TUGAS AKHIR – KM184801

DESAIN KONTROL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA MENGGUNAKAN *OUTPUT FEEDBACK CONTROL*

MUHAMMAD ADITYA DHARMAWAN
NRP 06111540000104

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Dr. Dra. Mardlijah, MT

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

CONTROL DESIGN OF MICROALGA GROWTH MODEL USING OUTPUT FEEDBACK CONTROL

MUHAMMAD ADITYA DHARMAWAN
NRP 06111540000104

Supervisors
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Dr. Dra. Mardlijah, MT

DEPARTMEN OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

DESAIN KONTROL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA MENGGUNAKAN *OUTPUT FEEDBACK CONTROL*

CONTROL DESIGN OF MICROALGA GROWTH MODEL USING OUTPUT FEEDBACK CONTROL

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
MUHAMMAD ADITYA DHARMAWAN
NRP. 06111540000104

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	DosenPembimbing I,
Dr. Dra. Mardlijah, MT	Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19670114 199102 2 001	NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
DEPARTEMEN MATEMATIKA

DESAIN KONTROL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA MENGGUNAKAN *OUTPUT FEEDBACK CONTROL*

Nama	**: Muhammad Aditya Dharmawan**
NRP	**: 06111540000104**
Departemen	**: Matematika-FSAD ITS**
Dosen Pembimbing	**: Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si**
	Dr. Dra. Mardlijah, MT

ABSTRAK

Peningkatan konsentrasi CO_2 dari tahun ke tahun dapat mengakibatkan pemanasan global (*global warming*). Selain itu, industri juga menghasilkan limbah cair yang dapat mencemari lingkungan sehingga diperlukan suatu solusi teknologi. Salah satu upaya yang dapat dilakukan yaitu memanfaatkan mikroalga. Mikroalga merupakan tumbuhan mikroskopis bersel tunggal yang dapat menyerap CO_2 dalam upaya menurunkan kadar CO_2 di udara sehingga perlu dikembangbiakkan. Dalam penelitian ini dilakukan analisis sistem pada model pertumbuhan mikroalga dengan *Output Feedback Control.* Hasil dari kontrol pertumbuhan mikroalga dengan menggunakan metode *State Feedback Control* dan *Output Feedback Control* setelah diberi *Pole Placement* pada $\boldsymbol{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4}$ didapatkan

$$F = \begin{pmatrix} 0.0792 & 2.3919 & -0.0427 & -14.9898 \\ -0.0006 & 0.1320 & -0.0554 & -24.5176 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$K = \begin{pmatrix} -2065.62 & 1.18239 \times 10^6 \\ -3.61706 & 2043.54 \end{pmatrix}$$

Kata kunci: Karbondioksida, Mikroalga, Output Feedback Control, Pole Placement

CONTROL DESIGN OF MICROALGA GROWTH MODEL USING OUTPUT FEEDBACK CONTROL

Name : **Muhammad Aditya Dharmawan**
NRP : **06111540000104**
Department : **Mathematics-FSAD ITS**
Supervisor : **Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si**
Dr. Dra. Mardlijah, MT

ABSTRACT

Increasing CO_2 concentrations from year to year can be resolved by global warming. In addition, the industry also produces waste that can pollute the environment. A technological solution is needed. One effort that can be done is to utilize microalgae. Microalgae are single-celled microscopic plants that can absorb CO_2 in an effort to reduce CO_2 levels in the air. In this study a system analysis was performed on the microalgae growth model with Output Feedback Control. The results of microalgae growth control using the Feedback Control and Output Feedback Control methods after being given a Pole Placement at $\boldsymbol{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4}$ *obtained* $F = \begin{pmatrix} 0.0792 & 2.3919 & -0.0427 & -14.9898 \\ -0.0006 & 0.1320 & -0.0554 & -24.5176 \end{pmatrix}$ *and* $K = \begin{pmatrix} -2065.62 & 1.18239 \times 10^6 \\ -3.61706 & 2043.54 \end{pmatrix}$.

Keywords: Carbondioxide, Microalgae, Output Feedback Control, Pole Placement

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji syukur bagi Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"DESAIN KONTROL PADA MODEL PERTUMBUHAN MIKROALGA MENGGUNAKAN *OUTPUT FEEDBACK CONTROL*"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis hingga terselesainya Tugas Akhir ini:

1. Orang tua penulis Irfan Setiadi & Nitya Fitra Nugraha dan adik Nisrina Afifah Susiana beserta seluruh keluarga besar penulis atas do'a dan dukungan yang selalu diberikan kepada penulis.
2. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, MT. selaku Sekretaris Departemen Matematika ITS yang telah memberikan arahan akademis selama penulis kuliah di Departemen Matematika ITS.

4. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku dosen pembimbing atas segala arahan, dukungan, dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan nasihat dan arahan selama penulis menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen, seluruh staf Departemen Matematika ITS yang telah mendidik, memberikan ilmu, dan memfasilitasi penulis selama berkuliah di ITS.
7. Sahabat Successor, Tommy, AyuR, Anin dan Arif yang selalu menjadi tempat bernaung dan memberikan semangat kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
8. Winda Firdiana sebagai orang spesial dari penulis yang selalu memberi semangat dan menemai saya dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
9. Sobat Klasikarya, Khafi, Anita, Salman dan Levin yang selalu mengisi waktu senggang saya yang penuh konten.
10. Teman-teman Matematika ITS 2015 yang selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
11. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan, dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan oleh penulis. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun banyak orang.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Surabaya, Januari 2020

Penulis

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**

TITLE PAGE ..... **iii**

LEMBAR PENGESAHAN .....Error! Bookmark not defined.

ABSTRAK ..... **vii**

ABSTRACT ..... **ix**

KATA PENGANTAR..... **xi**

DAFTAR ISI..... **xv**

DAFTAR GAMBAR..... **xix**

DAFTAR TABEL ..... **xxiii**

DAFTAR LAMPIRAN..... **xxv**

DAFTAR SIMBOL..... **xxvii**

BAB I PENDAHULUAN..... **1**

1.1 Latar Belakang..... **1**

1.2 Rumusan Masalah **3**

1.3 Batasan Masalah..... **3**

1.4 Tujuan..... **4**

1.5 Manfaat..... **4**

1.6 Sistematika Penulisan..... **4**

BAB II TINJAUAN PUSTAKA..... *7*

2.1 Penelitian Terdahulu..... **7**

2.2 Mikroalga **8**

2.3 Pemodelan Matematika **9**

2.4 Titik Kesetimbangan..... **13**

2.5 Pelinearan **13**

2.6 Analisis Kestabilan..... **15**

2.7 Keterkontrolan Sistem **16**

2.8 Keteramatan Sistem..... **16**

2.9 *Feedback Control* **17**

2.9.1 State Feedback Control **18**

2.9.2 *Output Feedback Control*..... **19**

2.10 *Pole Placement*..... **19**

2.11 Kriteria Routh Hurwitz..... **20**

BAB III METODE PENELITIAN..... *23*

3.1 Tahapan Penelitian **23**

3.2 Diagram Alur Penelitian..... **24**

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN..... *27*

4.1 Model Pertumbuhan Mikroalga..... **27**

4.2 Titik Kesetimbangan..... **28**

4.3 Analisis Kestabilan..... **32**

4.4 Analisis Keterkontrolan..... **39**

4.5 *State Feedback Control* **43**

4.6 *Output Feedback Control* **46**

4.7 Simulasi dan Analisis Hasil Kontrol **51**

4.7.1 ***State Feedback Control* Sebelum Diberi Kontrol** **52**

4.7.2 Hasil Simulasi *State Feedback Control* Setelah *Pole Placement* 54
4.7.3 *Output Feedback Control* Sebelum Diberi Kontrol 63
4.7.4 Hasil Simulasi *Output Feedback Control* Setelah Diberi *Pole Placement* 65

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 75

5.1 Kesimpulan **75**

5.2 Saran **76**

DAFTAR PUSTAKA 77

LAMPIRAN A 81

LAMPIRAN B 85

BIODATA PENULIS 89

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Model **Error! Bookmark not defined.**
Gambar 3. 1 Diagram Alur 25
Gambar 4. 1 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 52
Gambar 4. 2 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 53
Gambar 4. 3 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 53
Gambar 4. 4 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 55
Gambar 4. 5 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 56
Gambar 4. 6 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 56
Gambar 4. 7 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 57
Gambar 4. 8 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 58
Gambar 4. 9 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 58
Gambar 4. 10 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 59

Gambar 4. 11 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 60
Gambar 4. 12 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 60
Gambar 4. 13 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 61
Gambar 4. 14 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 62
Gambar 4. 15 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 62
Gambar 4. 16 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 63
Gambar 4. 17 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 64
Gambar 4. 18 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 64
Gambar 4. 19 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 66
Gambar 4. 20 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 67
Gambar 4. 21 Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 68
Gambar 4. 22 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 68

Gambar 4. 23 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 69
Gambar 4. 24 Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 70
Gambar 4. 25 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 70
Gambar 4. 26 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 71
Gambar 4. 27 Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 71
Gambar 4. 28 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ 72
Gambar 4. 29 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ 73
Gambar 4. 30 Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A^0}, \boldsymbol{M^0}, \boldsymbol{S^0}, \boldsymbol{C^0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ 73

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2. 1 Tabel Nilai Parameter 12
Tabel 2. 2 kriteria Routh-Hurwitz..... 15

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

LAMPIRAN A 81
LAMPIRAN B 85

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

A : Matriks ruang keadaan
B : Matriks masukkan kendali
C : Matriks keteramatan
$x(t)$: Vektor ruang keadaan
$y(t)$: Output proses
$u(t)$: Input proses
F : Matriks *State Feedback Control*
K : Matriks *Output Feedback Control*
λ : Nilai eigen
M_c : Matriks Keterkontrolan
A : Konsentrasi mikroalga kering
M : Konsentrasi nutrisi
S : Konsentrasi glukosa
C : Konsentrasi karbondioksida
$f_m(M)$: Konsentrasi nutrisi dalam sel mikroalga
$i_c\ (t)$: Aliran masuk karbondioksida
$i_m\ (t)$: Aliran masuk nutrisi
D_r : Tingkat kematian mikroalga
H_r : Tingkat panen mikroalga
a_A : Konstanta pertumbuhan biomassa
α_s : Konstanta fotosintesis
k_1 : Tingkat perubahan CO_2 menjadi $(CH_2O)_6$
k_2 : Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering
k_3 : Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi mikroalga kering

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai hal-hal yang menjadi latarbelakang dari permasalahan pada Tugas Akhir ini. Kemudian, dijabarkan dalam rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat yang bisa diambil dari penyusunan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Pemanasan global (*global warming*) terjadi akibat proses peningkatan suhu rata-rata atmosfer, laut, dan daratan di bumi. Pemanasan global sendiri sudah menjadi isu lingkungan yang menjadi fokus utama dunia saat ini. Salah satu masalah kerusakan lingkungan yang terjadi sejak revolusi industri ini adalah gas CO_2 yang menyebabkan pemanasan global dan perubahan iklim. Pada saat ini, konsentrasi CO_2 di atmosfer selalu bertambah dari tahun ke tahun selama manusia menggunakan bahan bakar fosil. sekitar 383 ppm atau 0,0383% volume atmosfer [1]. Emisi CO_2 dalam konsentrasi yang tinggi dihasilkan oleh aktivitas pembakaran bahan bakar fosil khususnya dari kegiatan industri. Selain itu, industri juga menghasilkan limbah organik dari hasil pengolahannya. Limbah cair memiliki tingkat pencemaran yang lebih besar dari limbah organik. Oleh karena itu, dibutuhkan solusi untuk mengatasi kedua permasalahan tersebut, maka digunakan solusi alternatif salah satunya pemanfaatan mikroalga.

Mikroalga merupakan tumbuhan mikroskopis bersel tunggal yang dapat menyerap CO_2 di udara dan memafaatkan nutrisi yang ada di air saat melakukan proses fotosintesis. Nutrisi dalam proses ini dapat berasal dari material limbah cair. Mikroalga memiliki tingkat petumbuhan yang relatif cepat, sehingga kebutuhan gas CO_2 cukup tinggi. Mikroalga dapat memfiksasi CO_2 (10 – 50) kali lebih efisien dibandingkan dengan tumbuhan lainnya [2]. Dengan demikian, mikroalga cocok dikembangkan sebagai *carbon sink* untuk membantu penerunan kadar CO_2 di udara. Selian itu, mikroalga memiliki keunggulan dalam pengolahan air limbah, antara lain tidak menghasilkan limbah sekunder, pengurangan emisi gas rumah kaca, dan produksi biomassa mikroalga. Maka, mikroalga dapat menjadi solusi dari pemanasan global serta pencemaran air limbah sehingga perlu dikembangbiakkan. Untuk pertumbuhan mikroalga, diperlukan kontrol terhadap CO_2 dan nutrisi agar dapat berkembang biak secara maksimal. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengontrol pertumbuhan mikroalga yaitu *output feedback control*.

Terdapat beberapa metode dalam perancangan desain kontrol salah satunya yaitu umpan balik keluaran (*output feedback control*). *Feedback control* dapat didefinisikan sebagai pemanfaatan beda signal yang ditentukan oleh perbandingan nilai-nilai aktual dari variabel sistem dengan nilai-nilai yang diharapkan, beda ini mempunyai arti sebagai pengontrolan sistem. Penelitian yang dilakukan oleh Fakhrudin mengenai Desain Sistem Kendali State Feedback pada Kasus Kontinyu untuk Meja Kerja Computer Numerical

Control (CNC) menunjukkan bahwa metode kendali *state feedback control* dengan estimator berorde penuh menghasilkan performa yang memuaskan untuk kriteria %OS [3]. Selain itu, Yanling dkk menggunakan metode *output feedback control* sebagai pilihan terbaik dalam mengontrol Sistem Piecewise-Affine (PWA) [4].

Dalam tugas akhir ini penulis menggunakan literatur yang bersumber dari tugas akhir Yoshua Ardy Putra yang berjudul "Kendali Optimal Pada Model Pertumbuhan Alga Dengan Aliran Nutrisi Dan Karbon Dioksida Sebagai Variabel Kendali Menggunakan Metode LQR" [5]. Penelitian ini menerapkan metode *output feedback control* dengan pengaturan CO_2 dan nutrisi sehingga dapat mengetahui pengendalian pertumbuhan mirkoalga yang maksimal. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini digunakan metode *output feedback control*, kemudian dibuat desain kontrol model pertumbuhan mikroalga Selanjutnya akan dilakukan simulasi menggunakan software MATLAB. Dari hasil simulasi akan mengetahui desain kontrol sistem.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, dapat dirumuskan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan dan keterkontrolan sistem dari pertumbuhan mikroalga?
2. Bagaimana desain kontrol pertumbuhan mikroalga dengan metode *output feedback control*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Model pertumbuhan mikroalga yang digunakan dengan model Thornton dan dianggap selalu ada.
2. Pada model pertumbuhan mikroalga, airnya berasal dari limbah pabrik sehingga memiliki kandungan nutrisi, tetapi komposisi dari kandungan nutrisi diabaikan.
3. Desain kontrol mikroalga akan disimulasikan menggunakan software MATLAB.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Mengetahui kestabilan dan keterkontrolan sistem pertumbuhan mikroalga.
2. Mendapatkan *controller* pertumbuhan mikroalga dengan metode *output feedback control.*

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan mengenai pertumbuhan mikroalga yang optimal
2. Mengetahui desain kontrol pada model pertumbuhan mikroalga.
3. Sebagai referensi untuk penelitian berikutnya mengenai penerapan *feedback control*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan

masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Pada bab ini dijelaskan mengenai mikroalga, pemodelan matematika, titik kesetimbangan, pelinieran, titik kestabilan, keterkontrolan, keteramatan, *Feedback Control*, *Pole Placement*, dan penelitian terdahulu yang terkait permasalahan dalam Tugas Akhir ini untuk mendapatkan hasil desain control pada sistem yang dipilih.

3. BAB III METODE PENELITIAN

   Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan, metode, dan diagram alur penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

   Pada bab ini dijelaskan tentang analisis sistem, yang meliputi analisis kestabilan dan keterkontrolan sistem pertumbuhan mikroalga. Mendapatkan *controller* pertumbuhan mikroalga dengan metode *output feedback control.* Kemudian hasilnya akan disimulasikan menggunakan software MATLAB.

5. BAB V PENUTUP

   Bab ini berisi kesimpulan Tugas Akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai penelitian terdahulu, mikroalga, model Matematika, titik kesetimbangan, analisis kestabilan, analisis keterkontrolan, analisis keteramatan, *Feedback Control* dan *Pole Placement*.

2.1 Penelitian Terdahulu

Tinjauan pustaka yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah beberapa penelitian yang relevan dengan tema yang diambil. Penelitian pada tahun 2012 tentang analisis dan simulasi konversi energi angin menjadi energi listrik menggunakan metode *feedback linearization control* [7]. Hasil sistem yang paling stabil dan memiliki keakuratan sistem yang baik adalah sistem untuk k_1 = 4000; k_2 = 136; k_3 = 40000, dan sistem yang memiliki performansi yang baik adalah sistem untuk k_1 = 1,4;k_2 = 0,4;k_3 = 0,2.

Penelitian selanjutnya pada tahun 2017 tentang kendali optimal pada model pertumbuhan alga dengan aliran nutrisi dan karbon dioksida sebagai variabel kendali menggunakan metode LQR [5]. Sistem dinamik pada model alga Thornton bersifat stabil dan terkontrol. Didapat titik kesetimbangannya adalah $E = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C}) = (1.6260; 1.7095; 3.9837; 0.1479)$

Pada penelitian yang dilakukan pada tahun 2018 tentang desain sistem kendali *state feedback* pada kasus kontinu untuk *work table Computer Numerical Control* (CNC) [3]. Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa metode kendali *state feedback control* dengan estimator berorde penuh menghasilkan performa yang memuaskan untuk kriteria %OS,

sedangkan untuk kriteria T_s belum memenuhi kriteria yang diinginkan.

Penelitian selanjutnya pada tahun 2019 tentang analisis performansi metode *Linier Quadratic Regulator* pada sistem pertumbuhan mikroalga dengan pengaturan intensitas cahaya [6]. Pada LQR, peningkatan biomassa mencapai 91.77% dari jumlah awal. Sedangkan pada PMP meningkat dua kali lipat dari kondisi awalnya. Pada LQR, Intensitas cahaya yang optimal terjadi sebesar 9.9071. Sedangkan PMP terjadi sebesar 0.18.

2.2 Mikroalga

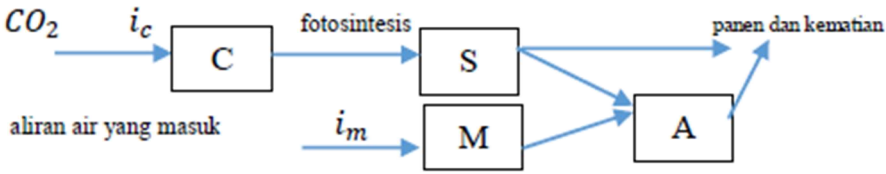
Mikroalga merupakan kelompok tumbuhan berukuran renik yang termasuk dalam kelas alga, berukuran diameter 3 – 30 μm, dari sel tunggal maupun koloni yang hidup di seluruh wilayah perairan air tawar dan laut yang biasa disebut fitoplankton [8]. Alga merupakan organisme yang dianggap sebagai nenek moyang tumbuhan saat ini. Alga memiliki beberapa karakteristik yang dimilki oleh tumbuhan saat ini seperti pigmen klorofil. Alga secara morfologi dapat terbagi menjadi dua golongan yaitu mikroalga (alga dengan ukuran mikrokopis) dan makroalga (alga yang berukuran makro). Namun, secara spesifik bentuk tubuh beserta ukurannya tidak akan sama persis dengan tumbuhan dan ukuran tubuhnya sekalipun dalam bentuk makro tidak mudah dilihat dengan mata telanjang.

Pertumbuhan mikroalga sendiri terdiri dari tiga fase utama, yaitu fase lag, eksponensial, dan stasioner. Kebanyakan spesies mikroalga menghasilkan produk yang khas seperti karatenoid, antioksidan, asam lemak, enzim,

polimer, peptide, toksin, dan sterol. Komunitas mikroalga pada suatu perairan dipengaruhi oleh kondisi lingkungan antara lain temperatur (suhu), nutrien (unsur hara), intensitas cahaya, derajat keasaman (pH), aerasi (sumber CO_2), dan salinitas. Mikroalga sama seperti tumbuhan lainnya yang melakukan fotosintesis dengan mengkonsumsi air, karbodioksida, sinar matahari serta klorofil untuk menghasilkan oksigen dan lipid yang mana digunakan untuk bahan dasar biomassa. Mikroalga memiliki keunggulan dibandingkan dengan sumber energi dari bahan baku lain. Yakni memiliki kandungan lipid mencapai 70 persen, memiliki tingkat efisiensi fotosintesis yang tinggi, pertumbuhan alga tergolong sangat cepat sehingga mampu untuk mengurangi jumlah karbondioksida yang berlebih. Komponen yang terdapat pada lipid mikroalga adalah trigliserida. Senyawa ini diubah menjadi metil ester melalui proses transesterifikasi. Asam lemak metil ester yang diperoleh dapat digunakan sebagai bahan baku biomassa.

2.3 Pemodelan Matematika

Model pertumbuhan alga menurut model Thornton dapat diilustrasikan pada Gambar 2.1 [9]. Karbon dioksida dipompa kedalam air dan berubah menjadi glukosa melalui fotosintesis. Kemudian nutrisi yang terdapat didalam air pembuangan rumah kaca dan glukosa membentuk alga. Selanjutnya alga dan glukosa yang tersimpan diasumsikan berkurang dengan adanya kematian dari hasil panen. Energi tidak hanya disimpan dalam glukosa, tetapi juga sebagai glukosa yang lebih kompleks serta minyak.



Gambar 2.1. Produksi Alga

Produksi alga dimodelkan dengan konsentrasi alga (A), nutrisi (M), glukosa (S), dan karbondioksida (C) di kolam. Dengan asumsi bahwa kolam teraduk dengan baik dan pertumbuhan alga sangat lambat, konsentrasi-konsentrasi di atas bersifat independen dari semua variabel spasial dan hanya berhantung pada waktu (t). Masuknya nutrisi dan karbon dioksida ke dalam dilambangkan dengan i_m dan i_c. Alga ini sedang kelaparan pada "tingkat kematian" (D_r) dan dipanen (H_r), yang keduanya mengurangi jumlah alga dan glukosa yang tersimpan di dalam alga tersebut. Selanjutnya glukosa yang di produksi $(a_s C)$ dari karbon dioksida, dimana (a_s) adalah konstan. Hal ini mengurangi jumlah karbon dioksida$(-k_1 \alpha_s C)$. Dari proses fotosintesis oksigen di dapat.

$$6CO_2 + 6H_2O \rightarrow (CH_2O)_6 + 6O_2$$

Alga baru diproduksi didalam alga yang ada $(a_A f_m(M))$ dari nutrisi dan glukosa, dimana a_A adalah konstanta dan $f_m(M)$ menunjukan konsentrasi nutrisi dalam sel. Hal tersebut menghabiskan nutrisi dan glukosa dengan $(-k_2 a_A f_m(M))$ dan $(-k_3 a_A f_m(M))$. Menggabungkan pengaruh pertumbuhan alga, fotosintesis masuknya karbon dioksida, mineral,

kematian dan panen alga. Diperoleh model matematika dari pertumbuhan alga adalah sebagai berikut [9]:

$$\dot{A} = a_A f_m(M)S - (D_r + H_r)A \quad (2.1)$$

$$\dot{M} = -k_2 a_A f_m(M)S + i_m \quad (2.2)$$

$$\dot{S} = a_s C - k_3 a_A f_m(M)S - (D_r + H_r)S \quad (2.3)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + i_c \quad (2.4)$$

Keterangan:

A : Konsentrasi mikroalga kering
M : Konsentrasi nutrisi
S : Konsentrasi glukosa
C : Konsentrasi karbondioksida
$f_m(M)$: Konsentrasi nutrisi dalam sel mikroalga
$i_c\ (t)$: Aliran masuk karbondioksida
$i_m\ (t)$: Aliran masuk nutrisi
D_r : Tingkat kematian mikroalga
H_r : Tingkat panen mikroalga
a_A : Konstanta pertumbuhan biomassa
α_s : Konstanta fotosintesis
k_1 : Tingkat perubahan CO_2 menjadi $(CH_2O)_6$
k_2 : Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering
k_3 : Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi mikroalga kering

Diasumsikan bahwa $f_m(M) = \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}}$, Sehingga persamaan (2.1) - (2.4) dapat ditulis menjadi:

$$\dot{A} = a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S - (D_r + H_r)A \quad (2.5)$$

$$\dot{M} = -k_2 a_A \frac{p_{max} M}{M + M_{turn}} S + i_m \quad (2.6)$$

$$\dot{S} = a_s C - k_3 a_A \frac{p_{max} M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r) S \quad (2.7)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + i_c \quad (2.8)$$

Kondisi awal dan parameter yang digunakan berasal dari penelitian Thornton yang diperoleh sebagai berikut [9]:

1. Kondisi awal (A_0, M_0, S_0, C_0) adalah (3,0.4,10,5), (3,0.6,15,7.5), dan (3,0.2,5,2.5)
2. Nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini yang berdasarkan pada penelitian Thornton yang disajikan pada tabel dibawah:

Tabel 2. 1 Tabel Nilai Parameter [9]

Parameter		**Nilai**
a_A	Konstanta pertumbuhan biomassa	10.2
p_{max}	Konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh	0.4
D_r	Tingkat kematian mikroalga	0.46
H_r	Tingkat panen mikroalga	2
M_{turn}	Konsentrasi nutrisi setengah jenuh diperoleh ketika nutrisi diluar	4
I_m	Aliran masuk nutrisi	4.2
α_s	Konstanta fotosintesis	67.6
k_1	tingkat perubahan CO_2 menjadi $(CH_2O)_6$	0.4
k_2	Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering	0.05
k_3	Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi mikroalga kering	0.05
i_c	Aliran masuk karbondioksida	4

2.4 Titik Kesetimbangan

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}n \tag{2.9}$$

Definisi 2.1 [10]

Suatu titik $\bar{x} \in Rn$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem (2.9) jika $f(\bar{x}) = 0$.

2.5 Pelinearan

Karena model pada penelitian ini berbentuk nonlinier, maka untuk menganalisis kestabilan model pertumbuhan mikroalga dengan menggunakan analisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbangnya. Untuk melakukan analisis transformasi kestabilan lokal tersebut, digunakan Deret Taylor untuk suatu sistem $\boldsymbol{f}$ disekitar titik kesetimbang $\bar{\boldsymbol{x}}$ adalah:

$$\begin{aligned} f(x) = f(\bar{x}) + \Bigg(& \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}(x - \bar{x}_1) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}(x - \bar{x}_2) + \cdots \\ & + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}(x - \bar{x}_n) \Bigg) \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_1)^2}(x - \bar{x}_1)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) + \cdots \\ & + \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_n)^2}(x - \bar{x}_n)^2 \Bigg) + \cdots \end{aligned}$$

(2.10)

dimana,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

dan

$$f(\bar{x}) = 0 \text{ (Titik kesetimbangan)}$$

Dengan pengabaian suku-suku berorde tinggi, maka terbentuk suatu model matematika yang linier. Kemudian ditinjau sistem $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ disekitar titik kesetimbangan $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, maka persamaan menjadi:

$$f_1(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n)$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n)$$

selanjutnya didefinisikan,

$$x_1 - \bar{x}_1 = y_1$$
$$x_2 - \bar{x}_2 = y_2$$
$$\vdots$$
$$x_n - \bar{x}_n = y_n$$

dan dimisalkan $\dot{y}_1 = f(x)$, maka diperoleh,

$$\dot{y}_1 = f_1(x,y) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} y_n$$
$$\dot{y}_2 = f_2(x,y) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} y_n$$
$$\vdots$$
$$\dot{y}_n = f_n(x,y) = \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} y_n$$

Persamaan-persamaan diatas dapat diubah dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

atau dapat ditulis menjadi,

$$\dot{y} = J(f(\bar{x}))y$$

dengan $J(f(\bar{x}))$ adalah matriks Jacobian dan fungsi $f(\bar{x})$ merupakan fungsi f di titik kesetimbangan $\bar{x}$.

2.6 Analisis Kestabilan

Berikut definisi mengenai sifat kestabilan suatu sistem nonlinier yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian.

Definsi 2.2 [10]

1. *Suatu titik kesetimbangan $\bar{x}$ pada sistem persamaan differensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dikatakan*
2. *Stabil jika semua nilai eigen matriks Jacobian $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ mempunyai bagian real negatif,*

3. *Tidak stabil, jika semua nilai eigen matriks Jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ *mempunyai bagian real positif,*
4. *Pelana (saddle), jika titik ekuilibrium hiperbolik dan terdapat nilai eigen matriks jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}))$ *mempunyai bagian real positif dan negatif.*

2.7 Keterkontrolan Sistem

Diberikan suatu sistem yang disajikan oleh persamaan:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

disebut terkontrol jika rank dari matriks keterkontrolan M_c sama dengan matriks A, dengan matriks keterkontrolan $M_c = (B|AB|A^2B| \dots |A^{n-1}B)$

Teorema 2.1 **[10]**

Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah matriks $M_c = (B|AB|A^2B| \dots |A^{n-1}B)$ *mempunyai rank yang sama dengan* n.

2.8 Keteramatan Sistem

Berikut ini diberikan suatu pengertian dari keteramatan dari suatu sistem,

Definisi 2.3 **[10]**

Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ *secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem dari waktu* $t = 0$ *ke* $t = t_1$*, maka sistem dikatakan "teramati".*

Selanjunya diberikan suatu pernyataan dalam suatu teorema berikut ini yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati.

Teorema 2.2 **[10]**

Syarat cukup dan perlu suatu sistem linier dikatakan teramati, jika matriks:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

mempunyai rank sama dengan n.

2.9 *Feedback Control*

Misalkan suatu sistem diuraikan dalam persamaan (2.12):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (2.12)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Definisi 2.4 **[10]**

Sistem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ *bisa distabilkan bila ada suatu matriks F ukuran* $m \times n$ *sedemikian hingga semua nilai-karakterisrik* λ *dari matriks* $A + BF, p(\lambda) < 0$

Berikut ini diberikan suatu teorema yang memberikan syarat suatu sistem bisa distabilkan.

Teorema 2.3 **[10]**

Sistem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ *terkontrol bila dan hanya bila untuk setiap polinomial*

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + p_2\lambda^{(n-2)} + \ldots + p_n \quad (2.13)$$

dengan koefisien p_i *real, ada matriks* F *ukuran* $m \times n$ *sedemikian hingga* $det[\lambda I - (A + BF)] = p(\lambda)$

Terdapat dua komponen utama dari *feedback control* yaitu *state feedback control* yang digunakan untuk mengendalikan tiap-tiap *state* pada suatu sistem dan *output feedback control* yang menyatakan hasil keluaran sistem setelah diberi *feedback control.*

2.9.1 State Feedback Control

Berdasarkan persamaan (2.12), diasumsikan $C = I$ dan $D = 0$, yaitu keseluruhan keadaan teramati. Tujuannya adalah untuk mengarahkan output y ke nilai referensi yang diberikan, F. dapat diberikan suatu umpan balik linear berbentuk.

$$u = -Fx$$

Tanda negatif merupakan sebuah konvensi untuk menunjukkan bahwa *feedback* negatif adalah situasi normal. Sistem loop-tutup diperoleh ketika umpan balik diterapkan ke sistem diberikan oleh [11].

$$\dot{x} = Ax - BF = (A - BF)x \quad (2.14)$$

Matriks F dipilih sedemikian hingga sistem loop-tutup mempunyai suatu perilaku yang diinginkan, suatu umpan balik yang diberikan dinamakan *State Feedback Control* [11].

2.9.2 *Output Feedback Control*

Berdasarkan persamaan (2.12), diasumsikan $C = I$ dan $D = 0$, yaitu keseluruhan keadaan teramati. Tujuannya adalah untuk mengarahkan output y ke nilai referensi yang diberikan, H. dapat diberikan suatu umpan balik linear berbentuk.

$$u = -Ky$$

Pada bagian ini untuk menemukan *feedback control* yang memberikan nilai eigen loop-tutup yang diinginkan untuk sistem di mana hanya output yang tersedia untuk *feedback control* [11].

$$\dot{x} = Ax + BKy = (A + BKC)x \qquad (2.15)$$

Suatu pengontrol yang demikian disebut *output feedback control.*

2.10 *Pole Placement*

Salah satu metode yang dapat digunakan dalam sistem kontrol *output feedback* adalah dengan metode *pole placement.* Metode ini ditujukan untuk menentukan *pole* dari sistem loop-tutup yang diinginkan bila telah diberi kontroler. Pemilihan *pole* dapat dilakukan dengan menentukan kriteria hasil desain yang diinginkan dimana *pole* itu sendiri adalah *time constant* dari sistem loop-tutup [12].

Bila terdapat sistem *state space* $x \in \mathbb{R}^n$ maka diberikan suatu sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(\mathrm{t})$$
$$u(t) = Kx(t)$$

Maka bisa didapatkan karakteristik polinomial dari matriks A sebagai berikut.

$$|s\lambda - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Bila ditentukan *pole closed loop* (λ) sebagai berikut,

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$$

2.11 Kriteria Routh Hurwitz

Nilai-nilai karakteristik dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial [10].

$$\boldsymbol{p(s) = det(\lambda I - A)}$$
$$\boldsymbol{= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}$$

dengan $a_n = 1$. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat digunakan untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_i tampa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada, yaitu dengan membuat suatu tabel dan suatu aturan penghitungan dari koefisien a_i untuk mengetahui apakah semua akar dari polinomial $p(s)$ tersebut memiliki bagian real yang negatif. Misalkan persamaan karakteristik dari suatu sistem dinyatakan suatu polinomial,

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Disusun tabel sebagai berikut:

Tabel 2. 2 kriteria Routh-Hurwitz

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$
λ^{n-2}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
λ^{n-3}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots$

$$
\begin{array}{c|ccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda^2 & e_1 & e_2 & 0 \\
\lambda^1 & g_1 & 0 & \\
\lambda^0 & h_1 & &
\end{array}
$$

Dengan

$$c_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad d_1 = \frac{c_1 a_3 - a_1 c_2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 a_5 - a_1 c_3}{c_1}$$

$$c_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad d_3 = \frac{c_1 a_7 - a_1 c_4}{c_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}$$

$$e_2 = \frac{d_1 c_3 - c_1 d_3}{d_1}$$

$$\vdots$$

dan seterusnya.

Titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika perubahan tanda dalam kolom pertama (semuanya bertanda positif atau bertanda negatif) pada tabel kriteria Routh-Hurwitz [10].

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai tahapan-tahapan penelitian yang digunakan dalam penelitian ini sekaligus sebagai panduan dalam pengerjaan tugas akhir ini. Langkah-langkah yang diambil dalam penulisan penelitian ini adalah:

3.1 Tahapan Penelitian

Pada bagian ini dijelaskan mengenai tahapan-tahapan penelitian yang digunakan dan diagram alur yang ditunjukkan dalam Gambar 3.1. Langkah-langkah yang diambil dalam penulisan penelitian ini adalah:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan teori-teori pendukung yang menunjang dan relevan dengan tema, yaitu mengenai model pertumbuhan mikroalga, analisis sistem (kestabilan, keterkontrolan dan keteramatan), *output feedback control* dan Pole Placement. Literatur dapat berupa buku, makalah, jurnal, hasil penelitian sebelumnya, atau berbagai tulisan yang berkaitan dengan Tugas Akhir ini.

2. Analisis Sistem

Pada tahap ini akan dicari titik kesetimbangan dari model Matematika pertumbuhan mikroalga sehingga dapat ditentukan kestabilan, keterkontrolan serta keteramatan pada sistem tersebut.

3. Desain Kontrol

Pada tahap ini ditentukan desain kontrol *Output Feedback Control* dari model Matematika pertumbuhan mikroalga menggunakan *Pole Placement*.

4. Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini akan dilakukan simulasi menggunakan software MATLAB R2013a. Selanjutnya akan didapatkan desain kontrol pada Mikroalga dalam bentuk grafik.

5. Menarik Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan yang merupakan ringkasan akhir dari hasil penelitian yang menjawab tujuan penelitian. Setelah itu diberikan pula saran untuk penelitian mendatang yang berupa perbaikan maupun pengembangan dari penelitian yang telah dilakukan.

3.2 Diagram Alur Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini sesuai dengan diagram alur penelitian yang ditunjukkan pada Gambar 3.1

Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan kendali optimal dari model pertumbuhan mikroalga yang digunakan, yaitu model Thornton yang telah dikembangkan. Sebelum menentukan kendali optimal, akan dibahas juga analisa dinamik dari sistem persamaan pada model pertumbuhan mikroalga tersebut. Analisis dinamik meliputi analisis kestabilan, keterkontrolan dan Keteramatan. Juga akan dibahas mengenai titik kesetimbangan dan penyelesaian kendali optimal dari sistem menggunakan metode *Output Feedback Control* dan *Pole Placement*, kemudian disimulasikan dengan Software MATLAB.

4.1 Model Pertumbuhan Mikroalga

Pada penelitian ini digunakan model Thornton yang telah dikembangkan [9], sebagai berikut:

$$\dot{A} = a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S - (D_r + H_r)A \tag{4.1}$$

$$\dot{M} = -k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S + i_m \tag{4.2}$$

$$\dot{S} = a_s C - k_3 a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S - (D_r + H_r)S \tag{4.3}$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + i_c \tag{4.4}$$

Kemudian akan ditentukan titik setimbang, analisis kestabilan, serta analisis keterkontrolan menggunakan model pertumbuhan mikroalga.

4.2 Titik Kesetimbangan

Menentukan titik kesetimbangan diperoleh dengan menyamakan dengan nol state-state yaitu $\dot{A} = 0$, $\dot{M} = 0$, $\dot{S} = 0$, dan $\dot{C} = 0$ Sehingga pada persamaan (4.1)-(4.4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$\dot{A} = 0$

$$a_A(P_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)A = 0 \quad (4.5)$$

$\dot{M} = 0$

$$-k_2 a_A\left(P_{max}\frac{M}{M+M_{turn}}\right)S + i_m = 0 \quad (4.6)$$

$\dot{S} = 0$

$$a_s C - k_3 a_A(P_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)A \quad (4.7)$$

$\dot{C} = 0$

$$-k_1\alpha_s C + i_c = 0 \quad (4.8)$$

Dari persamaan (4.8) didapat:

$$-k_1\alpha_s C + i_c = 0$$

$$i_c = -k_1\alpha_s C$$

$$\dot{C} = \frac{i_c(t)}{k_1 a_s} \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.6) didapat:

$$\dot{M} = -k_2 a_A\left(P_{max}\frac{M}{M + M_{turn}}\right)S + i_m(t) = 0$$

$$i_m(t) = -k_2 a_A\left(P_{max}\frac{M}{M + M_{turn}}\right)S$$

$$S = \frac{i_m(t)(M+M_{turn})}{k_2\alpha_A P_{max} M} \quad (4.10)$$

Setelah didapatkan persamaan (4.9) dan (4.10) substitusikan persamaan tersebut pada persamaan (4.7), maka diperoleh:

$$\alpha_s \frac{i_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 a_A \left(P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$
$$-(D_r + h_r) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M} = 0$$

$$\alpha_s \frac{i_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 a_A \left(P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$
$$= (D_r + h_r) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$

$$\alpha_s \frac{i_c(t)}{k_1 \alpha_s} - \frac{k_3 i_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$

$$\frac{i_c(t)}{k_1} - \frac{k_3 i_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r) \frac{i_m(t)(M + M_{turn})}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2} \frac{1}{i_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M + M_{turn}}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2 i_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M + M_{turn}}{k_2 \alpha_A P_{max} M}$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2 i_m(t)(D_r + h_r)} (k_2 \alpha_A P_{max} M) = 1 + \frac{M_{turn}}{M}$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2 i_m(t)(D_r + h_r)} (k_2 \alpha_A P_{max} M) - 1 = \frac{M_{turn}}{M}$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 i_m(t)(D_r + h_r)}(\alpha_A P_{max} M) - 1 = \frac{M_{turn}}{M}$$

$$\frac{(\alpha_A P_{max})(k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t))}{k_1 i_m(t)(D_r + h_r)} - \frac{k_1 i_m(t)(D_r + h_r)}{k_1 i_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M_{turn}}{M}$$

$$\bar{M} = \frac{M_{turn} k_1 i_m(t)(D_r + h_r)}{(\alpha_A P_{max})(k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)) - k_1 i_m(t)(D_r + h_r)} \quad (4.11)$$

Sehingga dari persamaan (4.1) didapat

$$a_A \frac{p_{max} M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r)A = 0$$

$$a_A \frac{p_{max} M}{M + M_{turn}} S = (D_r + H_r)A \quad (4.12)$$

Dari persamaan (4.6) diperoleh

$$-k_2 a_A \left(P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}}\right) S + i_m(t) = 0$$

$$i_m(t) = k_2 a_A \left(P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}}\right) S$$

$$\frac{i_m(t)}{k_2} = a_A \left(P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}}\right) S \quad (4.13)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.12) ke persamaan (4.13), didapat

$$\frac{i_m(t)}{k_2} = (D_r + H_r)A$$

$$A = \frac{i_m(t)}{k_2(D_r + H_r)} \quad (4.14)$$

Dari persamaan (4.7) dapat dituliskan

$$a_s C - k_3 a_A (P_{max} \frac{M}{M + M_{turn}})S - (D_r + h_r)A$$

Substitusi persamman (4.9) dan (4.13) ke dalam persamaan (4.7)

$$a_s C \frac{i_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \frac{i_m(t)}{k_2} - (D_r + h_r)S = 0$$

$$a_s \frac{i_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \frac{i_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r)S$$

$$\frac{i_c(t)}{k_1} - k_3 \frac{i_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r)S$$

$$\frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2} = (D_r + h_r)S$$

$$\bar{S} = \frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} \qquad (4.15)$$

Berdasarkan persamaan (4.9), (4.11), (4.14), (4.15) dapat diperoleh titik setimbang $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$ dari sistem dinamik model pertumbuhan mikroalga sebagai berikut:

$$\bar{A} = \frac{i_m(t)}{k_2 (D_r + H_r)A}$$

$$\bar{M} = \frac{M_{turn} k_1 i_m(t)(D_r + h_r)}{(\alpha_A P_{max})(k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)) - k_1 i_m(t)(D_r + h_r)}$$

$$\bar{S} = \frac{k_2 i_c(t) - k_1 k_3 i_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)}$$

$$\bar{C} = \frac{i_c(t)}{k_1 a_s}$$

Maka, dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan dari model pertumbuhan alga adalah

$$\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$$

4.3 Analisis Kestabilan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari model pertumbuhan mikroalga, maka tahap selanjutnya adalah menganalisis kestabilan dinamik model pertumbuhan mikroalga. Persamaan (4.1) – (4.4) merupakan persamaan tak linier, sehingga untuk menganalisis kestabilan sistem adalah dengan cara menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbang dari sistem.

Diasumsikan bahwa $f_m(M) = \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}}$, Sehingga persamaan (2.1) - (2.4) dapat ditulis menjadi:

$$\dot{A} = a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S - (D_r + H_r)A \tag{4.16}$$

$$\dot{M} = -k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S + i_m \tag{4.17}$$

$$\dot{S} = a_s C - k_3 a_A \frac{p_{max}M}{M+M_{turn}} S - (D_r + H_r)S \tag{4.18}$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + i_c \tag{4.19}$$

Untuk menganalisis kestabilan sistem pertumbuhan alga, dapat dilakukan dengan melakukan pendekatan terhadap Deret Taylor seperti pada Persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}(M-\bar{M}) + \frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}(C-\bar{C})$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A}(A-\bar{A}) + \frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}(M-\bar{M}) + \frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}(S-\bar{S}) + \frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}(C-\bar{C})$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A}(A-\bar{A})+\frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}(M-\bar{M})$$
$$+\frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}(S-\bar{S})+\frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}(C-\bar{C})$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A}(A-\bar{A})+\frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}(M-\bar{M})$$
$$+\frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}(S-\bar{S})+\frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}(C-\bar{C})$$

Didefinisikan,

$$A-\bar{A}=A_0$$
$$M-\bar{M}=M_0$$
$$S-\bar{S}=S_0$$
$$C-\bar{C}=C_0$$

Mislkan

$$\dot{A}=f_1(A,M,S,C)$$
$$\dot{M}=f_2(A,M,S,C)$$
$$\dot{S}=f_3(A,M,S,C)$$
$$\dot{C}=f_4(A,M,S,C)$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{A}=\frac{\partial f_1(A,M,S,C)}{\partial A}A_0+\frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}M_0+\frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}S_0$$
$$+\frac{\partial f_1(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}C_0$$

$$\dot{M}=\frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A}A_0+\frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M}M_0)+\frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S}S_0$$
$$+\frac{\partial f_2(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C}C_0$$

$$\dot{S} = \frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M} M_0) + \frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_3(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C} C_0$$

$$\dot{C} = \frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial M} M_0) + \frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_4(\bar{A},\bar{M},\bar{S},\bar{C})}{\partial C} C_0$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Dengan $\frac{d}{dt}\dot{A} = \frac{d}{dt}A_0$, maka didapat

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial A} = \frac{\partial\left(a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}}\right)S - (D_r + H_r)A}{\partial A} = -(D_r + H_r)$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial M} = \frac{\partial\left(a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}}\right)S - (D_r + H_r)A}{\partial M}$$
$$= a_A p_{max}\bar{S}\left(\frac{1}{\bar{M} + M_{turn}} - \frac{\bar{M}}{(\bar{M} + M_{turn})^2}\right)$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} = \frac{\partial\left(a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}}\right)S - (D_r + H_r)A}{\partial S} = \frac{a_A p_{max} M}{\bar{M} + M_{turn}}$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial C} = \frac{\partial\left(a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}}\right)S - (D_r + H_r)A}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial A} = \frac{\partial\left(-k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S + i_m(t)\right)}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial M} = \frac{\partial\left(-k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S + i_m(t)\right)}{\partial M}$$
$$= -\frac{k_2 a_A p_{max}\bar{M}}{M + M_{turn}} + \frac{k_2 a_A p_{max}\bar{M}\bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} = \frac{\partial\left(-k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S + i_m(t)\right)}{\partial S}$$
$$= -\frac{k_2 a_A p_{max}\bar{M}}{M + M_{turn}}$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial C} = \frac{\partial\left(-k_2 a_A \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S + i_m(t)\right)}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial A} = \frac{\partial\left(a_s C - \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r)S\right)}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial M} = \frac{\partial\left(a_s C - \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r)S\right)}{\partial M}$$
$$= -\frac{k_3 a_A p_{max}\bar{M}}{M + M_{turn}} + \frac{k_3 a_A p_{max}\bar{M}\bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} = \frac{\partial\left(a_s C - \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r)S\right)}{\partial S}$$
$$= -\frac{k_3 a_A p_{max}\bar{M}}{M + M_{turn}} - (D_r + H_r)$$

$$\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial C} = \frac{\partial\left(a_s C - \frac{p_{max}M}{M + M_{turn}} S - (D_r + H_r)S\right)}{\partial C} = a_s$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial A} = \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial M} = \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial M} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} = \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial C} = \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial C} = -k_1\alpha_s$$

Kemudian disubstitusi pada keadaan matriks, maka didapat

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{pmatrix}$$

Dengan

$$x_1 = -(D_r + H_r)$$

$$x_2 = a_A p_{max} \bar{S} \left(\frac{1}{\bar{M} + M_{turn}} - \frac{\bar{M}}{(\bar{M} + M_{turn})^2} \right)$$

$$x_3 = \frac{a_A p_{max} M}{\bar{M} + M_{turn}}$$

$$x_4 = -\frac{k_2 a_A p_{max} \bar{M}}{M + M_{turn}} + \frac{k_2 a_A p_{max} \bar{M} \bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$

$$x_5 = -\frac{k_2 a_A p_{max} \bar{M}}{M + M_{turn}}$$

$$x_6 = -\frac{k_3 a_A p_{max} \bar{M}}{M + M_{turn}} + \frac{k_3 a_A p_{max} \bar{M} \bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$

$$x_7 = -\frac{k_3 a_A p_{max} \bar{M}}{M + M_{turn}} - (D_r + H_r)$$

$$x_8 = a_s$$

$$x_9 = -k_1 a_s$$

Dapat ditulis dalam bentuk Jacobian

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = J\big(f(\bar{x})\big) \begin{pmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{pmatrix}$$

Dapat diketahui bahwa $J\big(f(\dot{x})\big)$ merupakan matriks Jacobian f dan $\dot{x}$. Matriks Jacobian dapat digunakan untuk mengidentifikasi kestabilan system nonlinier disektor titik kesetimbangan. Dicari persamaan karakteristik.

$$\left| J\big(f(\dot{x})\big) - \lambda I \right| = 0$$

sehingga,

$$\begin{vmatrix} x_1-\lambda & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4-\lambda & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7-\lambda & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1-\lambda)\left(\begin{vmatrix} x_4-\lambda & x_5 & 0 \\ x_6 & x_7-\lambda & x_8 \\ 0 & 0 & x_9-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$(x_1-\lambda)\left((x_4-\lambda)\begin{vmatrix} x_7-\lambda & x_8 \\ 0 & x_9-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$(x_1-\lambda)(x_4-\lambda)\big((x_7-\lambda)(x_9-\lambda)-0\big) = 0$$

$$(x_1-\lambda)(x_4-\lambda)(x_7-\lambda)(x_9-\lambda) = 0$$

$$(x_1-\lambda)\left(\begin{vmatrix} x_4-\lambda & x_3 & 0 \\ x_6 & x_7-\lambda & x_8 \\ 0 & 0 & x_9-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$(x_1-\lambda)\left((x_9-\lambda)\begin{vmatrix} x_4-\lambda & x_5 \\ x_6 & x_7-\lambda \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$(x_1-\lambda)(x_9-\lambda)[(x_4-\lambda)(x_7-\lambda)-x_5x_6] = 0$$

$$(x_1-\lambda)(x_9-\lambda)[x_4x_7-x_4\lambda-x_7\lambda+\lambda^2-x_5x_6] = 0$$

$$(x_9+\lambda)(x_1-\lambda)[\lambda^2-(x_4+x_7)\lambda+x_4x_7-x_5x_6] = 0$$

Dengan mencari akar-akar persamaan kuadrat untuk mendapat $\lambda_{3,4}$

$$\lambda_{3,4} = \frac{(x_4+x_7) \pm \sqrt{\big(-(x_4+x_7)\big)^2 - 4(x_4x_7-x_5x_6)}}{2}$$

Sehingga didapat seluruh nilai λ sebagai berikut:

$\lambda_1 = x_1 = -(D_r + H_r)$

$$\lambda_2 = x_9 = -k_1 a_s$$

$$\lambda_3 = \frac{(x_4 + x_7) + \sqrt{\left(-(x_4 + x_7)\right)^2 - 4(x_4 x_7 - x_5 x_6)}}{2}$$

$$\lambda_4 = \frac{(x_4 + x_7) - \sqrt{\left(-(x_4 + x_7)\right)^2 - 4(x_4 x_7 - x_5 x_6)}}{2}$$

Karena semua nilai parameter bernilai positif dan disubstitusikan ke nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ diperoleh nilai negatif sehingga dapat diketahui bahwa $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$ bersifat stabil

4.4 Analisis Keterkontrolan

Untuk dapat menganalisis keterkontrolan dibutuhkan sistem yang telah dilinierkan. Setelah dilakukan pelinieran di titik kesetimbangan menggunakan Jacobian dengan memisalkan matriks $\dot{A}$, diperoleh:

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

dan matriks $\dot{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\dot{x})}{\partial_{Im}(t)} & \frac{\partial f_1(\dot{x})}{\partial_{Ic}(t)} \\ \frac{\partial f_2(\dot{x})}{\partial_{Im}(t)} & \frac{\partial f_2(\dot{x})}{\partial_{Ic}(t)} \\ \frac{\partial f_3(\dot{x})}{\partial_{Im}(t)} & \frac{\partial f_3(\dot{x})}{\partial_{Ic}(t)} \\ \frac{\partial f_4(\dot{x})}{\partial_{Im}(t)} & \frac{\partial f_4(\dot{x})}{\partial_{Ic}(t)} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S-(D_r+H_r)A\right)}{\partial_{Im}(t)} & \dfrac{\partial\left(a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S-(D_r+H_r)A\right)}{\partial_{Ic}(t)} \\ \dfrac{\partial\left(-k_2 a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S+i_m\right)}{\partial_{Im}(t)} & \dfrac{\partial\left(-k_2 a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S+i_m\right)}{\partial_{Ic}(t)} \\ \dfrac{\partial\left(a_s C-k_3 a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S-(D_r+H_r)S\right)}{\partial_{Im}(t)} & \dfrac{\partial\left(a_s C-k_3 a_A \dfrac{p_{max}M}{M+M_{turn}}S-(D_r+H_r)S\right)}{\partial_{Ic}(t)} \\ \dfrac{\partial(-k_1\alpha_s C+i_c)}{\partial_{Im}(t)} & \dfrac{\partial(-k_1\alpha_s C+i_c)}{\partial_{Ic}(t)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Berdasarkan Teorema 2.1 maka dapat disusun matriks keterkontrolan M_c sebagai berikut:

$$M_c=\left(\bar{B}\,|\overline{AB}\,|\overline{A^2B}\,\left|\overline{A^3B}\right|\right)$$

Untuk matriks $\overline{AB}$ diperoleh:

$$\overline{AB}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & 0\\ 0 & x_4 & x_5 & 0\\ 0 & x_6 & x_7 & x_8\\ 0 & 0 & 0 & x_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_2 & 0\\ x_4 & 0\\ x_6 & x_8\\ 0 & x_9\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$x_2 = c_1 = a_A p_{max}\bar{S}\left(\frac{1}{\bar{M}+M_{turn}}-\frac{\bar{M}}{(\bar{M}+M_{turn})^2}\right)$$

$$x_2 = c_2 = -\frac{k_2 a_A p_{max} \bar{S}}{M + M_{turn}} + \frac{k_2 a_A p_{max} \bar{M} \bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$
$$x_6 = c_3 = -\frac{k_3 a_A p_{max} \bar{S}}{M + M_{turn}} + \frac{k_3 a_A p_{max} \bar{S}}{(M + M_{turn})^s}$$
$$x_8 = c_4 = \alpha_s$$
$$x_9 = c_5 = -k_1 \alpha_s$$

Untuk matriks $\overline{A^2B}$ diperoleh:

$$\overline{A^2B} = [\bar{A}][\overline{AB}]$$

$$\overline{A^2B} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ C_4 & 0 \\ C_6 & C_8 \\ 0 & C_9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^2B} = \begin{bmatrix} x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 & x_3C_4 \\ x_4C_2 + x_5C_3 & x_5C_4 \\ x_6C_2 + x_7C_3 & x_7C_4 + x_8C_5 \\ 0 & x_9C_5 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dengan memisalkan nilai dari perkalian matriks tersebut, sehingga diperoleh:

$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = D_1$
$x_4C_2 + x_5C_3 = D_2$
$x_6C_2 + x_7C_3 = D_3$
$x_3C_4 = D_4$
$x_5C_4 = D_5$
$x_7C_4 + x_8C_5 = D_6$
$x_9C_5 = D_7$

Untuk matriks $\overline{A^3B}$ diperoleh:

$$\overline{A^3B} = [\bar{A}]\left[\overline{A^2B}\right]$$

$$\overline{A^3B} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_2 & D_5 \\ D_3 & D_6 \\ 0 & D_7 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^3B} = \begin{bmatrix} x_1D_1 + x_2D_2 + x_3D_3 & x_1D_4 + x_2D_5 + x_3D_6 \\ x_4D_2 + x_5D_3 & x_4D_5 + x_5D_6 \\ x_6D_2 + x_7D_3 & x_6D_5 + x_7D_6 + x_9D_7 \\ 0 & x_9C_7 \end{bmatrix}$$

Dengan memisalkan nilai dari perkalian matriks tersebut, sehingga diperoleh:

$x_1D_1 + x_2D_2 + x_3D_3 = E_1$
$x_4D_2 + x_5D_3 = E_2$
$x_6D_2 + x_7D_3 = E_3$
$x_1D_4 + x_2D_5 + x_3D_6 = E_4$
$x_4D_5 + x_5D_6 = E_5$
$x_6D_5 + x_7D_6 + x_9D_7 = E_6$
$x_9C_7 = E_7$

Dari hasil diatas maka dapat dibentuk matriks keterkontrolan M_c sebagai berikut:

$$M_c = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & C_2 & 0 & D_1 & D_4 & E_1 & E_4 \\ 1 & 0 & C_4 & 0 & D_2 & D_5 & E_2 & E_5 \\ 0 & 0 & C_6 & C_8 & D_3 & D_6 & E_3 & E_6 \\ 0 & 1 & 0 & C_9 & 0 & D_7 & 0 & E_7 \end{array}\right]$$

Selanjutnya disubstitusikan nilai titik setimbang dan parameter. Matriks keterkontrolan yang diperoleh dapat dianalisis bahwa rank $M_c = 4$. Dengan demikian sistem dinamik dari model pertumbuhan mikroalga bersifat terkontrol.

4.5 State Feedback Control

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai sistem kontrol pada pertumbuhan mikroalga. *State Feedback Control* merupakan sebuah sistem kontrol yang terdiri atas sistem dan *feedback* sistem. Dengan memaksimumkan pertumbuhan mikroalga, diberikan sistem kontrol (2.12) sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.24}$$

$$u = -Fx \tag{4.25}$$

Maka, dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-Fx) \\ &= Ax - BFx \\ &= (A - BF)x \end{aligned} \tag{4.26}$$

Kemudian dicari nilai $(A - BF)x$

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$(A - BF)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \end{bmatrix}$$

$$(A - BF)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \end{bmatrix}$$

$$(A - BF)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ -F_{11} & x_4 - F_{12} & x_5 - F_{13} & -F_{14} \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ -F_{21} & -F_{22} & -F_{23} & x_9 - F_{24} \end{bmatrix}$$

Pada sistem kontrol misalkan memilih *feedback* F, dengan $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3,\ \lambda_4 = -4,$ maka didapatkan persamaan karakteristik

$$|\lambda I - (A - BF)| = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4)$$

Maka bisa didapatkan persamaan karakteristik dari $|\lambda I - (A - BF)|$sebagai berikut.

$$|\lambda I - (A - BF)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ -F_{11} & x_4 - F_{12} & x_5 - F_{13} & -F_{14} \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ -F_{21} & -F_{22} & -F_{23} & x_9 - F_{24} \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - (A - BF)| = \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 \\ F_{11} & (\lambda - x_4) + F_{12} & -x_5 + F_{13} & F_{14} \\ 0 & -x_6 & \lambda - x_7 & -x_8 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & (\lambda - x_9) + F_{24} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I-(A-BF)| \\
&=(\lambda-x_1)\begin{vmatrix}(\lambda-x_4)+F_{12} & -x_5+F_{13} & F_{14} \\ -x_6 & \lambda-x_7 & -x_8 \\ F_{22} & F_{23} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix} \\
&+x_2\begin{vmatrix}F_{11} & -x_5+F_{13} & F_{14} \\ 0 & \lambda-x_7 & -x_8 \\ F_{21} & F_{23} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix} \\
&-x_3\begin{vmatrix}F_{11} & (\lambda-x_4)+F_{12} & F_{14} \\ 0 & -x_6 & -x_8 \\ F_{21} & F_{22} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I-(A-BF)| \\
&=(\lambda-x_1)\begin{vmatrix}(\lambda-x_4)+F_{12} & -x_5+F_{13} & F_{14} \\ -x_6 & \lambda-x_7 & -x_8 \\ F_{22} & F_{23} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix} \\
&+x_2\begin{vmatrix}F_{11} & -x_5+F_{13} & F_{14} \\ 0 & \lambda-x_7 & -x_8 \\ F_{21} & F_{23} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix} \\
&-x_3\begin{vmatrix}F_{11} & (\lambda-x_4)+F_{12} & F_{14} \\ 0 & -x_6 & -x_8 \\ F_{21} & F_{22} & (\lambda-x_9)+F_{24}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I-(A-BF)| \\
&=(\lambda-x_1)\lambda^3+(-x_4-x_7-x_9+F_{12}+F_{24})\lambda^2 \\
&+(-x_4F_{24}+x_4x_9+x_4x_7+F_{12}F_{24}-x_9F_{12}-x_7F_{12}+x_7x_9 \\
&\qquad -x_7F_{24}+x_8F_{23}-x_5x_6+2x_6F_{13} \\
&\qquad -F_{12}F_{24})\lambda \\
&+(-x_7x_9x_4-x_7x_4F_{24}-x_8x_4F_{24}+x_7x_9F_{12}-x_7F_{12}F_{24} \\
&\qquad +x_8F_{23}F_{12}+x_5x_6x_9-x_5x_6F_{24} \\
&\qquad +x_5x_8F_{22}-x_6x_9F_{13}+x_6F_{13}F_{24}-x_8F_{13}F_{22} \\
&\qquad -x_6F_{14}F_{23}++x_7F_{14}F_{22}) \\
&+(x_2F_{11})\lambda^2-(x_2x_9F_{11}+x_2F_{11}F_{24}-x_2x_7F_{11}-x_2F_{21}F_{14})\lambda
\end{aligned}
$$

$$+(x_2x_7x_9F_{11}-x_2x_7F_{11}F_{24}+x_2x_8F_{23}F_{11}+x_2x_5x_8F_{21} - x_2x_8F_{13}F_{21}+x_2x_7F_{14})$$
$$+(-x_3x_6F_{11}+x_3x_8F_{21})\lambda + (-x_3x_6x_9F_{11}+x_3x_6F_{11}F_{24}-x_3x_8F_{22}F_{11} - x_3x_4x_8F_{21}+x_3x_8F_{12}F_{21}-x_3x_6F_{14}F_{21})$$

Sehingga dari persamaan diatas, diperoleh nilai Matriks F

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, nilai F ini akan dimasukkan sebagai input ke dalam simulasi MATLAB.

4.6 Output Feedback Control

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai sistem kontrol pada pertumbuhan mikroalga. *Output Feedback Control* merupakan sebuah sistem kontrol yang terdiri atas sistem dan *feedback* sistem. Dengan memaksimumkan pertumbuhan mikroalga, diberikan sistem kontrol (2.12) sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.27}$$
$$u = -Ky \tag{4.28}$$
$$y = Cx \tag{4.29}$$

Sehingga dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-KCx) \\ &= Ax - BKCx \\ &= (A - BKC)x \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai $(A - BKC)x$

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$(A - BKC)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - BKC)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - BKC)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & x_5 & 0 \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & x_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & 0 & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$(A - BKC)x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 - K_{11} & x_5 & -K_{12} \\ 0 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & -K_{21} & 0 & x_9 - K_{22} \end{bmatrix}$$

Pada sistem kontrol misalkan memilih *feedback* K, dengan $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4$, maka didapatkan persamaan karakteristik

$$|\lambda I - (A - BKC)| = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4)$$

Maka bisa didapatkan persamaan karakteristik dari $|\lambda I - (A - BKC)|$sebagai berikut.

$$|\lambda I-(A-BKC)| = \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & 0\\ 0 & x_4-K_{11} & x_5 & -K_{12}\\ 0 & x_6 & x_7 & x_8\\ 0 & -K_{21} & 0 & x_9-K_{22}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-BKC)| = \begin{bmatrix}\lambda-x_1 & -x_2 & -x_3 & 0\\ 0 & \lambda-x_4+K_{11} & -x_5 & K_{12}\\ 0 & -x_6 & \lambda-x_7 & -x_8\\ 0 & K_{21} & 0 & \lambda-x_9+K_{22}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-BKC)| = \begin{bmatrix}\lambda-x_1 & -x_2 & -x_3 & 0\\ 0 & (\lambda-x_4)+K_{11} & -x_5 & K_{12}\\ 0 & -x_6 & \lambda-x_7 & -x_8\\ 0 & K_{21} & 0 & (\lambda-x_9)+K_{22}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-BKC)| = (\lambda-x_1)\begin{bmatrix}(\lambda-x_4)+K_{11} & -x_5 & K_{12}\\ -x_6 & \lambda-x_7 & -x_8\\ K_{21} & 0 & (\lambda-x_9)+K_{22}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-BKC)| = (\lambda-x_1)\left(x_5\begin{vmatrix}-x_6 & -x_8\\ K_{21} & (\lambda-x_9)+K_{22}\end{vmatrix} + (\lambda-x_7)\begin{vmatrix}(\lambda-x_4)+K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & (\lambda-x_9)+K_{22}\end{vmatrix}\right)$$

$$|\lambda I-(A-BKC)| = (\lambda-x_1)\{x_5\big(-x_6\big((\lambda-x_9)+K_{22}\big)+K_{21}x_8\big) + (\lambda-x_7)\big((\lambda-x_4)+K_{11}\big)\big((\lambda-x_9) + K_{22}\big)-K_{21}K_{12}\}$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I - (A - BKC)| \\
&\quad = (\lambda - x_1)\{x_5(-x_6\lambda + x_6x_9 - x_6K_{22} + K_{21}x_8) \\
&\qquad\qquad + (\lambda - x_7)(\lambda^2 \\
&\qquad\qquad + (K_{11} - x_9 + K_{22} - x_4)\lambda + x_4x_9 - x_4K_{22} \\
&\qquad\qquad - K_{11}x_9 + K_{11}K_{22} - K_{21}K_{12})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I - (A - BKC)| \\
&\quad = (\lambda - x_1)\{(-x_5x_6\lambda + x_5x_6x_9 - x_5x_6K_{22} + x_5x_8K_{21}) \\
&\qquad\qquad + (\lambda - x_7)(\lambda^2 \\
&\qquad\qquad + (K_{11} - x_9 + K_{22} - x_4)\lambda + x_4x_9 - x_4K_{22} \\
&\qquad\qquad - K_{11}x_9 + K_{11}K_{22} - K_{21}K_{12})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda I - (A - BKC)| \\
&= (\lambda - x_1)\{\lambda^3 + (K_{11} + K_{22} - x_4 - x_7 - x_9)\lambda^2 \\
&\qquad\qquad + (K_{11}K_{22} - K_{21}K_{12} - x_7K_{11} - x_9K_{11} \\
&\qquad\qquad - x_4K_{22} - x_7K_{22} + x_4x_7 + x_4x_9 - x_5x_6 \\
&\qquad\qquad + x_7x_9)\lambda + x_7x_9K_{11} + x_7K_{12}K_{21} \\
&\qquad\qquad + x_5x_8K_{21} + x_4x_7K_{22} - x_7K_{11}K_{21} - x_5x_6K_{22} \\
&\qquad\qquad + x_4x_5x_9 - x_4x_7x_9\}
\end{aligned}
$$

Sehingga dari persamaan diatas, diperoleh nilai Matriks K

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

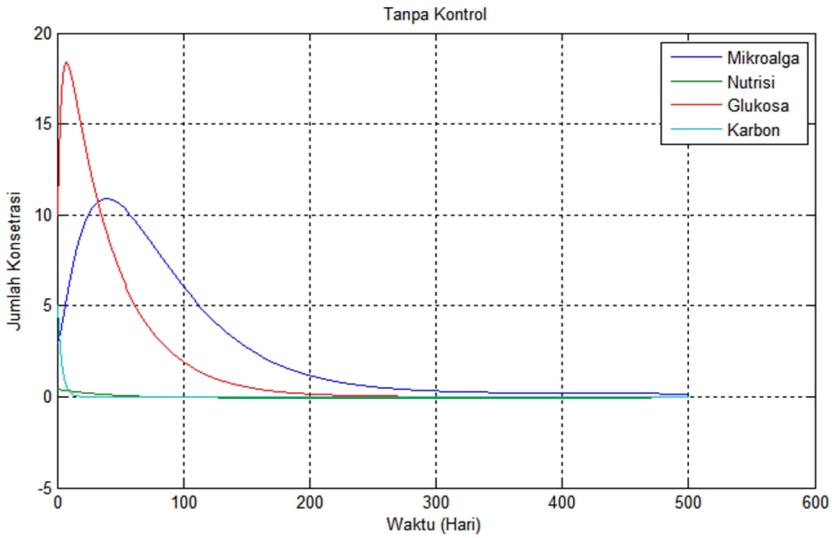
Selanjutnya,nilai K ini akan dimasukkan sebagai input ke dalam simulasi MATLAB.

4.7 Simulasi dan Analisis Hasil Kontrol

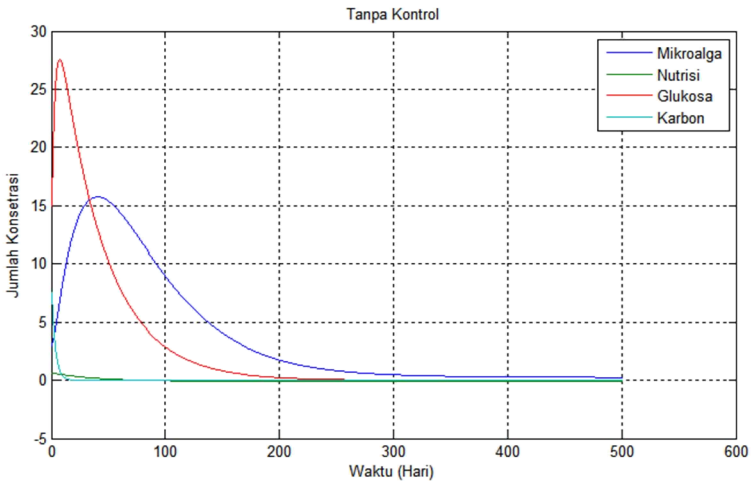
Setelah diketahui nilai matriks F dan K dari *feedback control*. dilakukan simulasi sistem dari model pertumbuhan mikroalga menggunakan software MATLAB. Kemudian akan dilakukan analisis dari hasil simulasi sistem yang akan dijelaskan selanjutnya.

4.7.1 *State Feedback Control* Sebelum Diberi Kontrol

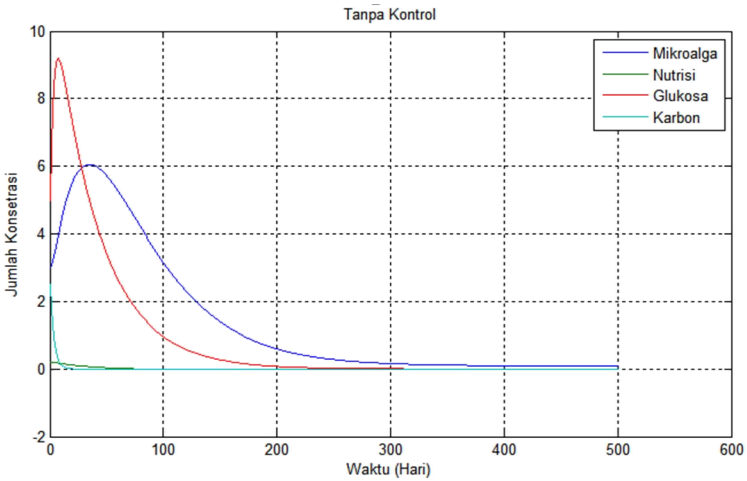
Pada sub bab ini dilakukan simulasi pada model pertumbuhan mikroalga dengan kondisi awal yang sudah diberikan sebelum dilakukan kontrol sebagai berikut:



Gambar 4.1 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$



Gambar 4.2 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$



Gambar 4.3 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

Dari gambar 4.1-4.3, terjadi kenaikan jumlah konsetrasi mikroalga. Peningkatan jumlah konsentrasi mikroalga tampa kontrol bergantung pada pemberian awal konsentrasi nutrisi, glukosa dan karbon. Jika konsentrasi diberikan pada nutrisi dan karbon lebih besar, maka terjadi penambahan jumlah konsentrasi mikroalga, tetapi untuk karbon selalu mengalami penurunan dikarenakan proses fotosintesis yang menyebabkan karbon menjadi glukosa.

Pada simulasi selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan diberikan kontrol dan akan dibandingkan hasil dari simulasi dengan kontrol dan tanpa kontrol.

4.7.2 Hasil Simulasi *State Feedback Control* Setelah *Pole Placement*

Pada sub bab ini akan dijelaskan mengenai hasil simulasi *State Feedback Control* dari model pertumbuhan mikroalga menggunakan software MATLAB setelah diberi *Pole Placement*.

Sebelum diberikan *Pole Placement* pada $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4$ untuk model pertumbuhan mikroalga, dilakukan terlebih dahulu pencarian nilai $(A - BF)x$ menggunakan software MATLAB sehingga diperoleh $(A - BF)x$ yang membuat sistem optimal.

Maka didapat nilai F setelah diberi *Pole Placement* dengan bantuan MATLAB sebagai berikut:

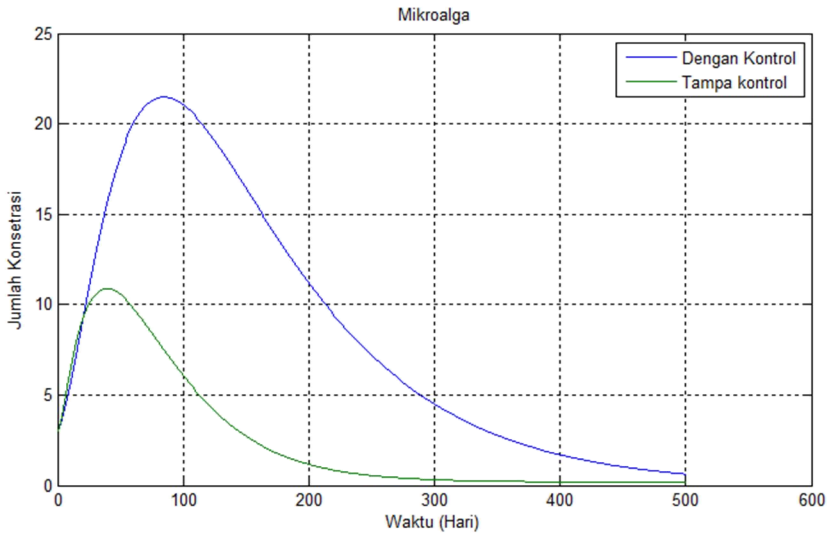
$F_{11} = 0.0792$
$F_{12} = 2.3919$
$F_{13} = -0.0427$
$F_{14} = -14.9898$
$F_{21} = -0.0006$

$F_{22} = 0.1320$
$F_{23} = -0.0554$
$F_{24} = -24.5176$

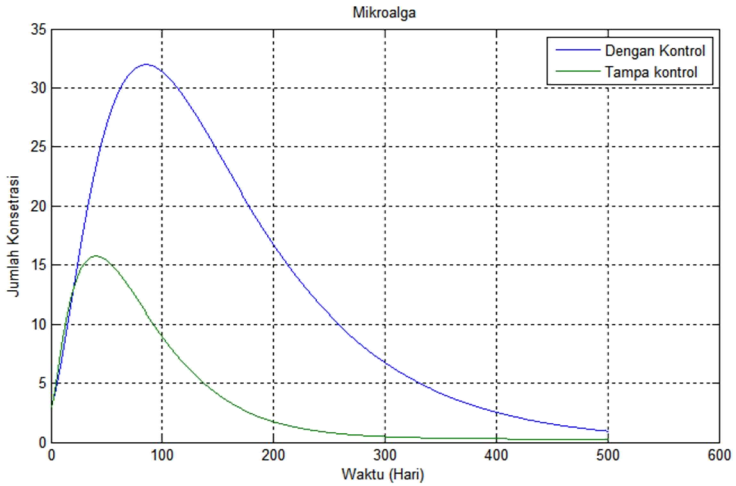
sehingga didapat nilai matriks F adalah:

$$F = \begin{pmatrix} 0.0792 & 2.3919 & -0.0427 & -14.9898 \\ -0.0006 & 0.1320 & -0.0554 & -24.5176 \end{pmatrix}$$

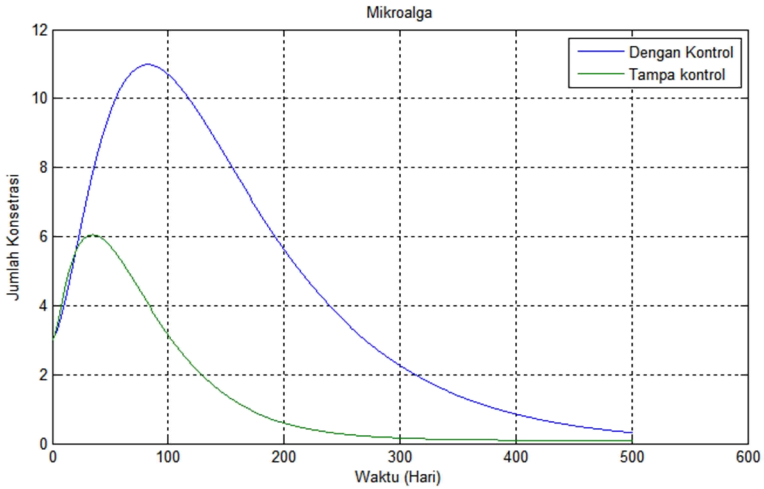
Berikut ini merupakan hasil simulasi setelah dilakukan *Pole Placement*.



Gambar 4.4. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

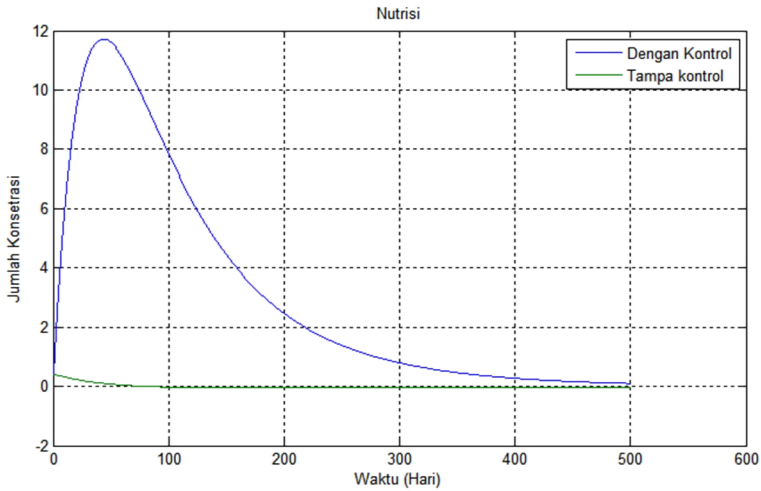


Gambar 4.5. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

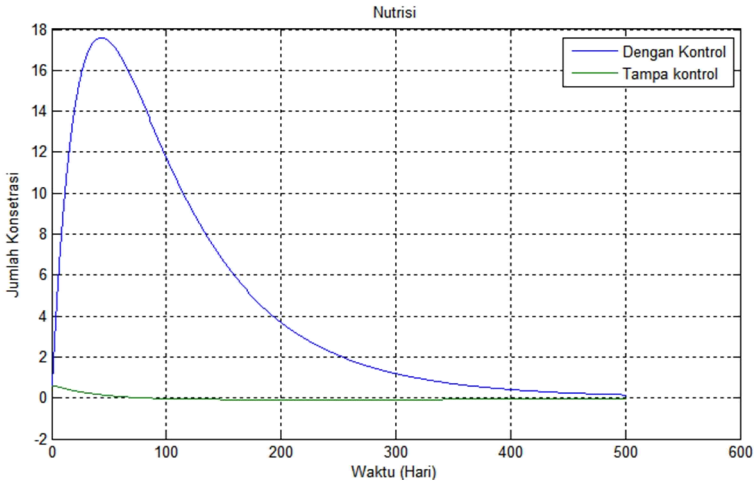


Gambar 4.6. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

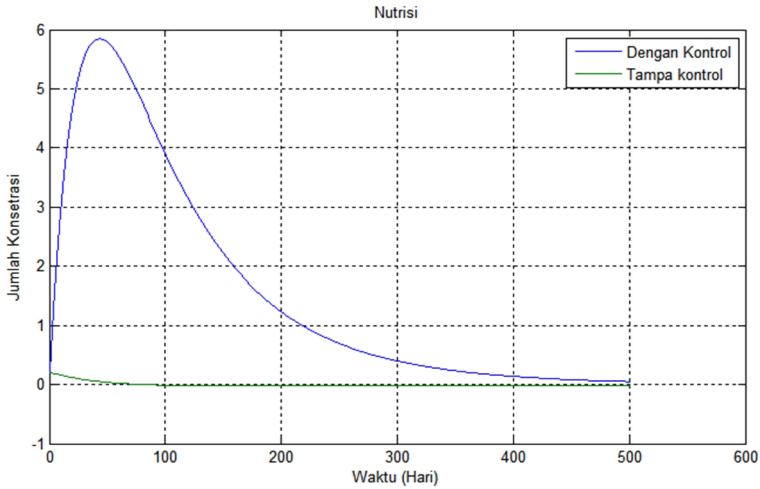
Pada gambar 4.4-4.6 diperoleh grafik setelah diberi *Pole Placement*, semua jumlah konsentrasi mikrolaga dengan kontrol mengalami peningkatan sampai hari ke-85. Pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0})$isi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ jumlah mikroalga sebesar 10.9871. Peningkatan paling besar terjadi ketika kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ dengan konsentrasi 31.9809



Gambar 4.7. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

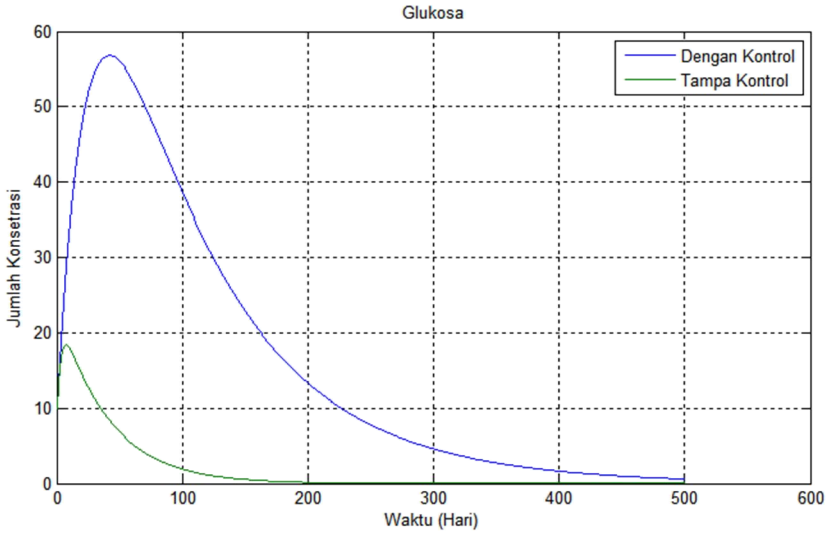


Gambar 4.8. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

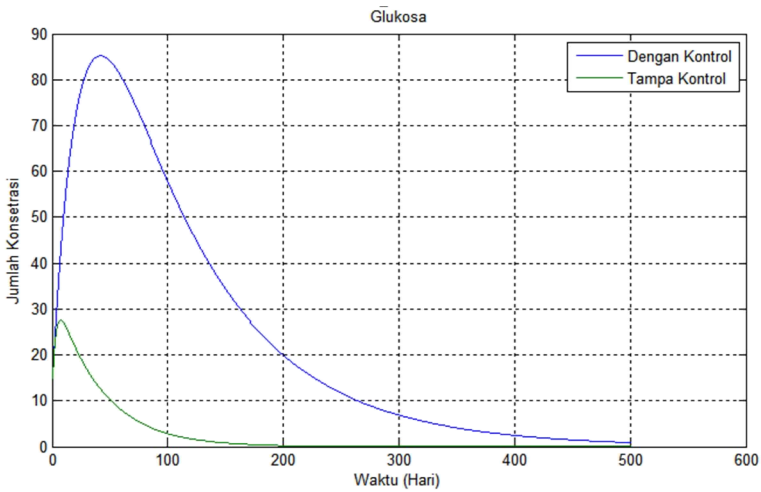


Gambar 4.9. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

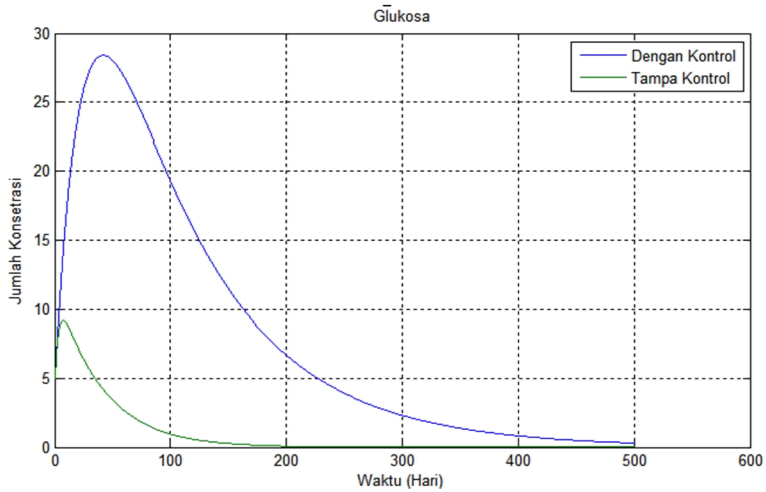
Pada gambar 4.7-4.9 diperoleh grafik setelah diberi *Pole Placement*, semua jumlah konsentrasi nutrisi dengan kontrol mengalami peningkatan sampai hari ke-59. Saat kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$, jumlah nutrisi mencapai 11.7176. Pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ mencapai jumlah konsentrasi tertinggi pada 17.5931. Ketika kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ konsentrasi nutrisi meningkat sebesar 5.8421.



Gambar 4.10. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal$(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

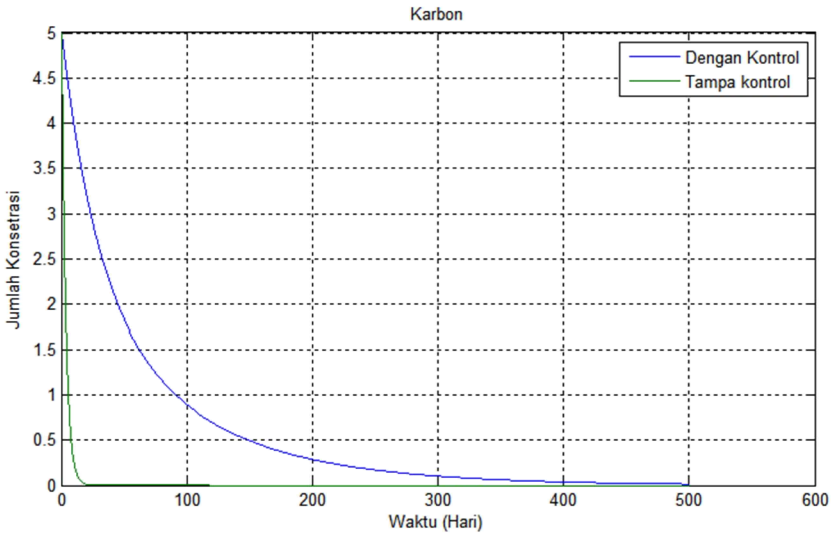


Gambar 4.11. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

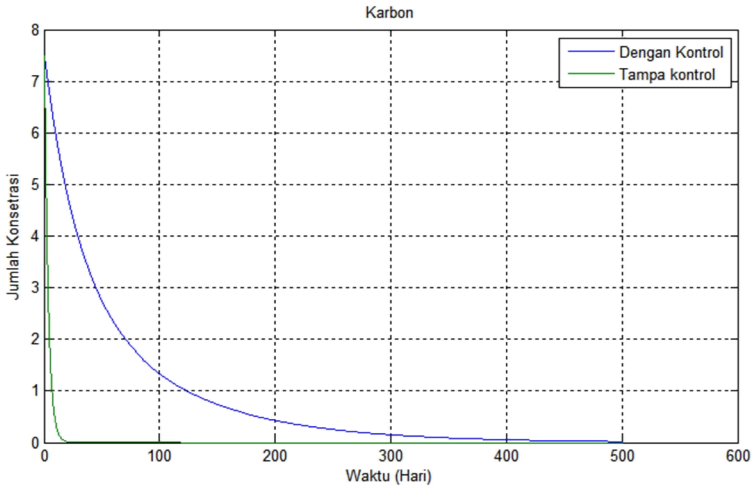


Gambar 4.12. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

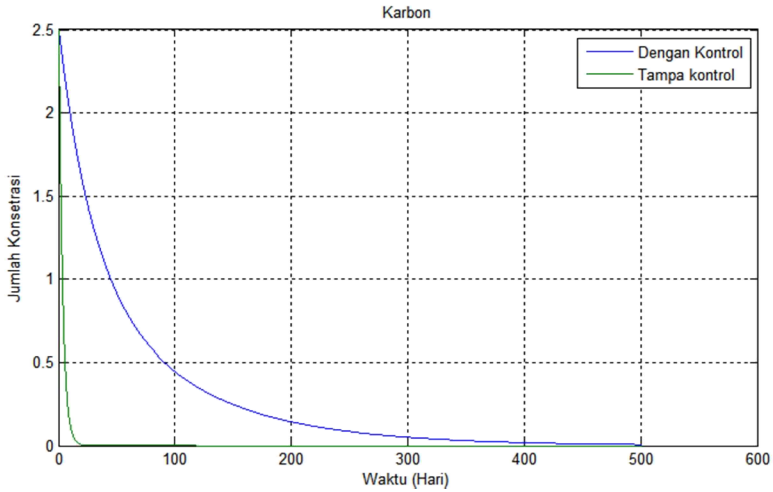
Pada gambar 4.10-4.12 diperoleh grafik setelah diberi *Pole Placement*, semua jumlah konsentrasi glukosa dengan kontrol mengalami peningkatan sampai hari ke-42. Pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$ mencapai 56.7948. Ketika kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ jumlah glukosa sebesar 28.4041. Peningkatan paling besar terjadi ketika kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ dengan konsentrasi 85.1855



Gambar 4.13. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$



Gambar 4.14. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

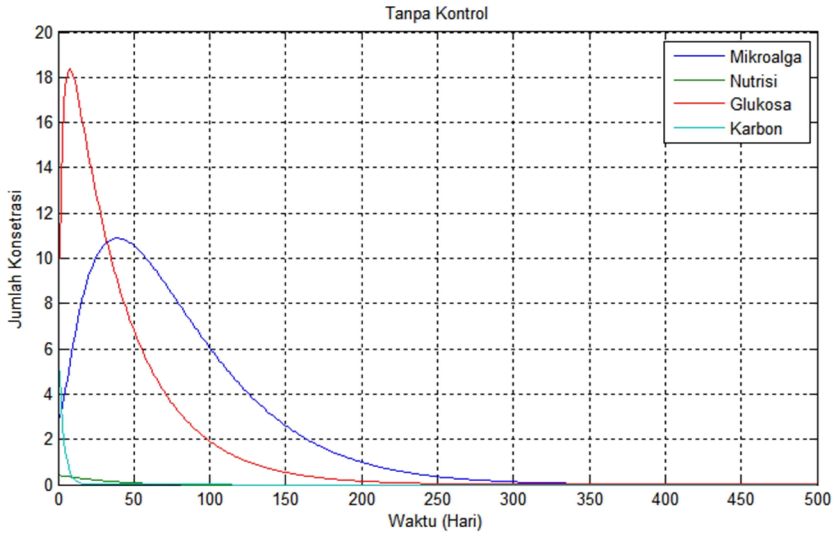


Gambar 4.15. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal$(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

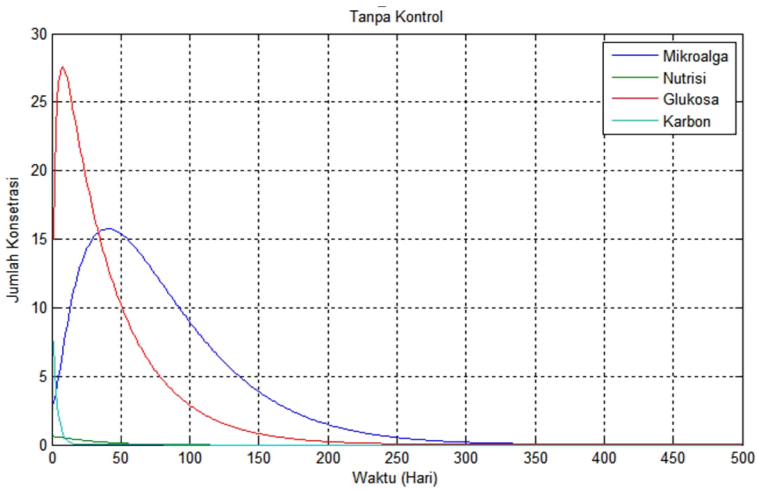
Pada grafik 4.13-4.15 setelah diberi *Pole Placement* pada sistem, aliran karbondioksida mengalami penurunan karena aliran karbondioksida digunakan untuk proses pembentukan glukosa, semakin banyak aliran karbondioksida yang digunakan untuk pembentukan glukosa maka jumlah konsentrasi juga akan semakin meningkat.

4.7.3 *Output Feedback Control* Sebelum Diberi Kontrol

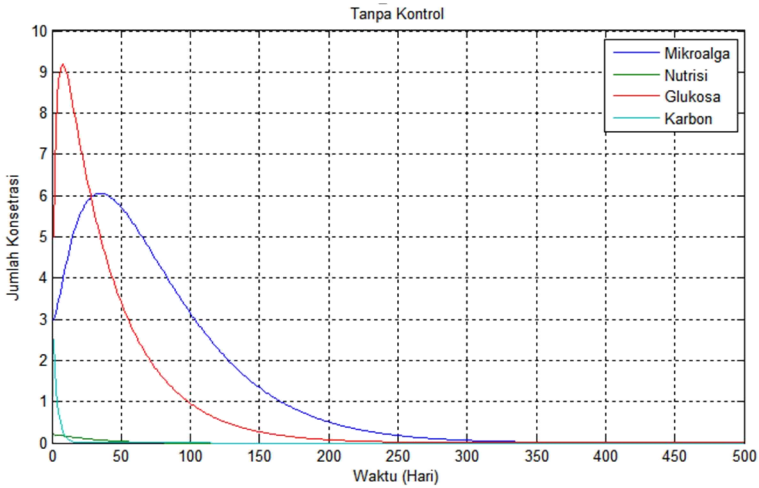
Pada sub bab ini dilakukan simulasi pada model pertumbuhan mikroalga dengan kondisi awal yang sudah diberikan sebelum dilakukan kontrol sebagai berikut:



Gambar 4.16 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal$(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$



Gambar 4.17 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$



Gambar 4.18 Simulasi model pertumbuhan mikroalga sebelum diberi kendali pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

Dari gambar 4.16-4.18, terjadi kenaikan jumlah konsetrasi mikroalga. Peningkatan jumlah konsentrasi mikroalga tampa kontrol bergantung pada pemberian awal konsentrasi nutrisi, glukosa dan karbon. Jika konsentrasi diberikan untuk nutrisi dan karbon lebih besar, maka terjadi penambahan jumlah konsentrasi mikroalga, tetapi untuk karbon selalu mengalami penurunan dikarenakan proses fotosintesis yang menyebabkan karbon menjadi glukosa.

Pada sub bab selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan diberikan kontrol dan akan dibandingkan hasil dari simulasi dengan kontrol dan tanpa kontrol.

4.7.4 Hasil Simulasi *Output Feedback Control* Setelah Diberi *Pole Placement*

Pada Sub bab ini akan dijelaskan mengenai hasil simulasi *Output Feedback Control* dari model pertumbuhan mikroalga menggunakan software MATLAB setelah dilakukan *Pole Placement*.

Sebelum diberikan *Pole Placement* pada $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4$ untuk model pertumbuhan mikroalga, dilakukan terlebih dahulu pencarian nilai $(A - BKC)x$ menggunakan software MATLAB sehingga diperoleh $(A - BKC)x$ yang membuat sistem optimal.

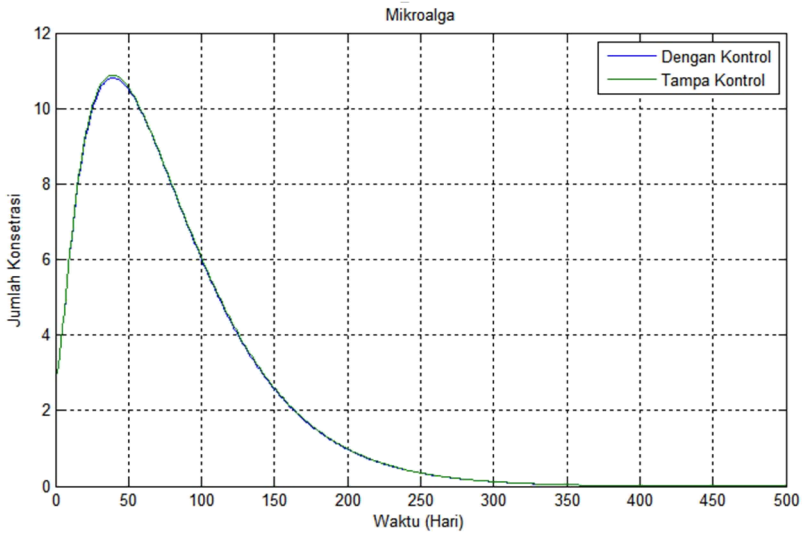
Maka didapat nilai K menggunakan dengan memilih nilai eigen pada *Pole Placement* berupa dengan bantuan MATLAB, diperoleh:

$K_{11} = -2065.62$
$K_{12} = 1.18239 \times 10^6$
$K_{21} = -3.61706$
$K_{22} = 2043.54$

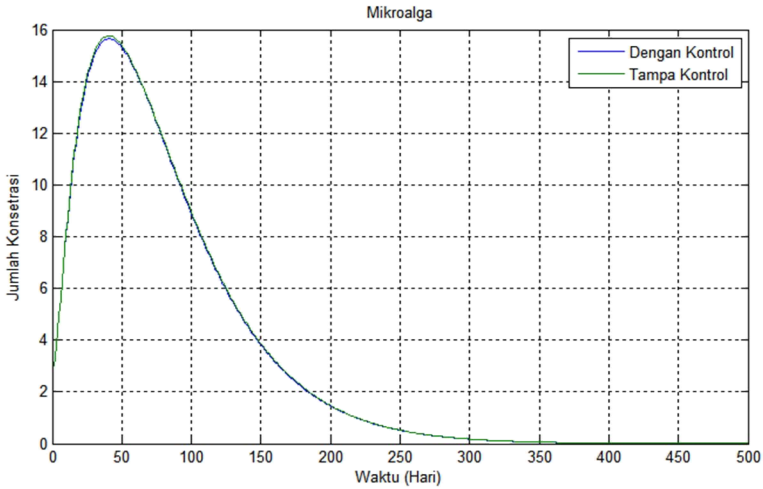
sehingga didapat nilai matriks K adalah:

$$K = \begin{pmatrix} -2065.62 & 1.18239 \times 10^6 \\ -3.61706 & 2043.54 \end{pmatrix}$$

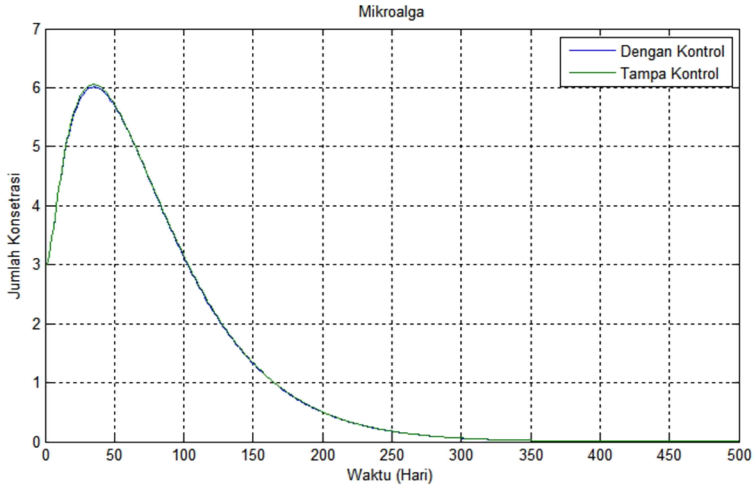
Berikut ini merupakan hasil simulasi setelah dilakukan *Pole Placement*.



Gambar 4.19. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

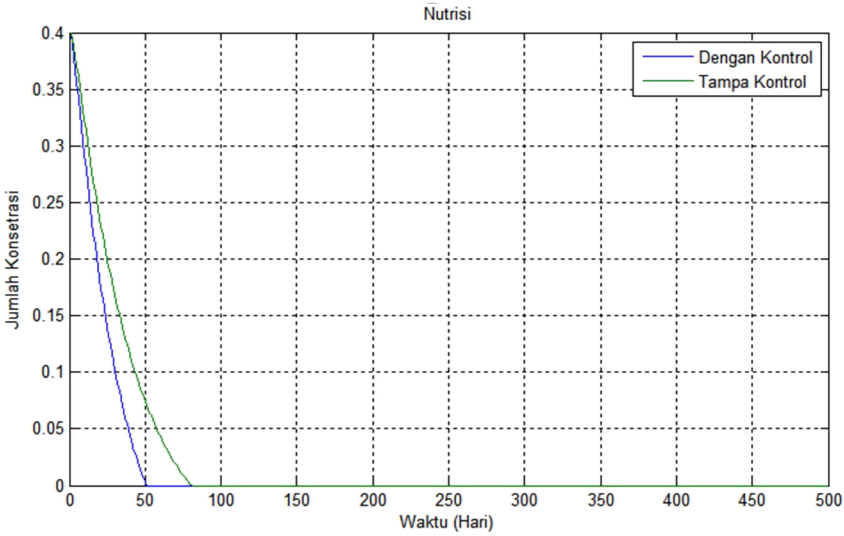


Gambar 4.20. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

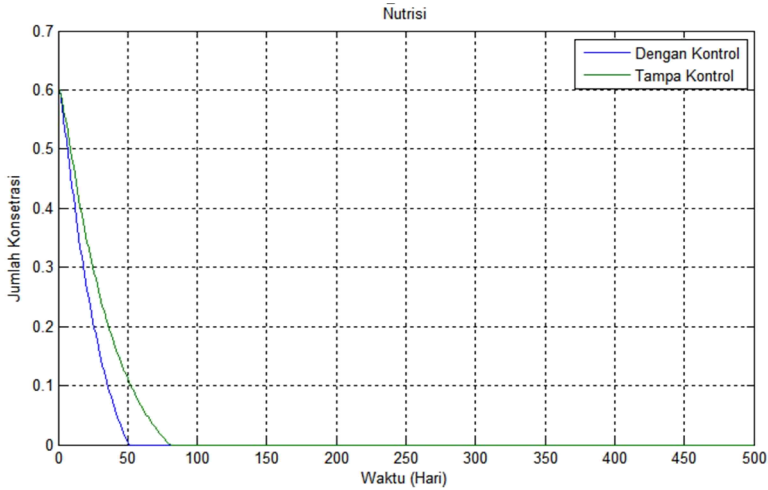


Gambar 4.21. Perubahan jumlah konsentrasi mikroalga pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

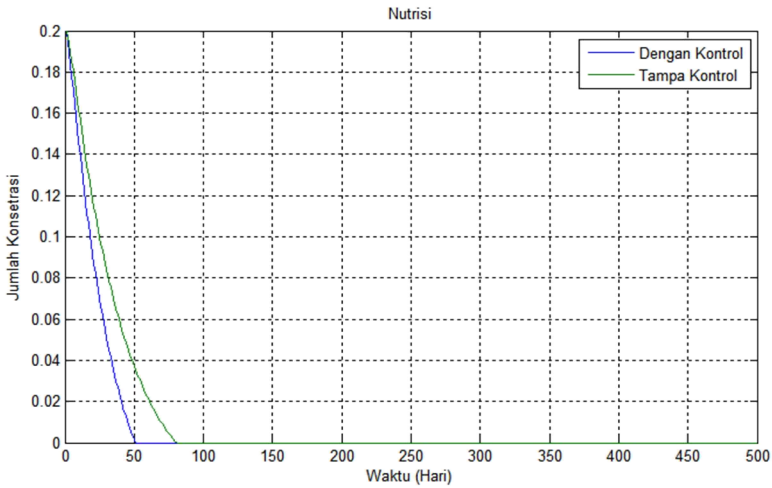
Pada gambar 4.18-4.21 diperoleh grafik setelah diberi *Pole Placement*, jumlah konsentrasi mikrolaga tertinggi terjadi pada hari ke-40 tampa kontrol 15.7566 dan hari ke-37 dengan kontrol 15.6458 pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$. Pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ jumlah mikroalga tertinggi tampa kontrol mencapai 10.8836 dan 10.8057 dengan kontrol. Sedangkan saat kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ tampa kontrol mencapai jumlah tertinggi 6.0525 dan 6.0098 dengan kontrol



Gambar 4.22. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

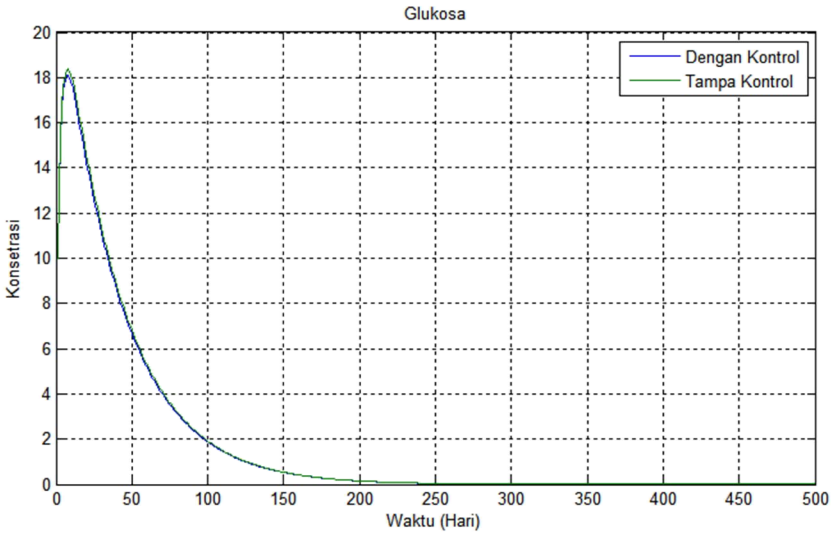


Gambar 4.23. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

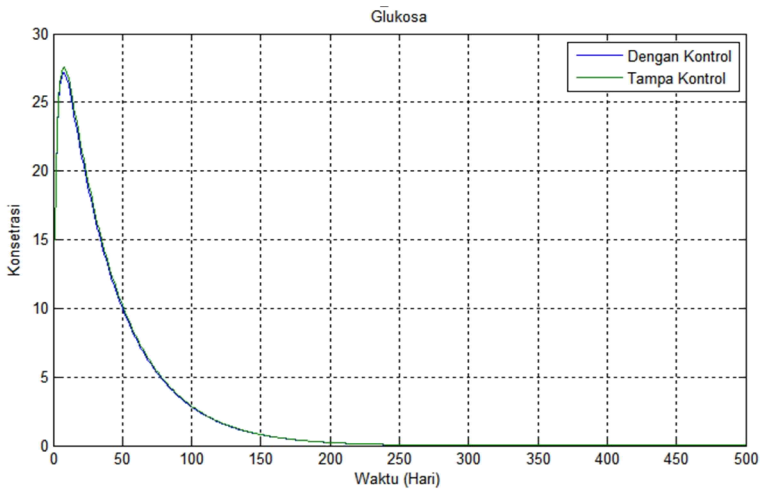


Gambar 4.24. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

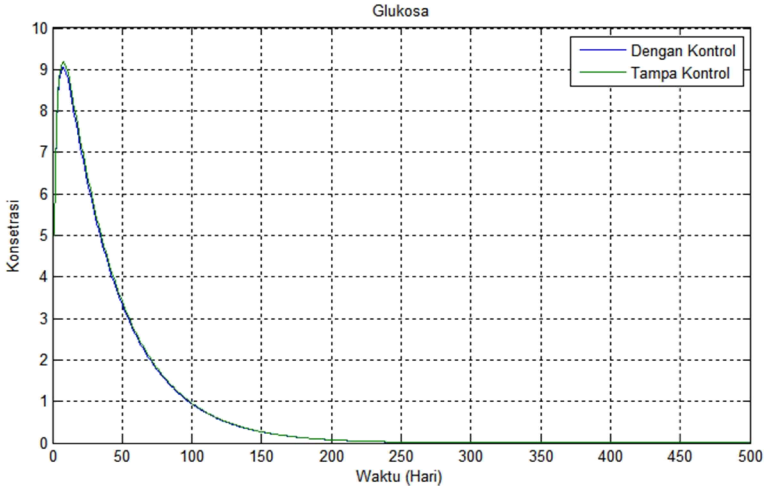
Pada Gambar 4.21-4.24 menunjukkan bahwa kontrol setelah diberi *Pole Placement* pada sistem. Jumlah konsentrasi nutrisi pada hari pertama adalah 0.4 saat $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$, 0.6 pada $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ dan 0.2 ketika $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$. Kemudian mengalami penurunan secara terus menerus hingga hari ke-50 dengan kontrol dan hari ke-80 tampa kontrol.



Gambar 4.25. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$

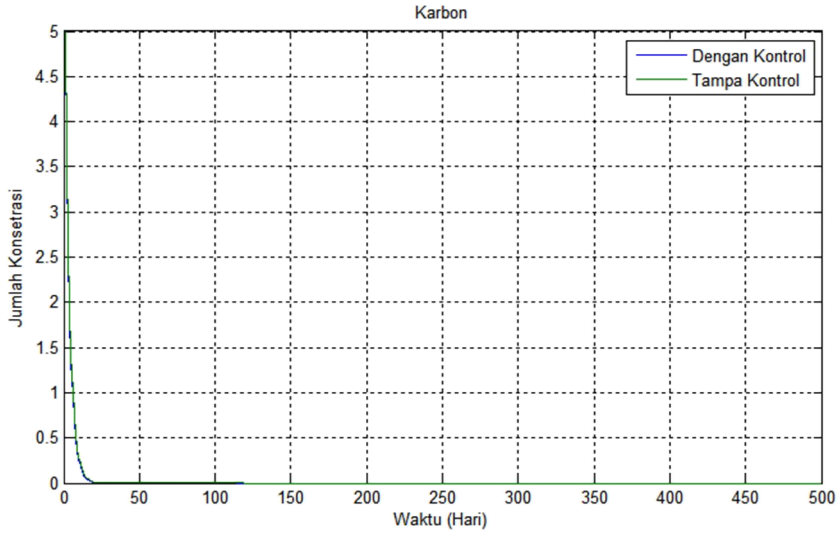


Gambar 4.26. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$

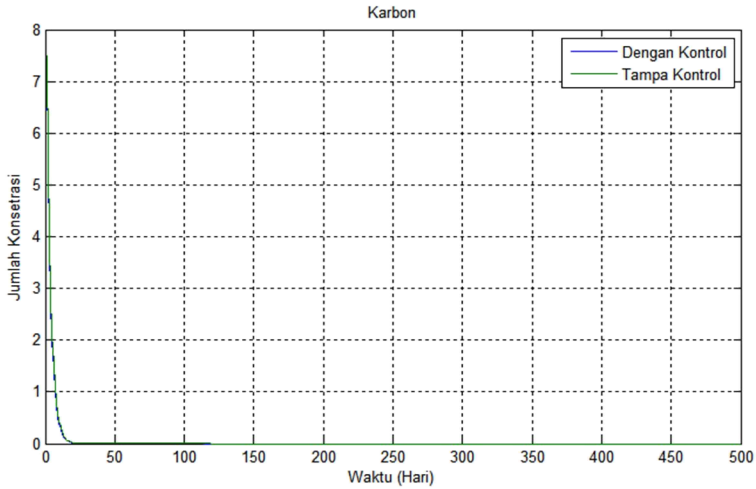


Gambar 4.27. Perubahan jumlah konsentrasi glukosa pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

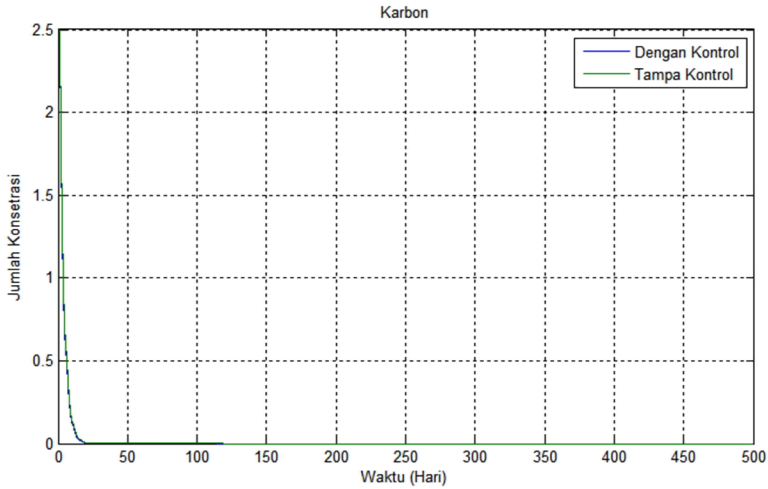
Pada gambar 4.25-4.27 diperoleh grafik setelah diberi *Pole Placement*, jumlah konsentrasi mikrolaga tertinggi terjadi pada hari ke-8 tampa kontrol 27.5751 dan hari ke-37 dengan kontrol 27.1880 pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$. Pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ jumlah glukosa tertinggi dengan kontrol mencapai 18.1253 dan 18.3834 tampa kontrol. Sedangkan saat kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$ diberi kontrol mencapai jumlah tertinggi 9.0627 dan 9.1917 tampa kontrol



Gambar 4.28. Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{10}, \mathbf{5})$



Gambar 4.29. Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$



Gambar 4.30. Perubahan jumlah konsentrasi karbon pada kondisi awal $(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.2}, \mathbf{5}, \mathbf{2.5})$

Pada grafik 4.28-4.30 setelah diberi *Pole Placement* pada sistem, aliran karbondioksida mengalami penurunan karena aliran karbondioksida digunakan untuk proses pembentukan glukosa, semakin banyak aliran karbondioksida yang digunakan untuk pembentukan glukosa maka jumlah konsentrasi juga akan semakin meningkat.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan serta diberikan saran untuk perusahaan yang bersangkutan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Sistem dinamik pada model pertumbuhan mikroalga bersifat stabil dan terkontrol dengan titik kesetimbangnya adalah $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$
2. Telah didesain kontrol untuk model pertumbuhan mikroalga dengan menggunakan metode *State Feedback Control* dan *Output Feedback Control* setelah diberi *Pole Placement* pada $\boldsymbol{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4}$ dengan nilai masing-masing:

$$F = \begin{pmatrix} 0.0792 & 2.3919 & -0.0427 & -14.9898 \\ -0.0006 & 0.1320 & -0.0554 & -24.5176 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -2065.62 & 1.18239 \times 10^6 \\ -3.61706 & 2043.54 \end{pmatrix}$$

3. Berdasarkan kondisi awal yang diberikan, hasil simulasi dengan peningkatan paling besar terjadi pada $(\boldsymbol{A_0, M_0, S_0, C_0}) = (\boldsymbol{3, 0.6, 15, 7.5})$ setelah diberi *State Feedback Control* dengan konsentrasi mikrolaga 21.4808, konsentrasi nutrisi 11.7176, konsentrasi glukosa 56.7948 dan konsentrasi karbon 5.

4. Berdasarkan kondisi awal yang diberikan, hasil simulasi dengan peningkatan paling besar terjadi pada

$(\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{M_0}, \boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{C_0}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0.6}, \mathbf{15}, \mathbf{7.5})$ setelah diberi *Output Feedback Control* dengan konsentrasi mikrolaga 15.6458, konsentrasi nutrisi 0.6, konsentrasi glukosa 27.188 dan konsentrasi karbon 7.5.

5. Dari kedua kontrol, yaitu nutrisi dan karbondioksida, diperolah bahwa kedua kontrol tersebut saling mempengaruhi dalam pertumbuhan mikroalga.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah pada penelitian berikutnya dapat diterapkan metode lain dalam penggunaan *Pole Placement* serta dapat dikembangankan dengan model mikroalga yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Rusdiani, R. R., Boedisantoso, R., dan Hanif, M.(2016). "*Optimalisasi Teknologi Fotobioreaktor Mikroalga sebagai Dasar Perencanaan Strategi Mitigasi Gas* CO_2" Jurusan Teknik Lingkungan, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

[2] Santoso, A. D., Darmawan, R. A., dan Susanto, J. P.(2010). "*Mikroalga Untuk Penyerapan Emisi CO2 dan Pengolahan Limbah Cair di Lokasi Industri*". Jurnal Ilmu dan Teknologi Kelautan Tropis, Vol. 3, No. 2.

[3] Mangkusasmito, F. dan Nugroho, T. F.(2018). "*Desain Sistem Kendali Umpan Balik State Pada Kasus Kontinyu Untuk Meja Kerja CNC*". Program Studi DIII Teknik Elektro Sekolah Vokasi, Universitas Diponegoro

[4] Wei, Y. dan Yu, H.(2018). "*New Approach to Fixed-Order Output-Feedback Control for Piecewise-Affine Systems*". IEEE Transactions On Circuits And Systems–I: Regular Papers

[5] Putra, Y, A., Mardlijah, dan Hanafi, L. (2017). "*Kendali Optimal Pada Model Pertumbuhan Alga Dengan Aliran Nutrisi dan Karbon Dioksida Sebagai Variabel Kendali Menggunakan Metode LQR*" Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[6] Fadhillah, A., Mardlijah, dan Hanafi, L.(2019). "*Analisis Performansi Metode Linier Quadratic Regulator Pada Sistem Pertumbuhan Mikroalga Dengan Pengaturan Intensitas Cahaya*". Departemen Matematika. Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[7] Rizkiani, I., Kamiran, dan Subchan.(2016). "*Analisis dan Simulasi Konversi Energi Angin Menjadi Energi Listrik Menggunakan Metode Feedback Linearization Control*". Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

[8] Yamlean, P., Suharmadi, dan Mardlijah.(2018). "*Analisa Model Pertumbuhan Mikroalga Sebagai Sumber Energi Alternatif*". Jurusan Matematika FMIPA-ITS Surabaya.

[9] Thornton, A., Weinhart, T., dan Bokhovei, O.(2010). "*Modelling And Optimization Of Algae Growth*". Eindhoven University Of Technology. Department Of Mathematics And Computer Science

[10] Subiono.(2013), "*Sistem Linier dan Kontrol Optimal*", Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[11] Astrom, K. J. dan Murray, R. M.(2006). "*Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*". Control and Dynamical Systems. California Institute of Technology

[12] Prasetia, A. S., Effendi, R., dan Pramudijanto, J.(2017). "*Pengaturan Tracking Daya Maksimum dalam Sistem Pembangkitan Listrik Tenaga Surya dengan Fuzzy Takagi Sugeno*". Departemen Teknik Elektro. Fakultas Teknologi Elektro. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

LAMPIRAN A

State Feedback Control

```
clear
clc

% Nilai Parameter
alpha_a = 10.2;
p_max=0.4;
D_r=0.46;
h_r=2;
M_turn=4;
alpha_s=67.6;
k_1=0.4;
k_2=0.05;
k_3=0.05;
I_m=0.2;
I_c=4;
delta_t=0.01;

% Nilai Awal
A = 3;
M = 0.4;
S = 10;
C = 5;

% Titik Kesetimbangan
A1=(I_m)/(k_2*(D_r+h_r))
M1=(M_turn*(k_1*I_m)*(D_r+h_r))/(alpha_a*p_ma
x*(k_2*I_c-k_1*k_3*I_m)-k_1*I_m*(D_r+h_r))
S1=(k_2*I_c-k_1*k_3*I_m)/(k_1*k_2*(D_r+h_r))
C1=(I_c)/(k_1*alpha_s)

% Isi Matriks A
z1 = -(D_r+h_r);
z2 = alpha_a*p_max*S1*((1/(M1+M_turn))-
((alpha_a*p_max*S1*M1)/(M1+M_turn)^2));
```

```
z3 = ((alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn));
z4 = ((-
k_2*alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn))+((k_2*alph
a_a*p_max*M1*S1)/(M1+M_turn)^2);
z5 = (-k_2*alpha_a*p_max*M1)/(M1+M_turn);
z6 = ((-
k_3*alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn))+((k_3*alph
a_a*p_max*M1*S1)/(M1+M_turn)^2);
z7 = ((-k_3*alpha_a*p_max*M1)/(M1+M_turn))-
(D_r+h_r);
z8 = alpha_s;
z9 = (-k_1)*alpha_s;

A = [z1 z2 z3 0;0 z4 z5 0;0 z6 z7 z8;0 0 0
z9]
B = [0 0;1 0;0 0;0 1]
p = [-1 -2 -3 -4]

K = place(A,B,p)
Ktc = zeros(2,4);
N = 1000;

% Simulasi
x0=[3;0.4;10;5];
x0tot=x0;
xtc0=x0;
xtottc0=x0;
u0tot=-K*x0;

for i=1:N
xtc=(eye(4)+(A-B*Ktc)*delta_t)*xtc0;
xtc0=xtc;
xtottc=[xtottc0 xtc];
xtottc0 = xtottc;

x=(eye(4)+(A-B*K)*delta_t)*x0;
x0=x;
```

```
xtot=[x0tot x];
x0tot = xtot;
 end

figure(1)
plot(1:N+1,xtot(1,:),1:N+1,xtottc(1,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa kontrol')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Mikroalga')

figure(2)
plot(1:N+1,xtot(2,:),1:N+1,xtottc(2,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa kontrol')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Nutrisi')

figure(3)
plot(1:N+1,xtot(3,:),1:N+1,xtottc(3,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa Kontrol')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Glukosa')

figure(4)
plot(1:N+1,xtot(4,:),1:N+1,xtottc(4,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa kontrol')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Karbon')

figure(5)
plot(1:N+1,xtottc(1,:),1:N+1,xtottc(2,:),1:N+
1,xtottc(3,:),1:N+1,xtottc(4,:))
legend
('Mikroalga','Nutrisi','Glukosa','Karbon')
```

```
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Tanpa Kontrol')

figure(6)
plot(1:N+1,xtot(1,:),1:N+1,xtot(2,:),1:N+1,xt
ot(3,:),1:N+1,xtot(4,:))
legend
('Mikroalga','Nutrisi','Glukosa','Karbon')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Dengan Kontrol')
```

LAMPIRAN B

Output Feedback Control

```
clear
clc

% Nilai Parameter
alpha_a = 10.2;
p_max=0.4;
D_r=0.46;
h_r=2;
M_turn=4;
alpha_s=67.6;
k_1=0.4;
k_2=0.05;
k_3=0.05;
I_m=0.2;
I_c=4;
delta_t=0.01;

% Nilai Awal
A = 3;
M = 0.4;
S = 10;
C = 5;

% Titik Kesetimbangan
A1=(I_m)/(k_2*(D_r+h_r));
M1=(M_turn*(k_1*I_m)*(D_r+h_r))/(alpha_a*p_ma
x*(k_2*I_c-k_1*k_3*I_m)-k_1*I_m*(D_r+h_r));
S1=(k_2*I_c-k_1*k_3*I_m)/(k_1*k_2*(D_r+h_r));
C1=(I_c)/(k_1*alpha_s);

% Isi Matriks A
z1 = -(D_r+h_r);
z2 = alpha_a*p_max*S1*((1/(M1+M_turn))-
((alpha_a*p_max*S1*M1)/(M1+M_turn)^2));
z3 = ((alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn));
```

```
z4 = ((-
k_2*alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn))+((k_2*alph
a_a*p_max*M1*S1)/(M1+M_turn)^2);
z5 = (-k_2*alpha_a*p_max*M1)/(M1+M_turn);
z6 = ((-
k_3*alpha_a*p_max*S1)/(M1+M_turn))+((k_3*alph
a_a*p_max*M1*S1)/(M1+M_turn)^2);
z7 = ((-k_3*alpha_a*p_max*M1)/(M1+M_turn))-
(D_r+h_r);
z8 = alpha_s;
z9 = (-k_1)*alpha_s;

A = [z1 z2 z3 0;0 z4 z5 0;0 z6 z7 z8;0 0 0
z9];
B = [0 0;1 0;0 0;0 1];
p = [-100 -200 -300 -400];
C = [0 1 0 0; 0 0 0 1];

k11 = -2065.62;
k12 = 1.18239*10^6;
k21 = -3.61706;
k22 = 2043.54;

K = [k11 k12 k21 k22];
Ktc = zeros(2,4);
N =1000;

% Simulasi
x0=[3;0.4;10;5];
xtot(:,1)=x0;
xtottc(:,1)=x0;

for i=2:N
    xtottc(:,i)=(eye(4)+(A-
B*Ktc)*delta_t)*xtottc(:,i-1);
    xtot(:,i)=(eye(4)+(A-
B*C)*delta_t)*xtot(:,i-1);
```

```
    %%Batas Variabel State
    if xtot(1,i)<0
        xtot(1,i)=0;
    end
    if xtottc(1,i)<0
        xtottc(1,i)=0;
    end
    if xtot(2,i)<0
        xtot(2,i)=0;
    end
    if xtottc(2,i)<0
         xtottc(2,i)=0;
    end
    if xtot(3,i)<0
        xtot(3,i)=0;
    end
    if xtottc(3,i)<0
        xtottc(3,i)=0;
    end
    if xtot(4,i)<0
        xtot(4,i)=0;
    end
    if xtottc(4,i)<0
        xtottc(4,i)=0;
    end
end

figure(1)
plot(1:N,xtot(1,:),1:N,xtottc(1,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa Kontrol')
xlabel ('Waktu')
ylabel ('Konsetrasi')
title ('Mikroalga')

figure(2)
plot(1:N,xtot(2,:),1:N,xtottc(2,:))
```

```
legend ('Dengan Kontrol','Tampa Kontrol')
xlabel ('Waktu')
ylabel ('Konsetrasi')
title ('Nutrisi')

figure(3)
plot(1:N,xtot(3,:),1:N,xtottc(3,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa Kontrol')
xlabel ('Waktu')
ylabel ('Konsetrasi')
title ('Glukosa')

figure(4)
plot(1:N,xtot(4,:),1:N,xtottc(4,:))
legend ('Dengan Kontrol','Tampa Kontrol')
xlabel ('Waktu')
ylabel ('Konsetrasi')
title ('Karbon')

figure(5)
plot(1:N,xtottc(1,:),1:N,xtottc(2,:),1:N,xtot
tc(3,:),1:N,xtottc(4,:))
legend
('Mikroalga','Nutrisi','Glukosa','Karbon')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Tanpa Kontrol')

figure(6)
plot(1:N,xtot(1,:),1:N,xtot(2,:),1:N,xtot(3,:
),1:N,xtot(4,:))
legend
('Mikroalga','Nutrisi','Glukosa','Karbon')
xlabel ('Waktu (Hari)')
ylabel ('Jumlah Konsetrasi')
title ('Dengan Kontrol')
```

BIODATA PENULIS

Muhammad Aditya Dharmawan atau yang biasa dipanggil Adit lahir di Jakarta, 3 Mei 1997. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK Srigunting Cilacap, SD Muhammadiyah 24 Jakarta, SMP Negeri 216 Jakarta, SMA Negeri 68 Jakarta. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) dengan NRP 06111540000104.

Penulis mengikuti kegiatan organisasi mahasiswa yaitu BEM FMIPA ITS sebagai staff Hubungan Luar (HUBLU) dan HIMATIKA ITS sebagai staff *External Affair* (EXA). Di Departemen Matematika ITS, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yaitu Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem. Selain berorganisasi di lingkup jurusan, penulis juga mengikuti Kerja Praktik di Kantor Otoritas Jasa Keuangan Regional 4 Jawa Timur selama 23 hari dan ditempatkan di 3 divisi yaitu Logistik, Keuangan, dan Sumber Daya Manusia (SDM).

Apabila ingin memberikan kritik dan saran mengenai Tugas Akhir ini dapat menghubungi e-mail aditya.dharmawan7@gmail.co.id. Terima kasih dan semoga bermanfaat.