



TUGAS AKHIR - SF184801

## SOLUSI STATIS DAN BERSIMETRI BOLA DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

ARDIANA IQBAL NURROHMAN  
NRP 0111164000045

Dosen Pembimbing  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2020



TUGAS AKHIR - SF184801

**SOLUSI STATIS DAN BERSIMETRI BOLA  
DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN**

ARDIANA IQBAL NURROHMAN  
NRP 01111640000045

Dosen Pembimbing:  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan



FINAL PROJECT - SF184801

**STATIC AND SPHERICAL SYMMETRY  
SOLUTION OF EINSTEIN FIELD EQUATION**

ARDIANA IQBAL NURROHMAN  
NRP 0111164000045

Supervisor:  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

DEPARTMENT OF PHYSICS  
Faculty of Science and Data Analytics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

## LEMBAR PENGESAHAN

**SOLUSI STATIS DAN BERSIMETRI BOLA  
DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN**

**STATIC AND SPHERICAL SYMMETRY  
SOLUTION OF EINSTEIN FIELD EQUATION**

### TUGAS AKHIR

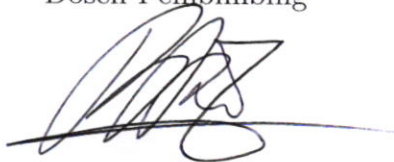
Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Bidang Fisika Teori  
Program Studi S-1 Departemen Fisika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya  
Oleh

**ARDIANA IQBAL NURROHMAN**

**NRP.01111640000045**

Menyetujui

Dosen Pembimbing



Dr.rer.nat. Bintoro Anang S.

NIP.19790719 200501.1.015

Surabaya, Agustus 2020



Halaman ini sengaja dikosongkan

# SOLUSI STATIS DAN BERSIMETRI BOLA DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

Nama : ARDIANA IQBAL NURROHMAN  
NRP : 0111164000045  
Departemen : Fisika  
Pembimbing : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

## **Abstrak**

Solusi Schwarzschild dan Solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi statis dan bersimetri bola dari Persamaan Medan Einstein dalam Teori Relativitas Umum. Solusi Schwarzschild memenuhi kondisi elektrovakum, sedangkan Solusi Reissner-Nordstrom memenuhi kondisi di mana terdapat medan elektromagnetik. Pada tugas akhir ini hanya ditinjau medan listriknya saja. Kedua solusi tersebut mendeskripsikan ruang-waktu di sekitar Lubang Hitam Schwarzschild dan Lubang Hitam Reissner-Nordstrom. Pada tugas akhir ini, dibahas sifat ruang-waktu dari solusi tersebut dan pengaruh konstanta kosmologi terhadap Metrik Reissner-Nordstrom. Hasil yang diperoleh terdapat satu singularitas intrinsik pada kedua solusi tersebut. Pada Solusi Schwarzschild terdapat satu horizon peristiwa yang terletak pada  $r = 2m$  yang memisahkan ruang-waktu Schwarzschild menjadi 2 area terpisah. Sedangkan pada Solusi Reissner-Nordstrom, terdapat 2 horizon yaitu horizon peristiwa pada  $r = r_+$  dan  $r = r_-$ , yang memisahkan ruang waktu Reissner-Nordstrom menjadi 3 area terpisah. Kehadiran konstanta kosmologi memberikan deskripsi kehadiran kurvatur dalam latar belakang ruang-waktu dari solusi Reissner-Nordstrom.



**Kata kunci :** Konstanta Kosmologi,  
Persamaan Medan Einstein,  
Solusi Reissner-Nordstrom,  
Solusi Schwarzschild

# STATIC AND SPHERICAL SYMMETRY SOLUTION OF EINSTEIN FIELD EQUATION

Name : ARDIANA IQBAL NURROHMAN  
NRP : 01111640000045  
Department : Physics  
Supervisor : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo

## Abstract

Schwarzschild and Reissner-Nordstrom Metric are static dan spherical symmetric solution of Einstein Field Equation in General Relativity. Schwarzschild Solution satisfies the electrovacuum of Einstein equation, while Reissner-Nordstrom Solution satisfies the equation in the presence of electromagnetic field. In this final project we consider only the electrostatic field. Both solutions describe spacetime around Schwarzschild Black Hole and Reissner-Nordstrom Black Hole respectively. They also have one intrinsic singularity at  $r = 0$ . The Schwarzschild black hole has an event horizon at  $r = 2m$  that separate spacetime into inside and outside horizon. In Reissner-Nordstrom solutions there are two event horizons at  $r = r_+$  and  $r = r_-$ , that separate spacetime into three region. The presence of cosmological constant describe pre-existing curvature on the spacetime background of Reissner-Nordstrom solution.

**Keywords :** Cosmological Constant,  
Einstein Field Equation,  
Reissner-Nordstrom Solution,  
Schwarzschild Solution

Halaman ini sengaja dikosongkan

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT karena telah melimpahkan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan, dan rejeki, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

# **SOLUSI STATIS DAN BERSIMETRI BOLA DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika FS ITS.

Tugas Akhir ini tidak dapat terselesaikan dengan baik tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini:

1. Seluruh keluarga khususnya kedua orangtua, Ibu Marwiyah dan Bapak Subiono, beserta Mas Iwang, Ilham dan Dik Ilyas yang telah memberikan dukungan, semangat, bimbingan, doa, dan nasihat kepada penulis, serta banyak hal lain.
2. Bapak Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo selaku dosen pembimbing yang telah membimbing, mengarahkan, memberi masukan dan memotivasi penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Bapak Agus Purwanto, D.Sc selaku dosen penguji, dan dosen fisika teori yang telah memberikan banyak nasihat dan ilmu.

4. Bapak Heru Sukamto, S.Si, M.Si sebagai dosen penguji, dan dosen fisika teori yang telah memberikan banyak nasihat dan ilmu.
5. Bapak Dr. Ali Yunus Rohedi, M.T selaku dosen wali penulis yang telah memberikan semangat, masukan, dan motivasi selama penulis kuliah S1 ini.
6. Bapak Dr.Gatut Yudoyono, M.T selaku kepala departemen fisika yang telah memberikan masukan-masukan saat kuliah.
7. Bapak Dr. Sungkono, M.Si yang telah memberikan masukan saat penulis ada kesulitan dan canda tawanya.
8. Bapak Dr. Suyatno, M.Si yang telah memberikan masukan saat penulis ada kesulitan dan canda tawanya.
9. Segenap Pembina dan teman-teman Racana Putra-Putri Sepuluh Nopember yang telah memberikan bimbingan, masukan, semangat, canda tawa dan suka duka, serta masukan kepada penulis
10. Teman-teman seperjuangan Sakti, Ari, Dayat, Edo, Afif, Andri, Farhan dan teman-teman yang tidak bisa disebutkan satu-persatu yang telah memberikan semangat dan canda tawa, dan juga Teman-teman SIRIUS 2016 yang telah mendukung, menyemangati, dan canda tawa bersama penulis, dan juga adek-adek 2017 dan 2018.
11. Teman-teman dan dosen Laboratorium Fisika Teori (LaF-TiFA), Mas Doni, Mas Bayu, Mba Rafika, Pak Nengah, Mas Dwi, Mas Nussur, Mas Kasyfil, Mas Dittho, Gutivan, Andri, Afif, Lindung, Amru, dan Eggy atas canda tawa, diskusi, bantuan, semangat, dan pengalaman.

12. Teman dekat penulis Linda, Hyoshita, Adi, Dekur, Mas Thoriq, Mas Iqbal, dan Mattin yang telah memberikan semangat, doa, dan dukungan pada penulis.
13. Ardhi Dwi Firmansyah selaku juru foto dari foto biodata penulis.
14. Ardhi Dwi Firmansyah, Wildan, Wulan, Fia, Lutfy, dan Resty yang merupakan junior penulis di Racana Putra-Putri Sepuluh Nopember yang telah memberikan saran, semangat, motivasi, suka-duka, dan canda-tawa kepada penulis
15. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih terdapat kekurangan, sehingga segala kritik dan saran sangat diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap, Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya, Agustus 2020

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan

# Daftar Isi

Halaman Judul	i
Lembar Pengesahan	v
Abstrak	vii
Abstract	ix
Daftar Isi	xv
Daftar Gambar	xvii
<b>1 Pendahuluan</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Tujuan . . . . .	3
1.4 Batasan Masalah . . . . .	3
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	4
1.6 Sistematika Penelitian . . . . .	4
<b>2 Persamaan Medan Einstein</b>	<b>5</b>
2.1 Tensor Kurvatur . . . . .	5
2.2 Persamaan Medan Einstein . . . . .	11
2.3 Persamaan Medan Maxwell . . . . .	19



2.3.1	Persamaan Medan Einstein-Maxwell . . .	27
<b>3</b>	<b>Solusi Statis dan Bersimetri Bola dari Persamaan Medan Einstein</b>	<b>29</b>
3.1	Solusi Elektrovakum Persamaan Medan Einstein	29
3.2	Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell . . .	35
<b>4</b>	<b>Lubang Hitam</b>	<b>43</b>
4.1	Singularitas . . . . .	43
4.2	Horizon Peristiwa . . . . .	45
4.3	Diagram Ruang-Waktu . . . . .	46
4.4	Ekstensi Maksimal Solusi Analitik . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Konstanta Kosmologi Tak Nol</b>	<b>63</b>
5.1	Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter . . . . .	64
5.2	Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter . . . . .	65
5.3	Singularitas RN(A)dS . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Penutup</b>	<b>71</b>
6.1	Kesimpulan . . . . .	71
6.2	Saran . . . . .	72
	<b>Daftar Pustaka</b>	<b>73</b>
	<b>Lampiran A Solusi Vakum Persamaan Medan Einstein</b>	<b>75</b>
	<b>Lampiran B Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell</b>	<b>103</b>
	<b>Lampiran C Diagram Ruang-Waktu</b>	<b>113</b>
C.1	Diagram Ruang-Waktu Solusi Schwarzschild . . .	113
C.2	Diagram Ruang-Waktu Solusi Reissner-Nordstrom	119
C.3	Ekstensi Maksimal Solusi Analitik . . . . .	131

# Daftar Gambar

2.1	Translasi Paralel Vektor dalam (a) Ruang Datar (b) Ruang Lengkung (Crouse, 2015) . . . . .	6
4.1	Diagram Ruang-Waktu Schwarzschild dalam Koordinat Eddington-Finkelstein . . . . .	49
4.2	Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Eddington-Finkelstein . . . . .	54
4.3	Diagram Ruang-Waktu Schwarzschild dalam Koordinat Kruskal-Szekeres . . . . .	58
4.4	Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Kruskal-Szekeres untuk $r > r_-$ .	60
4.5	Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Kruskal-Szekeres untuk $r < r_+$ .	61

Halaman ini sengaja dikosongkan

# Bab 1

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Teori Gravitasi telah dijelaskan dengan baik sejak lama dengan Hukum Gravitasi Universal Newton. Teori ini menerangkan bahwa benda-benda di alam semesta saling tarik-menarik oleh suatu gaya yang berbanding terbalik dengan kuadrat jarak kedua benda dan berbanding lurus dengan hasil kali dari masing-masing massa benda. Teori ini sangat berhasil dalam menjelaskan bagaimana gerak benda-benda langit dengan ketelitian yang tinggi. Keberhasilan teori gravitasi Newton, mengalami kegagalan dalam menjelaskan perilaku gerak benda yang berada pada medan gravitasi yang kuat, seperti lintasan Planet Merkurius yang tidak sesuai dengan prediksi teori gravitasi Newton. Tentu saja, hal ini mengganggu kenyamanan ilmuwan yang merasa teori fisika telah sempurna di masa akhir abad 19.

Einstein, pada tahun 1916 mengajukan teori yang revolusioner, yaitu Teori Relativitas Umum untuk menggantikan teori gravitasi Newton yang mengalami kegagalan. Einstein, secara radikal mengubah persepsi ilmuwan terhadap ruang dan

waktu sekaligus, yang mana pada masa tersebut, ruang dan waktu dianggap independen dan tidak saling memengaruhi. Einstein berpendapat bahwa ruang dan waktu merupakan satu kesatuan dalam satu struktur ruang-waktu. Lebih lanjut lagi, Einstein juga berpendapat bahwa gaya gravitasi bukanlah akibat dari interaksi benda-benda, melainkan akibat dari kelengkungan ruang-waktu. Tentu saja, hal ini sulit dimengerti bahkan oleh ilmuwan fisika sekalipun. Terlepas dari konsep rumit tersebut, teori gravitasi Einstein dapat dengan mudah dan akurat menjelaskan perilaku lintasan Planet Merkurius yang tidak wajar maupun perilaku benda-benda langit yang lain. Formulasi teori gravitasinya ini dirumuskan dalam persamaannya yang terkenal yaitu Persamaan Medan Einstein.

Solusi dari persamaan medan Einstein pertama kali dikerjakan oleh Karl Schwarzschild pada tahun yang sama dengan dipublikasikannya Teori Relativitas Umum. Schwarzschild memberikan solusi dengan simetri bola untuk persamaan medan Einstein pada ruang vakum. Hasil yang didapatkan adalah terdapat singularitas yang pada masa selanjutnya disebut sebagai Lubang Hitam (*Black Hole*) statik. Lubang hitam merupakan daerah di dalam ruang-waktu yang memiliki kelengkungan ruang-waktu sangat besar. Besarnya kekuatan dari kelengkungan ruang-waktu ini bahkan membuat area yang terisolasi sama sekali dari dunia luar. Hal ini berarti bahwa benda apapun yang memasuki area tersebut tidak akan pernah bisa keluar dari area tersebut, bahkan cahaya sekalipun. Batas area tersebut kemudian dikenal sebagai Horizon Peristiwa (*Event Horizon*) atau *point of no return*. Disebut demikian, karena lubang hitam bukanlah penyedot debu raksasa yang memasukkan apa saja ke dalamnya, melainkan seperti air terjun yang hanya menjatuhkan benda-benda yang terlalu dekat dengannya. Jika persamaan medan Einstein dipadukan dengan persamaan Maxwell, maka akan didapat Persamaan

Medan Einstein-Maxwell. Solusi statik dari persamaan ini diselesaikan oleh Hans Jacob Reissner dan Gunnar Nordstrom yang kemudian diberi nama solusi Reissner-Nordstrom (RN) yaitu solusi untuk lubang hitam yang statik, simetri bola, dan bermuatan. Ekspansi alam semesta yang terobservasi oleh Hubble juga membutuhkan kehadiran Konstanta Kosmologi agar teori gravitasi konsisten dengan observasi tersebut. Hasil dari penambahan konstanta kosmologi terhadap solusi Reissner Nordstrom akan menghasilkan solusi Reissner-Nordstrom (Anti) de Sitter (RN(A)dS).

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana mendapatkan solusi dari Persamaan Medan Einstein yang bersifat statis dan bersimetri bola beserta aspek ruang-waktunya juga pengaruh konstanta kosmologi terhadap solusi tersebut.

## 1.3 Tujuan

Tujuan pada pembuatan tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan solusi dari Persamaan Medan Einstein yang bersifat statis dan bersimetri bola beserta sifat ruang-waktunya serta pengaruh konstanta kosmologi terhadap solusi tersebut.

## 1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah hanya ditinjau pada medan listrik untuk kasus tanpa sumber (*source free*), statis dan bersimetri bola.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat pembuatan tugas akhir ini adalah agar pembaca dapat memahami sifat ruang-waktu dan pengaruh konstanta kosmologi terhadap solusi persamaan medan Einstein yang bersifat statis dan bersimetri bola.

## 1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penelitian pada tugas akhir ini terdiri dari 5 bab: Bab 1 berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penelitian tugas akhir ini. Kemudian pada Bab 2 berisi tentang Persamaan Medan Einstein. Bab 3 adalah Solusi Statis dan Bersimetri Bola dari Persamaan Medan Einstein. Bab 4 berisi tentang Lubang Hitam. Bab 5 berisi tentang Kosntanta Kosmologi Tak Nol dan Bab 6 berisi kesimpulan dan saran tugas akhir ini. Lampiran berisi penurunan rumus secara detail dalam tugas akhir ini. Pada tugas akhir ini, secara umum digunakan sistem satuan Heaviside jika tidak dinyatakan terlebih dahulu dan indeks yang menggunakan huruf yunani (misal  $\mu$ ) berjalan dari (0,1,2,3) serta indeks untuk huruf latin (misal  $j$ ) berjalan dari (1,2,3) dengan konfigurasi metrik  $(-,+,+,+)$

## Bab 2

# Persamaan Medan Einstein

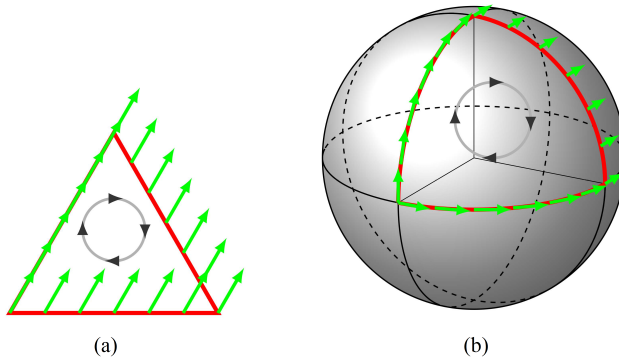
Pada bab ini, akan diformulasikan Persamaan Medan Einstein dan Persamaan Medan Elektromagnetik Maxwell dalam bentuk persamaan tensor. Persamaan Medan Einstein merupakan persamaan yang menggambarkan geometri dari ruang waktu akibat pengaruh gravitasi sedangkan Persamaan Medan Elektromagnetik Maxwell merupakan persamaan yang menggambarkan perilaku medan elektromagnetik.

### 2.1 Tensor Kurvatur

Geometri ruang waktu yang digambarkan dalam persamaan medan vakum Einstein dijabarkan dalam tensor kurvatur ruang waktu. Bentuk tensor kurvatur ini lah yang akan mendefinisikan geometri dari ruang waktu. Pada bagian ini akan diturunkan tensor kurvatur dalam persamaan medan Einstein.

Diberikan suatu vektor sembarang  $A_\mu$  pada suatu ruang Minkowski kemudian ditranslasikan secara parallel melewati





Gambar 2.1: Translasi Paralel Vektor dalam (a) Ruang Datar (b) Ruang Lengkung (Crouse, 2015)

dua titik sepanjang suatu lintasan tertutup  $C$ , maka posisi vektor tersebut akan berhimpitan dengan posisi awal vektor tersebut sebelum ditranslasikan seperti pada Gambar 2.1.a. Hal ini terjadi karena pada ruang Minkowski atau ruang datar, dua garis yang sejajar pada suatu permukaan datar akan terus sejajar sepanjang lintasan garis tersebut pada permukaan datar tersebut, dengan demikian translasi paralel suatu vektor dalam lintasan tertutup tidak mengubah posisi dan arah vektor tersebut. Tetapi, pada ruang yang lengkung, dua garis sejajar tidak akan selalu sejajar sepanjang lintasan garis tersebut dan berubah tergantung bentuk dari ruang lengkung tersebut. Jika ruang tersebut tertutup misalnya seperti bola, maka dua garis sejajar pada permukaan bola akan bertemu pada suatu titik pada permukaan bola tersebut. Jika ruangnya terbuka, misalnya seperti pelana kuda, dua garis sejajar pada permukaan pelana akan saling menjauh ketika garis tersebut diteruskan sepanjang lintasannya. Dengan kata lain, pada ruang lengkung, translasi paralel suatu vektor melewati dua titik dalam suatu lintasan tertutup akan merubah vektor

tersebut sesuai lintasannya seperti pada Gambar 2.1.b. Jika perubahan vektor tersebut adalah  $\Delta A_\mu$  dalam suatu lintasan C, maka besarnya perubahan vektor tersebut sama dengan,

$$\Delta A_\mu = \oint_C \delta A_\mu = \oint_C \Gamma_{\mu\rho}^\nu A_\mu dx^\rho, \quad (2.1)$$

dengan  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  adalah koefisien koneksi atau simbol Christoffel yang sama dengan turunan pertama dari tensor metrik dengan nilai,

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho}). \quad (2.2)$$

Dari teorema Stokes, integral kontur C dapat ditransformasi menjadi integral luasan S sehingga

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2} \oint_C [D_\gamma (\Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho) - D_\nu (\Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho)] dS^{\gamma\nu}, \quad (2.3)$$

dengan  $D_\gamma$  merupakan operator turunan kovarian yang menu-runkan tensor secara tensorial. Penggunaan operator turunan kovarian pada tensor karena pada turunan biasa, tensor ber-transformasi tidak secara tensor. Hal ini dapat didemonstra-sikan dalam turunan vektor kovarian berikut.

Misalkan diberikan suatu vektor kovarian  $X_\mu$ . Vektor ini bertansformasi sebagai

$$A_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu. \quad (2.4)$$

Ketika diturunkan secara parsial, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_\mu}{\partial x^\gamma} &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} A_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial X_\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} A_\nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jika hanya suku pertama saja yang muncul, maka turunan tersebut mentransformasi tensor secara tensorial. Namun, penambahan suku kedua mencegah hal tersebut. Sehingga digunakan suatu turunan baru yang menurunkan tensor sekaligus mentransformasinya secara tensorial

$$D_\gamma = \partial_\gamma - \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \quad (2.6)$$

dengan

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\nu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu}. \quad (2.7)$$

Dengan demikian dengan menggunakan operator turunan ini, tensor tetap dapat bertransformasi secara tensorial.

Operator ini dapat disimplifikasi menjadi operator turunan biasa  $D_\gamma \rightarrow \partial_\gamma$  pada kasus turunan dari suatu skalar. Kemudian dengan menjabarkan suku pertama dan kedua

$$\begin{aligned} D_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho) &\equiv D_\gamma C_{\mu\nu} \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu} - \Gamma_{\gamma\nu}^\sigma C_{\mu\sigma} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} D_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho) &\equiv D_\nu C_{\mu\gamma} \\ &= \partial_\nu C_{\mu\gamma} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^\sigma C_{\mu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dari Pers. (2.8) dan Pers. (2.9), maka akan didapatkan.

$$\begin{aligned} D_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho) - D_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho) &= D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma} \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu} - \Gamma_{\gamma\nu}^\sigma C_{\mu\sigma} \\ &\quad - (\partial_\nu C_{\mu\gamma} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^\sigma C_{\mu\sigma}) \\ &= \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dengan demikian didapatkan,

$$\begin{aligned} (D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma}) dS^{\gamma\nu} &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma}) dS^{\gamma\nu} \\ &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu}) dS^{\gamma\nu} \end{aligned} \quad (2.11)$$

karena tensor permukaan merupakan tensor yang simetrik ( $dS^{\gamma\nu} = dS^{\nu\gamma}$ ), maka

$$\begin{aligned}
 (D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma})dS^{\gamma\nu} &= \left( \partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} - \underbrace{\Gamma_{\mu\gamma}^\sigma C_{\sigma\nu}}_{\gamma \leftrightarrow \nu} \right) \\
 &\quad dS^{\gamma\nu} \\
 &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma})dS^{\gamma\nu} \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma}dS^{\nu\gamma} \\
 &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma})dS^{\gamma\nu} \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma}dS^{\gamma\nu}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
 (D_\gamma C_{\mu\nu} - D_\nu C_{\mu\gamma})dS^{\gamma\nu} &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma C_{\sigma\gamma})dS^{\gamma\nu} \\
 &= (\partial_\gamma C_{\mu\nu} - \partial_\nu C_{\mu\gamma})dS^{\gamma\nu} \\
 &= (\partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho)dS^{\gamma\nu}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dari Pers. (2.13) dapat diketahui bahwa simplifikasi  $D_\gamma \rightarrow \partial_\gamma$  dapat digunakan pada kasus tersebut. Dengan demikian integral pada Pers. (2.3) akan menjadi

$$\begin{aligned}
 \Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \oint_C [D_\gamma (\Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho) - D_\nu (\Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho)] dS^{\gamma\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma (\Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho) - \partial_\nu (\Gamma_{\mu\gamma}^\rho A_\rho)] dS^{\gamma\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma (\Gamma_{\mu\nu}^\rho) A_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\gamma A_\rho - \partial_\nu (\Gamma_{\mu\gamma}^\rho) A_\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \partial_\nu A_\rho] dS^{\gamma\nu}
 \end{aligned}$$

$$(2.14)$$

karena

$$\delta A_\rho = \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda A_\lambda dx^\gamma \rightarrow \partial_\gamma A_\rho = \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda A_\lambda \quad (2.15)$$

maka

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)A_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda A_\lambda - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho)A_\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda A_\lambda] dS^{\gamma\nu} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)A_\rho - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho)A_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda A_\lambda - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda A_\lambda] dS^{\gamma\nu} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \left[ \partial_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)A_\rho - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho)A_\rho + \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\lambda A_\lambda - \Gamma_{\mu\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda A_\lambda}_{\lambda \leftrightarrow \rho} \right] dS^{\gamma\nu} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho)A_\rho - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho)A_\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\rho A_\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho A_\rho] dS^{\gamma\nu} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C [\partial_\gamma(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\gamma}^\rho) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho] A_\rho dS^{\gamma\nu} \\ &\equiv \frac{1}{2} \oint_C R_{\mu\gamma\nu}^\rho A_\rho dS^{\gamma\nu} \end{aligned} \quad (2.16)$$

dengan  $R_{\mu\gamma\nu}^\rho$  merupakan tensor kurvatur Riemann

$$R_{\mu\gamma\nu}^\rho = \partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\gamma}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho. \quad (2.17)$$

Tensor kurvatur Riemann mendeskripsikan bentuk dari kelengkungan suatu ruang berdimensi- $N$ . Kemudian, didefinisikan tensor Ricci yang merupakan tensor rank-2 dari tensor kurvatur Riemann sebagai berikut

$$R_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma\rho}^\rho = \partial_\gamma \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{\mu\gamma}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\rho - \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho, \quad (2.18)$$

serta scalar Ricci merupakan trace dari tensor Ricci sebagai berikut

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\gamma} R_{\mu\gamma}. \quad (2.19)$$

Tensor dan skalar Ricci tersebut yang mendefinisikan kelengkungan ruang-waktu.

## 2.2 Persamaan Medan Einstein

Persamaan Medan Einstein menggambarkan bagaimana ruang-waktu melengkung akibat pengaruh medan gravitasi. Bentuk kelengkungan ruang-waktu digambarkan dalam tensor Ricci dalam persamaan medan Einstein. Pada bagian ini akan diturunkan Persamaan Medan Einstein dengan menggunakan integral aksi dari rapat lagrangiannya.

Aksi Einstein-Hilbert oleh medan gravitasi pada ruang vakum diberikan oleh,

$$I_G = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \mathcal{L}_G(g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}) d\Omega, \quad (2.20)$$

dengan bentuk dari  $\mathcal{L}_G$  adalah

$$\mathcal{L}_G = -\frac{c^4}{16\pi G} R, \quad (2.21)$$

dengan  $c$  merupakan kecepatan cahaya,  $G$  konstanta gravitasi universal, dan  $R$  merupakan skalar Ricci. Dengan mensubstitusikan nilai  $\mathcal{L}_G$  di atas ke persamaan aksinya, didapatkan

$$I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d\Omega. \quad (2.22)$$

Kemudian persamaan tersebut divariasikan menjadi

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g} R) d\Omega, \quad (2.23)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}R) &= \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\
 &= \delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
 &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Karena

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.25}$$

maka

$$\begin{aligned}
 \delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\delta g \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Dengan mensubstitusikan hasil di atas ke Pers. (2.24), didapatkan

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}R) &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
 &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
 &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \\
 &= \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}),
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

dengan suku ketiga,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\lambda\rho}^\rho) \\
&= g^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\lambda\nu}^\rho + g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\
&\quad - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\lambda\rho}^\rho - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\rho}^\rho \\
&\quad + g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\
&= g^{\mu\nu}\delta(\underbrace{\partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho}_{\rho \rightarrow \lambda}) \\
&\quad + g^{\mu\nu}(\underbrace{\Gamma_{\nu\rho}^\rho\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}_{\rho \rightarrow \gamma}) \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\lambda\nu}^\rho}_{\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda} + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho}_{\rho \leftrightarrow \nu} \\
&\quad - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\rho}^\rho}_{\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda} - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}_{\rho \leftrightarrow \nu} \\
&= g^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + g^{\mu\nu}(\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\lambda}^\mu\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda + g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^\nu\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
&\quad - g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\nu}^\mu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu}^\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&= g^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + g^{\mu\nu}(\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad - (-g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\lambda}^\mu - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^\nu)\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
&\quad + (-g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\nu}^\mu - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu}^\nu)\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Karena turunan kovarian dari tensor metrik bernilai nol, maka

$$\begin{aligned}
D_\lambda g^{\mu\nu} &= \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu g^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu g^{\mu\rho} = 0 \\
\partial_\lambda g^{\mu\nu} &= -\Gamma_{\rho\lambda}^\mu g^{\rho\nu} - \Gamma_{\rho\lambda}^\nu g^{\mu\rho},
\end{aligned} \tag{2.29}$$



$$\begin{aligned}
D_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu g^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\nu g^{\mu\rho} = 0 \\
\partial_\nu g^{\mu\nu} &= -\Gamma_{\rho\nu}^\mu g^{\rho\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\nu g^{\mu\rho}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

dengan mensubstitusikan 2.29 dan 2.30 ke 2.28, diperoleh

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta(\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - g^{\mu\nu} \delta(\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad - \partial_\lambda g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\nu g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&= g^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - g^{\mu\nu} \partial_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad - (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + (\partial_\nu g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&= \underbrace{\partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}_{\lambda \leftrightarrow \nu} - \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + \underbrace{\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}_{\lambda \leftrightarrow \nu} - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&= \partial_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Kemudian didefinisikan vektor-4,

$$\omega^\lambda = g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \tag{2.32}$$

dan mengingat nilai dari simbol Christoffel

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda\gamma}^{\gamma} &= \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}(\partial_{\gamma}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\gamma\sigma} - \underbrace{\partial_{\sigma}g_{\lambda\gamma}}_{\gamma\leftrightarrow\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}(\partial_{\gamma}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\gamma\sigma} - \partial_{\gamma}g_{\lambda\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}\partial_{\lambda}g_{\gamma\sigma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{-1}{2\sqrt{-g}}gg^{\gamma\sigma}\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g_{\gamma\sigma}}\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \tag{2.33} \\
&= \frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g_{\gamma\sigma}}\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \\
&= \frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial g_{\gamma\sigma}}\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \\
&= \frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\lambda}} \\
&= \partial_{\lambda}\ln\sqrt{-g}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan kedua persamaan di atas, Pers. (2.31) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda}\omega^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\gamma}\omega^{\lambda} \\
&= \partial_{\lambda}\omega^{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}\ln\sqrt{-g}\omega^{\lambda} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}\omega^{\lambda}). \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Kemudian, hasil di atas disubstitusikan ke Pers. (2.35) diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}R) &= \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}\omega^{\lambda}) \\
&= \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} + \partial_{\lambda}(\sqrt{-g}\omega^{\lambda}). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, variasi dari integral aksi medan gravitasi menjadi

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left( \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}) \right) d\Omega, \quad (2.36)$$

dengan suku kedua pada integral akan bernilai nol ketika di-integralkan,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}) d\Omega &= \int_{\Omega} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}) dx^0 d^3 x \\ &= \iiint \partial_0 (\sqrt{-g} \omega^0) dx^0 d^3 x \\ &\quad + \iiint \partial_i (\sqrt{-g} \omega^i) dx^0 d^3 x \end{aligned} \quad (2.37)$$

karena  $\omega^0$  merupakan konstanta sehingga suku pertama sama dengan 0, begitu juga pada suku kedua yang merupakan integral volume-empat dari divergensi suatu vektor yang kemudian menjadi integral luasan yang variasinya sama dengan nol,

$$\begin{aligned} \iiint \partial_i (\sqrt{-g} \omega^i) dx^0 d^3 x &= \int dx^0 \int \partial_i (\sqrt{-g} \omega^i) d^3 x \\ &= \int dx^0 \int \nabla_i (\sqrt{-g} \omega^i) d^3 x \\ &= \int dx^0 \underbrace{\oint (\sqrt{-g} \omega^i) n dS}_{=0}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

sehingga diperoleh

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (2.39)$$

Kemudian jika diambil variasi terkecil  $\delta I_G = 0$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\delta I_G &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ &= 0.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Karena  $-\frac{c^3}{16\pi G} \neq 0$  dan dipilih  $\delta g^{\mu\nu} \neq 0$ , maka agar variasi integral aksi di atas bernilai nol suku  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  harus bernilai nol, sehingga diperoleh

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (2.41)$$

yang merupakan Persamaan Medan Einstein pada kondisi elektrovakum (tidak ada materi dan energi).

Sedangkan variasi aksi untuk massa sumber adalah

$$\delta I_M = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) d\Omega \quad (2.42)$$

dengan

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) &= \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{g g^{\mu\nu} \partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-\sqrt{-g} \sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{1}{2} (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.43)$$

dengan mendefinisikan

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.44)$$

maka

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) &= \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\gamma\mu} g^{\lambda\nu} T_{\gamma\lambda} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\gamma\lambda} g^{\gamma\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\gamma\lambda} \delta g^{\gamma\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pers. (2.45) disubstitusikan ke Pers, (2.42) sehingga diperoleh,

$$\delta I_M = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega \quad (2.46)$$

Kemudian diambil aksi total yang merupakan penjumlahan aksi gravitasi dengan aksi massa sumber sebagai,

$$\begin{aligned} I &= I_G + I_M \\ \delta I &= \delta I_G + \delta I_M = 0 \\ \delta I_G &= -\delta I_M \end{aligned} \quad (2.47)$$

kemudian dengan mensubstitusikan Pers. (2.39) dan Pers.

(2.46), diperoleh

$$-\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega \quad (2.48)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Pers. (2.48) merupakan Persamaan Medan Gravitasi Einstein dengan adanya suatu medan lain. Dapat dilihat, jika dipilih  $T_{\mu\nu} = 0$  (tidak ada materi dan energi) maka persamaan tersebut akan menjadi Persamaan Medan Vakum Einstein. Pers. (2.48) jika dikalikan dengan  $g^{\mu\nu}$  akan diperoleh

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\mu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R - \frac{1}{2} (\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (2.49)$$

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$$

dengan  $T$  merupakan *trace* dari tensor energi-momentum. Kemudian Pers. (2.49) disubstitusikan ke Pers. (2.48) sehingga didapatkan persamaan medan Einstein dalam ungkapan lain sebagai berikut,

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.50)$$

## 2.3 Persamaan Medan Maxwell

Pada bagian ini, akan dijabarkan persamaan medan elektromagnetik Maxwell dalam bentuk persamaan tensor. Per-

samaan Medan Maxwell merupakan persamaan yang menggambarkan perilaku medan elektromagnetik. Persamaan tersebut merupakan gabungan dari 4 persamaan medan listrik dan medan magnet.

Definisi dari vektor medan magnet dan medan listrik dari vektor potensial diberikan sebagai,

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi,\end{aligned}\tag{2.51}$$

dengan  $\vec{H}$  merupakan vektor medan magnet,  $\vec{E}$  merupakan vektor medan listrik,  $\vec{A}$  merupakan vektor potensial dan  $\phi$  merupakan suatu medan skalar. Dengan mengambil curl dari vektor medan listrik, diperoleh

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi).\tag{2.52}$$

Mengingat bahwa curl dari semua skalar bernilai nol, maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.\tag{2.53}$$

Kemudian dengan mengambil divergensi dari vektor medan magnet, diperoleh

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\nabla \times \vec{A}).\tag{2.54}$$

Karena divergensi dari semua curl bernilai nol, diperoleh

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0.\tag{2.55}$$

Pers. (2.53) dan (2.55) merupakan persamaan Maxwell yang homogen. Kemudian dengan mengkombinasikan  $\vec{A}$  dan  $\phi$  sehingga,

$$A_\mu = (A_0 = \phi, A_i).\tag{2.56}$$

Dengan demikian  $\vec{H}$  dan  $\vec{E}$  sebanding dengan turunan dari  $A_\mu$  ( $\partial_\mu A_\mu$ ) sehingga  $\vec{H}$  dan  $\vec{E}$  dapat membentuk suatu tensor dalam bentuk  $F_{\mu\nu}$  yang mana bergantung pada  $\partial_\mu$  dan  $A_\mu$  juga anti simetris. Satu-satunya pilihan adalah dengan bentuk

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \partial_\mu = (-\partial_0, \partial_i), \quad (2.57)$$

yang merupakan tensor kuat medan elektromagnetik. Dari persamaan tersebut dapat diperoleh,

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (2.58)$$

Pers. (2.58) merupakan Persamaan Maxwell Homogen. Disebut Homogen karena hanya terdiri dari tensor kuat medan elektromagnetik  $F_{\mu\nu}$  saja.

Sedangkan untuk mendapatkan persamaan Maxwell non homogen, diturunkan persamaan Euler-Lagrange untuk rapat lagrangian  $\mathcal{L}$  yang bergantung pada suatu besaran  $q$  dan turunan pertamanya  $\frac{\partial q}{\partial x^\mu} = q_{,\mu}$  dari integral aksi rapat lagrangianya yaitu

$$\begin{aligned} I &= \int \mathcal{L}(q, q_{,\mu}) dV dt \\ &= \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(q, q_{,\mu}) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Kemudian, dengan melakukan variasi pada integral aksi di



atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{c} \int \delta \mathcal{L}(q, q, \mu) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q, \mu} \delta q, \mu \right) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \delta \frac{\partial q}{\partial x^\mu} \right) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \frac{\partial \delta q}{\partial x^\mu} \right) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \frac{\partial \delta q}{\partial x^\mu} \right) d\Omega \tag{2.60} \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \delta q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) \delta q \right) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \delta q \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) \delta q \right) d\Omega \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \delta q \right) d\Omega = 0 \\
&= \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) \delta q d\Omega = 0.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan Euler-Lagrange,

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) = 0. \tag{2.61}$$

Turunan pertama terhadap rapat lagrangian tersebut,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \frac{\partial(\partial_\mu)}{\partial x^\mu} \\
&= \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \frac{\partial(\partial_\mu)}{\partial x^\mu} \\
&= \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \partial_\mu q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q \\
&= \partial_\lambda \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \partial_\lambda \partial_\mu q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q \\
&= \partial_\lambda \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda q)} \partial_\lambda \partial_\mu q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\lambda \rightarrow} \\
&= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} \right) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q}_{\mu \leftrightarrow \nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q \quad (2.62) \\
&= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \partial_\mu \partial_\nu q \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} \right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} &= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} \right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \delta_\mu^\nu &= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} \right) \\
0 &= \partial_\nu \left( \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) \equiv \partial_\nu T_\mu^\nu,
\end{aligned}$$

maka diperoleh definisi Tensor Campuran Energi-Momentum

$$T_\mu^\nu = \partial_\mu q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}. \quad (2.63)$$

Rapat lagrangian medan elektromagnetik diberikan oleh

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.64)$$

dengan  $J^\mu$  merupakan vektor-empat arus listrik ( $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ ). Karena Tensor  $F$  merupakan tensor yang bergantung terhadap turunan pertama dari vektor potensial  $A_\mu$ , maka lagrangiangnya hanya bergantung terhadap  $A_\mu$  dan  $\partial_\mu A_\nu$ . Maka persamaan Euler-Lagrange-nya menjadi,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0. \quad (2.65)$$

Substitusi rapat lagrangian elektromagnetik ke persamaan di atas, suku pertamanya akan menghasilkan,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{\partial A_\mu J^\mu}{\partial A_\nu} = -\delta_\mu^\nu J^\mu = -J^\nu. \quad (2.66)$$

Untuk suku kedua diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{4} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \frac{\partial(F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{4} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \left( \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \\ &= -\frac{1}{4} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \left( (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu}) F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}) \right) \\ &= -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} 4F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$(2.67)$$

maka diperoleh,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (2.68)$$

Persamaan di atas merupakan Persamaan Medan Maxwell non homogen dalam bentuk tensor.

Kemudian Persamaan Maxwell ditinjau untuk kasus tanpa sumber (*source free*), sehingga tidak ada arus. Dengan demikian  $J^\nu = 0$  dan persamaan di atas menjadi

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.69)$$

Parameter  $q$  untuk medan elektromagnetik adalah  $A_\mu$ , sehingga tensor energi-momentumnya,

$$\begin{aligned} T_\mu^\nu &= \partial_\mu A_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \\ &= -F^{\nu\lambda} \partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\nu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) - F^{\nu\lambda} \partial_\lambda A_\mu + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - F^{\nu\lambda} \partial_\lambda A_\mu + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + A_\mu \partial_\lambda F^{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ T_\mu^\nu &= -F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

karena  $\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$ , maka suku kedua,

$$\partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) = \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) \right) \quad (2.71)$$

dengan mengmengingat tensor kuat medan merupakan tensor yang anti-simetri ( $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ), diperoleh

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) &= \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) + \partial_\lambda \partial_\nu (F^{\lambda\nu} A_\mu) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) - \partial_\nu \partial_\lambda (F^{\nu\lambda} A_\mu) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

maka tensor energi-momentumnya menjadi

$$T_{\mu}^{\nu} = -F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}, \quad (2.73)$$

dengan bentuk kontravariannya,

$$\begin{aligned} T^{\nu\mu} &= -g^{\nu\mu}F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}g^{\nu\mu}\delta_{\mu}^{\nu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ T^{\nu\mu} &= -F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

dan bentuk kovariannya

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= -g_{\nu\mu}F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}\delta_{\mu}^{\nu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ T_{\nu\mu} &= -F_{\mu}^{\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Dengan demikian, aksi Einstein-Hilbert dari medan elektromagnetik adalah

$$I_{EM} = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{EM} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.76)$$

dan variasi aksinya adalah

$$\begin{aligned} \delta I_{EM} &= \frac{1}{c} \int \delta (\mathcal{L}_{EM} \sqrt{-g}) d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \delta \left( \sqrt{-g} \left( \frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_{\mu} J^{\mu} \right) \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{-1}{4} \delta (\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.77)$$

dengan

$$\begin{aligned} \delta (\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= \delta (\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \\ &= \delta (\sqrt{-g}) F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \\ &\quad + 2\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} (\delta g^{\mu\lambda}) g^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

dengan mensubstitusikan nilai  $\delta\sqrt{-g}$  dari Pers. (2.26) ke persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\lambda}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \\
&\quad + 2\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}(\delta g^{\mu\lambda})g^{\nu\sigma} \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + 2F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}g^{\nu\sigma}\right)\delta g^{\mu\lambda} \\
&= 2\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}g_{\mu\lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}F_{\lambda}^{\nu}\right)\delta g^{\mu\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Dengan mensubstitusikan nilai tensor kovarian energi-momentum pada Pers. (2.75) ke persamaan di atas, diperoleh

$$\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -2\sqrt{-g}(T_{\mu\lambda})\delta g^{\mu\lambda}. \tag{2.80}$$

Indeks  $\lambda$  merupakan indeks *dummy* sehingga dapat diganti menjadi  $\nu$  untuk menghasilkan

$$\delta(\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -2\sqrt{-g}(T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.81}$$

sehingga variasi aksi medan elektromagnetik menjadi

$$\delta I_{EM} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{2}\sqrt{-g}(T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} d\Omega. \tag{2.82}$$

### 2.3.1 Persamaan Medan Einstein-Maxwell

Aksi total dari medan gravitasi Einstein dan medan elektromagnetik Maxwell, diberikan oleh

$$I = I_G + I_{EM}, \tag{2.83}$$

dengan  $I_G$  merupakan aksi oleh medan gravitasi dan  $I_{EM}$  merupakan aksi oleh medan elektromagnetik. Kemudian dila-

kukan variasi pada aksi total tersebut agar diperoleh aksi minimum, yaitu

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta I_G + \delta I_{EM} \\ 0 &= \delta I_G + \delta I_{EM} \\ -\delta I_{EM} &= \delta I_G\end{aligned}\tag{2.84}$$

dengan mensubstitusi nilai  $\delta I_G$  dan  $\delta I_{EM}$  dari Pers. (2.39) dan (2.82), diperoleh

$$\begin{aligned}-\frac{1}{c} \int \delta \mathcal{L}_{EM} d\Omega &= \int \delta \mathcal{L}_G d\Omega \\ \frac{1}{c} \int \frac{1}{2} \sqrt{-g} (T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d\Omega &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d\Omega.\end{aligned}\tag{2.85}$$

Sehingga diperoleh Persamaan Medan Einstein-Maxwell sebagai berikut

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.\tag{2.86}$$

Pers. (2.86) merupakan Persamaan Medan Einstein yang terkopel dengan Persamaan Maxwell. Meskipun secara matematis memiliki bentuk yang sama dengan Persamaan Medan Einstein, namun dengan adanya tensor energi-momentum Maxwell, persamaan tersebut mendeskripsikan sesuatu yang berbeda, dimana dari yang mendeskripsikan segala medan dalam medan gravitasi menjadi hanya medan elektromagnetik Maxwell dalam medan gravitasi. Persamaan tersebut menggambarkan geometri ruang-waktu dalam kondisi vakum akibat pengaruh suatu medan elektromagnetik. Geometri ruang-waktu didefinisikan oleh sisi kiri dari persamaan tersebut, dan kelengkungan ruang-waktu ditentukan oleh tensor Ricci  $R_{\mu\nu}$  dan skalar Ricci  $R$ . Sedangkan sisi kanan dari persamaan tersebut menggambarkan pengaruh suatu sumber medan elektromagnetik titik di pusat koordinat.

## Bab 3

# Solusi Statis dan Bersimetri Bola dari Persamaan Medan Einstein

### 3.1 Solusi Elektrovakum Persamaan Medan Einstein

Solusi Schwazschild merupakan solusi elektrovakum dari Persamaan Medan Einstein. Solusi ini merupakan interpretasi dari solusi untuk Persamaan Medan Einstein pada kasus statik dan memiliki simetri bola dari suatu objek bermassa  $M$ . Disebut statik karena tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bergantung terhadap waktu atau  $\partial_\gamma g_{\mu\nu} = 0$ , elemen garis  $ds^2$  harus invarian terhadap transformasi pembalikan waktu  $x^0 \rightarrow -x^0$ . Dengan demikian elemen garis  $ds^2$  tidak boleh memiliki suku  $dx^i dx^0$  yang menjadikannya tidak invarian terhadap transformasi pembalikan waktu, oleh karena itu  $g_{i0} = g_{0i} = 0$ .



Kemudian, untuk mempertahankan bentuk simetri bola dan tensor metrik tidak bergantung waktu sehingga elemen garisnya tidak boleh terdapat suku silang antara  $t$  dengan  $(r, \theta, \phi)$ , maka tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bernilai 0 hanya pada elemen diagonalnya saja yang koefisiennya merupakan fungsi dari parameter  $r$  saja.

Metrik dengan simetri bola merupakan metrik yang mempertahankan bentuk

$$Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

dengan  $W$  merupakan suatu tetapan atau fungsi dari  $r$  dan  $t$ , dengan parameter lainnya tidak bergantung terhadap  $\theta$  dan  $\phi$ . Disebut statik karena tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bergantung terhadap waktu ( $\partial_0 g_{\mu\nu}$ ) atau elemen garis  $ds^2$  harus invarian terhadap transformasi pembalikan waktu  $x^0 \rightarrow -x^0$ . Dengan demikian elemen garis  $ds^2$  tidak boleh memiliki suku  $dx^i dx^0$  atau  $dx^0 dx^i$  yang menjadikannya tidak invarian terhadap transformasi pembalikan waktu, oleh karena itu  $g_{i0} = g_{0i} = 0$ . Maka tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bernilai 0 hanya pada elemen diagonalnya saja yang koefisiennya merupakan fungsi dari parameter  $r$  saja. Dengan demikian didapatkan ansatz untuk metriknya berupa

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + V(r)dr^2 + W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (3.1)$$

Dari kondisi khusus ini, 10 komponen bebas dari tensor metrik yang secara umum bergantung pada  $x_\mu$  menjadi tereduksi hanya menjadi 4 komponen bebas yang merupakan fungsi dari  $r$  saja. Kemudian, karena  $r$  merupakan parameter radial, maka dapat digantikan dengan sembarang fungsi  $r$ , sehingga misalkan diambil  $Wr^2 = \hat{r}^2$ , maka  $\hat{r} = \sqrt{W}r$ , serta

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = \sqrt{W} \left( 1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right), \quad (3.2)$$

maka dapat diperoleh

$$V dr^2 = \frac{V}{W} \left( 1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)^{-2} d\hat{r}^2 \equiv \hat{V} d\hat{r}^2, \quad (3.3)$$

sehingga  $V \equiv \hat{V}$ . Dengan menggunakan cara yang sama, dapat diperoleh  $U \equiv \hat{U}$ . Kemudian dengan mengganti  $r$  menjadi  $\hat{r}$ , maka elemen garis di atas akan menjadi,

$$ds^2 = -\hat{U}(\hat{r}) dt^2 + \hat{V}(\hat{r}) d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (3.4)$$

Lalu dengan menghilangkan tanda topi pada persamaan di atas, serta dipilih ansatz fungsi dari  $U$  dan  $V$  sebagai

$$U(r) = e^{2\nu(r)}, \text{ dan } V(r) = e^{2\lambda(r)}, \quad (3.5)$$

maka elemen garisnya menjadi

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi). \quad (3.6)$$

Elemen garis persamaan di atas kemudian digunakan untuk menentukan tensor metrik kovarian  $g_{\mu\nu}$  sebagai berikut,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

karena

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \quad (3.8)$$

maka bentuk kontravarian dari tensor metriknya adalah,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Nilai dari simbol Christoffel jenis kedua dari tensor metrik kovarian di atas adalah

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (3.10)$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen yang dapat dilihat secara lengkap dalam Lampiran A. Komponennya yang tidak bernilai nol adalah,

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \nu' & \Gamma_{00}^1 &= \nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\ \Gamma_{11}^1 &= \lambda' & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\lambda} \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tensor Ricci dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}. \quad (3.12)$$

Karena Tensor Ricci merupakan tensor yang simetris ( $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ ), maka tensor tersebut hanya memiliki 10 komponen bebas. Untuk komponen  $R_{i0}, (i = 1, 2, 3)$ ,

$$R_{i0} = \partial_0\Gamma_{i\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{i0}^{\sigma} + \Gamma_{i\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho 0}^{\sigma} - \Gamma_{i0}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}, \quad (3.13)$$

karena kondisi statik, maka  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ , sehingga  $\partial_0 \Gamma_{i\sigma}^{\sigma} = 0$ . Dengan demikian tensor Ricci tersebut menjadi

$$R_{i0} = -\partial_j \Gamma_{i0}^j + \Gamma_{ij}^{\rho} \Gamma_{\rho 0}^j - \Gamma_{i0}^{\rho} \Gamma_{\rho j}^j. \quad (3.14)$$

Kemudian dengan menggunakan nilai  $\Gamma_{j0}^j = 0, \Gamma_{0\rho}^{\rho} = 0$  dan  $\Gamma_{ij}^0 = 0$ , maka dapat diperoleh,

$$R_{i0} = R_{0i} = 0, \quad (3.15)$$

sehingga komponen Tensor Ricci yang tersisa hanya komponen dalam elemen diagonalnya saja ( $R_{\mu\mu}$ ). Nilai dari  $R_{\mu\mu}$  ini adalah,

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\mu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (3.16)$$

Lalu untuk  $\mu = 0$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\ &= \left\{ -\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kemudian untuk  $\mu = 1$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\sigma - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\ &= \nu'' + (\nu')^2 - \lambda' \nu' - \frac{2\lambda'}{r}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

dan untuk  $\mu = 2$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\ &= (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} - 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

serta untuk  $\mu = 3$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\ &= \sin^2 \theta \left[ (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} - 1 \right] \\ &= \sin^2 \theta R_{22}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dari Pers. (2.48), Pada kondisi di mana tidak ada materi dan energi ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), menghasilkan  $R_{\mu\nu} = 0$ , sehingga diperoleh

$$-\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0 \quad (3.21)$$

$$\nu'' - \lambda' \nu' + (\nu')^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad (3.22)$$

$$(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} = 1. \quad (3.23)$$

Kemudian pers. (A.23) dan (A.24) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$-\frac{2(\nu' + \lambda')}{r} = 0, \quad (3.24)$$

atau

$$(\nu' + \lambda') = 0 \quad (3.25)$$

$$\nu + \lambda = \text{konstan}. \quad (3.26)$$

Pada  $r \rightarrow \infty$ , metrik harus kembali pada bentuk Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  sehingga  $\nu$  dan  $\lambda \rightarrow 0$ , maka

$$\nu + \lambda = 0 \rightarrow \nu = -\lambda, \quad (3.27)$$

dengan memasukkan pers.(A.25) ke pers.(A.29), maka diperoleh

$$(1 + 2r\nu')e^{(2\nu)} = \frac{d}{dr} [re^{(2\nu)}] = 1. \quad (3.28)$$

Kemudian persamaan di atas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\int d [re^{(2\nu)}] = \int dr$$

$$re^{(2\nu)} = r + C, \quad (3.29)$$

dengan

$$C = -\frac{2GM}{c^2}$$

$$C = -2m$$

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (3.30)$$

sehingga metriknya menjadi,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.31)$$

Metrik di atas merupakan metrik Schwarzschild yang memberikan Solusi Persamaan Medan Vakum Einstein.

## 3.2 Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell

Solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi dari Persamaan Medan Einstein-Maxwell. Solusi ini merupakan solusi non-vakum dari Persamaan Medan Einstein dengan adanya medan elektromagnetik. Dalam tugas akhir ini hanya ditinjau dalam medan listrik saja, sehingga memberikan solusi yang statik dan memiliki simetri bola di luar suatu objek massa dan muatan titik.

Persamaan Medan Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

jika dikalikan dengan  $g^{\mu\nu}$  menghasilkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dengan mensubstitusi

$$\delta_{\mu}^{\mu} = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4, \quad (3.34)$$

diperoleh

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (3.35)$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T \quad (3.36)$$

sehingga persamaan medan Einstein dapat ditulis kembali sebagai

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (3.37)$$

Dari definisi Tensor Energi-Momentum Einstein-Maxwell

$$T_{\mu}^{\nu} = -F^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \quad (3.38)$$

sehingga

$$\begin{aligned} T &= T_{\mu}^{\mu} = -F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}(\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}(4)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} + F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

sehingga persamaan medannya menjadi

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

Tensor energi-momentum  $T_{\mu\nu}$  dapat dicari lewat tensor kuat medan  $F_{\mu\nu}$  yang bersifat antisimetri dengan menggunakan persamaan Maxwell

$$\partial_{\rho}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\rho\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\rho} = 0 \quad (3.41)$$

untuk  $\rho = 0$

$$\partial_0F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{0\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu 0} = 0 \quad (3.42)$$

dengan mengontraksi insdek  $\mu \leftrightarrow \nu$  pada suku ketiga, diperoleh

$$\partial_0F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{0\mu} + \partial_{\nu}F_{\mu 0} = 0 \quad (3.43)$$

$$\partial_0F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{0\mu} - \partial_{\nu}F_{0\mu} = 0 \quad (3.44)$$

$$\partial_0F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.45)$$

Medan listrik di luar benda bermuatan  $q$  hanya berubah dalam arah radial dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya

$$E = E(r) \propto \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = f(r) = f \quad (3.46)$$

maka hanya komponen  $F_{01}$  dan  $F_{10}$  yang tidak bernilai nol

$$F_{01} = f(r) = -F_{10} \quad (3.47)$$

maka

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

dan bentuk kontravariannya

$$F^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} F_{\rho\lambda} \quad (3.49)$$

dengan komponen yang tidak nol

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{00} g^{11} F_{01} \\ &= g^{00} g^{11} F_{01} \\ &= -e^{-2\nu} e^{-2\lambda} f \\ &= -f e^{-2\nu-2\lambda} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} F^{10} &= g^{01} g^{10} F_{10} \\ &= g^{11} g^{00} F_{10} \\ &= -e^{-2\lambda} e^{-2\nu} - f \\ &= f e^{-2\nu-2\lambda} = -F^{01} \end{aligned}$$

maka tensor kuat medannya menjadi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -f e^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 \\ f e^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$



bentuk tensor campurannya

$$F_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\gamma} F^{\gamma\mu} \quad (3.52)$$

dengan komponen yang tidak nol

$$\begin{aligned} F_1^0 &= g_{1\gamma} F^{\gamma 0} \\ &= g_{11} F^{10} \\ &= e^{2\lambda} f e^{-2\nu-2\lambda} \\ &= f e^{-2\nu} \\ F_0^1 &= g_{0\gamma} F^{\gamma 1} \\ &= g_{00} F^{01} \\ &= -e^{2\nu} - f e^{-2\nu-2\lambda} \\ &= f e^{-2\lambda} \end{aligned} \quad (3.53)$$

sehingga tensornya menjadi

$$F_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & f e^{-2\nu} & 0 & 0 \\ f e^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

dengan demikian, tensor energi-momentumnya, seperti pada Lampiran C, adalah

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= -F_{\mu}^{\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} g_{\nu\mu} F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ T_{00} &= -F_0^{\lambda} F_{0\lambda} + \frac{1}{4} g_{00} F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -f e^{-2\lambda} f + \frac{1}{2} - e^{-2\nu} (-f e^{-2\nu-2\lambda}) f \\ &= -f^2 e^{-2\lambda} + \frac{1}{2} f^2 e^{-2\lambda} = -\frac{1}{2} f^2 e^{-2\lambda} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= -F_1^\lambda F_{1\lambda} + \frac{1}{4}g_{11}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -fe^{-2\nu}(-f) + \frac{1}{2}e^{-2\lambda} - fe^{-2\nu-2\lambda}f \\
&= f^2e^{-2\nu} - \frac{1}{2}f^2e^{-2\lambda} \\
&= \frac{1}{2}f^2e^{-2\nu}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= -F_2^\lambda F_{2\lambda} + \frac{1}{4}g_{22}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{2}r^2 - fe^{-2\nu-2\lambda}f \\
&= -\frac{1}{2}r^2f^2e^{-2\nu-2\lambda}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= -F_3^\lambda F_{3\lambda} + \frac{1}{4}g_{33}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta - fe^{-2\nu-2\lambda}f \\
&= -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta f^2 e^{-2\nu-2\lambda} = \sin^2 \theta T_{22}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Karena solusi ini merupakan solusi yang bersimetri bola dan statis, maka solusi ini memiliki ansatz metrik, tensor metrik, dan tensor Ricci yang sama dengan solusi Schwarzschild. Sehingga diperoleh masing-masing komponen Tensor Ricci,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ -\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)} \\
R_{11} &= \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \\
R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \left[ (1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 \right] = \sin^2 \theta R_{22}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Nilai-nilai ini disubstitusi ke persamaan

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.60)$$

untuk komponen-00

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \\ \left\{ -\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)} &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2} f^2 e^{-2\lambda} \end{aligned} \quad (3.61)$$

untuk komponen-11

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} \\ \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} f^2 e^{-2\nu} \end{aligned} \quad (3.62)$$

untuk komponen-22

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} \\ (1 + r\nu' - r\lambda')e^{(2\nu)} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2} r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Persamaan pada komponen-00 dikalikan  $e^{2\lambda}$  menjadi

$$\left\{ -\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{2\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( -\frac{1}{2} f^2 \right) \quad (3.64)$$

persamaan komponen-11 dikalikan  $e^{2\nu}$  menjadi

$$\left( \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \right) e^{2\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} f^2 \quad (3.65)$$

kemudian persamaan tersebut dijumlahkan menjadi

$$\begin{aligned} \nu' - \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} &= 0 \\ \nu' + \lambda' &= 0 \\ \nu + \lambda &= \text{konstan} \end{aligned} \quad (3.66)$$

dengan syarat pada  $r \rightarrow \infty$ , metrik kembali menjadi ke bentuk minkowski sehingga

$$\begin{aligned}\nu + \lambda &= 0 \\ \nu &= -\lambda.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Dengan mensubstitusikan nilai di atas ke persamaan komponen-22

$$\begin{aligned}(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda} \\ (1 + 2r\nu')e^{(2\nu)} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{1}{2}\right)r^2 f^2 e^{-2\nu+2\nu} \\ \frac{dre^{(2\nu)}}{dr} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{1}{2}\right)r^2 f^2 \\ \frac{dre^{(2\nu)}}{dr} &= 1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 f^2 \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 f^2\right] dr \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}\right] dr \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{Gq^2}{4\pi \epsilon_0^2 c^4 r^2}\right] dr \\ re^{(2\nu)} &= \frac{Gq^2}{4\pi \epsilon_0^2 c^4 r} + 1 + K \\ e^{(2\nu)} &= \frac{Gq^2}{4\pi \epsilon_0^2 c^4 r^2} + 1 + \frac{K}{r}\end{aligned}\tag{3.68}$$

dengan mengambil  $K = -2m$  (Radius Schwarzschild) dan  $\frac{Gq^2}{4\pi \epsilon_0^2 c^4} \equiv Q^2$ , maka diperoleh

$$e^{(2\nu)} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\tag{3.69}$$

sehingga solusi persamaan medan Einstein-Maxwell adalah

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

(3.70)

elemen garis (3.70) tersebut dikenal sebagai metrik Reissner-Nordstrom.

## Bab 4

# Lubang Hitam

Pada bab ini, akan dijelaskan beberapa aspek fisis dari Lubang Hitam Schwarzschild dan Reissner-Nordstrom. Aspek-aspek tersebut antara lain singularitas, horizon peristiwa (*event horizon*), dan diagram ruang-waktu dari lubang hitam.

### 4.1 Singularitas

Singularitas merupakan keadaan yang menyebabkan cacat ruang waktu. Kecacatan ruang waktu tersebut diindikasikan dengan nilai metriknya yang tidak terdefinisi. Dalam lubang hitam Reissner-Nordstrom terdapat 3 singularitas yang terdiri dari 1 singularitas intrinsik dan 2 singularitas koordinat.

Singularitas intrinsik merupakan kecacatan pada metrik yang tidak bisa dihilangkan dengan menggunakan semua jenis transformasi yang mungkin dari metrik tersebut dan berada pada pusat lubang hitam. Sedangkan singularitas koordinat merupakan kecacatan metrik akibat pemilihan koordinat. Berbeda dengan singularitas kurvatur yang tidak dapat dihilangkan, singularitas ini dapat dihilangkan dengan mentransformasi metrik dalam koordinat lain. Pada bagian ini akan

dicari singularitas koordinat dari lubang hitam Schwarzschild dan Reissner-Nordstrom serta bagaimana transformasi yang dapat menghilangkan singularitas tersebut.

Singularitas koordinat dapat diketahui melalui koefisien dari komponen tensor metrik  $g_{\mu\nu}$ . Untuk Solusi Schwarzschild diberikan oleh,

$$g_{00} = (g_{11})^{-1} = 1 - \frac{2m}{r} = \frac{\epsilon}{r} \quad (4.1)$$

$$\epsilon_S = r - 2m. \quad (4.2)$$

Dengan demikian, singularitas koordinat pada lubang hitam Schwarzschild terdapat pada saat  $\epsilon_S = 0$  atau pada  $r = 2m$  dan singularitas intrinsik pada  $r = 0$ . Sedangkan untuk lubang hitam Reissner-Nordstrom diberikan oleh,

$$g_{00} = (g_{11})^{-1} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} = \frac{\epsilon}{r^2} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{RN} = r^2 - 2mr + Q^2. \quad (4.4)$$

Koefisien tersebut memiliki diskriminan,

$$\Delta = m^2 - Q^2. \quad (4.5)$$

Jika  $Q^2 > m^2$ , maka determinannya negatif, sehingga  $\epsilon$  tidak mempunyai akar yang riil. Dengan demikian, metrik Reissner-Nordstrom memiliki Singularitas Terbuka (*Naked-Singularity*), yaitu non singular di setiap nilai  $r$  kecuali  $r = 0$ . Hal ini tentunya tidak diinginkan karena tidak berarti fisis. Jika  $Q^2 < m^2$ , metrik Reissner-Nordstrom memiliki singularitas lain ketika  $\epsilon = 0$ , yaitu pada  $r = r_+$  dan  $r = r_+$ , di mana

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

nilai  $r$  tersebut membagi ruang-waktu Reissner-Nordstrom menjadi 3 area, yaitu

- i.  $r_+ < r < \infty$
- ii.  $r_- < r < r_+$
- iii.  $0+ < r < r_-$

Jika  $Q^2 = m^2$  atau pada Lubang Hitam Ekstrim, maka  $r_+ = r_-$  atau dengan kata lain, hanya area i dan iii yang muncul.

## 4.2 Horizon Peristiwa

Horizon peristiwa merupakan suatu permukaan yang melingkupi suatu lubang hitam di mana benda yang memasukinya tidak akan pernah bisa keluar darinya. Disebut demikian karena horizon peristiwa memisahkan peristiwa di antara horizon tersebut sehingga peristiwa yang berada di dalam horizon peristiwa tidak dapat teramati oleh pengamat yang berada di luar horizon peristiwa. Hal ini secara klasik dijelaskan dengan kecepatan lepasnya yang mencapai kecepatan cahaya. Sehingga cahaya pun tidak bisa keluar dari horizon peristiwa.

Horizon Peristiwa didefinisikan sebagai suatu set dari koordinat ruang yang menjadikan koefisien  $g_{00} = 0$ . Nilai  $g_{00}$  yang sama dengan 0 akan menyebabkan koefisien  $g_{11} = \infty$  sehingga metrik tidak terdefinisi pada suatu set koordinat yang menghasilkan nilai  $g_{00} = 0$  tersebut. Pada Lubang Hitam Schwarzschild memiliki horizon peristiwa saat  $r = 2m$ . Sedangkan Lubang Hitam Reissner-Nordstrom memiliki horizon peristiwa pada  $r = r_-$ , dan  $r = r_+$ . Horizon  $r = r_-$  merupakan horizon dalam yang terletak di dalam horizon peristiwa  $r = r_+$ . Horizon dalam ini biasanya disebut sebagai Horizon Cauchy. Ketika diambil  $t$  dan  $r$  konstan, sehingga  $dt = dr = 0$  maka metrik pada Pers. (3.31) dan (3.70) menjadi,

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.7)$$



yang mendeskripsikan suatu permukaan bola. Dengan demikian, permukaan bola pada saat  $r = 2m$  merupakan horizon peristiwa pada lubang hitam Schwarzschild, sedangkan pada Reissner-Nordstrom terdapat pada permukaan bola  $r = r_+$ . Sedangkan permukaan bola pada  $r = r_-$  merupakan Horizon Cauchy yang memisahkan antara area ii dengan area iii.

Struktur ruang-waktu pada saat  $r = r_+$  mirip dengan solusi Schwarzschild pada saat  $r = 2m$ . Struktur ruang-waktu pada area i dan iii, bertukar peran pada area ii menjadi waktu-ruang. Hal ini mengindikasikan bahwa pada area i dan iii benda dapat bergerak seperti pada umumnya, namun pada area ii, benda akan dipaksa oleh ruang-waktu untuk menuju area iii dengan kecepatan melebihi kecepatan cahaya. Hal ini dapat terjadi akibat peran ruang-waktu yang bertukar. Dengan demikian, ruang-waktu pada area i dan iii menjadi statis (tidak menyeret benda), namun area ii tidak. Seperti pada kasus Schwarzschild, pada koordinat ini, kausalitas area i, ii, dan iii tampak tidak terhubung sama sekali karena ruang-waktu memiliki orientasi yang jauh berbeda pada setiap area yang terbagi oleh luasan bola  $r = r_{\pm}$ .

### 4.3 Diagram Ruang-Waktu

Peristiwa yang terjadi di dekat lubang hitam dapat diprediksi dengan melihat diagram ruang-waktu di dekat lubang hitam. Untuk mengetahui diagram ruang waktu dari lubang hitam Schwarzschild dan Reissner-Nordstrom, dicari terlebih dahulu geodesik null atau geodesik cahaya yang mendefinisikan kausalitas. Untuk itu dihilangkan terlebih dahulu singularitas koordinat dari lubang hitam Reissner-Nordstrom.

Pada kasus lubang hitam Schwarzschild, diperkenalkan koordinat baru dengan transformasi,

$$\bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m). \quad (4.8)$$

sehingga

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r-2m} dr \quad (4.9)$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned} dt &= d\bar{t} - 2m \frac{dr}{r-2m} \\ dt^2 &= d\bar{t}^2 + 4m^2 \frac{dr^2}{(r-2m)^2} - \frac{4m}{r-2m} d\bar{t} dr. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dengan begitu, didapatkan

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.11)$$

Metrik di atas merupakan metrik Schwarzschild dalam koordinat Eddington-Finkelstein. Bentuk ini reguler pada semua titik kecuali pada  $r = 0$ , sehingga singularitas koordinatnya telah dihilangkan. Kondisi untuk geodesik null radial adalah

$$d\dot{\Omega} = ds^2 = 0, \quad (4.12)$$

dengan mengambil

$$h = 1 - g_{00} = \frac{2m}{r}. \quad (4.13)$$

sehingga geodesik null radial yang masuk memiliki gradien,

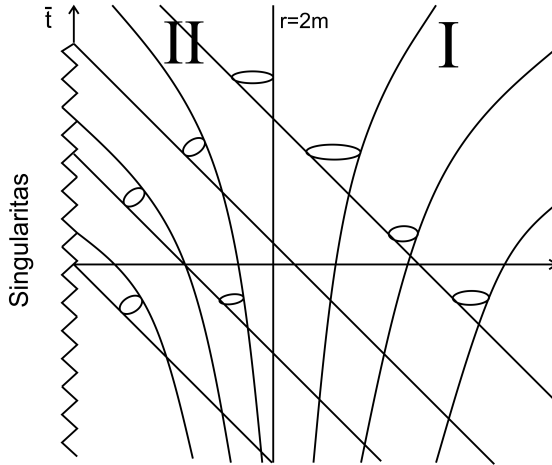
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{dr} &= \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^{-1} = - \frac{1+h}{-h-1} \\ &= - \frac{1+h}{(h+1)} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sedangkan geodesik null radial yang keluar dari lubang hitam adalah akar yang lain. Dengan demikian, diperoleh geodesik null radial yang keluar dengan gradien,

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \left( \frac{dr}{d\bar{t}} \right)^{-1} = - \frac{1+h}{-h+1} \quad (4.15)$$

Dengan demikian pada saat mendekati  $r = 2m$ , kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar semakin menyempit pada arah keluarnya dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = 2m$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda memasuki daerah di dalam  $r = 2m$ , benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = 2m$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam ketika sudah memasuki horizon peristiwanya. Kemudian pada saat mendekati  $r = 0$ , gradiennya akan sama dengan  $-1$ . Kemudian pada saat mendekati  $r = 2m$  dari kiri  $r \rightarrow 2m^-$ , gradiennya akan sama dengan  $-\infty$ . Dengan demikian pada saat mendekati  $r = 2m$  dari dalam, kerucut cahaya semakin menyempit pada arah keluarnya dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = 2m$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda beradai daerah di dalam  $r = 2m$ , benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = 2m$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda yang sudah berada di dalam horizon peristiwa tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam.

Gambar (4.1) merupakan diagram ruang-waktu lubang hitam Schwarzschild yang menunjukkan semua peristiwa suatu benda dengan adanya lubang hitam Schwarzschild. Lingkaran-lingkaran pada gambar mewakili kerucut cahaya yang merupakan jangkauan peristiwa yang dapat dilalui suatu benda. Kerucut ini merupakan perpotongan antara geodesik null radial masuk dengan geodesik null radial keluar. Pada di luar



Gambar 4.1: Diagram Ruang-Waktu Schwarzschild dalam Koordinat Eddington-Finkelstein

lubang hitam  $r > 2m$ , atau pada saat benda berada jauh dari lubang hitam, dapat dilihat kerucut relatif membentuk sudut 45 derajat terhadap sumbu  $\bar{t}$ . Hal ini menandakan benda berada pada ruang yang asimtot dengan ruang Minkowski. Namun, semakin dekat benda dengan horizon peristiwa, semakin menyempit kerucut cahayanya, yang menandakan benda semakin tertarik ke dalam lubang hitam. Ketika benda melewati horizon peristiwa, atau saat benda memasuki area diantara singularitas ( $r = 0$ ) dan  $r = 2m$ , kerucut cahaya menekuk tajam dan mengarahkan benda ke arah singularitas. Hal ini menandakan bahwa benda yang memasuki horizon peristiwa dipaksa masuk lebih dalam sampai menyentuh singularitas. Lebih lanjut lagi, benda yang telah melewati horizon peristiwa, tidak akan pernah bisa kembali ke area  $r > 2m$ , hal ini disebabkan tidak ada masa depan benda yang berada di area tersebut lagi yang ditandai dengan kerucut cahaya yang

berhimpitan dengan garis  $r = 2m$ .

Sedangkan untuk kasus Reissner-Nordstrom diperkenalkan koordinat waktu baru

$$\bar{t} = t + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-), \quad (4.16)$$

Dengan transformasi tersebut diperoleh,

$$ds^2 = -(1 - f)d\bar{t}^2 + 2f d\bar{t}dr + (1 + f)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.17)$$

dengan

$$f = 1 + g_{00} = \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \quad (4.18)$$

Metrik pada Pers. (4.17) di atas merupakan metrik Reissner-Nordstrom dalam koordinat Eddington-Finkelstein.

Kondisi untuk geodesik null radial adalah

$$d\Omega = ds^2 = 0, \quad (4.19)$$

sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= -(1 - f)d\bar{t}^2 + 2f d\bar{t}dr + (1 + f)dr^2 + 0 \\ 0 &= (1 - f)d\bar{t}^2 + 2f d\bar{t}dr - (1 + f)dr^2 \\ 0 &= (1 - f)\left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)^2 + 2f \frac{d\bar{t}}{dr} - (1 + f) \\ 0 &= \left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)^2 + \frac{2f}{1 - f} \frac{d\bar{t}}{dr} - \frac{1 + f}{1 - f}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dengan demikian diketahui akar kuadrat dari persamaan di atas

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \frac{f}{1 - f} \pm \frac{1}{1 - f}. \quad (4.21)$$

sehingga untuk godesik null radial yang masuk ke dalam lubang hitam memiliki gradien

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} - \frac{1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f-1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= -1\end{aligned}\tag{4.22}$$

Dengan demikian geodesik null radial yang masuk ke lubang hitam merupakan garis lurus dengan gradien -1. Sedangkan untuk geodesik null radial yang keluar dari lubang hitam merupakan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} + \frac{1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{1+f}{1-f}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Pada saat  $r$  mendekati tak hingga ( $r \rightarrow \infty$ ), gradiennya akan sama dengan 1, dengan demikian pada jarak yang sangat jauh dari singularitas, kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar memiliki sudut  $45^\circ$  terhadap sumbu  $\bar{t}$  sehingga kerucut cahaya seperti pada ruang Minkowski. Dengan demikian, pada jarak yang sangat jauh, struktur ruang-waktu dari lubang hitam Schwarzschild asimptot dengan ruang Minkowski. Kemudian pada saat mendekati  $r = r_+$  dari kanan  $r \rightarrow r_+^+$ , gradiennya akan sama dengan  $\infty$ , dengan demikian pada saat mendekati  $r = r_+$ , kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar memiliki sudut yang semakin menyempit pada arah keluarnya  $\theta \leq 45^\circ$  terhadap sumbu  $\bar{t}$  dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = r_+$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda memasuki daerah di dalam  $r = r_+$ ,

benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = 2m$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam ketika sudah memasuki horizon peristiwanya. Kemudian pada saat mendekati  $r = r_+$  dari kiri  $r \rightarrow r_+^-$ , gradiennya akan sama dengan  $-\infty$ , dengan demikian pada saat mendekati  $r = r_+$  dari dalam, kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar semakin menyempit pada arah keluarnya dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = 2m$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda beradai daerah di dalam  $r = 2m$ , benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = 2m$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda yang sudah berada di dalam horizon peristiwa tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam.

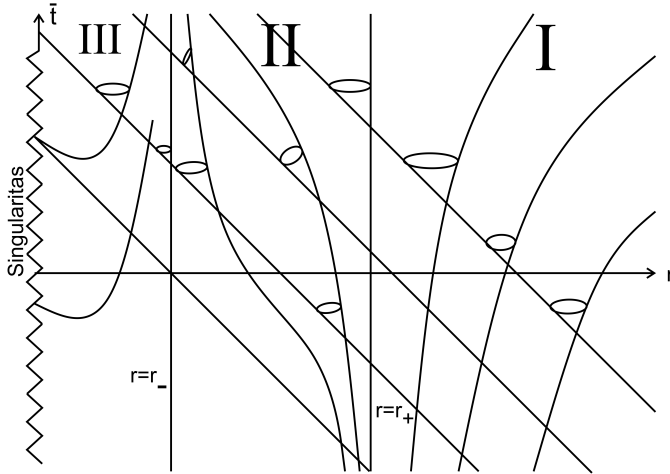
Pada saat mendekati  $r = r_-$  dari kanan  $r \rightarrow r_-^+$ , gradiennya akan sama dengan  $-\infty$ , dengan demikian pada saat mendekati  $r = r_-$ , kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar semakin menyempit pada arah keluarnya dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = r_-$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda memasuki daerah di dalam  $r = r_-$ , benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = r_-$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam ketika sudah memasuki horizon peristiwanya. Kemudian pada saat mendekati  $r = r_-$  dari kiri  $r \rightarrow r_-^-$ , gradiennya akan sama dengan  $\infty$ , dengan demikian pada saat mendekati  $r = r_-$  dari dalam, kerucut cahaya yang terbentuk dari perpotongan geodesik null radial masuk dan keluar semakin menyempit pada arah keluarnya dan akan berhimpit dengan garis vertikal  $r = r_-$ . Dengan demikian, pada saat suatu benda beradai daerah di dalam  $r = r_-$ , benda sudah tidak memiliki masa depan di luar garis  $r = r_-$ . Hal ini dapat diinterpretasikan bahwa benda yang sudah berada di dalam horizon peristiwa

tidak bisa keluar lagi dari lubang hitam. Kemudian pada saat mendekati  $r = 0$ , gradiennya akan sama dengan -1, dengan demikian pada saat mendekati  $r = 0$ , kerucut cahaya melebar pada arah keluarnya dan akan persis  $45^\circ$  terhadap sumbu  $r$  pada  $r = 0$ . Dari informasi gradien geodesik null radial tersebut, dapat digambarkan secara kualitatif geodesik null radialnya sebagai berikut.

Geodesik null radial keluar terbagi ke dalam 3 area yang dipisahkan oleh garis  $r = r_-$  dan  $r = r_+$  dengan  $r = r_+ > r_-$ . Pada area di luar  $r = r_+$  geodesik memiliki gradien positif 1 yang ketika semakin mendekat ke garis  $r = r_+$  akan semakin bertambah hingga garisnya berhimpitan pada saat  $r = r_+$ . Dengan demikian, geodesik null radial yang keluar dapat digambarkan dengan sembarang fungsi logaritmik  $r - r_+$ . Dengan geodesik tersebut, dapat diketahui bahwa kerucut cahaya yang merupakan perpotongan antara geodesik null radial masuk dan keluar memiliki bentuk yang sama dengan kerucut cahaya di ruang Minkowski pada jarak yang tak hingga. Namun kerucut cahaya ini semakin menyempit saat semakin dekat dengan lubang hitam yang dapat diartikan bahwa benda akan semakin tertarik ke lubang hitam. Dengan demikian, struktur ruang-waktu lubang hitam Reissner-Nordstrom asimptot dengan ruang-waktu Minkowski pada jarak yang sangat jauh.

Pada area di antara  $r_+$  dan  $r_-$ , geodesik memiliki gradien minus tak hingga pada saat  $r = r_+$  kemudian semakin membesar gradiennya sampai pada suatu nilai maksimum yang negatif pada titik yang diberikan oleh turunan pertama dari gradiennya, yaitu pada  $r = Q^2/m$ . yang merupakan suatu nilai negatif, karena  $m^2 > Q^2$ . Setelah melewati titik  $r = Q^2/m$  gradiennya turun langgi hingga garisnya berhimpitan dengan garis  $r = r_-$ . Dengan demikian, kerucut cahaya pada area ini condong ke arah  $r = r_-$  sehingga dapat diartikan sebagai benda diseret oleh ruang-waktu untuk melewati  $r = r_-$ .





Gambar 4.2: Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Eddington-Finkelstein

Pada area di antara singularitas  $r = 0$  dan  $r_-$ , geodesik null radial memiliki gradien tak hingga pada  $r = r_-$  dan kemudian semakin mengecil sampai gradiennya sama dengan 0 pada titik  $\rho$  yang didefinisikan oleh,

$$\rho = -m + \sqrt{m^2 + Q^2}. \quad (4.24)$$

Setelah melewati titik  $r = \rho$ , gradiennya akan turun lagi hingga mencapai nilai -1 pada  $r = 0$ . Dengan demikian, kerucut cahaya di area ini tidak terorientasi ke arah singularitas, sehingga benda tidak tertarik ke singularitas namun tetap tidak bisa keluar dari area ini.

Gambar (4.2) merupakan diagram ruang waktu lubang hitam Reissner-Nordstrom yang menunjukkan semua jalur yang mungkin dari garis dunia suatu benda dengan adanya lubang hitam Reissner-Nordstrom. Lingkaran-lingkaran pada gambar

mewakili kerucut cahaya yang merupakan semua garis dunia yang dapat dilalui suatu benda. Pada area di luar lubang hitam ( $r > r_+$ ), atau pada saat benda berada jauh dari lubang hitam, dapat dilihat kerucut relatif membentuk sudut 45 derajat terhadap sumbu  $\bar{t}$ . Hal ini menandakan benda berada pada ruang yang asimptot dengan ruang Minkowski. Namun, semakin dekat benda dengan horizon peristiwa, semakin menyempit kerucut cahayanya, yang menandakan benda semakin tertarik ke dalam lubang hitam. Ketika benda melewati horizon peristiwa, atau saat benda memasuki area di antara horizon peristiwa  $r = r_+$  dan horizon Cauchy  $r = r_-$ , kerucut cahaya menekuk tajam dan mengarahkan benda ke arah horizon Cauchy, dan kerucut cahaya tidak bisa melintasi garis  $r = r_+$  lagi. Hal ini menandakan bahwa benda yang memasuki horizon peristiwa dipaksa masuk lebih dalam sampai melewati horizon Cauchy. Lebih lanjut lagi, benda yang telah melewati horizon peristiwa, tidak akan pernah bisa kembali ke luar dari, hal ini disebabkan tidak ada masa depan benda yang berada di area  $r > r_+$  lagi yang ditandai dengan kerucut cahaya yang berhimpitan dengan garis  $r = r_+$ . Kemudian saat benda melewati horizon Cauchy, atau memasuki area antara singularitas dengan  $r = r_-$ , kerucut cahaya kembali seperti pada area  $r > r_+$ . Hal ini menandakan struktur ruang-waktu pada kedua area ini memiliki sifat yang sama. Lebih lanjut lagi, kerucut cahaya tidak pernah melewati garis  $r = r_-$  yang menandakan bahwa benda yang masuk horizon Cauchy tidak dapat kembali ke area di antara horizon Cauchy dan horizon peristiwa dan hanya bisa mencapai titik  $r = r_-$  secara asimtotik.

## 4.4 Ekstensi Maksimal Solusi Analitik

Gambar (4.2) menunjukkan bahwa pada saat mendekati horizon Cauchy  $r_-$  dari dalam, cahaya membutuhkan waktu yang tak hingga untuk mencapai horizon tersebut. Namun, cahaya seharusnya mencapai horizon Cauchy dalam waktu yang terhingga. Dengan demikian, diagram ruang waktu tersebut memberikan deskripsi yang kurang cukup pada peristiwa melewati horizon Cauchy. Untuk itu, dibutuhkan koordinat baru yang dapat mendeskripsikan peristiwa tersebut yang merupakan koordinat Kruskal-Szekeres.

Sebelum masuk ke Solusi Reissner-Nordstrom dalam koordinat Kruskal-Szekeres, terlebih dahulu diformulasikan Solusi Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szekeres yang lebih sederhana agar memberikan pemahaman dasar tentang ruang-waktu dalam diagram Kruskal-Szekeres. Solusi Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szekeres dapat diperoleh dengan memperkenalkan koordinat baru berupa koordinat null dengan transformasi,

$$v = \bar{t} + r, \quad w = t^* - r \tag{4.25}$$

$$\tag{4.26}$$

dengan

$$t^* = t - 2m \ln(r - 2m). \tag{4.27}$$

Dengan transformasi tersebut, diperoleh

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dv dw + r^2 d\Omega^2, \tag{4.28}$$

dengan  $r$  sebagai fungsi dari  $v$  dan  $w$  yang didefinisikan secara implisit sebagai,

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \ln(r - 2m). \tag{4.29}$$

Kemudian dengan mengambil  $\theta$  dan  $\phi$  konstan, metrik pada Pers. (4.28) akan menjadi,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dv dw, \quad (4.30)$$

kemudian dengan mendefinisikan koordinat baru,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(v + w) \\ x &= \frac{1}{2}(v - w). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dengan mentransformasi Pers. (4.30) ke koordinat tersebut, diperoleh,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (dt^2 - dx^2). \quad (4.32)$$

Dengan demikian, godesik null radialnya akan memiliki gradien  $\pm 1$ , sehingga kerucut cahayanya akan sama di setiap titik. Kemudian, diambil koordinat baru dengan transformasi

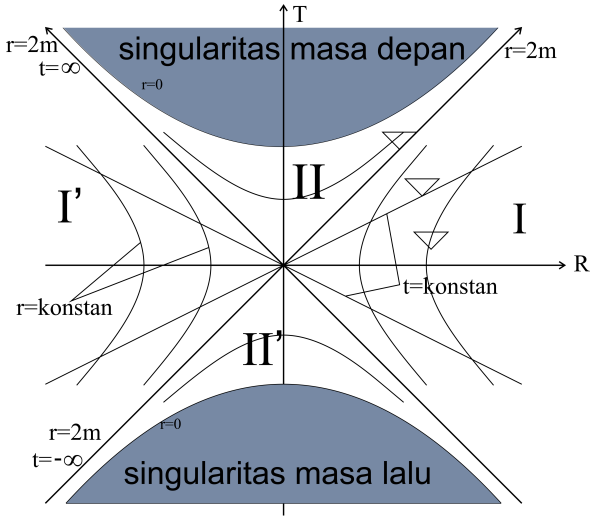
$$\begin{aligned} v' &= \exp(v/4m) \\ w' &= - \exp(-w/4m). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dengan transformasi tersebut, diperoleh

$$ds^2 = - \frac{16m^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw' + r^2 d\Omega^2. \quad (4.34)$$

dengan mengambil koordinat waktu dan radial baru yang didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(v' + w') \\ R &= \frac{1}{2}(v' - w'). \end{aligned} \quad (4.35)$$



Gambar 4.3: Diagram Ruang-Waktu Schwarzschild dalam Koordinat Kruskal-Szekeres

Transformasi Pers. (4.34) ke koordinat tersebut menghasilkan,

$$ds^2 = -\frac{16m^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right)(dT^2 - dR^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (4.36)$$

yang merupakan metrik Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szekeres. Metrik ini dapat digunakan untuk membuat diagram Kruskal-Szekeres seperti pada Gambar (4.3).

Solusi Reissner-Nordstrom dalam koordinat Kruskal dapat diperoleh dengan memperkenalkan koordinat baru berupa koordinat null dengan transformasi,

$$v = \bar{t} + r, \quad w = 2t - v. \quad (4.37)$$

Transformasi tersebut akan menghasilkan,

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \right) dvdw + r^2 d\Omega^2 \quad (4.38)$$

Kemudian dengan mengambil  $\theta$  dan  $\phi$  konstan, metrik pada Pers. (4.38) akan menjadi,

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \right) dvdw, \quad (4.39)$$

kemudian dengan mendefinisikan koordinat baru,

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{2}(v + w) \\ x' &= \frac{1}{2}(v - w). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dengan mentransformasi Pers. (4.30) ke koordinat tersebut, diperoleh,

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \right) (dt'^2 - dx'^2). \quad (4.41)$$

Dengan demikian, godesik null radialnya akan memiliki gradien  $\pm 1$ , sehingga kerucut cahayanya akan sama di setiap titik..

Pada kasus  $Q^2 < m^2$ , didefinisikan koordinat baru

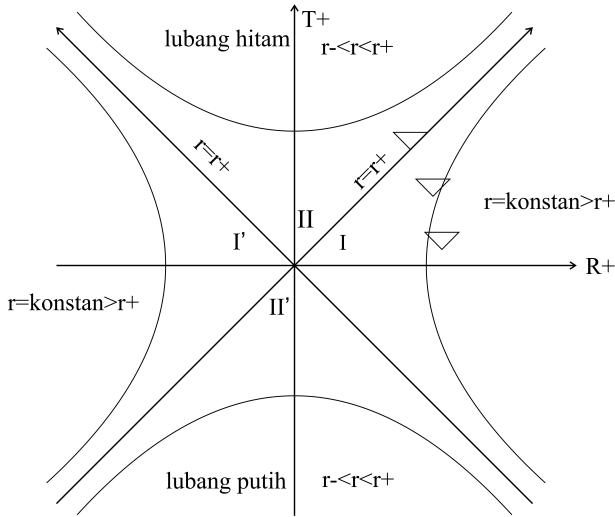
$$V^\pm = \pm \exp(k_\pm v), \quad W^\pm = -\exp(-k_\pm w), \quad (4.42)$$

dengan

$$k_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}. \quad (4.43)$$

Transformasi Pers. (4.38) ke koordinat tersebut akan menghasilkan

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \frac{e^{(-2k_\pm r)}}{\pm k_\pm^2 r^2} (r - r_+)^{1 - \frac{2k_\pm}{2k_+}} (r - r_-)^{1 + \frac{2k_\pm}{2k_-}} dV^\pm dW^\pm \\ &\quad + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$



Gambar 4.4: Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Kruskal-Szekeres untuk  $r > r_-$

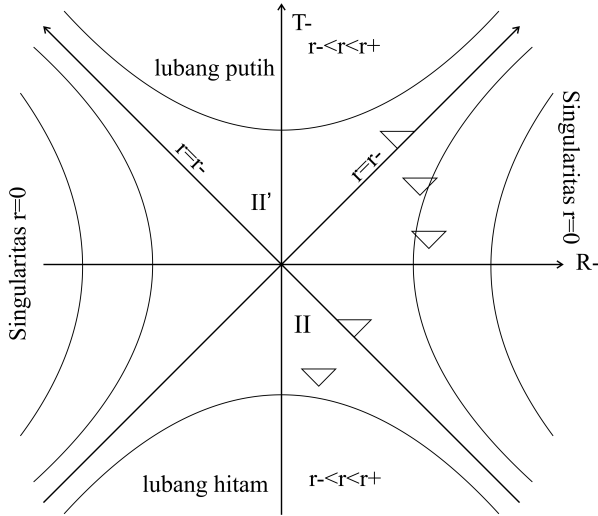
$$(4.44)$$

yang merupakan analog dari solusi Kruskal-Szekeres dari Reissner-Nordstrom dan merupakan representasi dari ekstensi maksimal solusi analitik dari Reissner-Nordstrom, dengan  $r$  didefinisikan secara implisit dalam

$$V^\pm W^\pm = \mp \exp(2k_\pm r) (r - r_+)^{\frac{k_\pm}{k_+}} (r - r_-)^{-\frac{k_\pm}{k_-}} \quad (4.45)$$

dengan mengambil koordinat waktu dan radial baru yang didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned} T_\pm &= \frac{1}{2}(V^\pm + W^\pm) \\ R_\pm &= \frac{1}{2}(V^\pm - W^\pm). \end{aligned} \quad (4.46)$$



Gambar 4.5: Diagram Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom dalam Koordinat Kruskal-Szekeres untuk  $r < r_+$

Transformasi Pers. (4.44) ke koordinat tersebut menghasilkan,

$$ds^2 = - \frac{e^{(-2k_{\pm}r)}}{\pm k_{\pm}^2 r^2} (r - r_+)^{1 - \frac{2k_{\pm}}{2k_+}} (r - r_-)^{1 + \frac{2k_{\pm}}{2k_-}} (dT_{\pm}^2 - dR_{\pm}^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (4.47)$$

yang merupakan metrik Reissner-Nordstrom dalam koordinat Kruskal-Szekeres. Metrik ini dapat digunakan untuk membuat diagram Kruskal-Szekeres dari lubang hitam Reissner-Nordstrom. Kombinasi koordinat  $V^+$ ,  $W^+$ ,  $T_+$ ,  $R_+$  dan  $V^-$ ,  $W^-$ ,  $T_-$ ,  $R_-$  terkait dengan 2 area yang berbeda. Penandaan positif dan negatif ini tidak mengindikasikan besaran fisis apapun, semata-mata hanya persoalan penamaan koordinat.



Koordinat positif mendeskripsikan area  $r > r_-$ , sedangkan pada koordinat negatif mendeskripsikan area  $r < r_+$ . Sehingga Diagram Kruskal-Szekeres dari lubang hitam Reissner-Nordstrom terbagi menjadi 2 diagram seperti pada Gambar (4.4) dan Gambar (4.5). Dalam diagram ini, kerucut cahaya memiliki sudut yang sama di seluruh area, baik dalam koordinat positif, maupun dalam koordinat negatif. Dengan demikian, peristiwa melintasi horizon Cauchy dapat dideskripsikan dalam waktu yang terhingga juga dalam koordinat Kruskal-Szekeres.

## Bab 5

# Konstanta Kosmologi Tak Nol

Solusi Persamaan Medan Einstein pada bab di atas merupakan solusi dalam latar belakang ruang-waktu Minkowski atau ruang-waktu datar. Hal ini dapat dilihat dari tidak adanya konstanta kosmologi dalam Pers. (2.86). Pada bab ini, akan diturunkan solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell dengan adanya konstanta kosmologi dan aspek fisis akibat penambahan konstanta tersebut. Konstanta kosmologi ini berkaitan dengan energi vakum dari ruang-waktu.

Apabila konstanta kosmologi bernilai nol, maka ruang-waktu memiliki energi vakum yang sama dengan nol. Dengan begitu ruang-waktu menjadi statis tanpa adanya pengembangan ataupun penyusutan ruang-waktu. Ketika konstanta ini bernilai positif, maka memiliki energi vakum yang positif. Energi vakum yang positif ini biasanya diasosiasikan dengan energi gelap yang menyebabkan ruang-waktu untuk mengembang. Ruang-waktu tersebut dikenal sebagai ruang-waktu de Sitter. Sedangkan ketika konstanta kosmologi ini bernilai negatif, maka ruang-waktu memiliki energi vakum yang negatif.

energi vakum yang negatif ini menyebabkan ruang-waktu untuk menyusut sampai pada suatu titik singularitas. Ruang-waktu ini disebut dengan ruang-waktu Anti de Sitter.

## 5.1 Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter

Persamaan Medan Einstein-Maxwell dalam semesta (Anti) de Sitter ini, dapat diperoleh dengan menambahkan konstanta kosmologi dalam densitas lagrangian Einstein seperti berikut,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{c^4}{16\pi G}(R - 2\Lambda), \quad (5.1)$$

dengan  $\Lambda$  merupakan konstanta kosmologi. Dengan demikian, variasi dari integral aksi dari Pers. (2.23) menjadi

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)) d\Omega = 0. \quad (5.2)$$

karena  $\Lambda$  merupakan konstanta, maka yang divariasikan adalah suku  $\sqrt{-g}$ , dan dengan mensubstitusi nilai dari  $\delta\sqrt{-g}$  dari Pers. (2.26), diperoleh,

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda) \delta g^{\mu\nu} d\Omega = 0. \quad (5.3)$$

Dengan demikian, dengan mensubstitusi persamaan di atas ke persamaan variasi aksi totalnya akan diperoleh,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \int \delta \mathcal{L}_{EM} d\Omega = \int \delta \mathcal{L}_G d\Omega \\ & -\frac{1}{c} \int \frac{1}{2} \sqrt{-g} (T_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} d\Omega = \\ & -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda) \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Dengan begitu, diperoleh Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter sebagai berikut,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Persamaan tersebut menggambarkan geometri ruang-waktu dalam kondisi vakum akibat pengaruh suatu medan elektromagnetik. Geometri ruang-waktu didefinisikan oleh sisi kiri dari persamaan tersebut, dan kelengkungan ruang-waktu ditentukan oleh tensor Ricci  $R_{\mu\nu}$  dengan latar belakang ruang-waktu yang didefinisikan oleh konstanta kosmologi  $\Lambda$ . Sedangkan sisi kanan dari persamaan tersebut menggambarkan pengaruh suatu sumber medan elektromagnetik titik di pusat koordinat yang didefinisikan oleh tensor energi-momentum  $T_{\mu\nu}$ .

## 5.2 Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter

Pada sub bab ini, akan diturunkan solusi dari Persamaan Medan Einstein-Maxwell (Anti) de Sitter. Solusi ini merupakan solusi Reissner-Nordstrom dengan konstanta kosmologi. Dengan demikian, bentuk tensor metrik dan tensor Ricci dari solusi ini sama dengan solusi Reissner Nordstrom.

Pers. (5.5) jika dikalikan dengan  $g^{\mu\nu}$  menjadi,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}R - \delta_{\mu}^{\mu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dengan mensubstitusi nilai  $\delta_{\mu}^{\mu}$ ,

$$\delta_{\mu}^{\mu} = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4, \quad (5.7)$$

maka akan diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
 R - \frac{1}{2}4R - 4\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T \\
 R - 2R - 4\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T \\
 -R &= \frac{8\pi G}{c^4}T + 4\Lambda \\
 R &= -\frac{8\pi G}{c^4}T - 4\Lambda,
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

dengan  $T$  merupakan *trace* dari tensor energi-momentum  $T_{\mu\nu}$ . mengingat *trace* dari tensor energi-momentum Maxwell yang sama dengan 0, maka diperoleh,

$$R = -4\Lambda, \tag{5.9}$$

Dengan demikian persamaan medan Einstein dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-4\Lambda) - g_{\mu\nu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}\Lambda - g_{\mu\nu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \\
 R_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Substitusi nilai-nilai dari  $R_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$  dan  $g_{\mu\nu}$  ke Pers. (5.10), maka akan diperoleh

$$\left\{ -\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( -\frac{1}{2} \right) f^2 e^{-2\lambda} + \Lambda e^{2\nu} \tag{5.11}$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} f^2 e^{-2\nu} - \Lambda e^{2\lambda} \quad (5.12)$$

$$(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(2\nu)} - 1 = -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda} - \Lambda r^2. \quad (5.13)$$

Pers. (5.11) dikalikan dengan  $e^{2\lambda}$  sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \left\{ -\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{2\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left( -\frac{1}{2} \right) f^2 e^{-2\lambda} \\ + \Lambda e^{(2\nu+2\lambda)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Kemudian Pers. (5.12) dikalikan dengan  $e^{2\nu}$  sehingga diperoleh,

$$\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} f^2 - \Lambda e^{(2\nu+2\lambda)}. \quad (5.15)$$

Selanjutnya, Pers. (5.14 dan 5.15) dijumlahkan sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} -\frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} &= 0 \\ \nu' + \lambda' &= 0 \\ \nu + \lambda &= \text{konstan}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dengan syarat pada  $r \rightarrow \infty$ , metrik kembali menjadi ke bentuk Minkowski sehingga

$$\nu = -\lambda. \quad (5.17)$$

Lalu, dari Pers. (5.13), diperoleh

$$\begin{aligned}
(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(2\nu)} - 1 &= -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda} - \Lambda r^2 \\
(1 + r\nu' + r\nu')e^{2\nu} - 1 &= -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 f^2 e^{-2\nu+2\nu} - \Lambda r^2 \\
(1 + 2\nu'r)e^{2\nu} &= 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 f^2 - \Lambda r^2 \\
\frac{d}{dr}(re^{2\nu}) &= 1 - \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 f^2 - \Lambda r^2 \\
re^{(2\nu)} &= \int \left[ 1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 f^2 - \Lambda r^2 \right] dr \\
re^{(2\nu)} &= \int \left[ 1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 - \Lambda r^2 \right] dr \\
re^{(2\nu)} &= \int \left[ 1 - \frac{4\pi G}{c^4} \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^2} - \Lambda r^2 \right] dr \\
re^{(2\nu)} &= r + \frac{q^2}{4\pi c^4 \epsilon_0^2 r} - \frac{\Lambda}{3} r^3 + K \\
e^{(2\nu)} &= 1 + \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4 r^2} + \frac{K}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Selanjutnya, dengan mengambil  $K = -2m$  (Radius Schwarzschild) dan  $\frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \equiv Q^2$ , maka akan diperoleh

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \tag{5.19}$$

Dengan demikian, Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell dengan Konstanta Kosmologi adalah

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 \\
&+ \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Apabila  $\Lambda = 0$ , maka metrik akan kembali ke bentuk Reissner-Nordstrom dalam ruang Minkowski. Sedangkan jika  $\Lambda > 0$  maka metrik tersebut menjadi metrik Reissner-Nordstrom de Sitter (RNdS). Jika  $\Lambda < 0$ , maka metrik tersebut menjadi metrik Reissner-Nordstrom Anti de Sitter (RNAdS). metrik RN(A)dS merupakan metrik yang mendeskripsikan solusi Reissner-Nordstrom dalam suatu ruang-waktu yang telah memiliki kurvatur.

### 5.3 Singularitas RN(A)dS

Untuk  $\Lambda$  yang tidak sama dengan nol, metrik menjadi tidak terdefinisi ketika

$$1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} - \frac{1}{\ell} r^2 = \frac{\epsilon}{r^2} = 0 \quad (5.21)$$

dengan  $\ell$  merupakan panjang kosmologi yang bernilai,

$$\ell = \frac{3}{\Lambda}. \quad (5.22)$$

Pada kasus  $\ell$  yang cukup kecil, untuk mencari singularitas koordinatnya, dapat diselesaikan dengan mencari akar dari  $\epsilon$  sebagai berikut

$$\epsilon = r^2 + Q^2 - 2mr - \frac{1}{\ell} r^4 = 0. \quad (5.23)$$

Pers. (5.23) merupakan persamaan kuartik dengan 4 solusi akar. Solusi eksak dari persamaan tersebut tidak diturunkan dalam tugas akhir ini. suku  $r^4$  dalam persamaan tersebut menunjukkan adanya 4 akar, yaitu  $r_1, r_2, r_3$  dan  $r_4$ . Karena suku kubik dalam Pers. (5.23) tidak ada, maka terdapat satu akar negatif yang tidak memiliki bentuk secara fisis dalam ruang waktu. Kemudian dipilih hierarki dari keempat akar tersebut adalah sebagai berikut,

$$r_1 > r_2 > r_3 > r_4 \text{ dengan } r_4 < 0, \quad (5.24)$$



di mana  $r_1$  mendefinisikan horizon kosmologi/semesta,  $r_2$  merupakan horizon peristiwa dari lubang hitam, dan  $r_3$  merupakan horizon Cauchy.

# Bab 6

## Penutup

### 6.1 Kesimpulan

Dalam tugas akhir ini, telah diformulasikan solusi lubang hitam untuk Persamaan Medan Einstein-Maxwell, yaitu solusi Schwarzschild dan solusi Reissner-Nordstrom. Solusi Schwarzschild mendeskripsikan ruang-waktu di sekitar lubang hitam statis, tak bermuatan, dan tak berotasi yaitu Lubang Hitam Schwarzschild. Solusi Schwarzschild memiliki singularitas intrinsik pada  $r = 0$  dan singularitas koordinat pada  $r = 2m$  yang merepresentasikan singularitas intrinsik dan horizon peristiwa dari Lubang Hitam Schwarzschild. Sedangkan solusi Reissner-Nordstrom mendeskripsikan ruang-waktu di sekitar lubang hitam statis, bermuatan, dan tak berotasi yaitu Lubang Hitam Reissner-Nordstrom. Solusi Reissner-Nordstrom memiliki singularitas intrinsik pada  $r = 0$  dan singularitas koordinat pada  $r = r_+$  dan  $r_-$  yang merepresentasikan singularitas intrinsik, horizon luar/horizon peristiwa, dan horizon dalam/Horizon Cauchy dari Lubang Hitam Reissner-Nordstrom. Pratikel yang memasuki lubang hitam Schwarzschild tidak dapat keluar dari horizon peristiwanya dan akan jatuh ke pu-

sat singularitasnya, sedangkan pada lubang hitam Reissner-Nordstrom, terdapat 2 horizon peristiwa yang dapat dilewati partikel tetapi tidak dapat kembali. Namun, partikel yang masuk lubang hitam ini tidak selalu jatuh ke pusat singularitasnya.

Telah diformulasikan juga Persamaan Medan Einstein dengan Konstanta Kosmologi beserta solusinya. Kehadiran konstanta kosmologi kosmologi menyebabkan skalar Ricci dari solusi Reissner-Nordstrom menjadi sebanding dengan konstanta kosmologinya. Dengan demikian, konstanta kosmologi menyebabkan kurvatur dari latar belakang ruang-waktu dari lubang hitam Reissner-Nordstrom yang telah memiliki dan menambah horizon peristiwa pada horizon kosmologi  $r = r_1$ .

## 6.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya yaitu dengan mengkaji aspek ruang-waktu dari Lubang Hitam Kerr dan Kerr-Newman.

# Daftar Pustaka

- [1] A.Chamblin,arXiv:9904197v1
- [2] A.Irawan. *Kajian Ruang Waktu Kerr-Newman dalam Gravitasi Einstein*.ITS, Surabaya.(2016)
- [3] B.Gouterauxi,arXiv:1011.4941v1
- [4] C. Paul M,arXiv:1902.08323v2
- [5] Chris M. Chambers," *The Cauchy Horizon In Black Hole-de Sitter Spacetimes*", <URL:<https://cds.cern.ch/record/333718/files/9709025.pdf>>
- [6] Crouse, David F," *Simulating Aerial Targets in 3D Accounting for the Earth's Curvature*", Journal of Advance in Information Fusion, Vol. 10, No. 1, Juni, 2015
- [7] D. Brecher,arXiv:0410214v2
- [8] G. G. L. Nashed," *Charged and Non-Charged Black Hole Solutions in Mimetic Gravitational Theory*", Symmetry, Vol. 10, No. 559, 2018
- [9] G. W. Gibbons," *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation*", Physical Review D, Vol. 15, No. 10, Mei, 1977

- [10] Gautama, Sunkar E. Pengantar Relativitas Umum dan Kosmologi,Paradoks Softbook.(2018)
- [11] J.Danek. *Properties of near-horizon geometry of spacetimes*.Charles University, Prague.(2013)
- [12] K. Lin,arXiv:1607.04473v1
- [13] K.Tanabe,arXiv:1511.06059v2
- [14] L. J. Roman,arXiv:9203018v1
- [15] M. H. Ali,” *Spinning Particles in Reissner-Nordstrom de Sitter Spacetime*”, General Relativity and Gravitation, Vol. 35, No. 2, Februari, 2003
- [16] M. Mokdad,arXiv:1711.06982v2
- [17] Neupane, Ishpatee P.,” *Cosmological Constant in de-Sitter Spacetime*”, IMFP, October, 1998
- [18] O. Brauner dan M. Socolovsky,” *On Schwarzschild anti De Sitter and Reissner-Nordstrom Wormholes*”, Theoretical Physics, Vol. 4, No. 4, Desember, 2019
- [19] Purwanto, agus. Pengantar Kosmologi,ITSPress, Surabaya.(2009)
- [20] R.d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*,Oxford University, New York.(1992)
- [21] S.Caroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*,Pearson Internasional, London.(2014)
- [22] S.Caroll,arXiv:1703.09715v3
- [23] S. Islam,arXiv:1703.05119v2
- [24] Z. Stuchlik,arXiv:0803.2685v1

# Lampiran A

## Solusi Vakum Persamaan Medan Einstein

Metrik dengan simetri bola merupakan metrik yang mempertahankan bentuk

$$Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

dengan  $W$  merupakan suatu tetapan atau fungsi dari  $r$  dan  $t$ , dengan parameter lainnya tidak bergantung terhadap  $\theta$  dan  $\phi$ . Disebut statik karena tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bergantung terhadap waktu ( $\partial_0 g_{\mu\nu}$ ) atau elemen garis  $ds^2$  harus invarian terhadap transformasi pembalikan waktu  $x^0 \rightarrow -x^0$ . Dengan demikian elemen garis  $ds^2$  tidak boleh memiliki suku  $dx^i dx^0$  atau  $dx^0 dx^i$  yang menjadikannya tidak invarian terhadap transformasi pembalikan waktu, oleh karena itu  $g_{i0} = g_{0i} = 0$ . Maka tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  tidak bernilai 0 hanya pada elemen diagonalnya saja yang koefisiennya merupakan fungsi dari parameter  $r$  saja. Dengan demikian didapatkan ansatz untuk metriknya

berupa

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + V(r)dr^2 + W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (\text{A.1})$$

Dari kondisi khusus ini, 10 komponen bebas dari tensor metrik yang secara umum bergantung pada  $x_\mu$  menjadi tereduksi hanya menjadi 4 komponen bebas yang merupakan fungsi dari  $r$  saja. Kemudian, karena  $r$  merupakan parameter radial, maka dapat digantikan dengan sembarang fungsi  $r$ , sehingga misalkan diambil  $Wr^2 = \hat{r}^2$ , maka  $\hat{r} = \sqrt{W}r$ , serta

$$\frac{d\hat{r}}{dr} = \sqrt{W} \left( 1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right), \quad (\text{A.2})$$

maka dapat diperoleh

$$V dr^2 = \frac{V}{W} \left( 1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)^{-2} d\hat{r}^2 \equiv \hat{V} d\hat{r}^2, \quad (\text{A.3})$$

sehingga  $V \equiv \hat{V}$ . Dengan menggunakan cara yang sama, dapat diperoleh  $U \equiv \hat{U}$ . Kemudian dengan mengganti  $r$  menjadi  $\hat{r}$ , maka elemen garis di atas akan menjadi,

$$ds^2 = -\hat{U}(\hat{r})dt^2 + \hat{V}(\hat{r})d\hat{r}^2 + \hat{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (\text{A.4})$$

Lalu dengan menghilangkan tanda topi pada persamaan di atas, serta dipilih ansatz fungsi dari  $U$  dan  $V$  sebagai

$$U(r) = e^{2\nu(r)}, \text{ dan } V(r) = e^{2\lambda(r)}, \quad (\text{A.5})$$

maka elemen garisnya menjadi

$$ds^2 = -e^{2\nu} c^2 dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (\text{A.6})$$

Elemen garis persamaan di atas kemudian digunakan untuk menentukan tensor metrik kovarian  $g_{\mu\nu}$  sebagai berikut,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

karena

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \quad (\text{A.8})$$

maka bentuk kontravarian dari tensor metriknya adalah,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Persamaan untuk mencari simbol Christoffel jenis pertama adalah

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right). \quad (\text{A.10})$$

Dengan demikian, untuk tensor metrik di atas, komponen-komponen simbol Christoffel jenis pertamanya adalah sebagai



berikut,

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,01} = \Gamma_{0,10} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(-e^{2\nu})}{\partial r} \right) \\ &= -\nu' e^{2\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,02} = \Gamma_{0,20} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{02}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,03} = \Gamma_{0,30} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{03}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,11} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,21} = \Gamma_{0,12} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{01} + \partial_1 g_{20} - \partial_0 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,31} = \Gamma_{0,13} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{01} + \partial_1 g_{30} - \partial_0 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,22} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,23} = \Gamma_{0,32} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{02} + \partial_2 g_{03} - \partial_0 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,33} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2} \left( 0 + 0 - \frac{\partial(-e^{2\nu})}{\partial r} \right) \\
&= \nu' e^{2\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,01} = \Gamma_{1,10} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{01}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,02} = \Gamma_{1,20} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_1 g_{02}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,03} = \Gamma_{1,30} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_1 g_{03}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,11} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\
&= \frac{1}{2} \left( 0 + 0 - \frac{\partial(-e^{2\lambda})}{\partial r} \right) \\
&= \lambda' e^{2\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,21} = \Gamma_{1,12} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,31} = \Gamma_{1,13} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,22} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2} \left( 0 + 0 - \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) \\
&= -r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{12} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{23}) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,33} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \left( 0 + 0 - \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} \right) \\
&= -r \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,01} = \Gamma_{2,10} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,02} = \Gamma_{2,20} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,03} = \Gamma_{2,30} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{20} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{03}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,11} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,21} = \Gamma_{2,12} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\partial(r^2)}{\partial r} - 0 \right) \\ &= r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,31} = \Gamma_{2,13} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,22} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,23} = \Gamma_{2,32} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{2,33} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,01} = \Gamma_{3,10} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,02} = \Gamma_{3,20} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{30} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{02}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,03} = \Gamma_{3,30} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_3' g_{03}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,11} &= \frac{1}{2} (\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,21} = \Gamma_{3,12} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{31} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,31} = \Gamma_{3,13} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} - 0 \right) \\ &= r \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,22} &= \frac{1}{2} (\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} - 0 \right) \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,33} &= \frac{1}{2} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Nilai-nilai Simbol Christoffel jenis pertama tersebut dapat digunakan untuk mencari nilai Simbol Christoffel jenis kedua



dengan menggunakan persamaan,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

Nilai-nilai tersebut sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= g^{00}\Gamma_{0,00} \\ &= 0 \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,01} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,01} + g^{01}\Gamma_{1,01} + g^{02}\Gamma_{2,01} + g^{03}\Gamma_{3,01} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,01} = -e^{-2\nu}(-\nu'e^{2\nu}) = \nu' \\ &\quad g^{01}\Gamma_{1,01} = 0 \\ &\quad g^{02}\Gamma_{2,01} = 0 \\ &\quad g^{03}\Gamma_{3,01} = 0 \\ \Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,02} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,02} + g^{01}\Gamma_{1,02} + g^{02}\Gamma_{2,02} + g^{03}\Gamma_{3,02} \\ &= 0 \\ \Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,03} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,03} = g^{01}\Gamma_{1,03} + g^{02}\Gamma_{2,03} + g^{03}\Gamma_{3,03} \\ &= 0 \\ \Gamma_{11}^0 &= g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,11} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,11} + g^{01}\Gamma_{1,11} + g^{02}\Gamma_{2,11} + g^{03}\Gamma_{3,11} \\ &= 0 \\ \Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{21}^0 = g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,12} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,12} + g^{01}\Gamma_{1,12} + g^{02}\Gamma_{2,12} + g^{03}\Gamma_{3,12} \\ &= 0 \\ \Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = g^{0\sigma}\Gamma_{\sigma,13} \\ &= g^{00}\Gamma_{0,13} + g^{01}\Gamma_{1,13} + g^{02}\Gamma_{2,13} + g^{03}\Gamma_{3,13} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= g^{0\sigma} \Gamma_{\sigma,22} \\
&= g^{00} \Gamma_{0,22} + g^{01} \Gamma_{1,22} + g^{02} \Gamma_{2,22} + g^{03} \Gamma_{3,22} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 &= g^{0\sigma} \Gamma_{\sigma,23} \\
&= g^{00} \Gamma_{0,23} + g^{01} \Gamma_{1,23} + g^{02} \Gamma_{2,23} + g^{03} \Gamma_{3,23} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^0 &= g^{0\sigma} \Gamma_{\sigma,33} \\
&= g^{00} \Gamma_{0,33} + g^{01} \Gamma_{1,33} + g^{02} \Gamma_{2,33} + g^{03} \Gamma_{3,33} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,00} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,00} + g^{11} \Gamma_{1,00} + g^{12} \Gamma_{2,00} + g^{13} \Gamma_{3,00} \\
&= g^{11} \Gamma_{1,00} = e^{-2\lambda} (\nu' e^{2\nu}) = \nu' e^{2\nu-2\lambda} \\
g^{10} \Gamma_{0,01} &= 0 \\
g^{12} \Gamma_{2,00} &= 0 \\
g^{13} \Gamma_{3,00} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,01} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,01} + g^{11} \Gamma_{1,01} + g^{12} \Gamma_{2,01} + g^{13} \Gamma_{3,01} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,02} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,02} + g^{11} \Gamma_{1,02} + g^{12} \Gamma_{2,02} + g^{13} \Gamma_{3,02} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,03} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,03} = g^{11} \Gamma_{1,03} + g^{12} \Gamma_{2,03} + g^{13} \Gamma_{3,03} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,11} = g^{10} \Gamma_{0,11} + g^{11} \Gamma_{1,11} + g^{12} \Gamma_{2,11} + g^{13} \Gamma_{3,11} \\
&= g^{11} \Gamma_{1,11} = e^{-2\lambda} (\lambda' e^{2\lambda}) = \lambda' \\
g^{10} \Gamma_{0,11} &= 0 \\
g^{12} \Gamma_{2,11} &= 0 \\
g^{13} \Gamma_{3,11} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,12} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,12} + g^{11} \Gamma_{1,12} + g^{12} \Gamma_{2,12} + g^{13} \Gamma_{3,12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,13} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,13} + g^{11} \Gamma_{1,13} + g^{12} \Gamma_{2,13} + g^{13} \Gamma_{3,13} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,22} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,22} + g^{11} \Gamma_{1,22} + g^{12} \Gamma_{2,22} + g^{13} \Gamma_{3,22} \\
&= g^{11} \Gamma_{1,22} = e^{-2\lambda}(-r) = -r e^{-2\lambda} \\
g^{10} \Gamma_{0,22} &= 0 \\
g^{12} \Gamma_{2,22} &= 0 \\
g^{13} \Gamma_{3,22} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,23} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,23} + g^{11} \Gamma_{1,23} + g^{12} \Gamma_{2,23} + g^{13} \Gamma_{3,23} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= g^{1\sigma} \Gamma_{\sigma,33} \\
&= g^{10} \Gamma_{0,33} + g^{11} \Gamma_{1,33} + g^{12} \Gamma_{2,33} + g^{13} \Gamma_{3,33} \\
&= g^{11} \Gamma_{1,22} = e^{-2\lambda}(-r \sin^2 \theta) = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \\
g^{10} \Gamma_{0,22} &= 0 \\
g^{12} \Gamma_{2,22} &= 0 \\
g^{13} \Gamma_{3,22} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,00} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,00} + g^{21} \Gamma_{1,00} + g^{22} \Gamma_{2,00} + g^{23} \Gamma_{3,00} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,01} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,01} + g^{21} \Gamma_{1,01} + g^{22} \Gamma_{2,01} + g^{23} \Gamma_{3,01} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,02} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,02} + g^{21} \Gamma_{1,02} + g^{22} \Gamma_{2,02} + g^{23} \Gamma_{3,02} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,03} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,03} = g^{21} \Gamma_{1,03} + g^{22} \Gamma_{2,03} + g^{23} \Gamma_{3,03} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,11} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,11} + g^{21} \Gamma_{1,11} + g^{22} \Gamma_{2,11} + g^{23} \Gamma_{3,11} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,12} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,12} + g^{21} \Gamma_{1,12} + g^{22} \Gamma_{2,12} + g^{23} \Gamma_{3,12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,13} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,13} + g^{21} \Gamma_{1,13} + g^{22} \Gamma_{2,13} + g^{23} \Gamma_{3,13} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,22} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,22} + g^{21} \Gamma_{1,22} + g^{22} \Gamma_{2,22} + g^{23} \Gamma_{3,22} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,23} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,23} + g^{21} \Gamma_{1,23} + g^{22} \Gamma_{2,23} + g^{23} \Gamma_{3,23} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,33} \\
&= g^{20} \Gamma_{0,33} + g^{21} \Gamma_{1,33} + g^{22} \Gamma_{2,33} + g^{23} \Gamma_{3,33} \\
&= g^{23} \Gamma_{3,22} = r^{-2} (-r^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta \\
g^{20} \Gamma_{0,22} &= 0 \\
g^{21} \Gamma_{1,22} &= 0 \\
g^{22} \Gamma_{2,22} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^3 &= g^{3\sigma} \Gamma_{\sigma,00} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,00} + g^{31} \Gamma_{1,00} + g^{32} \Gamma_{2,00} + g^{33} \Gamma_{3,00} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,01} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,01} + g^{31} \Gamma_{1,01} + g^{32} \Gamma_{2,01} + g^{33} \Gamma_{3,01} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,02} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,02} + g^{31} \Gamma_{1,02} + g^{32} \Gamma_{2,02} + g^{33} \Gamma_{3,02} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,03} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,03} = g^{31} \Gamma_{1,03} + g^{32} \Gamma_{2,03} + g^{33} \Gamma_{3,03} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^3 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,11} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,11} + g^{31} \Gamma_{1,11} + g^{32} \Gamma_{2,11} + g^{33} \Gamma_{3,11} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,12} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,12} + g^{31} \Gamma_{1,12} + g^{32} \Gamma_{2,12} + g^{33} \Gamma_{3,12} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,13} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,13} + g^{31} \Gamma_{1,13} + g^{32} \Gamma_{2,13} + g^{33} \Gamma_{3,13} \\
&= g^{33} \Gamma_{3,13} = r^{-2} \sin^{-2} \theta (r \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{r} \\
&\quad g^{30} \Gamma_{0,13} = 0 \\
&\quad g^{31} \Gamma_{1,13} = 0 \\
&\quad g^{32} \Gamma_{2,13} = 0 \\
\Gamma_{22}^3 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,22} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,22} + g^{31} \Gamma_{1,22} + g^{32} \Gamma_{2,22} + g^{33} \Gamma_{3,22} \\
&= 0 \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,23} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,23} + g^{31} \Gamma_{1,23} + g^{32} \Gamma_{2,23} + g^{33} \Gamma_{3,23} \\
&= g^{33} \Gamma_{3,23} = r^{-2} \sin^{-2} \theta (r^2 \sin \theta \cos \theta) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \\
&\quad g^{30} \Gamma_{0,23} = 0 \\
&\quad g^{31} \Gamma_{1,23} = 0 \\
&\quad g^{32} \Gamma_{2,23} = 0 \\
\Gamma_{33}^3 &= g^{2\sigma} \Gamma_{\sigma,33} \\
&= g^{30} \Gamma_{0,33} + g^{31} \Gamma_{1,33} + g^{32} \Gamma_{2,33} + g^{33} \Gamma_{3,33} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dari komponen-komponen Simbol Christoffel tersebut yang



tidak bernilai 0 adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \nu' & \Gamma_{00}^1 &= \nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\
\Gamma_{11}^1 &= \lambda' & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\lambda} \\
\Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Tensor Ricci dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \tag{A.13}$$

Karena Tensor Ricci merupakan tensor yang simetris ( $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ ), maka tensor tersebut hanya memiliki 10 komponen bebas. Untuk komponen  $R_{i0}, (i = 1, 2, 3)$ ,

$$R_{i0} = \partial_0 \Gamma_{i\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{i0}^\sigma + \Gamma_{i\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{i0}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \tag{A.14}$$

karena kondisi statik, maka  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ , sehingga  $\partial_0 \Gamma_{i\sigma}^\sigma = 0$ . Dengan demikian tensor Ricci tersebut menjadi

$$R_{i0} = -\partial_j \Gamma_{i0}^j + \Gamma_{ij}^\rho \Gamma_{\rho 0}^j - \Gamma_{i0}^\rho \Gamma_{\rho j}^j. \tag{A.15}$$

Kemudian dengan menggunakan nilai  $\Gamma_{j0}^i = 0, \Gamma_{0\rho}^\rho = 0$  dan  $\Gamma_{ij}^0 = 0$ , maka dapat diperoleh,

$$R_{i0} = R_{0i} = 0, \tag{A.16}$$

sehingga komponen Tensor Ricci yang tersisa hanya komponen dalam elemen diagonalnya saja ( $R_{\mu\mu}$ ). Nilai dari  $R_{\mu\mu}$  ini adalah,

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\mu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \tag{A.17}$$

Lalu untuk  $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
&= 0 - \partial_1 \Gamma_{00}^1 + (\Gamma_{0\sigma}^0 \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^1 \Gamma_{01}^\sigma) - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma \\
&= -\partial_r (\nu' e^{2\nu-2\lambda} + 2\nu'^2 e^{2\nu-2\lambda}) + (\Gamma_{0\sigma}^0 \Gamma_{00}^\sigma + \Gamma_{0\sigma}^1 \Gamma_{01}^\sigma) \\
&\quad - \Gamma_{00}^1 (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}) \\
&= -\partial_r (\nu' e^{2\nu-2\lambda}) + (\nu' \nu' e^{2\nu-2\lambda} + \nu' e^{2\nu-2\lambda} \nu') \\
&\quad - \nu' e^{2\nu-2\lambda} (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}) \\
&= -\nu'' e^{2\nu-2\lambda} - \nu' (2\nu' - 2\lambda') e^{2\nu-2\lambda} + 2\nu'^2 e^{2\nu-2\lambda} \\
&\quad - (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}) \nu' e^{2\nu-2\lambda} \\
&= \left[ -\nu'' - \nu' (2\nu' - 2\lambda') + 2\nu'^2 - (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}) \nu' \right] e^{2\nu-2\lambda} \\
&= \left[ -\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right] e^{2\nu-2\lambda}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

kemudian untuk  $\mu = 1$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\sigma - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
&= \partial_1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - (\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \partial_3 \Gamma_{11}^3) \\
&\quad + [\Gamma_{1\sigma}^0 \Gamma_{01}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^1 \Gamma_{11}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^2 \Gamma_{21}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^3 \Gamma_{31}^\sigma] \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{20}^0 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) \\
&\quad - \Gamma_{11}^3 (\Gamma_{30}^0 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) - \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&= \partial_1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - (\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \partial_3 \Gamma_{11}^3) \\
&\quad + [\Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 + \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0] \\
&\quad + [\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1] \\
&\quad + [\Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2] \\
&\quad + [\Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3] \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{20}^0 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) \\
&\quad - \Gamma_{11}^3 (\Gamma_{30}^0 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) - \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
R_{11} &= \partial_1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \partial_1 \Gamma_{11}^1 \\
&\quad + [\Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3] \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&= (\nu'' + \lambda'' + (-\frac{1}{r^2}) + (-\frac{1}{r^2})) - \lambda'' \\
&\quad + [\nu'^2 + \lambda'^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}] - \lambda' (\nu' + \lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}) \\
&= \nu'' + \lambda'' - \frac{2}{r^2} - \lambda'' + \nu'^2 + \lambda'^2 + \frac{2}{r^2} - \lambda' (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r}) \\
R_{11} &= \nu'' + (\nu')^2 - \lambda' \nu' - \frac{2\lambda'}{r}, \tag{A.19}
\end{aligned}$$

dan untuk  $\mu = 2$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{22}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\sigma - \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
&= \partial_2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) - (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{22}^3) \\
&\quad + [\Gamma_{2\sigma}^0 \Gamma_{02}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^1 \Gamma_{12}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^2 \Gamma_{22}^\sigma + \Gamma_{2\sigma}^3 \Gamma_{32}^\sigma] \\
&\quad - (\Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma) \\
&= \partial_2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) - (\partial_0 \Gamma_2^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{22}^3) \\
&\quad + [\Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{21}^0 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0] \\
&\quad + [\Gamma_{12}^0 \Gamma_{20}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1] \\
&\quad + [\Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{32}^2] \\
&\quad + [\Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3] \\
&\quad - (\Gamma_{22}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3)) \\
R_{22} &= -\csc^2 \theta + e^{-2\lambda} - 2r\lambda' e^{-2\lambda} - 2e^{-2\lambda} \\
&\quad + r e^{-2\lambda} \left( \nu' + \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \cot^2 \theta \\
&= (1 - 2r\lambda' - 2 + r\nu' + r\lambda' + 2) e^{-2\lambda} - \csc^2 \theta + \cot^2 \theta \\
&= (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} - 1, \tag{A.20}
\end{aligned}$$

serta untuk  $\mu = 3$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{33}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\sigma - \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
&= \partial_3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) - (\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3) \\
&\quad + [\Gamma_{3\sigma}^0 \Gamma_{03}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^1 \Gamma_{13}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^2 \Gamma_{32}^\sigma + \Gamma_{3\sigma}^3 \Gamma_{33}^\sigma] \\
&\quad - (\Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\sigma}^\sigma + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\sigma}^\sigma) \\
&= -\partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_2 \Gamma_{33}^2 + [\Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{31}^0 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{32}^0 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0] \\
&\quad + [\Gamma_{13}^0 \Gamma_{30}^1 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{32}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1] \\
&\quad + [\Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2] \\
&\quad + [\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3] \\
&\quad - \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&\quad - \Gamma_{33}^2 (\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) \\
&= \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - 2r\lambda' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
&\quad + 2(-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} \frac{1}{r}) + 2(-\sin \theta \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) \\
&\quad - (-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda} (\nu' + \lambda' + \frac{2}{r})) - (-\sin \theta \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) \\
&= \sin^2 \theta (1 - 2r\lambda' - 2 + r\nu' + r\lambda' + 2) e^{-2\lambda} \\
&\quad + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \left[ (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} - 1 \right] = \sin^2 \theta R_{22}. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
&= (-e^{-2\nu}) \left\{ -\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)} \\
&\quad + \left( e^{-2\lambda} \right) \left( \nu'' - \lambda' \nu' + (\nu')^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \sin^2 \theta \left( (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} \right) \\
&= \left( \nu'' - \nu' \lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{(-2\lambda)} \\
&\quad + \left( e^{-2\lambda} \right) \left( \nu'' - \lambda' \nu' + (\nu')^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( (1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} \right) \\
&= 2 \left( \nu'' - \nu' \lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r^2} (1 + r\nu' - r\lambda') \right) e^{(-2\lambda)} \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Pada kondisi di mana tidak ada materi dan energi (vakum), ( $R_{\mu\nu} = 0$ ), maka

$$-\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{A.23}$$

$$\nu'' - \lambda' \nu' + (\nu')^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \tag{A.24}$$

$$(1 + r\nu' - r\lambda') e^{(-2\lambda)} = 1. \tag{A.25}$$

Kemudian pers. (A.23) dan (A.24) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$-\frac{2(\nu' + \lambda')}{r} = 0, \tag{A.26}$$

atau

$$(\nu' + \lambda') = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\nu + \lambda = \text{konstan.} \quad (\text{A.28})$$

Pada  $r \rightarrow \infty$ , metrik harus kembali pada bentuk Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  sehingga  $\nu$  dan  $\lambda \rightarrow 0$ , maka

$$\nu + \lambda = 0 \rightarrow \nu = -\lambda, \quad (\text{A.29})$$

dengan memasukkan pers.(A.25) ke pers.(A.29), maka diperoleh

$$(1 + 2r\nu')e^{(2\nu)} = \frac{d}{dr} [re^{(2\nu)}] = 1. \quad (\text{A.30})$$

Kemudian persamaan di atas diintegrasikan sehingga diperoleh

$$\int d [re^{(2\nu)}] = \int dr$$

$$re^{(2\nu)} = r + C, \quad (\text{A.31})$$

dengan  $C$  merupakan konstanta integrasi yang dihitung dengan pendekatan untuk medan gravitasi lemah. Lagrangian non-relativistik berbentuk,

$$L = -mc^2 - m\phi + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= -mc\left(c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}\right)$$

$$= -mc\left(c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2}g_{ij}\frac{v^i}{c}v^j\right) \quad (\text{A.32})$$

Integral aksinya adalah,

$$\begin{aligned}
 I &= \int L dt \\
 &= -mc \int \left( c + \frac{\phi}{c} - \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} v^j \right) dt \\
 &= -mc \int \left( \left( c + \frac{\phi}{c} \right) + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) dt \\
 &= -mc \int \left( \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) c dt + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \right) \\
 &= -mc \int ds
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

maka,

$$ds = \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) c dt + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \tag{A.34}$$

sehingga

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j dt + \underbrace{\frac{1}{4} \left( g_{ij} \frac{v^i}{c} dx^j \right)^2}_{\approx 0} \tag{A.35}$$

dengan

$$\left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{\phi^2}{c^4} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{A.36}$$

dan

$$\left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right) g_{ij} dx^i dx^j \approx g_{ij} dx^i dx^j \tag{A.37}$$

sehingga

$$ds^2 \approx \underbrace{\left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2}_{g_{00}} + g_{ij} dx^i dx^j \tag{A.38}$$



jika dibandingkan dengan solusi Schwarzschild,

$$g_{00} = 1 + \frac{C}{r} \quad (\text{A.39})$$

maka

$$\begin{aligned} 1 + \frac{C}{r} &= 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ C &= \phi \frac{2r}{c^2} \\ C &= - \frac{GM}{r} \frac{2r}{c^2} \\ C &= - \frac{2GM}{c^2} \\ C &= - 2m \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

dengan

$$m = \frac{GM}{c^2}, \quad (\text{A.41})$$

sehingga metriknya menjadi,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{A.42})$$

Metrik di atas merupakan metrik Schwarzschild yang memberikan Solusi Elektrovakum Persamaan Medan Einstein.

## Lampiran B

# Solusi Persamaan Medan Einstein-Maxwell

Persamaan Medan Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

jika kalikan dengan  $g^{\mu\nu}$  menghasilkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dengan mensubstitusi

$$\delta_{\mu}^{\mu} = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4 \quad (\text{B.3})$$

diperoleh

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (\text{B.4})$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T \quad (\text{B.5})$$

sehingga persamaan medan Einstein dapat ditulis kembali sebagai

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (\text{B.6})$$

Dari definisi Tensor Energi-Momentum Einstein-Maxwell

$$T_{\mu}^{\nu} = -F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \quad (\text{B.7})$$

sehingga

$$\begin{aligned} T &= T_{\mu}^{\mu} = -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\mu} F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} (\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} (4) F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \\ &= -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + F^{\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

dengan mengontraksi persamaan indeks  $\lambda \rightarrow \mu$  dan  $\gamma \rightarrow \lambda$  pada suku kedua, diperoleh

$$T = -F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{B.9})$$

sehingga persamaan medannya menjadi

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.10})$$

Tensor energi-momentum  $T_{\mu\nu}$  dapat dicari lewat tensor kuat medan  $F_{\mu\nu}$  yang bersifat antisimetri dengan menggunakan persamaan Maxwell

$$\partial_{\rho} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} + \partial_{\mu} F_{\nu\rho} = 0 \quad (\text{B.11})$$

untuk  $\rho = 0$

$$\partial_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{0\mu} + \partial_\mu F_{\nu 0} = 0 \quad (\text{B.12})$$

dengan mengontraksi insdek  $\mu \leftrightarrow \nu$  pada suku ketiga, diperoleh

$$\partial_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{0\mu} + \partial_\nu F_{\mu 0} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\partial_0 F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{0\mu} - \partial_\nu F_{0\mu} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\partial_0 F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Medan listrik di luar benda bermuatan  $q$  hanya berubah dalam arah radial dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya

$$E = E(r) \propto \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = f(r) = f \quad (\text{B.16})$$

maka hanya komponen  $F_{01}$  dan  $F_{10}$  yang tidak bernilai nol

$$F_{01} = f(r) = -F_{10} \quad (\text{B.17})$$

maka

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

dan bentuk kontravariannya

$$F^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} F_{\rho\lambda} \quad (\text{B.19})$$

dengan komponen yang tidak nol

$$\begin{aligned}
 F^{01} &= g^{\rho 0} g^{\lambda 1} F_{01} \\
 &= g^{00} g^{11} F_{01} \\
 &= -e^{-2\nu} e^{-2\lambda} f \\
 &= -f e^{-2\nu-2\lambda} \\
 F^{10} &= g^{\rho 1} g^{\lambda 0} F_{10} \\
 &= g^{11} g^{00} F_{10} \\
 &= -e^{-2\lambda} e^{-2\nu} - f \\
 &= f e^{-2\nu-2\lambda} = -F^{01}
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

maka tensor kuat medannya menjadi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -f e^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 \\ f e^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

bentuk tensor campurannya

$$F_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\gamma} F^{\gamma\mu} \tag{B.22}$$

dengan komponen yang tidak nol

$$\begin{aligned}
 F_1^0 &= g_{1\gamma} F^{\gamma 0} \\
 &= g_{11} F^{10} \\
 &= e^{2\lambda} f e^{-2\nu-2\lambda} \\
 &= f e^{-2\nu} \\
 F_0^1 &= g_{0\gamma} F^{\gamma 1} \\
 &= g_{00} F^{01} \\
 &= -e^{2\nu} - f e^{-2\nu-2\lambda} \\
 &= f e^{-2\lambda}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

sehingga tensornya menjadi

$$F_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & fe^{-2\nu} & 0 & 0 \\ fe^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

dengan demikian, tensor energi-momentumnya

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= -F_{\mu}^{\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ T_{00} &= -F_0^{\lambda}F_{0\lambda} + \frac{1}{4}g_{00}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F_0^{\lambda}F_{0\lambda} + \frac{1}{4}g_{00}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F_0^1F_{01} + \frac{1}{4}g_{00}(F^{0\rho}F_{0\rho} + F^{1\rho}F_{1\rho}) \\ &= -F_0^1F_{01} + \frac{1}{4}g_{00}(F^{01}F_{01} + F^{10}F_{10}) \\ &= -F_0^1F_{01} + \frac{1}{4}g_{00}2F^{01}F_{01} \\ &= -fe^{-2\lambda}f + \frac{1}{2} - e^{-2\nu}(-fe^{-2\nu-2\lambda})f \\ &= -f^2e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}f^2e^{-2\lambda} = -\frac{1}{2}f^2e^{-2\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= -F_{\mu}^{\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ T_{01} = T_{10} &= -F_1^{\lambda}F_{0\lambda} + \frac{1}{4}g_{01}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F_1^0F_{00} - F_1^1F_{01} + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\ &= -F_1^0(0) - (0)F_{01} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu\mu} &= -F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
T_{02} = T_{20} &= -F_2^\lambda F_{0\lambda} + \frac{1}{4}g_{02}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -(0)F_{0\lambda} + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu\mu} &= -F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
T_{03} = T_{30} &= -F_3^\lambda F_{0\lambda} + \frac{1}{4}g_{03}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -(0)F_{0\lambda} + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= -F_1^\lambda F_{1\lambda} + \frac{1}{4}g_{11}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F_1^\lambda F_{1\lambda} + \frac{1}{4}g_{11}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -F_1^0 F_{10} + \frac{1}{4}g_{11}(F^{0\rho}F_{0\rho} + F^{1\rho}F_{1\rho}) \\
&= -F_1^0 F_{10} + \frac{1}{4}g_{11}(F^{01}F_{01} + F^{10}F_{10}) \\
&= -F_1^0 F_{10} + \frac{1}{4}g_{11}2F^{01}F_{01} \\
&= -fe^{-2\nu}(-f) + \frac{1}{2}e^{-2\lambda} - fe^{-2\nu-2\lambda}f \\
&= f^2e^{-2\nu} - \frac{1}{2}f^2e^{-2\lambda} \\
&= \frac{1}{2}f^2e^{-2\nu}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} = T_{21} &= -F_2^\lambda F_{1\lambda} + \frac{1}{4}g_{12}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -(0)F_{0\lambda} + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
T_{13} = T_{31} &= -F_3^\lambda F_{1\lambda} + \frac{1}{4}g_{13}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= -(0)F_{0\lambda} + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= -F_2^\lambda F_{2\lambda} + \frac{1}{4}g_{22}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{4}g_{22}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{4}g_{22}(F^{0\rho}F_{0\rho} + F^{1\rho}F_{1\rho}) \\
&= \frac{1}{4}g_{22}(F^{01}F_{01} + F^{10}F_{10}) \\
&= \frac{1}{4}g_{22}2F^{01}F_{01} \\
&= \frac{1}{2}r^2 - fe^{-2\nu-2\lambda}f \\
&= -\frac{1}{2}r^2f^2e^{-2\nu-2\lambda}
\end{aligned} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} = T_{32} &= -F_3^\lambda F_{2\lambda} + \frac{1}{4}g_{23}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0 + \frac{1}{4}(0)F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.33}$$



$$\begin{aligned}
T_{33} &= -F_3^\lambda F_{3\lambda} + \frac{1}{4}g_{33}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{4}g_{33}F^{\lambda\gamma}F_{\lambda\gamma} \\
&= \frac{1}{4}g_{33}(F^{0\rho}F_{0\rho} + F^{1\rho}F_{1\rho}) \\
&= \frac{1}{4}g_{33}(F^{01}F_{01} + F^{10}F_{10}) \\
&= \frac{1}{4}g_{33}2F^{01}F_{01} \\
&= \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta - f e^{-2\nu-2\lambda} f \\
&= -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta f^2 e^{-2\nu-2\lambda} = \sin^2 \theta T_{22}
\end{aligned} \tag{B.34}$$

sehingga diperoleh,

$$T_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f^2 e^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}f^2 e^{-2\nu} & 0 & 0 \\ -0 & ) & -\frac{1}{2}r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta f^2 e^{-2\nu-2\lambda} \end{pmatrix} \tag{B.35}$$

dengan masing-masing komponen Tensor Ricci sama seperti solusi Schwarzschild

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ -\nu'' + \nu' \lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} \right\} e^{(2\nu-2\lambda)} \\
R_{11} &= \nu'' + (\nu')^2 - \lambda' \nu' - \frac{2\lambda'}{r} \\
R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \left[ (1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 \right] = \sin^2 \theta R_{22}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Nilai-nilai ini disubstitusi ke persamaan

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{B.37}$$

untuk kompone-00

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (\text{B.38})$$

$$\{-\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r}\} e^{(2\nu-2\lambda)} = \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}f^2 e^{-2\lambda}$$

untuk komponen-11

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} \quad (\text{B.39})$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}f^2 e^{-2\nu}$$

untuk komponen-22

$$R_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} \quad (\text{B.40})$$

$$(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(2\nu)} - 1 = \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda}$$

persamaan pada komponen-00 dikalikan  $e^{2\lambda}$  menjadi

$$\{-\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r}\} e^{2\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}f^2 \quad (\text{B.41})$$

persamaan komponen-11 dikalikan  $e^{2\nu}$  menjadi

$$\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} e^{2\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}f^2 \quad (\text{B.42})$$

kemudian persamaan tersebut dijumlahkan menjadi

$$\nu' - \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\nu' + \lambda' = 0$$

$$\nu + \lambda = \text{konstan}$$

dengan syarat pada  $r \rightarrow \infty$ , metrik kembali menjadi ke bentuk minkowski sehingga  $e^{2\nu} \rightarrow 1$  dan  $e^{2\lambda} \rightarrow 1$ , maka  $\nu = 0$

dan  $\lambda = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned}\nu + \lambda &= 0 \\ \nu &= -\lambda\end{aligned}\tag{B.44}$$

Dari persamaan komponen-22

$$\begin{aligned}(1 + r\nu' - r\lambda')e^{(-2\lambda)} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2}r^2 f^2 e^{-2\nu-2\lambda} \\ (1 + 2r\nu')e^{(2\nu)} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{1}{2}\right)r^2 f^2 e^{-2\nu+2\nu} \\ \frac{dre^{(2\nu)}}{dr} - 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(-\frac{1}{2}\right)r^2 f^2 \\ \frac{dre^{(2\nu)}}{dr} &= 1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 f^2 \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 f^2\right] dr \tag{B.45} \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{4\pi G}{c^4} r^2 \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}\right] dr \\ re^{(2\nu)} &= \int \left[1 - \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4 r^2}\right] dr \\ re^{(2\nu)} &= \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4 r} + 1 + K \\ e^{(2\nu)} &= \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4 r^2} + 1 + \frac{K}{r}\end{aligned}$$

dengan mengambil  $K = -2m$  (Radius Schwarzschild) dan  $\frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \equiv Q^2$ , maka diperoleh

$$e^{(2\nu)} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\tag{B.46}$$

sehingga solusi persamaan medan Einstein-Maxwell adalah

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2\tag{B.47}$$

# Lampiran C

## Diagram Ruang-Waktu

### C.1 Diagram Ruang-Waktu Solusi Schwarzschild

Pada kasus lubang hitam Schwarzschild, diperkenalkan koordinat baru dengan transformasi,

$$\bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m). \quad (\text{C.1})$$

sehingga

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r - 2m} dr \quad (\text{C.2})$$

dengan demikian,

$$\begin{aligned} dt &= d\bar{t} - 2m \frac{dr}{r - 2m} \\ dt^2 &= d\bar{t}^2 + 4m^2 \frac{dr^2}{(r - 2m)^2} - \frac{4m}{r - 2m} d\bar{t} dr. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Dengan begitu, didapatkan

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( d\bar{t}^2 + 4m^2 \frac{dr^2}{(r-2m)^2} - \frac{4m}{r-2m} d\bar{t}dr \right) \\
 &\quad + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( \frac{r-2m}{r} \right) \left( d\bar{t}^2 + 4m^2 \frac{dr^2}{(r-2m)^2} - \frac{4m}{r-2m} d\bar{t}dr \right) \\
 &\quad + \left( \frac{r-2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left( \frac{4m^2}{r(r-2m)} \right) dr^2 \\
 &\quad + \left( \frac{r}{r-2m} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t}dr \\
 &\quad + \left( \frac{r^2}{r(r-2m)} - \frac{4m^2}{r(r-2m)} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t}dr \\
 &\quad + \left( \frac{(r-2m)(r+2m)}{r(r-2m)} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t}dr \\
 &\quad + \left( \frac{r+2m}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
 ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t}dr + \left( 1 + \frac{2m}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Metrik di atas merupakan metrik Schwarzschild dalam koordinat Eddington-Finkelstein. Bentuk ini reguler pada semua

titik kecuali pada  $r = 0$ , sehingga singularitas koordinatnya telah dihilangkan. Kondisi untuk geodesik null radial adalah

$$d\dot{\Omega} = ds^2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

sehingga untuk geodesik null yang masuk ke lubang hitam adalah

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\bar{t}}\right)^2 &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{d\bar{t}}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{4m}{r} \frac{dr}{d\bar{t}} + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 + 0 \\ 0 &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \frac{4m}{r} \frac{dr}{d\bar{t}} + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

dengan mengambil

$$h = 1 - g_{00} = \frac{2m}{r}. \quad (\text{C.7})$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} 0 &= -(1 - h) + 2h \frac{dr}{d\bar{t}} + (1 + h) \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 \\ 0 &= -\frac{1 - h}{1 + h} + \frac{2h}{1 + h} \frac{dr}{d\bar{t}} + \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

dengan demikian, dapat diketahui akar dari persamaan tersebut sebagai,

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\bar{t}} &= -\frac{2h}{2(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2h}{(1+h)}\right)^2 - 4\frac{1-h}{1+h}} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4h^2}{(1+h)^2} + 4\frac{1-h}{1+h}} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4h^2 + 4(1-h)(1+h)}{(1+h)^2}} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4h^2 + 4(1-h^2)}{(1+h)^2}} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4h^2 + 4 - 4h^2}{(1+h)^2}} \tag{C.9} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{(1+h)^2}} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{2} \frac{2}{1+h} \\
 &= -\frac{h}{(1+h)} \pm \frac{1}{1+h} \\
 &= \frac{-h \pm 1}{1+h}
 \end{aligned}$$

dari Persamaan (C.9), diperoleh geodesik null radial yang masuk adalah garis dengan  $\frac{dr}{d\bar{t}}$  yang negatif sehingga jaraknya terhadap singularitas berkurang dengan penambahan waktu,

yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\bar{t}} &= -\frac{h}{(1+h)} - \frac{1}{1+h} \\ \frac{dr}{d\bar{t}} &= -\frac{h+1}{(1+h)} \\ \frac{dr}{d\bar{t}} &= -1,\end{aligned}\tag{C.10}$$

sehingga geodesik null radial yang masuk adalah,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^{-1} = -\frac{1+h}{-h-1} \\ &= -\frac{1+h}{(h+1)} \\ &= -1\end{aligned}\tag{C.11}$$

yang merupakan garis lurus dengan gradien -1. Sedangkan geodesik null radial yang keluar dari lubang hitam adalah akar yang lain. Dengan demikian, diperoleh geodesik null radial yang keluar dengan gradien,

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \left(\frac{dr}{d\bar{t}}\right)^{-1} = -\frac{1+h}{-h\pm 1}\tag{C.12}$$

Pada saat  $r$  mendekati tak hingga ( $r \rightarrow \infty$ ), gradiennya



$\frac{d\bar{t}}{dr}$  akan sama dengan

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} &= \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1+h}{-h \pm 1} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2m}{r}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{r+2m}{r}}{\left(\frac{r-2m}{r}\right)} \\
 &= \frac{1+0}{(-0+1)} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = 2m$  dari kanan  $r \rightarrow 2m^+$ , gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow 2m^+} &= \lim_{r \rightarrow 2m^+} \frac{\frac{r+2m}{r}}{\left(\frac{r-2m}{r}\right)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 2m^+} \frac{r+2m}{r-2m} \\
 &= \infty
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = 0$ , gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow 0} &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r+2m}{r}}{\frac{2m-r}{r}} \\
 &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r+2m}{2m-r} \\
 &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{0+2m}{2m-0} \\
 &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2m}{2m} \\
 &= -\lim_{r \rightarrow 0} (1) \\
 &= -1.
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = 2m$  dari kiri  $r \rightarrow 2m^-$ , gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow 2m^-} &= - \lim_{r \rightarrow 2m^-} \frac{\frac{r+2m}{r}}{\frac{2m-r}{r}} \\
 &= - \lim_{r \rightarrow 2m^-} \frac{r+2m}{2m-r} \\
 &= -\infty
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

## C.2 Diagram Ruang-Waktu Solusi Reissner-Nordstrom

Pada kasus Reissner-Nordstrom diperkenalkan koordinat waktu baru

$$\bar{t} = t + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-), \tag{C.17}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 d\bar{t} &= dt + d \left( \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-) \right) \\
 &= dt + dr \left( \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)(r - r_+)} - \frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)(r - r_-)} \right) \\
 &= dt + \frac{dr}{(r_+ - r_-)} \left( \frac{r_+^2}{(r - r_+)} - \frac{r_-^2}{(r - r_-)} \right), \tag{C.18}
 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
dt &= d\bar{t} - \frac{dr}{(r_+ - r_-)} \left( \frac{r_+^2}{(r - r_+)} - \frac{r_-^2}{(r - r_-)} \right) \\
&= d\bar{t} - \frac{dr}{(r_+ - r_-)} \left( \frac{(r - r_-)r_+^2 - (r - r_+)r_-^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \right) \\
&= d\bar{t} - \frac{dr}{(r_+ - r_-)} \left( \frac{r(r_+^2 - r_-^2) + r_+r_-(r_- - r_+)}{(r - r_+)(r - r_-)} \right) \\
&= d\bar{t} - \frac{dr}{(r_+ - r_-)} \left( \frac{r(r_+^2 - r_-^2) + r_+r_-(r_- - r_+)}{(r - r_+)(r - r_-)} \right) \\
&= d\bar{t} - \frac{dr}{(r - r_+)(r - r_-)} \left( \frac{r(r_+ + r)(r_+ - r) + r_+r_-(r_- - r_+)}{(r_+ - r_-)} \right) \\
&= d\bar{t} - \frac{dr}{(r - r_+)(r - r_-)} (r(r_+ + r) - r_+r_-). \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Mengingat

$$\begin{aligned}
r_+r_- &= (m + (m^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}})(m^2 - (m^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}) \\
&= m^2 - (m^2 - Q^2) = Q^2 \\
r_+ + r_- &= (m + (m^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}) + (m^2 - (m^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}) \\
&= 2m \\
(r - r_+)(r - r_-) &= r^2 - r(r_- + r_+) + r_+r_- \\
&= r^2 - 2mr + Q^2, \tag{C.20}
\end{aligned}$$

maka

$$dt = d\bar{t} - \frac{dr}{r^2 - 2mr + Q^2} (2mr - Q^2). \tag{C.21}$$

Kemudian untuk kemudahan diambil

$$f = 1 - g_{00} = \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}. \tag{C.22}$$

Sehingga diperoleh

$$dt = d\bar{t} - \frac{dr}{1-f}f \quad (\text{C.23})$$

ketika hasil di atas dikuadratkan, diperoleh

$$\begin{aligned} dt^2 &= d\bar{t}^2 + \frac{f^2}{(1-f)^2}dr^2 - \frac{2f}{1-f}d\bar{t}dr \\ (1-f)dt^2 &= (1-f)d\bar{t}^2 + \frac{f^2}{(1-f)}dr^2 - 2fd\bar{t}dr. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Hasil di atas disubsitusikan ke metrik Reissner-Nordstrom untuk memperoleh

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( (1-f)d\bar{t}^2 + \frac{f^2}{(1-f)}dr^2 - 2fd\bar{t}dr \right) + (1-f)^{-1}dr^2 \\ &\quad + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= - (1-f)d\bar{t}^2 + 2fd\bar{t}dr + \left( \frac{1}{(1-f)} - \frac{f^2}{(1-f)} \right) dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= - (1-f)d\bar{t}^2 + 2fd\bar{t}dr + (1+f)dr^2 + r^2d\Omega^2. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Metrik di atas merupakan metrik Reissner-Nordstrom dalam koordinat Eddington-Finkelstein.

Kondisi untuk geodesik null radial adalah

$$d\Omega = ds^2 = 0, \quad (\text{C.26})$$

sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= -(1-f)d\bar{t}^2 + 2fd\bar{t}dr + (1+f)dr^2 + 0 \\ 0 &= (1-f)d\bar{t}^2 + 2fd\bar{t}dr - (1+f)dr^2 \\ 0 &= (1-f)\left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)^2 + 2f\frac{d\bar{t}}{dr} - (1+f) \\ 0 &= \left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)^2 + \frac{2f}{1-f}\frac{d\bar{t}}{dr} - \frac{1+f}{1-f}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Dengan demikian diketahui akar kuadrat dari persamaan di atas

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{\frac{2f}{1-f} \pm \sqrt{\left(\frac{2f}{1-f}\right)^2 + 4\frac{1+f}{1-f}}}{2} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{1-f}\right)^2 + \frac{1+f}{1-f}} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} \pm \frac{1}{1-f}.\end{aligned}\tag{C.28}$$

sehingga untuk godesik null radial yang masuk ke dalam lubang hitam memiliki gradien

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} - \frac{1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f-1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= -1\end{aligned}\tag{C.29}$$

Dengan demikian geodesik null radial yang masuk ke lubang hitam merupakan garis lurus dengan gradien -1. Sedangkan untuk geodesik null radial yang keluar dari lubang hitam merupakan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{f}{1-f} + \frac{1}{1-f} \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{1+f}{1-f}.\end{aligned}\tag{C.30}$$

Pada saat  $r$  mendekati tak hingga ( $r \rightarrow \infty$ ), gradiennya  $\frac{d\bar{t}}{dr}$

akan sama dengan

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1+f}{1-f} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} && \text{(C.31)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2r + 2m}{2r - 2m} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} (1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = r_+$  dari kanan  $r \rightarrow r_+^+$ ,

gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow r_+^+} &= \lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{1+f}{1-f} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{\frac{r^2+2mr-Q^2}{r^2}}{\frac{r^2-2mr+Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \tag{C.32} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^+} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\
 &= \frac{r_+^2 + 2mr_+ - Q^2}{(r_+ - r_+)(r_+ - r_-)} \\
 &= \frac{r_+^2 + 2mr_+ - Q^2}{(0)(r_+ - r_-)} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = r_+$  dari kiri  $r \rightarrow r_+^-$ ,

gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow r_+^+} &= \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{1+f}{1-f} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\
 &= - \lim_{r \rightarrow r_+^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r_+ - r)(r - r_-)} \\
 &= - \frac{r_+^2 + 2mr_+ - Q^2}{(r_+ - r_+)(r_+ - r_-)} \\
 &= - \frac{r_+^2 + 2mr_+ - Q^2}{(0)(r_+ - r_-)} \\
 &= -\infty
 \end{aligned} \tag{C.33}$$

Pada saat mendekati  $r = r_-$  dari kanan  $r \rightarrow r_-^+$ , gradiennya



akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{1+f}{1-f} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\
 &= - \lim_{r \rightarrow r_{\pm}^{\pm}} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r_+ - r)(r - r_-)} \\
 &= - \frac{r_-^2 + 2mr_- - Q^2}{(r_- - r_+)(r_- - r_-)} \\
 &= - \frac{r_-^2 + 2mr_- - Q^2}{(0)(r_+ - r_-)} \\
 &= -\infty
 \end{aligned} \tag{C.34}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = r_-$  dari kiri  $r \rightarrow r_-^-$ ,

gradiennya akan sama dengan,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow r_-^+} &= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{1+f}{1-f} \\
&= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
&= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} \\
&= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \\
&= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\
&= - \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r_+ - r)(r - r_-)} \\
&= \lim_{r \rightarrow r_-^-} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{(r_+ - r)(r_- - r)} \\
&= \frac{r_-^2 + 2mr_- - Q^2}{(r_+ - r_-)(r_- - r_-)} \\
&= \frac{r_-^2 + 2mr_- - Q^2}{(r_+ - r_-)(0)} \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Kemudian pada saat mendekati  $r = 0$ , gradiennya akan sama

dengan,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r \rightarrow 0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 + f}{1 - f} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \\
 &= \frac{0^2 + 2m(0) - Q^2}{0^2 - 2m(0) + Q^2} \\
 &= \frac{-Q^2}{Q^2} \\
 &= -1
 \end{aligned} \tag{C.36}$$

Pada area di antara  $r_+$  dan  $r_-$ , geodesik memiliki gradien minus tak hingga pada saat  $r = r_+$  kemudian semakin membesar gradiennya sampai pada suatu nilai maksimum yang negatif pada titik yang diberikan oleh turunan pertama dari gradien-

nya,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{t}}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \frac{1+f}{1-f} \\
&= \frac{d}{dr} \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\
&= \frac{d}{dr} \frac{\frac{r^2+2mr-Q^2}{r^2}}{\frac{r^2-2mr+Q^2}{r^2}} \\
&= \frac{d}{dr} \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} \\
&= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} \left( (r^2 - 2mr + Q^2) \frac{d}{dr} (r^2 + 2mr - Q^2) \right. \\
&\quad \left. - (r^2 + 2mr - Q^2) \frac{d}{dr} (r^2 - 2mr + Q^2) \right) \\
&= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} \left( (r^2 - 2mr + Q^2)(2r + 2m) \right. \\
&\quad \left. - (r^2 + 2mr - Q^2)(2r - 2m) \right) \\
&= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} (2r(r^2 - 2mr + Q^2) + 2m(r^2 - 2mr + Q^2) \\
&\quad - 2r(r^2 + 2mr - Q^2) + 2m(r^2 + 2mr - Q^2)) \\
&= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} (-8mr^2 + 4rQ^2 + 4mr^2) \\
&= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} (-4mr^2 + 4rQ^2) \\
\frac{d^2\bar{t}}{dr^2} &= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} 4r(-mr + Q^2) \\
0 &= \frac{1}{(r^2 - 2mr + Q^2)^2} 4r(-mr + Q^2) \\
0 &= 4r(-mr + Q^2) \\
0 &= -mr + Q^2 \\
mr &= Q^2 \\
r &= \frac{Q^2}{m}.
\end{aligned} \tag{C.37}$$

Sehingga didapatkan gradien pada titik  $r = Q^2/m$  yaitu,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\bar{t}}{dr} \right|_{r=Q^2/m} &= \frac{1 + \frac{2m}{Q^2/m} - \frac{Q^2}{(Q^2/m)^2}}{1 - \frac{2m}{Q^2/m} + \frac{Q^2}{(Q^2/m)^2}} \\
 &= \frac{1 + \frac{2m^2}{Q^2} - \frac{m^2}{Q^2}}{1 - \frac{2m^2}{Q^2} + \frac{m^2}{Q^2}} \\
 &= \frac{Q^2 + 2m^2 - m^2}{Q^2 - 2m^2 + m^2} \\
 &= \frac{Q^2 + m^2}{Q^2 - m^2} \\
 &= -\frac{Q^2 + m^2}{m^2 - Q^2}
 \end{aligned} \tag{C.38}$$

yang merupakan suatu nilai negatif, karena  $m^2 > Q^2$ . Setelah melewati titik  $r = Q^2/m$  gradiennya turun langgi hingga garisnya berhmpit dengan garis  $r = r_-$ . Pada area di antara singularitas  $r = 0$  dan  $r_-$ , geodesik null radial memiliki gradien tak hingga pada  $r = r_-$  dan kemudian semakin mengecil sampai gradiennya sama dengan 0 pada titik yang didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{t}}{dr} &= \frac{1 + f}{1 - f} = 0 \\
 &= \frac{1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} = 0 \\
 &= \frac{\frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2}}{\frac{r^2 - 2mr + Q^2}{r^2}} = 0 \\
 &= \frac{r^2 + 2mr - Q^2}{r^2 - 2mr + Q^2} = 0 \\
 &= r^2 + 2mr - Q^2 = 0
 \end{aligned} \tag{C.39}$$

dengan akar,

$$\begin{aligned}\rho_{\pm} &= -m \pm \frac{\sqrt{4m^2 + 4Q^2}}{2} \\ \rho_{\pm} &= -m \pm \sqrt{m^2 + Q^2}\end{aligned}\tag{C.40}$$

sehingga akar yang mungkin hanyalah

$$\rho_+ = -m + \sqrt{m^2 + Q^2}.\tag{C.41}$$

### C.3 Ekstensi Maksimal Solusi Analitik

Solusi Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szekeres dapat diperoleh dengan memperkenalkan koordinat baru berupa koordinat null dengan transformasi,

$$v = \bar{t} + r, \quad w = t^* - r\tag{C.42}$$

$$\tag{C.43}$$

dengan

$$t^* = t - 2m \ln(r - 2m).\tag{C.44}$$

sehingga

$$dt^* = dt - \frac{2m}{r - 2m} dr\tag{C.45}$$

dengan begitu,

$$\begin{aligned}dv &= d\bar{t} + dr, \quad dw = dt^* - dr, \\ dv &= dt + \frac{2m}{r - 2m} dr + dr, \quad dw = dt - \frac{2m}{r - 2m} dr - dr, \\ dv &= dt + \frac{r}{r - 2m} dr, \quad dw = dt - \frac{r}{r - 2m} dr,\end{aligned}\tag{C.46}$$

sehingga

$$\begin{aligned} dvdw &= \left( dt + \frac{r}{r-2m} dr \right) \left( dt - \frac{r}{r-2m} dr \right) \\ dvdw &= dt^2 - \left( \frac{r}{r-2m} \right)^2 dr^2. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Dengan begitu dapat diperoleh,

$$\begin{aligned} - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( dt^2 - \left( \frac{r}{r-2m} \right)^2 dr^2 \right) \\ - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 \\ &\quad + \left( \frac{r-2m}{r} \right) \left( \frac{r}{r-2m} \right)^2 dr^2 \\ - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{r}{r-2m} dr^2 \\ - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw &= - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Dengan demikian, diperoleh

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.49})$$

dengan  $r$  sebagai fungsi dari  $v$  dan  $w$  yang didefinisikan secara implisit sebagai,

$$\frac{1}{2}(v-w) = r + 2m \ln(r-2m). \quad (\text{C.50})$$

Kemudian dengan mengambil  $\theta$  dan  $\phi$  konstan, metrik pada Persamaan (C.49) akan menjadi, Kemudian dengan mengambil  $\theta$  dan  $\phi$  konstan, metrik pada Persamaan (4.28) akan

menjadi,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dvdw, \quad (\text{C.51})$$

kemudian dengan mendefinisikan koordinat baru,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(v + w) \\ x &= \frac{1}{2}(v - w). \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Dengan mentransformasi Persamaan (4.30) ke koordinat tersebut, diperoleh,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (dt^2 - dx^2). \quad (\text{C.53})$$

Dengan demikian, godesik null radialnya akan memiliki gradien  $\pm 1$ , sehingga kerucut cahayanya akan sama di setiap titik. Kemudian, diambil koordinat baru dengan transformasi

$$\begin{aligned} v' &= \exp(v/4m) \\ w' &= - \exp(-w/4m). \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$



Dengan transformasi tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned}
dv' &= \frac{1}{4m} \exp(v/4m) dv, \quad dw' = \frac{1}{4m} \exp(-w/4m) dw \\
dv' dw' &= \frac{1}{4m} \exp(v/4m) dv \frac{1}{4m} \exp(-w/4m) dw \\
&= \frac{1}{16m^2} \exp(v/4m) \exp(-w/4m) dv dw \\
' &= \frac{1}{16m^2} \exp((v-w)/4m) dv dw \\
&= \frac{1}{16m^2} \exp\left(\frac{1}{2m} \frac{v-w}{2}\right) dv dw \\
&= \frac{1}{16m^2} \exp\left(\frac{1}{2m} (r + 2m \ln(r-2m))\right) dv dw \\
&= \frac{1}{16m^2} \exp\left(\frac{1}{2m} (2m \ln(r-2m))\right) \exp\left(\frac{1}{2m} r\right) dv dw \\
&= \frac{1}{16m^2} \exp(\ln(r-2m)) \exp\left(\frac{r}{2m}\right) dv dw \\
&= \frac{r-2m}{16m^2} \exp\left(\frac{r}{2m}\right) dv dw \\
dv' dw' &= \frac{r-2m}{16m^2} \exp\left(\frac{r}{2m}\right) dv dw
\end{aligned} \tag{C.55}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
dv dw &= \frac{16m^2}{r-2m} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw' \\
-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{16m^2}{r-2m} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw' \\
&= -\left(\frac{r-2m}{r}\right) \frac{16m^2}{r-2m} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw' \\
-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv dw &= -\frac{16m^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw'
\end{aligned} \tag{C.56}$$

dengan mensubstitusikan hasil di atas ke Persamaan (C.49) diperoleh,

$$ds^2 = -\frac{16m^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dv' dw' + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{C.57})$$

dengan  $r$  dinyatakan secara implisit oleh

$$\begin{aligned} v'w' &= -\exp(v/4m)\exp(-w/4m) \\ v'w' &= -\exp((v-w)/4m) \\ v'w' &= -\exp(r + 2m \ln(r-2m)/2m) \\ v'w' &= -(r-2m)\exp(r/2m). \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Kemudian dengan mengambil koordinat waktu dan radial baru yang didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(v' + w') \\ R &= \frac{1}{2}(v' - w'). \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

sehingga

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2}(dv' + dw') \\ dR &= \frac{1}{2}(dv' - dw'). \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

maka,

$$\begin{aligned} dT^2 &= \frac{1}{4}(dv' + dw')^2, \quad dR^2 = \frac{1}{4}(dv' - dw')^2 \\ dT^2 &= \frac{1}{4}(dv'^2 + dw'^2 + 2dv'dw'), \quad dR^2 = \frac{1}{4}(dv'^2 + dw'^2 - 2dv'dw') \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

dengan demikian

$$\begin{aligned}
 dT^2 - dR^2 &= \frac{1}{4}(dv'^2 + dw'^2 + 2dv'dw') \\
 &\quad - \frac{1}{4}(dv'^2 + dw'^2 - 2dv'dw') \\
 dT^2 - dR^2 &= \frac{1}{4}(dv'^2 + dw'^2 + 2dv'dw' - dv'^2 - dw'^2 + 2dv'dw') \\
 dT^2 - dR^2 &= \frac{1}{4}(4dv'dw') \\
 dT^2 - dR^2 &= dv'dw' \tag{C.62}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$ds^2 = -\frac{16m^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right)(dT^2 - dR^2) + r^2 d\Omega^2. \tag{C.63}$$

yang merupakan metrik Schwarzschild dalam koordinat Kruskal-Szeker. kemudian dengan mengambil

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{1}{4}(v' + w')^2 \\
 R^2 &= \frac{1}{4}(v' - w')^2. \tag{C.64}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 T^2 - R^2 &= \frac{1}{4}(v' + w')^2 - \frac{1}{4}(v' - w')^2 \\
 T^2 - R^2 &= \frac{1}{4}((v')^2 + (w')^2 + 2v'w' - ((v')^2 + (w')^2 - 2v'w')) \\
 T^2 - R^2 &= \frac{1}{4}(4v'w') \tag{C.65} \\
 T^2 - R^2 &= v'w' \\
 T^2 - R^2 &= -(r - 2m)\exp(r/2m),
 \end{aligned}$$

yang merupakan persamaan hiperbolik dari  $T$  dan  $R$ .

Sedangkan untuk mendapatkan solusi Reissner-Nordstrom dalam koordinat Kruskal-Szekeres, diperkenalkan koordinat baru berupa koordinat null dengan transformasi,

$$v = \bar{t} + r, \quad w = 2t - v \quad (\text{C.66})$$

sehingga

$$\begin{aligned} dv &= d\bar{t} + dr, \quad dw = 2dt - dv \\ &= 2dt - d\bar{t} - dr \\ &= 2 \left( d\bar{t} - dr \frac{f}{1-f} \right) - d\bar{t} - dr \\ &= d\bar{t} - dr \frac{1+f}{1-f} \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

dengan begitu

$$\begin{aligned} dvdw &= (d\bar{t} + dr) \left( 2d\bar{t} - dr \left( \frac{1+f}{1-f} \right) - d\bar{t} - dr \right) \\ dvdw &= d\bar{t}^2 - d\bar{t}dr \frac{1+f}{1-f} + d\bar{t}dr - dr^2 \left( \frac{1+f}{1-f} \right) \\ (1-f)dvdw &= (1-f)d\bar{t}^2 + (1-f)d\bar{t}dr - (1+f)d\bar{t}dr \\ &\quad - (1+f)dr^2 \\ (1-f)dvdw &= (1-f)d\bar{t}^2 - 2fd\bar{t}dr - (1+f)dr^2 \\ (1-f)d\bar{t}^2 &= (1-f)dvdw - 2fd\bar{t}dr - (1+f)dr^2 \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

dengan mensubstitusikan hasil di atas ke metrik Reissner-Nordstrom dalam koordinat Eddington-Finkelstein, diperoleh

$$\begin{aligned} ds^2 &= -((1-f)dvdw - 2fd\bar{t}dr - (1+f)dr^2) + 2fd\bar{t}dr \\ &\quad + (1+f)dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 &= -(1-f)dvdw + r^2d\Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

dengan mensubstitusikan nilai  $f$  didapatkan

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -((1-f)dvdw - 2f\bar{d}t\bar{d}r - (1+f)dr^2) + 2f\bar{d}t\bar{d}r \\
 &\quad + (1+f)dr^2 + r^2d\Omega^2 \\
 ds^2 &= -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dvdw + r^2d\Omega^2
 \end{aligned} \tag{C.70}$$

dengan  $r$  Kemudian dengan mengambil  $\theta$  dan  $\phi$  konstan, metrik pada Persamaan (C.70) akan menjadi,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dvdw, \tag{C.71}$$

kemudian dengan mendefinisikan koordinat baru,

$$\begin{aligned}
 t' &= \frac{1}{2}(v+w) \\
 x' &= \frac{1}{2}(v-w).
 \end{aligned} \tag{C.72}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 dt' &= \frac{1}{2}(dv + dw), \quad dx' = \frac{1}{2}(dv - dw) \\
 dt'^2 &= \frac{1}{4}(dv + dw)^2, \quad dx'^2 = \frac{1}{4}(dv - dw)^2 \\
 dt'^2 &= \frac{1}{4}(dv^2 + dw^2 + 2dvdw) \\
 dx'^2 &= \frac{1}{4}(dv^2 - 2dvdw + dw^2) \\
 dt'^2 - dx'^2 &= \frac{1}{4}(dv^2 + dw^2 + 2dvdw - (dv^2 - 2dvdw + dw^2)) \\
 dt'^2 - dx'^2 &= \frac{1}{4}(4dvdw)
 \end{aligned} \tag{C.73}$$

maka,

$$-\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dv dw = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) (dt'^2 - dx'^2). \quad (\text{C.74})$$

Dengan demikian, diperoleh

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) (dt'^2 - dx'^2). \quad (\text{C.75})$$

Pada kasus  $Q^2 < m^2$ , didefinisikan koordinat baru

$$V^\pm = \pm \exp(k_\pm v), \quad W^\pm = -\exp(-k_\pm w), \quad (\text{C.76})$$

dengan

$$k_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}. \quad (\text{C.77})$$

sehingga

$$dV^\pm = \pm k_\pm \exp(k_\pm v) dv, \quad dW^\pm = k_\pm \exp(-k_\pm w) dw, \quad (\text{C.78})$$

maka

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm \exp(k_\pm v) dv (k_\pm \exp(-k_\pm w) dw)$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm v) \exp(-k_\pm w) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm v - k_\pm w) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm(v - w)) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm(v - (2t - v))) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm(2v - 2t)) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(k_\pm(2\bar{t} + 2r - 2t)) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp\left(2k_\pm\left(t + \frac{1}{2k_+} \ln(r - r_+) - \frac{1}{2k_-} \ln(r - r_-) + r - t\right)\right)$$

$dv dw$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp\left(2k_\pm\left(\frac{1}{2k_+} \ln(r - r_+) - \frac{1}{2k_-} \ln(r - r_-) + r\right)\right) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp\left(2k_\pm\left(\frac{1}{2k_+} \ln(r - r_+) - \frac{1}{2k_-} \ln(r - r_-) + r\right)\right) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp\left(\left(\ln(r - r_+)\right)^{\frac{2k_\pm}{2k_+}} - \ln(r - r_-)^{\frac{2k_\pm}{2k_-}} + 2k_\pm r\right) dv dw$$

$$dV^\pm dW^\pm = \pm k_\pm^2 \exp(2k_\pm r) (r - r_+)^{\frac{2k_\pm}{2k_+}} (r - r_-)^{-\frac{2k_\pm}{2k_-}} dv dw$$

$$dv dw = \frac{dV^\pm dW^\pm}{\pm k_\pm^2 (r - r_+)^{\frac{2k_\pm}{2k_+}} (r - r_-)^{-\frac{2k_\pm}{2k_-}} \exp(2k_\pm r)}$$

$$-\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dv dw = -\frac{\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dV^\pm dW^\pm}{\pm k_\pm^2 (r - r_+)^{\frac{2k_\pm}{2k_+}} (r - r_-)^{-\frac{2k_\pm}{2k_-}} \exp(2k_\pm r)}$$

$$-\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) dv dw = -\frac{\left(\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}\right) \exp(-2k_\pm r) dV^\pm dW^\pm}{\pm k_\pm^2 (r - r_+)^{\frac{2k_\pm}{2k_+}} (r - r_-)^{-\frac{2k_\pm}{2k_-}}}$$

(C.79)

dengan begitu

$$\begin{aligned}
 - \left( 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \right) dv dw = - \frac{e^{(-2k_{\pm}r)}}{\pm k_{\pm}^2 r^2} (r - r_+)^{1 - \frac{2k_{\pm}}{2k_+}} (r - r_-)^{1 + \frac{2k_{\pm}}{2k_-}} \\
 dV^{\pm} dW^{\pm}
 \end{aligned}
 \tag{C.80}$$

sehingga Persamaan (C.70) menjadi

$$\begin{aligned}
 ds^2 = - \frac{e^{(-2k_{\pm}r)}}{\pm k_{\pm}^2 r^2} (r - r_+)^{1 - \frac{2k_{\pm}}{2k_+}} (r - r_-)^{1 + \frac{2k_{\pm}}{2k_-}} dV^{\pm} dW^{\pm} \\
 + r^2 d\Omega^2,
 \end{aligned}
 \tag{C.81}$$



dengan  $r$  didefinisikan secara implisit dalam

$$\begin{aligned}
V^\pm W^\pm &= \pm \exp(k_\pm v) (-\exp(-k_\pm w)) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm v - k_\pm w) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(v - w)) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(v - w)) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(\bar{t} + r - (2t - v))) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(\bar{t} + r - (2t - (\bar{t} + r)))) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(\bar{t} + r - 2t + \bar{t} + r)) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(k_\pm(2r - 2t + 2\bar{t})) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(2k_\pm(r - t + \bar{t})) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp\left(2k_\pm\left(r - t + t + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-)\right)\right) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp\left(2k_\pm\left(r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-)\right)\right) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp\left(2k_\pm\left(r + \frac{1}{2k_+} \ln(r - r_+) - \frac{1}{2k_-} \ln(r - r_-)\right)\right) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(2k_\pm(r)) \exp\left(2k_\pm\left(\frac{1}{2k_+} \ln(r - r_+)\right)\right) \\
&\quad \exp\left(2k_\pm\left(-\frac{1}{2k_-} \ln(r - r_-)\right)\right) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(2k_\pm r) \exp\left(\ln(r - r_+)^{\frac{k_\pm}{k_+}}\right) \exp\left(\left(\ln(r - r_-)\right)^{-\frac{k_\pm}{k_-}}\right) \\
V^\pm W^\pm &= \mp \exp(2k_\pm r) (r - r_+)^{\frac{k_\pm}{k_+}} (r - r_-)^{-\frac{k_\pm}{k_-}}
\end{aligned} \tag{C.82}$$

$$\begin{aligned}
T_\pm &= \frac{1}{2}(V^\pm + W^\pm) \\
R_\pm &= \frac{1}{2}(V^\pm - W^\pm).
\end{aligned} \tag{C.83}$$

dengan begitu

$$\begin{aligned}dT_{\pm} &= \frac{1}{2}(dV^{\pm} + dW^{\pm}) \\dR_{\pm} &= \frac{1}{2}(dV^{\pm} - dW^{\pm}).\end{aligned}\tag{C.84}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}dT_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}((dV^{\pm})^2 + (dW^{\pm})^2 + 2dV^{\pm}dW^{\pm}) \\dR_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}((dV^{\pm})^2 + (dW^{\pm})^2 - 2dV^{\pm}dW^{\pm}).\end{aligned}\tag{C.85}$$

sehingga

$$\begin{aligned}dT_{\pm}^2 - dR_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}((dV^{\pm})^2 + (dW^{\pm})^2 + 2dV^{\pm}dW^{\pm} \\&\quad - ((dV^{\pm})^2 + (dW^{\pm})^2 - 2dV^{\pm}dW^{\pm})) \\dT_{\pm}^2 - dR_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}(4dV^{\pm}dW^{\pm}) \\dT_{\pm}^2 - dR_{\pm}^2 &= dV^{\pm}dW^{\pm}\end{aligned}\tag{C.86}$$

dengan mensubstitusi hasil di atas ke Persamaan (C.81) menghasilkan,

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\frac{e^{(-2k_{\pm}r)}}{\pm k_{\pm}^2 r^2} (r - r_+)^{1 - \frac{2k_{\pm}}{2k_+}} (r - r_-)^{1 + \frac{2k_{\pm}}{2k_-}} (dT_{\pm}^2 - dR_{\pm}^2) \\&\quad + r^2 d\Omega^2,\end{aligned}\tag{C.87}$$

kemudian dengan mengambil,

$$\begin{aligned}T_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}(V^{\pm} + W^{\pm})^2 \\R_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}(V^{\pm} - W^{\pm})^2.\end{aligned}\tag{C.88}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 T_{\pm}^2 - R_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}(V^{\pm} + W^{\pm})^2 - \frac{1}{4}(V^{\pm} - W^{\pm})^2 \\
 T_{\pm}^2 - R_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}((V^{\pm})^2 + (W^{\pm})^2 + 2V^{\pm}W^{\pm} - ((V^{\pm})^2 + (W^{\pm})^2 - 2V^{\pm}W^{\pm})) \\
 T_{\pm}^2 - R_{\pm}^2 &= \frac{1}{4}(4V^{\pm}W^{\pm}) \\
 T_{\pm}^2 - R_{\pm}^2 &= V^{\pm}W^{\pm} \\
 T_{\pm}^2 - R_{\pm}^2 &= \mp \exp(2k_{\pm}r) (r - r_+)^{\frac{k_{\pm}}{k_+}} (r - r_-)^{-\frac{k_{\pm}}{k_-}}
 \end{aligned}
 \tag{C.89}$$

yang merupakan persamaan hiperbolik dari  $T_{\pm}$  dan  $R_{\pm}$ .

## BIODATA PENULIS



Ardiana Iqbal Nurrohman merupakan anak ke-2 dari 4 bersaudara lahir di Ngawi, 1 Oktober 1998. Penulis yang besar di lingkungan keluarga madrasah menghabiskan masa pendidikan dasar dan menengah di madrasah juga, yaitu di MIN Ngronggi, MTsN Ngawi, dan MAN 2 Madiun yang kini bernama MIN 6 Ngawi, MTsN 3 Ngawi, dan MAN 2 Kota Madiun dan kemudian menimba ilmu di Departemen Fisika ITS. Penulis

mengambil bidang minat di fisika teori. Selain belajar di departemen, penulis aktif mengikuti kegiatan kepramukaan di Racana Putra-Putri Sepuluh Nopember Gugus Depan 610-611 yang berpangkalan di ITS dan sempat menjadi Ketua Dewan Racana Putra masa periode 2018-2019.