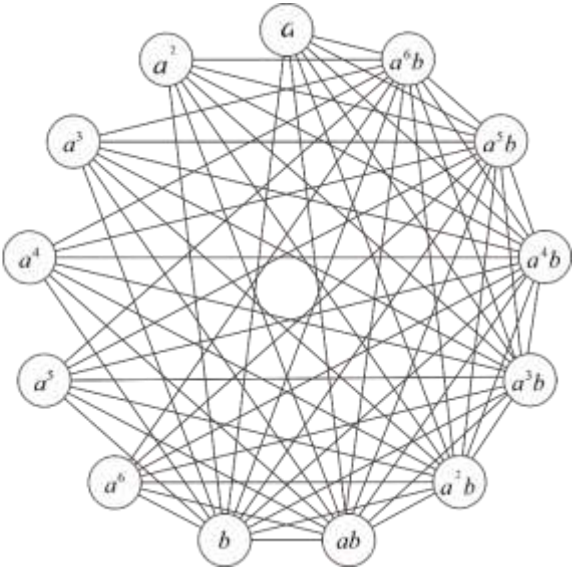
Tabel uraian persamaan karakteristik

X	Koef							
	λ^{10}	λ^{9}	λ^{8}	λ^{7}	λ^{6}	λ^{5}	λ^{4}	λ^{3}
1	1	0	-1					
2			-1	-1				
3			-1	-2	-1			
4			-1	-3	-3	-1		
5			-1	-4	-6	-4	-1	
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1
total	1	0	-39	-160	-285	-264	-125	-24

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya adalah

$$\det\left(\lambda I - A\left(\Gamma_{D_{12}}\right)\right) = \lambda^{10} - 39\lambda^{8} - 160\lambda^{7} - 285\lambda^{6} - 264\lambda^{5} - 125\lambda^{4} - 24\lambda^{3}.$$

- $\Gamma_{D_{14}}$



Bentuk matriks ketetanggaan dari $\Gamma_{D_{14}}$ adalah

$$A\left(\Gamma_{D_{14}}\right)_{13\times 13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristiknya:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

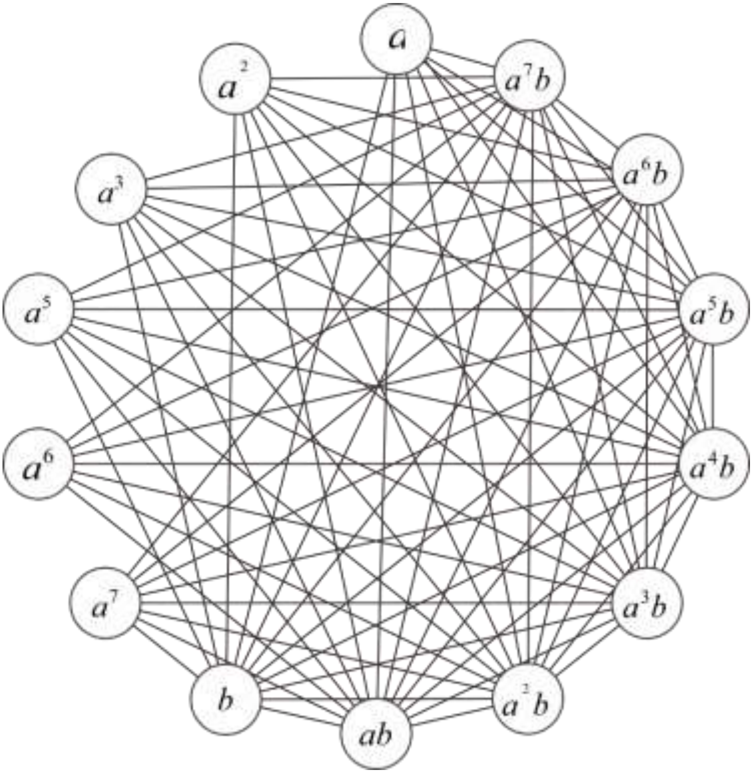
Tabel uraian persamaan karakteristik

X	Koef								
	λ^{13}	λ^{12}	λ^{11}	λ^{10}	λ^{9}	λ^{8}	λ^{7}	λ^{6}	λ^{5}
1	1	0	-1						
2			-1	-1					
3			-1	-2	-1				
4			-1	-3	-3	-1			
5			-1	-4	-6	-4	-1		
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1	
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1
total	1	0	-63	-322	-735	-924	-665	-258	-42

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya adalah

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^{13} - 63\lambda^{11} - 322\lambda^{10} - 735\lambda^{9} - 924\lambda^{8} - 665\lambda^{7} - 258\lambda^{6} - 42\lambda^{5} = 0.$$

-$\Gamma_{D_{16}}$



Bentuk matriks ketetanggaan dari $\Gamma_{D_{16}}$ adalah

$$A(\Gamma_{D_{16}})_{14\times 14} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristiknya:

$\det(\lambda I - A) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&\lambda&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&\lambda&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&\lambda&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&\lambda&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&\lambda&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&\lambda \end{vmatrix}$$

Tabel uraian persamaan karakteristik

X	Koef									
	λ^{14}	λ^{13}	λ^{12}	λ^{11}	λ^{10}	λ^{9}	λ^{8}	λ^{7}	λ^{6}	λ^{5}
1	1	0	-1							

2			-1	-1							
3			-1	-2	-1						
4			-1	-3	-3	-1					
5			-1	-4	-6	-4	-1				
6			-1	-5	-10	-10	-5	-1			
7			-1	-6	-15	-20	-15	-6	-1		
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
8			-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1	
total	1	0	-76	-448	-1218	-1904	-1820	-1056	-343	-48	

Sehingga persamaan karakteristiknya didapat

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^{14} - 76\lambda^{12} - 448\lambda^{11} - 1218\lambda^{10} - 1904\lambda^{9} - 1820\lambda^{8} - 1056\lambda^{7} - 343\lambda^{6} - 48\lambda^{5} = 0.$$