

WAKTU OPTIMAL DALAM DIVERSIFIKASI PRODUKSI ENERGI TERBARUKAN DAN TIDAK TERBARUKAN DENGAN MENGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

Nama Mahasiswa : Misbahur Khoir
NRP : 1210 100 041
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : Subchan, Ph.D

Abstrak

Konsumsi energi di Indonesia terus meningkat karena pertambahan penduduk, pertumbuhan ekonomi dan pola konsumsi energi. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan adanya pengendalian terhadap tingkat produksi sumber energi. Pada tugas akhir ini, diterapkan teori kendali optimal dalam produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. model yang digunakan adalah model Lotka-Volterra yang mana model ini digunakan untuk menginterpretasikan dinamika tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan. Dalam tugas akhir ini didapatkan waktu yang optimal sebesar 17.69 tahun, untuk mencapai target produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan, selain itu juga ditunjukkan laju peningkatan produksi sumber energi terbarukan dan laju penurunan produksi sumber energi tidak terbarukan.

Kata kunci - Waktu Optimal, PMP (Prinsip Minimum Pontryagin), Sumber Energi

OPTIMAL TIME OF DIVERSIFICATION PRODUCTION RENEWABLE AND UNRENEWABLE ENERGY RESOURCES USING PONTRYAGYN MINIMUM PRINCIPLE

Name : Misbahur Khoir
NRP : 1210 100 041
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisor : Subchan, Ph.D

Abstract

Requirement and energy consumption in Indonesia continues to increase due to population growth, economic growth and energy consumption patterns. To overcome these problems, it is necessary to control the rate of energy production. In this thesis, optimal control theory is applied in the production of renewable energy sources and renewable not using Pontryagin Minimum Principle. model used is the Lotka-Volterra model of which this model is used to interpret the dynamics of the level of production and renewable energy sources are not renewable. In this paper obtained the optimal time as 17.69 years to achieve the production target of renewable energy sources and production of non-renewable energy sources, but it also demonstrated the rate of increase in the production of renewable energy sources and the rate of decline in the production of non-renewable energy sources.

Keywords - Optimal Time, PMP (Pontryagin Minimum Principle), Source of Energy

DAFTAR SIMBOL

H	Fungsi Hamiltonian.
J	Fungsi Objektif.
x_1	Tingkat produksi sumber energi terbarukan
x_2	Tingkat produksi sumber energi terbarukan
λ_1, λ_2	Variabel ko-keadaan (<i>costate</i>).
u	Variabel pengendali.
δ	Variasi.
$<$	Kurang dari.
$>$	Lebih besar dari.
\leq	Kurang dari sama dengan.
\geq	Lebih besar dari sama dengan.
t	waktu.
t_f	Waktu akhir.
\dot{x}	Turunan x terhadap t.
\dot{y}	Turunan y terhadap t.
*	Optimal.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan, model matematika dari sistem dinamik dan fungsi tujuan yang digunakan dalam Tugas Akhir ini. Selain itu juga berisikan materi-materi pendukung, antara lain teori kendali optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, dan persamaan diferensial linier.

2.1 Sumber Energi Terbarukan dan Tidak Terbarukan

Sumber energi adalah sebagian sumber daya alam antara lain berupa minyak dan gas bumi, batubara, air, panas bumi, gambut, biomasa dan sebagainya, baik secara langsung maupun tidak langsung dapat dimanfaatkan sebagai energi [4]. Sumber energi terdiri dari sumber energi yang terbarukan dan tidak terbarukan. Energi terbarukan adalah energi yang berasal dari "proses alam yang berkelanjutan", seperti tenaga surya, tenaga angin, arus air, proses biologi, dan panas bumi. Sedangkan sumber energi tidak terbarukan atau yang disebut konvensional adalah energi yang diperoleh dari sumber daya alam yang waktu pembentukannya sampai jutaan tahun. Dikatakan tak terbarukan karena, apabila sejumlah sumbernya dieksploitasikan, maka untuk mengganti sumber sejenis dengan jumlah sama, baru mungkin atau belum pasti akan terjadi jutaan tahun yang akan datang.

Kedua sumber energi tersebut, baik yang terbarukan maupun tidak terbarukan memiliki kelebihan dan kekurangan.

Dari segi ekologinya, sumber energi terbarukan adalah sumber energi yang ramah lingkungan sehingga tidak akan menimbulkan polusi. Selain itu, Indonesia dengan kekayaan alam yang melimpah memiliki potensi besar untuk mengembangkan sumber energi ini. Akan tetapi, biaya untuk mengembangkan sumber energi ini sangat tinggi dan memerlukan teknologi yang tinggi pula. Selain itu, meskipun sumber energi ini tidak akan habis, namun ketersediaannya sangat bergantung dengan faktor-faktor cuaca sehingga kurang dapat diandalkan setiap saat.

Oleh sebab itu, sumber energi terbarukan belum dapat beroperasi dengan baik. Sedangkan sumber energi tidak terbarukan merupakan sumber energi yang selama ini sudah banyak digunakan seperti bahan bakar fosil. Dalam hal jumlah/cadangan energi, kerapatan energi, kemudahan penyimpanan dan perubahan energi, sumber energi ini lebih unggul dibandingkan sumber energi terbarukan. Namun, jika sumber energi ini dipakai terus menerus, suatu saat akan habis karena ketersediaannya terbatas. Hal ini akan menyebabkan krisis dan kelangkaan energi. Selain itu penggunaan sumber energi tidak terbarukan menjadi salah satu penyebab terjadinya perubahan iklim, timbulnya polusi dan kerusakan bumi.

2.2 Model Matematika dari Sistem Dinamik Sumber Energi Terbarukan dan Tidak Terbarukan

Sistem dinamik dari permasalahan energi terbarukan dan tidak terbarukan merupakan model matematika yang berdasarkan pada model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra. Model ini merupakan model sederhana yang mendeskripsikan interaksi antar dua spesies dari suatu sumber populasi [5]. Dalam permasalahan energi, interaksi yang terjadi melibatkan

dua sumber energi, yaitu terbarukan dan tidak terbarukan. Bentuk model tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial tak linier. Adapun model matematika dari sistem dinamik sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan adalah sebagai berikut [1]:

$$\dot{x}_1 = \frac{(dx_1)}{dt} = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(dx_2)}{dt} = \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_1 x_2 \quad (2.2)$$

selama jangka waktu $I = [t_0, t_f]$. Untuk suatu $t \in I$ dengan $x_1(t)$ menyatakan tingkat kapasitas produksi sumber energi terbarukan pada waktu t dan $x_2(t)$ adalah tingkat kapasitas produksi sumber energi tidak terbarukan pada waktu t . Diasumsikan bahwa tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan selalu bernilai positif selama jangka waktu I . Dengan demikian, $\dot{x}_1(t)$ dan $\dot{x}_2(t)$ masing-masing menunjukkan laju perubahan tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan pada waktu t . α_1 adalah persentase tingkat pertumbuhan dalam produksi sumber energi terbarukan. α_2 adalah persentase tingkat pertumbuhan dalam produksi sumber energi tidak terbarukan, β_1 adalah konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada produksi energi terbarukan akibat adanya persaingan dengan tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan. β_2 adalah konstanta positif yang merepresentasikan dampak yang berpengaruh pada produksi energi tidak terbarukan akibat adanya persaingan dengan tingkat produksi sumber energi terbarukan.

Dari model sistem dinamik pada persamaan (2.1) dan (2.2), terlihat bahwa laju perubahan tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan dipengaruhi oleh besar kecilnya persentase tingkat pertumbuhan produksi

sumber energi masing-masing dan dipengaruhi oleh adanya faktor persaingan antara kedua sumber energi tersebut sehingga menyebabkan pengurangan pada produksi sumber energi.

Dalam permasalahan ini, diasumsikan bahwa persentase dari tingkat pertumbuhan dalam produksi sumber energi dapat berubah-ubah pada waktu t , sehingga α_1 dan α_2 dinyatakan sebagai fungsi waktu yaitu $\alpha_1(t)$ dan $\alpha_2(t)$. Semakin besar nilai $\alpha_1(t)$, maka semakin besar laju perubahan tingkat produksi sumber energi terbarukan. Begitu pula sebaliknya, semakin kecil $\alpha_1(t)$ maka semakin kecil laju perubahan produksi sumber energi terbarukan. Disisi lain, semakin besar $\alpha_2(t)$, semakin besar pula laju perubahan produksi sumber energi tidak terbarukan. Sebaliknya, semakin kecil $\alpha_2(t)$ maka semakin kecil laju perubahan produksi sumber energi tidak terbarukan. Oleh sebab itu, dalam mengendalikan tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan, $\alpha_1(t)$ dan $\alpha_2(t)$ diasumsikan sebagai variabel pengendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ dimana $\alpha_1(t) = u_1(t)$ dan $\alpha_2(t) = u_2(t)$ pada interval $I = [t_0, t_f]$. Dengan demikian, model dari sistem dinamik pada persamaan (2.1) dan (2.2) menjadi:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = u_1(t)x_1(t) - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = u_2(t)x_2(t) - \beta_2 x_1(t)x_2(t) \quad (2.4)$$

dengan:

$\dot{x}_1(t)$: laju perubahan tingkat produksi sumber energi terbarukan pada waktu t .

$\dot{x}_2(t)$: laju perubahan tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan pada waktu t .

- $x_1(t)$: tingkat produksi sumber energi terbarukan pada waktu t , $x_1(t) > 0$
 $x_2(t)$: tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan pada waktu t , $x_2(t) > 0$
 $u_1(t)$: variabel pengendali yang menyatakan besarnya persentase kenaikan/penurunan tingkat produksi sumber energi terbarukan dengan $-1 \leq u_1(t) \leq 1$.
 $u_2(t)$: variabel pengendali yang menyatakan besarnya persentase kenaikan/penurunan tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan dengan $-1 \leq u_2(t) \leq 1$
 β_1 : konstanta positif dari tingkat pengurangan produksi sumber energi terbarukan karena persaingan dengan produksi sumber energi tidak terbarukan.
 β_2 : konstanta positif dari tingkat pengurangan produksi sumber energi tidak terbarukan karena persaingan dengan produksi sumber energi terbarukan.

dimana $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ berada dalam interval $[-1,1]$, sehingga dapat dituliskan kedalam bentuk:

$U = u = (u_1(t), u_2(t)) \in R^2 : -1 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1 \subset R^2$
 dimana angka 1 pada interval tersebut mewakili nilai 100

2.3 Model Matematika dari Fungsi Tujuan

Dalam permasalahan produksi energi ini, tujuan yang hendak dicapai adalah peralihan secara bertahap

pemanfaatan sumber energi tidak terbarukan dengan sumber energi terbarukan dengan mengoptimalkan tingkat produksi kedua sumber energi untuk memenuhi kebutuhan atau permintaan energi dengan biaya produksi energi yang minimal. Adapun fungsi tujuan dalam permasalahan energi ini dinyatakan kedalam model matematika sebagai berikut [1]:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2\} dt \quad (2.5)$$

Dari model pada persamaan (2.5) menunjukkan fungsi biaya yang berhubungan dengan usaha pengembangan produksi energi. Parameter q_1 dan q_2 masing-masing merupakan bobot untuk usaha pengembangan energi dalam hal investasi modal, pemeliharaan, dan biaya infrastruktur untuk sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan. dimana bobot parameter tersebut di dapatkan dari penelitian yang sudah disesuaikan dengan kondisi pengembangan, pemeliharaan dan biaya infrastruktur pada zaman tersebut

2.4 Kebijakan Energi

Tingkat penggunaan sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan dalam kehidupan sehari-hari saling berkaitan dan memberikan dampak yang dapat memengaruhi satu sama lainnya. Kelebihan dari penggunaan sumber energi terbarukan adalah ramah lingkungan. Akan tetapi, produksi energi ini sangat bergantung pada iklim. Disisi lain, konsumsi energi semakin meningkat sehingga pemakaian sumber energi tidak terbarukan seperti bahan bakar minyak menjadi tidak efektif dan mengakibatkan kelangkaan jika ketersediaannya mulai berkurang. Selain itu, pemakaian sumber energi tidak terbarukan akan menimbulkan pencemaran lingkungan sehingga hal ini menjadi penyebab perubahan iklim. Jika

iklim berubah, akibatnya produksi sumber energi terbarukan menjadi terganggu.

Terdapat dua kebijakan dalam mengatasi masalah tersebut, pertama adalah dengan menjalankan program hemat energi yang difokuskan pada pengurangan permintaan energi dan efisiensi produksi energi sehingga mampu mengurangi ketergantungan terhadap pemakaian bahan bakar fosil (tidak terbarukan). Kedua adalah meningkatkan pemanfaatan sumber energi terbarukan. Berdasarkan hal tersebut, diperlukan adanya suatu kebijakan untuk mengintegrasikan penggunaan sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan sehingga mampu memenuhi kebutuhan energi secara optimal dengan biaya produksi dan pengembangan energi yang minimal[1]. Sehingga, dengan model sistem dinamik pada persamaan (2.3) dan (2.4) serta fungsi objektif pada persamaan (2.5), akan dicari kendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal sehingga mampu meminimalkan fungsi objektif tersebut. Masalah kendali optimal ini akan diselesaikan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

2.5 Teori Kendali Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendali optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai [3]. Dengan demikian, formulasi masalah kendali optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem (model), menentukan fungsi tujuan dan kendala atau syarat batas yang berlaku.

Secara umum, masalah kendali optimal diformulasikan sebagai berikut. Misalkan suatu sistem dinamik diberikan oleh persamaan:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

dengan keadaan awal $x(t_0) = x_0$ dan keadaan akhir $x(t_f) = x_f$ serta $u(t)$ yang menyatakan pengendali keadaan pada waktu t . Dalam hal ini, masalah kendali optimal adalah mencari pengendali optimal $u^*(t)$ yang memenuhi persamaan keadaan (state) dengan syarat nilai J berikut ini:

$$J(x) = S(x(t_f), t_f) + \int_{(t_0)}^{(t_f)} V(x, u, t) dt \quad (2.7)$$

adalah minimum atau maksimum. Bentuk umum persamaan $J(x)$ tersebut disebut fungsi tujuan yang dinamakan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Mayer dan V adalah bentuk Lagrange. Dengan waktu akhir tetap atau bebas dan keadaan (state) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap.

2.6 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal untuk menentukan pengendali yang optimal dari sistem dinamik persamaan kendala sehingga mampu meminimumkan fungsi tujuan yang ingin dicapai. Dengan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan pada persamaan (2.3), (2.4) dan (2.5), maka langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut [3]:

- langkah 1. Bentuk fungsi Hamiltonian yang disimbolkan dengan H , yaitu:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda' f(x(t), u(t), t)$$
- langkah 2. Selesaikan persamaan kendali yaitu minimumkan H terhadap $u(t)$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right)_* = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stationer pengendali $u^*(t)$

- langkah 3. Gunakan hasil $u^*(t)$ dari langkah 2 akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal, H^* , yaitu:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$$

- langkah 4. Selesaikan 2n persamaan:

$$\dot{x}(t) = +\left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda}\right)$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}\right)$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir:[8]

$$\left(\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial (S)}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right)'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Dengan S adalah bentuk Mayer dari fungsi tujuan, \mathcal{H} adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel pengendalinya stasioner.

- Langkah 5. Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam persamaan u^* pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali optimal yang dicari.

Berdasarkan perbedaan antara keadaan dimana t_f dan state pada waktu akhir ($x(t_f)$) sistem dibedakan menjadi lima tipe yaitu [3]:

1. Sistem dengan waktu akhir dan state pada waktu akhir ditentukan, Karena t_f dan $x(t_f)$ ditentukan maka keduanya bernilai nol, sehingga tidak ada batas untuk sistem ini.

2. Sistem dengan waktu akhir tidak ditentukan dan state pada waktu akhir ditentukan, Karena t_f tidak ditentukan maka δt_f bernilai sebarang dan $x(t_f)$ ditentukan maka δx_f bernilai nol, sehingga batas untuk sistem ini yaitu:

$$(H^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{t_f} = 0$$

3. Sistem dengan waktu akhir ditentukan dan state pada waktu akhir tidak ditentukan, Karena t_f ditentukan maka δt_f bernilai nol dan $x(t_f)$ tidak ditentukan maka δx_f bernilai sebarang, sehingga batas untuk sistem ini adalah:

$$((\frac{\partial S}{\partial x})_* - \lambda^*(t))_{t_f} = 0$$

4. Sistem dengan waktu akhir dan state pada waktu akhir tidak ditentukan keduanya, dengan state pada waktu akhir merupakan fungsi yang bergantung pada waktu akhir Karena $x(t_f) = \theta(t_f)$ dan $\delta x_f \approx \bar{\theta}(t_f)\delta t_f$, batas untuk sistem ini adalah:

$$[(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}) + ((\frac{\partial S}{\partial x})_* - \lambda^*(t))'\bar{\theta}(t)]_{t_f}\delta t_f = 0$$

Dan karena waktu akhir tidak ditentukan maka δt_f bernilai sebarang, oleh sebab itu untuk sistem ini yaitu:

$$[(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}) + ((\frac{\partial S}{\partial x})_* - \lambda^*(t))'\bar{\theta}(t)]_{t_f} = 0$$

5. Sistem dengan waktu akhir dan state pada waktu akhir tidak ditentukan keduanya, dengan state pada waktu akhir dan waktu akhir tidak berhubungan Karena t_f dan $x(t_f)$ tidak berhubungan maka δt_f dan δx_f juga

tidak berhubungan, batas untuk sistem ini yaitu:

$$(H^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{t_f} = 0$$

$$((\frac{\partial S}{\partial x})^* - \lambda^*(t))_{t_f} = 0$$

BAB III METODE PENELITIAN

Dalam pembuatan Tugas Akhir ini ada beberapa langkah yang harus dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Studi literatur
Dalam tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi tentang sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan serta teori mengenai kendali optimal dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.
2. Mengkaji formulasi masalah kendali optimal
Pada tahap ini, formulasi masalah kendali optimal mengenai model matematika dari sistem dinamik dan fungsi objektif dikaji secara lebih dalam. Metode yang digunakan adalah Prinsip Minimum Pontryagin. Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini adalah sebagai berikut:
 - a. Membentuk fungsi Hamilton,
 - b. Menentukan persamaan state dan costate,
 - c. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi,
 - d. Menentukan pengendali optimal.
3. Simulasi permasalahan
Pada tahap ini akan dicari solusi dari masalah kendali optimal dengan memanfaatkan persamaan state dan costate, persamaan pengendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi menggunakan software Matlab.

4. Analisis hasil simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil simulasi melalui tampilan grafik yang di peroleh pada tahap sebelumnya.

5. Penulisan laporan Tugas Akhir

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan Tugas Akhir dan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya.

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas kendali optimal dalam produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan . Pembahasan diawali dengan penjelasan model produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan. Kemudian dilanjutkan dengan menentukan formulasi kendali optimal dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. dan yang terakhir, akan diberikan analisis hasil simulasi untuk menentukan waktu optimal dalam produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan.

4.1 Model dalam Produksi Sumber Energi Terbarukan dan Tidak Terbarukan

Pada sub bab ini dibahas model matematika dari produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan. Model tersebut dinyatakan kedalam bentuk sistem persamaan diferensial non linier orde satu, yang menunjukkan persaingan antara tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan. Adapun asumsi-asumsi yang diberikan pada model tersebut akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Produksi sumber energi dibagi menjadi dua, yaitu:

$x_1(t)$: tingkat produksi sumber energi terbarukan pada waktu t .

$x_2(t)$: tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan pada waktu t .

Selama jangka waktu $I = [t_0 : t_f]$, sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan selalu diproduksi sehingga $x_1(t) > 0$ dan $x_2(t) > 0$.

2. Persentase tingkat produksi sumber energi ditentukan sebagai variabel pengendali, yaitu:[2]

$u_1(t)$: persentase pertumbuhan produksi sumber energi terbarukan.

$u_2(t)$: persentase pertumbuhan produksi sumber energi tidak terbarukan.

Besarnya persentase produksi tersebut dinyatakan sebagai fungsi waktu karena nilainya dapat berubah-ubah setiap waktu t . Laju perubahan tingkat produksi sumber energi sebanding dengan besar kecilnya persentase tingkat produksinya [2]. Artinya, untuk setiap t_* di I berlaku bahwa semakin besar $u_1(t_*)$, semakin besar pula nilai $\dot{x}_1(t_*)$. Demikian juga untuk sumber energi tidak terbarukan, jika $u_2(t_*)$ semakin besar, maka $\dot{x}_2(t_*)$ semakin besar. Oleh sebab itu, $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ dijadikan sebagai variabel pengendali yang berada dalam batas $-1 \leq u_1(t) \leq 1$ dan $-1 \leq u_2(t) \leq 1$. Batas atas interval (+1) menunjukkan bahwa peningkatan produksi sumber energi tidak akan melebihi 100%, sedangkan batas bawah (-1) menyatakan bahwa penurunan tingkat produksi sumber energi juga tidak akan melebihi 100%.

3. Laju perubahan dari tingkat produksi sumber energi dipengaruhi oleh:

- Besar kecilnya persentase tingkat produksi sumber energi itu sendiri. Hal ini ditunjukkan oleh besarnya nilai $u_1(t)x_1(t)$ dan $u_2(t)x_2(t)$. Jika nilai tersebut semakin besar, maka tingkat pertumbuhan produksi semakin bertambah. Begitu pula sebaliknya, jika nilainya semakin berkurang, maka tingkat pertumbuhan produksi akan semakin berkurang.
- Adanya persaingan produksi antara sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan, yang dinyatakan dengan $-\beta_1x_1(t)x_2(t)$ dan $-\beta_2x_1(t)x_2(t)$. Persaingan tersebut menyebabkan berkurangnya tingkat pertumbuhan produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan.

Berdasarkan pada asumsi-asumsi di atas, diperoleh suatu model dinamik dari tingkat produksi sumber energi (persamaan 2.3 dan 2.4) [4].

4.2 Formula Kendali Optimal

Secara umum, formulasi kendali optimal terdiri sistem dinamik, fungsi objektif, dan kondisi batas yang harus dipenuhi. Diberikan suatu sistem dinamik dari tingkat produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan yaitu:

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t)x_1(t) - \beta_1x_1(t)x_2(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t)x_2(t) - \beta_2x_1(t)x_2(t) \quad (4.2)$$

dengan keadaan awal:

$$x_1(t_0) = \textit{ditentukan}$$

$$x_2(t_0) = \text{ditentukan}$$

dan keadaan akhir:

$$x_1(t_f) = \text{ditentukan}$$

$$x_2(t_f) = \text{ditentukan}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang nantinya akan dicari. Sedangkan variabel pengendali diberikan oleh persamaan berikut:

$$-1 \leq u_1(t) \leq 1; t \in I = [t_0, t_f]$$

$$-1 \leq u_2(t) \leq 1; t \in I = [t_0, t_f]$$

Permasalahan ini bertujuan untuk mendapatkan pengendali optimal yang dapat meminimumkan biaya implementasi dengan adanya target akhir produksi.

Fungsi tujuan dari permasalahan ini adalah sebagai berikut:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2\} dt \quad (4.3)$$

keterangan:

q_1 : bobot biaya pengendalian dalam pengembangan sumber energi terbarukan, $q_1 > 0$.

q_2 : bobot biaya pengendalian dalam pengembangan sumber energi tidak terbarukan, $q_2 > 0$.

4.3 penyelesaian kendali optimal

Dalam sub bab ini akan di jelaskan penyelesaian kendali optimal dengan beberapa langkah.

Langkah 1 adalah dengan membentuk fungsi hamiltonian \mathcal{H} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)t) \\
 &= V(x(t), u(t), t) + \lambda^2(t)f(x(t), u(t), t) \\
 &= \frac{1}{2}Q_1u_1^2(t) + Q_2u_2^2(t) \\
 &\quad + \lambda_1(t)(u_1(t)x_1(t) - \beta_1x_1(t)x_2(t)) \\
 &\quad + \lambda_2(t)(u_2(t)x_2(t) - \beta_2x_1(t)x_2(t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2}Q_1u_1^2(t) + Q_2u_2^2(t) \\
 &\quad + \lambda_1(t)u_1(t)x_1(t) - \beta_1\lambda_1(t)x_1(t)x_2(t) \\
 &\quad + \lambda_2(t)u_2(t)x_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2}Q_1u_1^2(t) + \frac{1}{2}Q_2u_2^2(t) \\
 &\quad + \lambda_1(t)u_1(t)x_1(t) - \beta_1\lambda_1(t)x_1(t)x_2(t) \\
 &\quad + \lambda_2(t)u_2(t)x_2(t) - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t)
 \end{aligned}$$

Langkah 2 adalah mencari $u^*(t)$ untuk mencari kendali yang optimal, yaitu:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u(t)} = 0$$

- kendali $u_1(t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1(t)} = 0$
maka didapat:

$$\begin{aligned}
 Q_1u_1(t) + \lambda_1(t)x_1(t) &= 0 \\
 Q_1u_1(t) &= -\lambda_1(t)x_1(t) \\
 u_1(t) &= -\frac{\lambda_1(t)x_1(t)}{Q_1} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

- kendali $u_2(t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2(t)} = 0$
maka didapat:

$$\begin{aligned}
 Q_2 u_2(t) + \lambda_2(t) x_2(t) &= 0 \\
 Q_2 u_2(t) &= -\lambda_2(t) x_2(t) \\
 u_2(t) &= -\frac{\lambda_2(t) x_2(t)}{Q_2} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Langkah 3 adalah dengan mensubstitusikan hasil dari langkah 2 yaitu $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ ke dalam hamiltonian, sehingga didapatkan fungsi hamiltonian baru, yaitu:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^* &= \frac{1}{2} Q_1 u_1^*(t) + \frac{1}{2} Q_2 u_2^*(t) \\
 &\quad + \lambda_1(t) (u_1^*(t) x_2(t) - \beta_1 \lambda_1(t) x_1(t) x_2(t)) \\
 &\quad + \lambda_2(t) (u_2^*(t) x_2(t) - \beta_2 \lambda_2(t) x_1(t) x_2(t)) \\
 \mathcal{H}^* &= \frac{1}{2} Q_1 \left(-\frac{\lambda_1(t) x_1(t)}{Q_1} \right) + \frac{1}{2} Q_2 \left(-\frac{\lambda_2(t) x_2(t)}{Q_2} \right) \\
 &\quad + \lambda_1(t) \left(-\frac{\lambda_1(t) x_1(t)}{Q_1} \right) x_1(t) - \beta_1 \lambda_1(t) x_1(t) x_2(t) \\
 &\quad + \lambda_2(t) \left(-\frac{\lambda_2(t) x_2(t)}{Q_2} \right) x_2(t) - \beta_2 \lambda_2(t) x_1(t) x_2(t) \\
 \mathcal{H}^* &= -\frac{\lambda_1^2(t) x_1^2(t)}{2Q_1} - \beta_1 \lambda_1(t) x_1(t) x_2(t) \\
 &\quad - \frac{\lambda_2^2(t) x_2^2(t)}{2Q_2} - \beta_2 \lambda_2(t) x_1(t) x_2(t) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Langkah 4 adalah untuk mencari state dan co-state yang didapat dari hasil \mathcal{H}^* yaitu:

- $\dot{x}_1(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_1(t)} \\ &= -\frac{\lambda_1(t)x_1^2(t)}{Q_1} - \beta_1 x_1(t)x_2(t) \quad (4.7)\end{aligned}$$

- $\dot{x}_2(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_2(t)} \\ &= -\frac{\lambda_2(t)x_2^2(t)}{Q_2} - \beta_2 x_1(t)x_2(t) \quad (4.8)\end{aligned}$$

- $\dot{\lambda}_1(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_1(t)} \\ &= -\left(-\frac{2\lambda_1^2(t)x_1(t)}{2Q_1} - \beta_1 \lambda_1(t)x_2(t) - \beta_2 \lambda_2(t)x_2(t)\right) \\ &= \frac{\lambda_1^2(t)x_1(t)}{Q_1} + \beta_1 \lambda_1(t)x_2(t) + \beta_2 \lambda_2(t)x_2(t)\end{aligned}$$

- $\dot{\lambda}_2(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_2(t)} \\ &= -\left(-\frac{2\lambda_2^2(t)x_2(t)}{2Q_2} - \beta_2 \lambda_2(t)x_2(t) - \beta_2 \lambda_2(t)x_1(t)\right) \\ &= \frac{\lambda_2^2(t)x_2(t)}{Q_2} + \beta_1 \lambda_2(t)x_2(t) + \beta_2 \lambda_2(t)x_1(t)\end{aligned}$$

Formulasi kendali optimal pada permasalahan ini menggunakan sistem dengan t_f bebas dan $x(t_f)$ ditentukan, sehingga kondisi transversalitasnya adalah:

$$(\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{t_f} = 0$$

dengan S adalah *mayer* dari fungsi tujuan, yaitu:

$$S = 0$$

selanjutnya akan di cari kondisi transversalitas, yaitu:

$$(\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{t_f} = 0$$

$$\begin{aligned} & ((-\frac{\lambda_1^2(t)x_1^2(t)}{2Q_1} - \beta_1\lambda_1(t)x_1(t)x_2(t)) \\ & - \frac{\lambda_2^2(t)x_2^2(t)}{2Q_2} - \beta_2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t))_{t_f} = 0 \end{aligned}$$

kemudian disederhanakan, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} & -(\frac{x_1^2(t_f)}{2Q_1})\lambda_1^2(t_f) - (\frac{x_2^2(t_f)}{2Q_2})\lambda_2^2(t_f) \\ & -(\beta_1x_1(t_f)x_2(t_f))\lambda_1(t_f) - (\beta_2x_1(t_f)x_2(t_f))\lambda_2(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Persamaan state dan costate membentuk suatu sistem persamaan diferensial tak linier. Karena penyelesaiannya tidak mudah didapatkan secara analitik, sehingga permasalahan tersebut diselesaikan secara numerik. Dalam Tugas Akhir ini, digunakan fungsi MISER3 pada Matlab untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial melalui simulasi yang dilakukan. MISER3 adalah fungsi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai batas secara numerik.

Akan tetapi sebelum dilakukan simulasi, fungsi objektif akan ditransformasikan. untuk menjadikan t_f sebagai sebuah parameter dengan mengambil:

$$z_1 = t_f - t_0$$

untuk $t_0 = 0$ maka didapatkan $z_1 = t_f$

setelah itu dilakukan transformasi dengan menggunakan $t = sz_1 - t_0$ [6].

kemudian kedua ruas diturunkan, didapat $dt = z_1 ds$ sehingga didapatkan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(u) = z_1 \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2\} ds \quad (4.9)$$

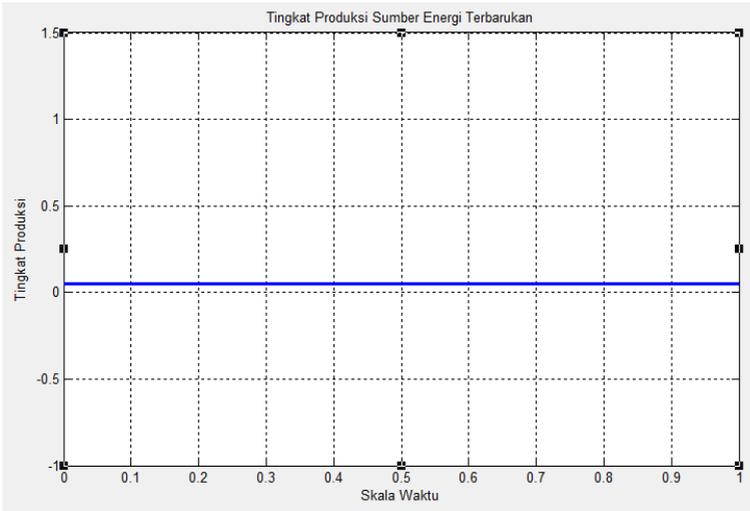
4.4 Analisis Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini, diberikan nilai parameter yang digunakan untuk mensimulasikan permasalahan kendali optimal, parameter ini berdasarkan penelitian yang sudah disesuaikan dengan kondisi yang ada[1]:

Tabel 4.1: input parameter

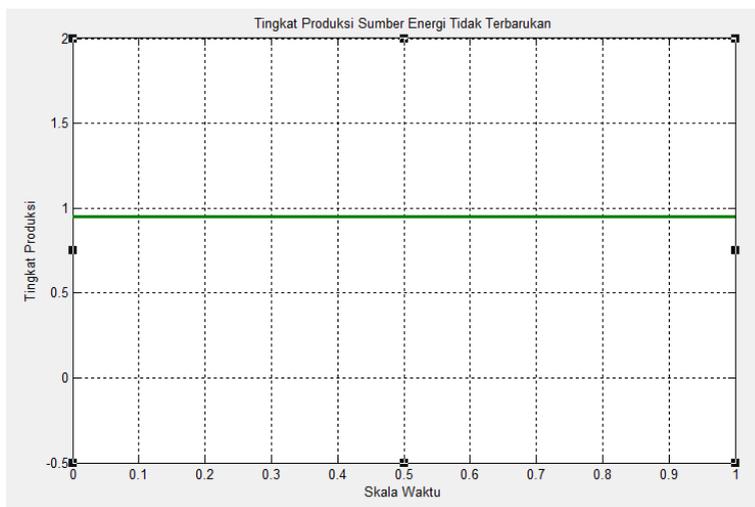
Parameter	Nilai
$x_1(0)$	0.05
$x_2(0)$	0.95
$x_1(t_f)$	0.5
$x_2(t_f)$	0.5
q_1	1.1
q_2	0.75

Simulasi pertama yang dilakukan adalah ketika pengendali untuk tingkat produksi sumber energi terbarukan ($u_1(t)$) dan tidak terbarukan ($u_2(t)$) bernilai nol. Artinya tidak ada pengendalian terhadap produksi sumber energi. Kemudian simulasi yang kedua adalah dengan adanya pengendalian, sehingga dapat terlihat pengaruh kendali optimal dalam produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan.



Gambar 4.1: Tingkat produksi energi terbarukan tanpa pengendalian

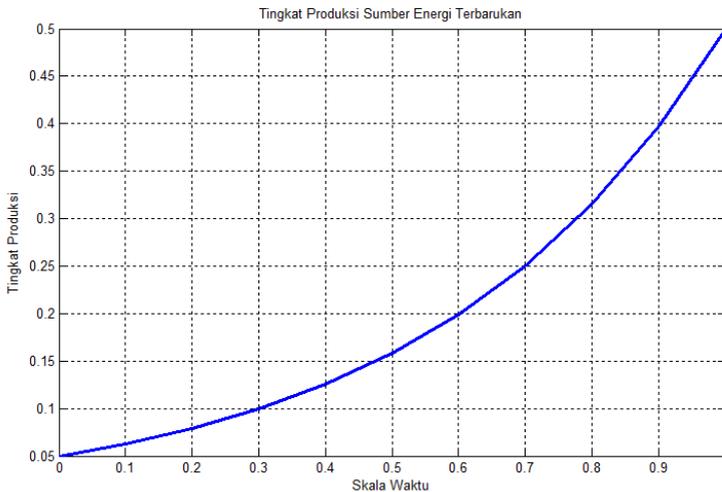
Gambar 4.1 menunjukkan perilaku tingkat produksi sumber energi terbarukan tanpa pengendalian. Dari grafik tersebut terlihat bahwa tingkat produksi sumber energi terbarukan tidak mengalami penurunan maupun peningkatan produksi. Tingkat produksi awal untuk sumber energi terbarukan adalah 0.05, kemudian berjalan konstan hingga akhir waktu. sehingga tidak ditemukan waktu akhir dalam produksi ini, karena produksi tidak akan pernah mencapai nilai target produksi sebesar 0.5(50%). Hal ini disebabkan tidak adanya pengendali sehingga laju perubahan produksi konstan. kemudian simulasi yang kedua adalah tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan tanpa adanya pengendalian.



Gambar 4.2: Tingkat produksi energi tidak terbarukan tanpa pengendalian

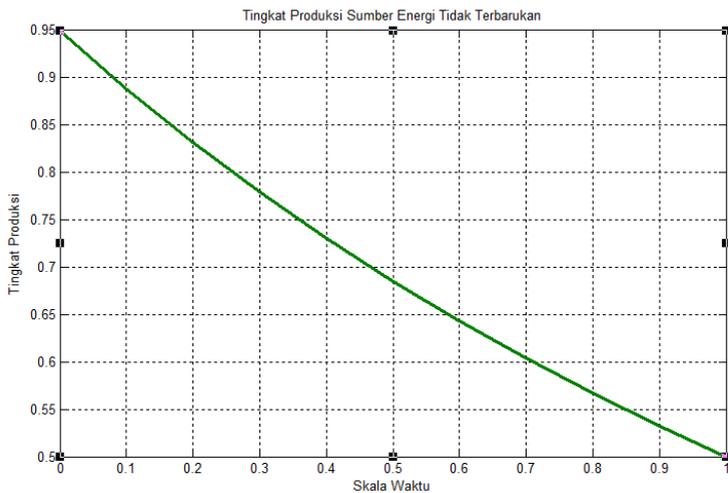
Gambar 4.2 menunjukkan perilaku yang sama dengan produksi sumber energi terbarukan tanpa pengendalian. Dari grafik tersebut terlihat bahwa tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan tidak mengalami penurunan maupun peningkatan produksi. Tingkat produksi awal untuk sumber energi terbarukan adalah 0.95, kemudian berjalan konstan hingga akhir waktu. sehingga tidak ditemukan waktu akhir dalam produksi ini, karena produksi tidak akan pernah mencapai nilai target produksi sebesar 0.5(50%). Hal ini disebabkan tidak adanya pengendali sehingga laju perubahan produksi konstan.

Kemudian simulasi selanjutnya adalah ketika pengendali untuk tingkat produksi sumber energi terbarukan($u_1(t)$) dan tidak terbarukan ($u_2(t)$) bernilai \neq nol. Artinya ada pengendalian terhadap produksi sumber energi.



Gambar 4.3: Tingkat produksi energi terbarukan dengan pengendalian

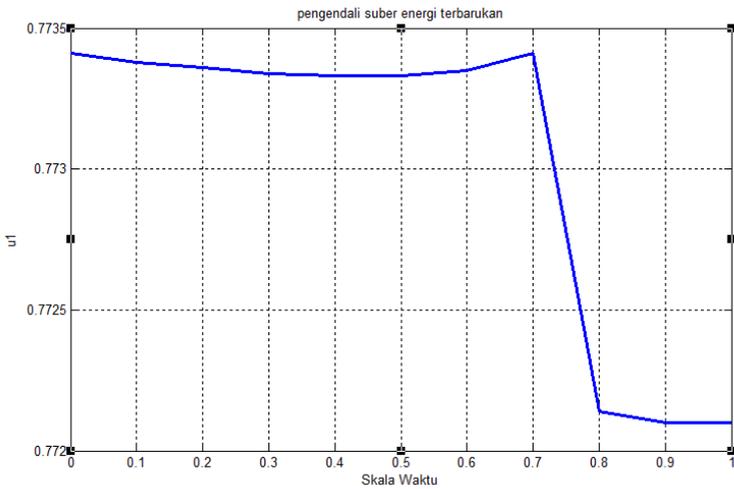
Dari gambar 4.3 tersebut terlihat bahwa produksi energi terbarukan dengan pengendalian dengan kondisi awal untuk energi terbarukan adalah sebesar 0.05 (5%) dan mengalami peningkatan hingga mencapai 0.5 (50%) di akhir waktu. untuk simulasi keempat, adalah untuk menunjukkan tingkat produksi sumber energi tidak terbarukan dengan pengendalian.



Gambar 4.4: tingkat produksi energi tidak terbarukan dengan pengendalian

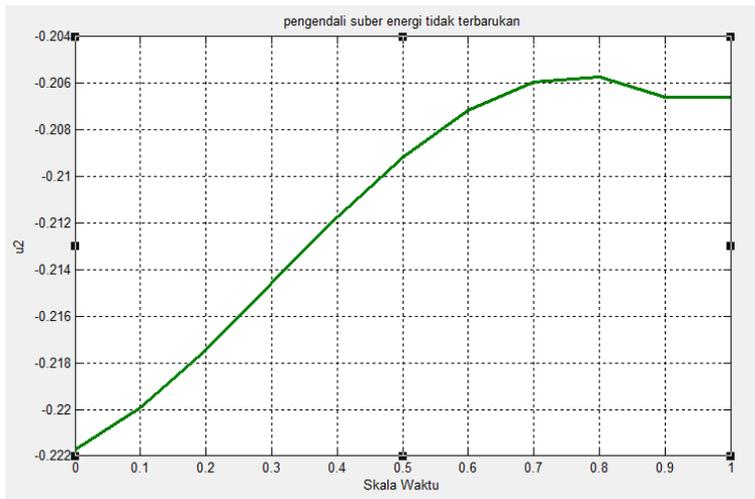
Dari gambar 4.4 tersebut terlihat bahwa produksi energi tidak terbarukan dengan pengendalian dengan kondisi awal untuk energi terbarukan adalah sebesar 0.95 (5%) dan mengalami penurunan hingga mencapai 0.5 (50%) di akhir waktu.

untuk simulasi kelima adalah untuk menunjukkan tingkat pengendalian pada produksi sumber energi terbarukan.



Gambar 4.5: pengendali tingkat produksi energi terbarukan

Kemudian Gambar 4.5, terlihat bahwa pengendali yang didapat berada dalam interval $[-1; 1]$. Persentase tingkat pertumbuhan dari sumber energi terbarukan (pengendali 1) berada di sumbu positif, menunjukkan bahwa produksi sumber energi tersebut ditingkatkan dan upaya pengendalian yang diberikan pun juga diminimumkan.



Gambar 4.6: pengendali tingkat produksi energi tidak terbarukan

Selanjutnya Gambar 4.6, terlihat bahwa pengendali yang didapat berada dalam interval $[-1; 1]$. Persentase tingkat pertumbuhan dari sumber energi tidak terbarukan (pengendali 2) berada di sumbu negatif, menunjukkan bahwa produksi sumber energi tersebut diturunkan.

kemudian yang terakhir akan ditunjukkan hasil dari waktu optimal dalam diversifikasi produksi sumber energi terbarukan dan tidak terbarukan.

Iter	F-count	f(x)	Max constraint	Line search steplength	Directional derivative	First-order optimality
0	1	0	0.4508			
1	5	0.720474	0.344	0.25	0	244
2	7	0.800838	0.06194	1	0.0938	0.964
3	9	0.811594	0.003307	1	0.0534	0.864
4	11	0.8124	1.083e-05	1	0.0721	0.849
5	13	0.812317	6.63e-09	1	-0.0109	0.847
6	15	0.811652	1.36e-06	1	-0.0114	0.846
7	17	0.811539	3.196e-08	1	-0.0116	0.846
8	19	0.809574	8.595e-06	1	-0.0212	0.842
9	21	0.806562	1.921e-05	1	-0.0281	0.836
10	23	0.799571	0.000101	1	-0.0388	0.822
11	25	0.789872	0.0001935	1	-0.047	0.799
12	27	0.778772	0.0002322	1	-0.0536	0.771
13	29	0.767668	0.0001745	1	-0.0579	0.741
14	31	0.751652	0.0002771	1	-0.0717	0.707
15	33	0.719712	0.001073	1	-0.101	0.654
16	35	0.65304	0.004943	1	-0.147	0.562
17	37	0.533988	0.01678	1	-0.203	0.424
18	39	0.390715	0.0249	1	-0.234	0.259
19	41	0.357023	0.0006562	1	-0.0874	0.125
20	43	0.345772	1.928e-05	1	-0.0475	0.0147
21	45	0.345614	1.08e-06	1	-0.00496	0.000513
22	47	0.345606	6.745e-08	1	-0.00118	0.00018

Local minimum possible. Constraints satisfied.

Gambar 4.7: nilai $f(x)$ untuk tingkat produksi energi

gambar 4.7 menunjukkan hasil nilai dari $f(x)$ yang nantinya akan ditransformasikan untuk mendapatkan waktu akhir dalam diversifikasi produksi energi terbarukan dan tidak terbarukan.

Dengan menggunakan fungsi objektif yang sudah ditransformasikan (4.9), dan input parameter $q_1 = 1.1$, $q_2 = 0.75$, $u_1(t_f) = 0.77$, dan $u_2(t_f) = -0.2$ maka akan didapatkan z_1 sebesar 17.69, dan karena $z_1 = t_f$, maka waktu akhir didapatkan sebesar 17.69 tahun.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa dengan menerapkan PMP (Prinsip Minimum Pontryagin) diperoleh pengendali optimal dalam produksi sumber energi terbarukan dengan nilai awal produksi sebesar 0.05 (5%) dan produksi sumber energi tidak terbarukan dengan nilai produksi awal 0.95% dan nilai produksi di akhir masing masing sebesar 50% adalah selama 17.69 tahun.

5.2 Saran

Saran dari Tugas Akhir ini untuk penelitian selanjutnya agar diterapkan jenis jenis sistem yang lain dan dengan menggunakan metode yang lain

Biodata Penulis



Misbakhul Khoir atau yang biasa akrab dipanggil Khoir lahir di Gresik, 24 April 1992. Penulis bertempat tinggal di Jalan Sumur Waru Rt 01/01 Sidayu Gresik. Anak keempat dari pasangan Ainur Rofiq dan Hidayatul Khulaifah ini memiliki hobi wisata kuliner dan pecinta alam.

Pendidikan di bangku sekolah mulai SD S1 dijalankan di kota Gresik dan Surabaya. Alumni SDNU Kanjeng Sepuh, MTs

Kanjeng Sepuh, dan MA Kanjeng Sepuh ini melanjutkan pendidikannya pada tahun 2010 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur beasiswa Bidik Misi untuk menempuh pendidikan S1 selama 4 tahun.

Selama kuliah, penulis aktif di beberapa organisasi mahasiswa diantaranya sebagai staff PSDM HIMATIKA ITS (Himpunan Mahasiswa Matematika ITS) 2011/2012, wakil ketua HIMATIKA ITS (Himpunan Mahasiswa Matematika ITS) 2012/2013, staff kaderisasi IBNU MUQLAH (lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS) 2011/2012, kepala departemen kaderisasi IBNU MUQLAH (lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS) 2012/2013, Mentor IBNU MUQLAH (lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS) 2012/2013. Serta aktif dalam beberapa kepanitiaan, salah satunya pernah menjadi kordinator SC (Steering Committee) KPP Padamu Himatika ITS pada tahun 2011 dan kordinator lapangan Dies Natalis ITS tahun 2011.

Selain itu penulis juga pernah mengikuti beberapa pelatihan manajemen dan kepemimpinan seperti LKMM Pra-TD

2011, LKMM TD 2011, CT(Conceptor Training) 2012, OMT(Organization Managerial Training) 2012, Sekolah KAHIMA 2012.

Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir, silahkan menghubungi misb4khul.4141choir@yahoo.com. Semoga bermanfaat.