ABSTRAK

Sutirin Nrp. 1851300101, judul: Metode Analisis Hubungan ("Correspondence Analysis"), dengan dosen pembimbing Drs. I. Nyoman Latra MS.

Dewasa ini perkembangan tehnologi semakin pesat seiring dengan perkembangan di bidang-bidang yang lain. Dampak dari perkembangan tersebut, selain keuntungan-keuntungan yang dapat dinikmati juga timbulnya berbagai masalah, terutama masalah-masalah sosial. Dengan demikian nilai suatu informasi yang dapat diperoleh dari suatu survei atau penelitian sangat diperlukan untuk mengatasi masalah yang timbul.

Untuk mereduksi dimensi vektor peubah dari hasil survei atau penelitian, banyak metode yang dapat diterapkan, metode tersebut antara lain Analisis Komponen Utama ("Principal Konponent Analysis") dan Analisis Hubungan ("Correspondence Analysisi"). Dalam penelitian kadang didapat data dengan skala nominal atau ordinal dan disajikan dalam bentuk tabel kontingensi, dalam kasus seperti ini Analisis Komponen Utama kurang baik diterapkan. Metode yang lebih tepat diterapkan adalah metode Analisis Hubungan. Jadi perbedaan kedua metode tersebut terletak pada data dan skala pengukuran data, yang akan dianalisa. Analisis komponen utama biasa diterapkan pada data yang bersifat kuantitatif, sedangkan Analisis Hubungan diterapkan pada data yang bersifat kualitatif atau tabel kontingensi.

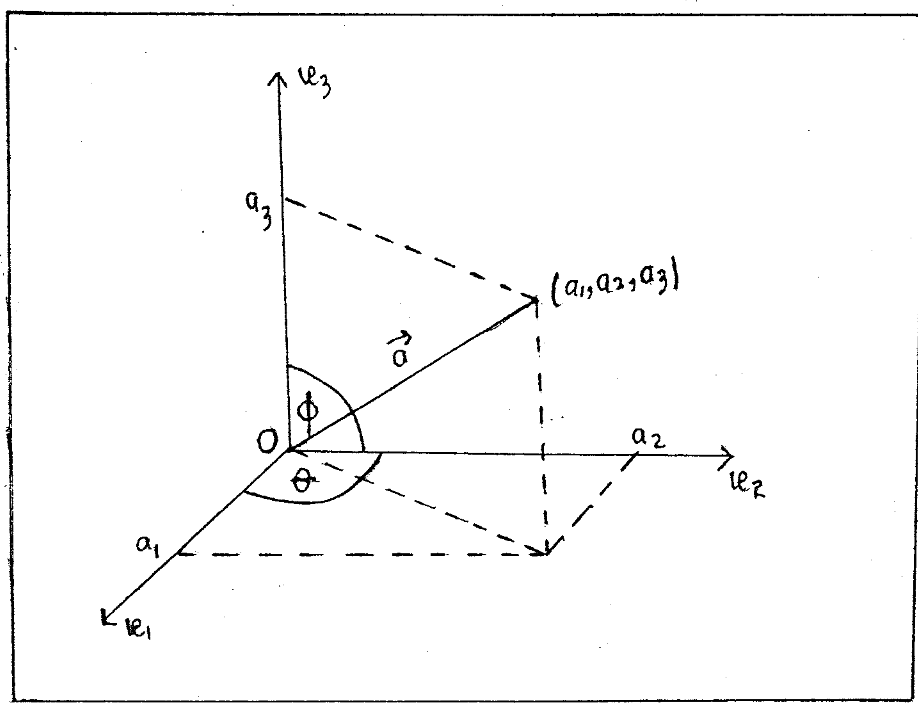
Keunggulan Analisis Hubungan adalah dapat menggambarkan profil-profil bbaris dan lajur secara serentak dalam salib sumbu. Metode Analisis Hubungan banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah sosial. Metode Analisis Hubungan dapat diperluas ke analisis hubungan ganda dengan matriks masukan data berupa tabel kontingensi Burt, yaitu tabel kentingensi multi arah yang merupakan perluasan dari tabel kontingensi dua arah (tabulasi silang).

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. VEKTOR

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah, suatu vektor bukan sebuah bilangan. Umumnya, sebuah vektor dapat bermula dari sembarang titik dalam suatu ruang dan berakhir di sebarang titik lainnya. Tetapi untuk menyederhanakan atau mempermudah pengoperasiannya, dipakai suatu perjanjian bahwa semua vektor berpangkal di titik asal sistem koordinat.



Gambar 1. Penggambaran vektor dalam ruang tiga dimensi

Contoh:

Suatu vektor dalam ruang tiga dimensi dinotasikan sebagai berikut:

$a = (a_1, a_2, a_3)$

a_1, a_2, a_3 merupakan komponen-komponen vektor **a**, artinya suatu vektor **a** yang berpangkal di titik asal sistem koordinat dan berakhir di suatu titik (a_1, a_2, a_3). Besar vektor **a** ditentukan oleh:

$$| a | = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

dengan arah ditentukan oleh kedua sudut θ dan ϕ yaitu:

$$\text{tg } \theta = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{.............................(2.1.)}$$

$$\cos \phi = \frac{a_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}} \quad \text{................(2.2.)}$$

2.1.1. Vektor Satuan

Suatu vektor satuan siku-siku dinyatakan oleh e_i yaitu suatu vektor dengan panjang 1 (satu). Dalam hal ini satu akan muncul pada komponen ke-i dan 0 pada komponen yang lain.

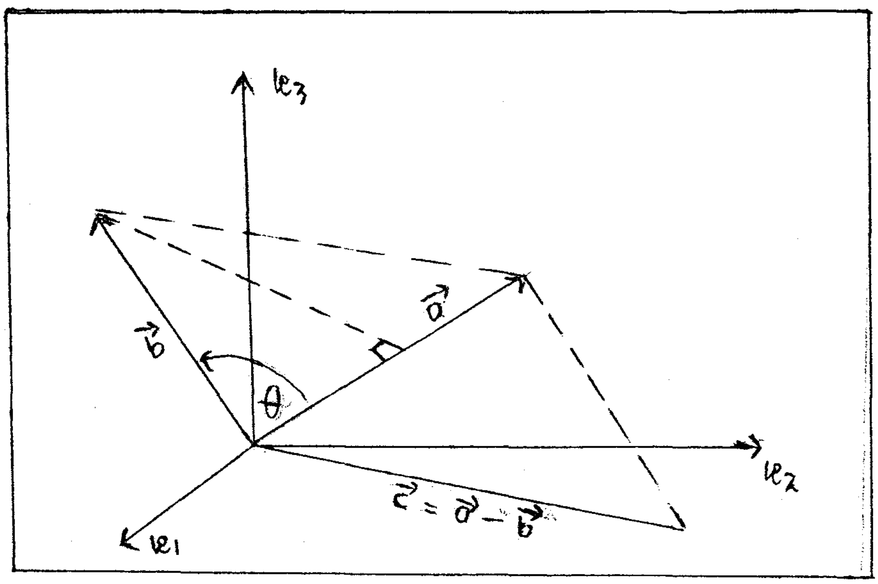
Contoh:

Suatu vektor $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ di mana a_i untuk $i = 1, 2, \ldots. n$ disebut komponen-komponen dari vektor e. Ambil suatu vektor e_i untuk i=3, maka vektor satuan e_3 dinyatakan dengan:

e_3 = (0,0,1,0,......,0).

2.1.2. Produk Skalar

Ambil dua buah vektor **a** dan **b**, sudut antara dua buah vektor tersebut adalah θ. Secara geometri dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar 2. berikut:



Gambar 2. Proyeksi **b** pada **a**

Skalar adalah suatu besaran yang hanya mempunyai besar saja, tapi tidak mempunyai arah. Bilangan $|b| \cos \theta$ tanpa memperhatikan arah, adalah besarnya proyeksi tegak lurus vektor **b** pada vektor **a**. Ini disebut komponen **b** dalam arah **a**. Pertimbangkan pernyataan berikut:

$$ab' = |a|\ |b|\ \cos\theta \quad \text{......................(2.3.)}$$

Persamaan (2.3.) menyatakan besarnya a dikalikan dengan komponen **b** dalam arah **a**, dan disebut hasil kali produk skalar dari **a** dan **b**. Simbol ab' menunjukan hasil kali skalar dua vektor, dan hasilnya berupa skalar.

2.1.3. Vektor Tegak Lurus ("Orthogonal")

Dua unit vektor e_1 dan e_2 terletak pada sumbu-sumbu koordinat, dikatakan saling tegak lurus ("orthogonal") karena:

$$e_1 e_2' = |\ e_1|\ |\ e_2|\ \cos\frac{\pi}{2} = |e_1|\ |e_2|\ 0 = 0 \quad \text{.....(2.4.)}$$

$$e_1 e_1' = |\ e_1|\ |\ e_1|\ \cos 0 = |e_1|\ |e_1|\ 1 = 1 \quad \text{........(2.5.)}$$

Keterangan:

Dua vektor saling tegak lurus akan membentuk sudut 90^{o} $(\frac{\pi}{2})$, sedang proyeksi suatu vektor terhadap dirinya sendiri akan membentuk sudut 0^{o}.

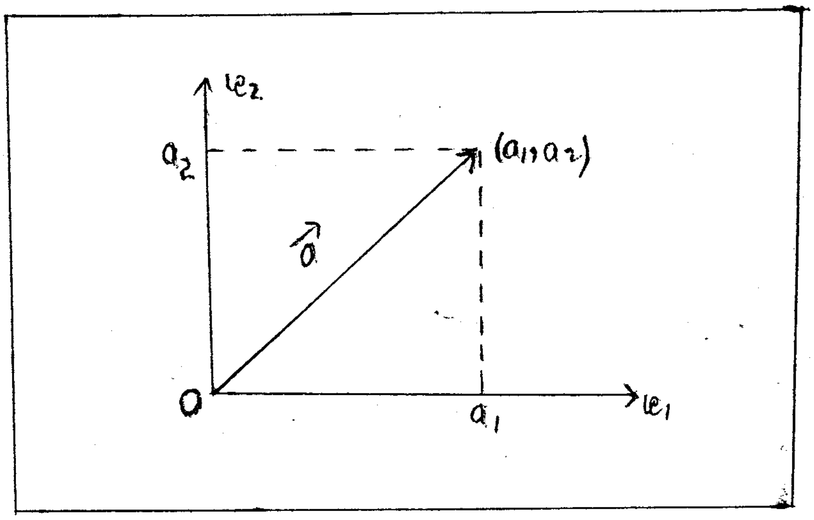
2.1.4..Koordinat Vektor

Setiap komponen vektor dapat digambarkan pada sumbu-sumbu yang bersesuaian secara tungal.

Contoh:

Suatu vektor $a = (a_1, a_2)$, maka dapat dikatakan bahwa

a_1 dan a_2 merupakan koordinat dari vektor a. Dapat digambarkan seperti terlihat pada Gambar 3 berikut:



Gambar 3. Kedudukan vektor a dengan koordinat (a_1,a_2)

2.2. MATRIKS

Matriks adalah susunan dalam persegi panjang dari bilangan-bilangan yang teratur dalam baris-baris dan lajur-lajur. Matriks dinotasikan sebagai:

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut di atas menunjukan suatu contoh bentuk matriks dengan m baris dan n kolom, $S_{(m \times n)}$.

2.2.1. Matriks Identitas

Matriks identitas berordo n yang dinotasikan dengan I I_n adalah sebuah matriks bujur sangkar yang mempunyai nilai 1 untuk semua unsur diogonal utama dan nilai 0 untuk selain diagonal utama.

Contoh:

Matriks identitas ordo n adalah:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Atau dengan kata lain I = [δ_{ij}] dimana:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2.2.2. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks bujur sangkar berordo n dengan elemen pada diagonal utama ada yang $\neq$ 0 dan 0 untuk selain diagonal.

Contoh:

Matriks diagonal dari suatu matriks ordo n.

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{bmatrix}$$

2.2.3..**Bentuk Kuadratik**

Pandang suatu persamaan linear sebagai berikut:

$$C = A\ X$$

$$C = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x_n$$

C dapat dikatakan inner produk antara vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ dan $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^T$.

Bentuk persamaan polynomial kuadrat dapat dinotasikan dalam bentuk matriks, dalam peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai berikut:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j \quad \ldots.(2.7.)$$

dengan asumsi $a_{ij} = a_{ji}$ dan ambil untuk harga n = 2, maka:

$$y = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j$$

$$y = \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} x_i x_1 + a_{i2} x_i x_2)$$

$$y = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

Hasil tersebut dapat diubah menjadi bentuk berikut:

$$y = X^T A X \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.8.)$$

di mana A adalah matriks symetri yang tunggal.

2.2.4. Akar-akar Ciri ("Eigent Value")

Nilai-nilai dari suatu parameter skalar λ yang mana ada vektor $x \neq 0$ yang memenuhi:

$$A x = \lambda x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.9.)$$

di mana A suatu matriks ordo n, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$A x = \lambda I x$$

$$(A-\lambda I) x = 0$$

persamaan tersebut akan sama dengan 0, bila dan hanya bila $x = 0$ atau $| A-\lambda I | = 0$, mengingat $x \neq 0$, maka:

$$| A-\lambda I | = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.10.)$$

Dari persamaan (2.10.) akan didapat suatu nilai λ_i, nilai λ_i yang didapat disebut akar-akar ciri atau nilai-nilai karakteristik dari matriks A, persamaan (2.10.) disebut persamaan karakteristik.

Untuk suatu vektor $x \neq 0$ yang memenuhi persamaan $A\,x = \lambda\,x$ disebut vektor-vektor ciri atau vektor-vektor karakteristik dari matriks A.

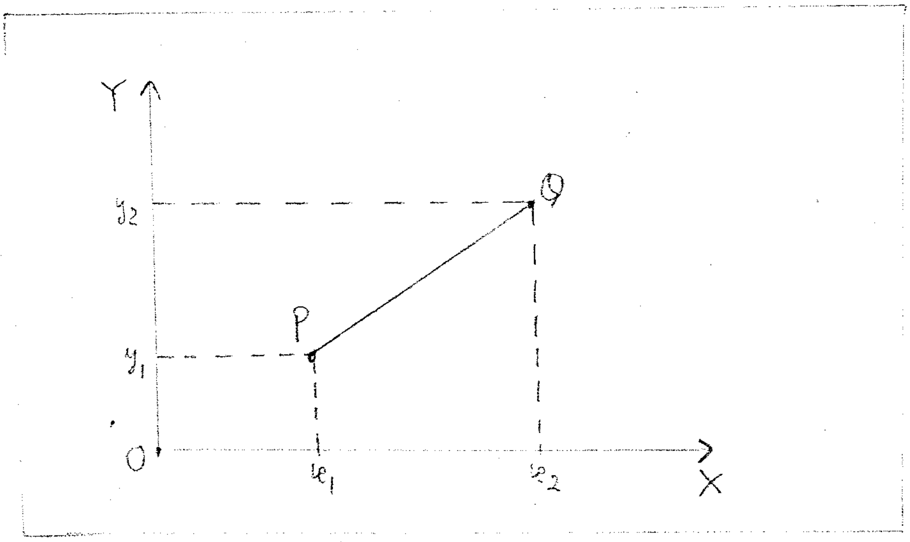
2.3. JARAK

Ada dua macam definisi jarak yang dipakai sebagai landasan teori dalam penyusunan Tugas Akhir ini, yaitu:

1. Jarak Euclidean

   Jarak Euclidean adalah jarak antara dua titik pengamatan.

   Suatu titik dalam ruang dua dimensi yaitu $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, maka jarak antara P dan Q dapat digambarkan seperti terlihat pada Gambar 4. berikut:



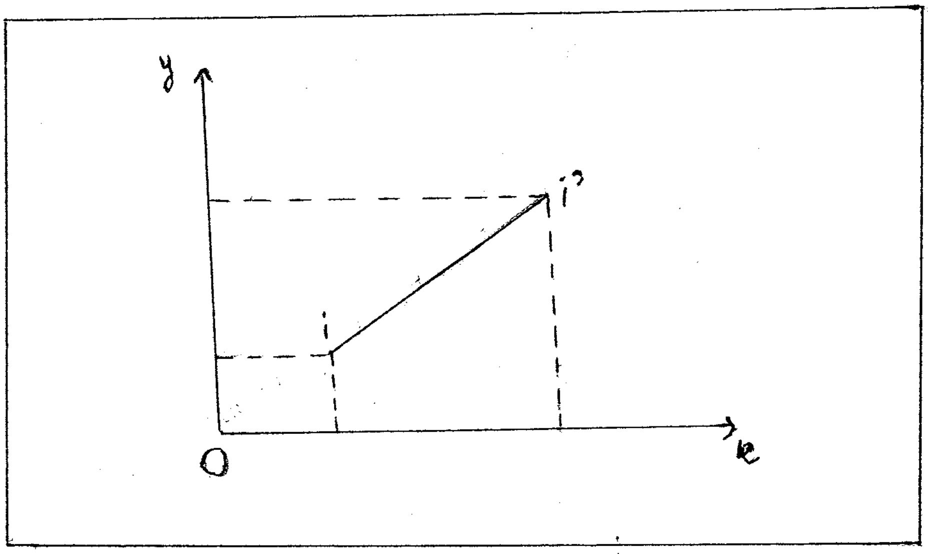
Gambar 4. Jarak titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $Q(x_2, y_2)$ dalam ruang Euclid

2. Jarak khi-kuadrat

Jarak khi-kuadrat adalah jarak antara dua titik pengamatan pula. Mengingat adanya fluktuasi acak, memberikan bobot pada tiap-tiap suku kuadratnya dengan kebalikan frekuensi masing-masing, maka jarak khi-kuadrat didasarkan pada sifat-sifat sebaran keserupaannya (ekivalen). Jarak antara dua titik ke-i dan ke-i' diberikan oleh:

$$d^2\,(i,i') = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{ij}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i.}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.}} \right)^2$$

Dapat digambarkan seperti pada gambar 5. berikut:



Gambar 5. Jarak antara titik i dan titik i' dalam suatu ruang tertentu

2.4. PENGALI LAGRANGE (MULTIPLIER LAGRANGE)

Pengali Lagrange digunakan untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi berkendala. Pandang suatu fungsi dalam bentuk matriks kuadratik **u'A u** yang dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{u'A\ u} = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_{ij}\ \mathbf{u}_i\ \mathbf{u}_j \text{ dan } \mathbf{u'A\ u} = \sum_i \sum_j \mathbf{m}_{ij}\ \mathbf{u}_i\ \mathbf{u}_j \quad \text{.....(2.11.)}$$

u adalah suatu vektor yang akan memaksimumkan bentuk kuadratik **u'A u** dengan kendala **u'M u** = 1. Matriks **A** dan **M** adalah suatu matriks yang sebangun, dengan ketentuan **M** adalah matriks definit positif. Bentuk turunan parsialnya ke **u** masing-masing adalah:

$$\frac{\partial\ (\mathbf{u'A\ u})}{\partial\ \mathbf{u}} = 2\ \mathbf{A\ u} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\ (\mathbf{u'M\ u})}{\partial\ \mathbf{u}} = 2\ \mathbf{M\ u} \quad \text{....(2.12.)}$$

Untuk persamaan fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$\zeta = \mathbf{u'A\ u} - \lambda\ (\mathbf{u'M\ u} - 1) \quad \text{.......................(2.13.)}$$

di mana λ adalah pengali Lagrange, untuk mendapatkan nilai λ maka turunan parsial persamaan (2.13.) disamakan dengan 0, didapat:

$$\frac{\partial\ \zeta}{\partial\ \mathbf{u}} = 2\ \mathbf{A\ u} - 2\ \lambda\ \mathbf{M\ u} = 0 \quad \text{....................(2.14.)}$$

$$\mathbf{A\ u} = \lambda\ \mathbf{M\ u} \quad \text{....................(2.15.)}$$

Matrik **M** adalah

Matriks **M** adalah positif definit karena itu non singular, bila persamaan (2.15.) dikalikan dengan $\mathbf{M}^{-1}$ didapat hubungan sebagai berikut:

$$\mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{A}\ \mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{M}\ \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{u} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.16.)$$

matriks **u** adalah vektor ciri dari matriks $\mathbf{M}^{-1}$ **A** yang mempunyai akar ciri padanan λ yang terbesar. Karena itu komponen $\mathbf{u}_1$ dari vetor ciri **u** yang mempunyai akar ciri padanan λ_1 yang terbesar, sehingga persamaan (2.15.) menjadi benar. Untuk menemukan komponen kedua yaitu $\mathbf{u}_2$ adalah berpadanan dengan λ terbesar kedua yaitu λ_2 dan seterusnya sampai dengan penemuan $\mathbf{u}_n$ yang berpadanan dengan λ_n.

2.5. SKALA PENGUKURAN

Suatu peubah dapat digolongkan menjadi empat skala pengukuran, yaitu nominal, ordinal, interval, dan nisbah (rasio).

1. Skala pengukuran nominal

   Skala pengukuran nominal adalah skala pengukuran yang tidak memberikan arti kuantitatif, dengan tujuan hanya membedakan saja. Skala pengukuran nominal mempunyai sifat-sifat:

   a. simetri yaitu bila A = B maka B = A

   b. transitif yaitu bila A = B dan B = C maka A = B

c. refleksif yaitu A = A.

contoh:

nama mahasiswa, nrp mahaisiswa dan lain-lain.

2. Skala pengukuran ordinal

Skala pengukuran ordinal adalah skala pengukuran yang memperhatikan urutan data tersebut dengan tujuan membedakan berdasarkan urutan atau tingkatan dari urutan kecil ke urutan yang lebih besar.

contoh:

dalam pendidikan SD < SMP < SMA < Perguruan Tinggi.

3. Skala pengukuran Interval

Skala pengukuran interal adalah skala pengukuran yang tidak mempunyai nilai 0 mutlak, dan mempunyai perbandingan yang sama pada suatu interval tertentu.

contoh:

Dalam pengukuran suhu, dipakai satuan derajat Celsius dan Fahrenhait (^oC, ^oF), dalam pengukuran satuan suhu 0^oC atau 0^oF ada nilainya atau dengan kata lain dapat diukur. Dalam satuan derajat Celcius dan Fahrenhait didapat interval suhu sebagai berikut:

0^oC 10^oC 30^oC 70^oC 100^oC

32^oC 50^oC 86^oC 122^oC 212^oC

Perbandingan antara selisih derajat Celcius dan Fahrenhait untuk suatu interval tertentu didapat hasil yang sama. Misal:

$$\frac{10 - 0}{30 - 10} = \frac{50 - 32}{86 - 50} = 0.5$$

4. Skala Pengukuran Nisbah (rasio)

Skala pengukuran nisbah adalah skala pengukuran yang mempunyai nilai 0 mutlak dan dapat dibagi.

contoh:

Dalam pengukuran berat suatu benda, digunakan satuan kg, poun dan lain-lain, sehingga 0 kg tidak dapat diukur atau dengan kata lain tidak ada nilainya.

BAB III

ANALISIS KOMPONEN UTAMA ("PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS")

Para ahli statistik klasik mempertimbangkan analisis komponen utama untuk menentukan sumbu mayor ellipsoid yang diperoleh dari suatu sampel berdistribusi normal multivariate. Sedangkan para ahli jiwa atau ("Psychometrician") mempertimbangkan analisis komponen utama sebagai suatu bentuk kusus dari analisis faktor, yang mana asumsinya meliputi keragaman kusus ("communalitas") dan keragaman galat ("error variance").

Analisis komponen utama diterapkan pada suatu data yang berdistribusi multivariate normal. Analisa data dapat dilakukan dengan membentuk data menjadi sebuah matriks segi empat panjang ("matrix rectangular"). Pada analisis komponen utama, lajur-lajur dari matriks rectangular menyatakan peubah-peubah misalnya pengukuran-pengukuran: anthropometri; skore-skore pengujian dalam ilmu jiwa; indikator-indikator ekonomi dan lain-lain. Sedangkan baris-barisnya menyatakan sampel atau pengamatan. Pada prinsipnya analisis komponen utama bertujuan untuk menjabarkan informasi dari data yang mana dalam analisisnya dilengkapi dengan gambar atau secara geometri untuk menerangkan informasi.

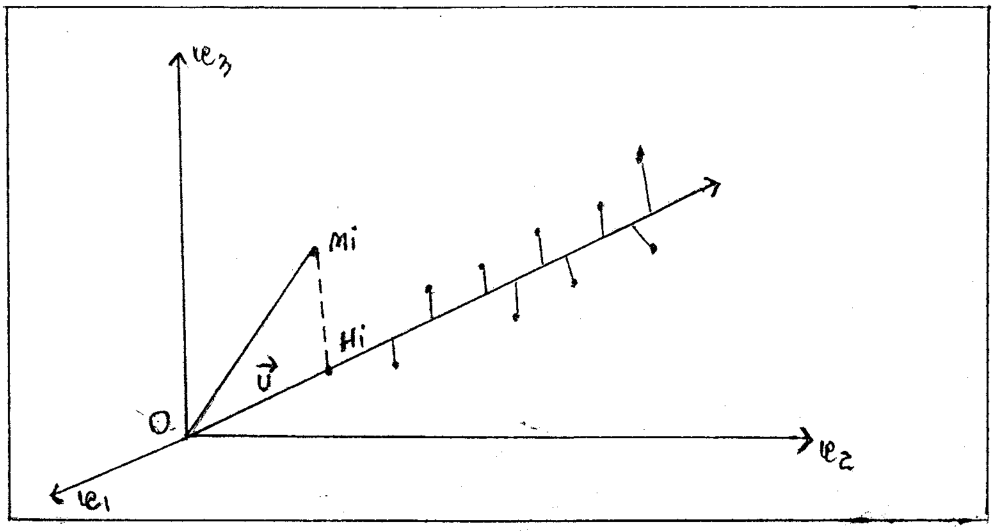
3.1. GEOMETRI DARI ANALISIS KOMPONEN UTAMA

$R_{(nxp)}$ menyatakan suatu matriks dengan n baris dan p kolom. Secara geometri dapat dianggap n nilai baris dalam suatu ruang dimensi p yang dinotasikan R^p dan p nilai kolom dalam suatu ruang dimensi n dinotasikan R^n. Dua pengamatan atau lebih dikatakan dekat atau saling tertutup dalam ruang R^p bila mempunyai sebaran peubah serupa dalam p peubah. Dan dua peubah atau lebih dikatakan dekat atau saling tertutup bila mempunyai sebaran pengamatan yang serupa. Dengan adanya dua atau lebih peubah atau pengamatan yang dekat atau saling tertutup, maka dengan demikian akan mereduksi mereduksi atau memyusutkan dimensi, sihingga didapatkan jarak yang tepat antar pengukuran atau pengamatan didalam matriks data asal.

3.1.1. Kecocokan titik-titik dalam ruang dimensi p (R^p)

Ambil matriks $X_{(nxp)}$ dengan n baris dan p kolom, masing-masing baris matriks X dapat dianggap sebagai suatu vektor dalam R^p. Peringkasan masalah dapat diselesaikan dengan menemukan suatu subruang q dimensi dari R^p di mana q lebih kecil p ($q<p$).

Diawali dengan menemukan sebuah vektor subruang satu dimensi yang didefinisikan oleh unit vektor $\vec{u}$. Dapat dijelaskan seperti dalam Gambar 6. berikut:



Gambar 6. Pendekatan vektor satuan u terhadap pengamatan

$\vec{u}$ merupakan sebuah vektor satuan proyeksi OH_i dari suatu vektor OM_i di atas subruang satu dimensi adalah produk skalar dari OM_i dan $\vec{u}$, dimana OM_i merupakan salah satu baris dari n baris matriks X. Matriks produk dari matriks X dan vektor $\vec{u}$ adalah suatu matriks kolom dengan n elemem masing-masing adalah produk skalar dari baris matriks X dan vektor $\vec{u}$.

Kriteria yang digunakan untuk kecocokan n titik-titik adalah metode klasik kuadrat terkecil yang layak untuk meminimumkan jumlah kuadrat jarak sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i H_i^{2} \qquad \text{..........................(3.1.)}$$

Dari gambar 6., pandang segitiga H_i O M_i dengan teorema Phytagoras dari sub bab (2.5.) didapatkan hubungan:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i H_i^2 = \sum_{i=1}^{n} O M_i^2 - \sum_{i=1}^{n} O H_i^2 \text{ .... (3.2.)}$$

Di mana $O M_i$ merupakan sisi miring dari segitiga H_i O M_i. $\sum_{i=1}^{n} O M_i^2$ adalah suatu karakteristik himpunan nilai-nilai, karena itu besarnya sudah tertentu. Sehingga agar persamaan (3.2.) minimum, maka harus memaksimumkan:

$$\sum_{i=1}^{n} O H_i^2 \text{ .... (3.3.)}$$

Persamaan (3.3.) merupakan produk skalar dari matriks **X** dan vektor **u** maka:

$$\sum_{i=1}^{n} O_i H_i^2 = (X u)' X u = u' X' X u \text{ .... (3.4.)}$$

Untuk menentukan u, maka harus memaksimumkan bentuk kuadratik $u' X' X u$ dengan kendala $u' u = 1$. Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\zeta = u' X' X u - \lambda (u' u - 1)$$

Untuk mendapatkan nilai u yang maksimum turunannya sama dengan 0. Dengan menggunakan landasan teori pada sub bab (2.4.) yaitu Pengali Lagrange didapat u_1 adalah vektor yang menyebabkan nilai maksimum dalam subruang satu dimensi. Bila dipakai subruang dua dimensi, maka ditemukan u_2 yaitu vektor kedua untuk subruang ini, dimana u_2 tegak lurus ("orthogonal") ke u_1 dan memaksimiumkan $u_2' X' X u_2$. Dengan cara serupa akan didapat vektor-vektor $u_1, u_2 ...... u_q$ untuk subruang q dimensi. $u_1, u_2 ..... u_q$ adalah merupakan vektor-vektor ciri yang saling tegak lurus dari matriks $X' X$ yang berpadanan dengan q akar ciri terbesar $\lambda_1, \lambda_2 ..... \lambda_q$, dimana $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_q$.

3.1.2. Kecocokan titik-titik dalam ruang dimensi n (R^n)

Dengan cara serupa dapat dijelaskan titik-titik yang cocok dalam R^n yaitu ditemukan suatu unit vektor **v**. Besaran yang dimaksimumkan adalah:

$$(X' V)' X' V = V' X X' V \quad ....(3.5.)$$

dengan kendala $V' V = 1$. V_α merupakan vektor ciri dari $X X'$ yang berpadanan dengan akar ciri μ_α. Sehingga dari ruang dimensi R^p dan R^n didapat persamaan ciri ("eigent") sebagai berikut:

$$X' X u_1 = \lambda_1 u_1 \quad ....(3.6.)$$

$$X X' v_1 = \mu_1 v_1 \quad ....(3.7.)$$

Bila persamaan (3.6.) dikalikan dengan **X**, maka didapat:

$$(X X') X u_1 = \lambda_1 (X u_1 .) \quad ....(3.8.)$$

Persamaan (3.8.) menyatakan bahwa setiap vektor ciri u_1 dari matriks $X' X$ yang berpadanan dengan akar ciri λ_1 yang tidak nol, ada sebuah vektor ciri $X u_1$ dari matriks $X X'$ yang berpadanan dengan akar ciri λ_1 yang sama. Dapat dikatakan lagi bahwa akar ciri μ_1 yang merupakan akar ciri terbesar dari $X X'$ yang berpadanan dengan $\lambda_1 \leq \mu_1$ adalah perlu kebenaran. Dengan cara serupa bila persamaan (3.7.) dikalikan dengan X', didapat bahwa $X' v_1$ adalah sebuah vektor ciri dari $X' X$ yang berpadanan dengan akar ciri μ_1 yang mana membatasi suatu hubungan $\mu_1 \le \lambda_1$, sehingga membuktikan bahwa $\lambda_1 \le \mu_1$.

Norm dari vektor $X u_\alpha$ adalah λ_α (itu berarti bahwa $u'_\alpha X' X u_\alpha = \lambda_\alpha$), agar ukurannya sama dengan 1, maka dibagi λ_α sehingga didapat :

$$\frac{u'_\alpha X' X u_\alpha = \lambda_\alpha}{\lambda_\alpha} \quad \text{dan} \quad \frac{u'_\alpha X' X u_\alpha}{\lambda_\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha}$$

$$\frac{u'_\alpha X'}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \; \frac{X u_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}} = 1$$

$$\frac{(X u_\alpha)'}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \; \frac{(X u_\alpha)}{\sqrt{\lambda_\alpha}} = 1$$

Karena itu vektor satuan v_α yng berpadanan dengan akar ciri λ_α yang sama adalah diberikan oleh hubungan (untuk $\lambda_\alpha \mp 0$):

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X u_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9.)$$

Dengan cara serupa didapat:

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X' v_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.10.)$$

Pada prisipnya u_α merupakan sumbu yang ke-α di dalam R^p dan v_α sumbu yang ke-α di dalam R^n.

3.2. PEMBENTUKAN KEMBALI DATA ASLI

Pandang u_α merupakan vektor ciri ke-α dari matriks $X' X$ yang mempunyai norm 1 dan berpadanan dengan akar ciri λ_α, dan v_α merupakan vektor ciri dari matriks $X X'$ dengan norm 1 dan berpadanan dengan akar ciri λ_α yang sama. Dari persamaan (3.9) :

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X u_\alpha$$

$$X u_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11.)$$

Bila persamaan (3.11.) dikalikan dengan u_α', dan keseluruhan sumbu dijumlahkan didapat:

$$X \sum_{\alpha=1}^{p} u_\alpha u_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{p} \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha u_\alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.12.)$$

u adalah suatu matriks dengan ordo p yang mempunyai lajur-lajur berupa vektor ciri-vektor ciri u_α dari matriks $X' X$ karena vektor-vektor saling tegak lurus ("orthogonal") dan mempunyai norm 1 maka $U' U = I$ (matriks identitas) dan karena itu $\mathbf{u}\,\mathbf{u}' = 1$, sehingga:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha' = \mathbf{U}\,\mathbf{U}' = \mathrm{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.13.)$$

Maka persamaan (3.12.) menjadi:

$$\mathbf{X} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sqrt{\lambda_\alpha}\, \mathbf{v}_\alpha \mathbf{u}_\alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.14.)$$

Persamaan (3.14) dapat dianggap sebagai formula untuk membentuk kembali matriks $\mathbf{X}$ di atas basis akar ciri λ_α yang berpadanan dengan vektor ciri $\mathbf{u}_\alpha$ dan $\mathbf{v}_\alpha$. Bila akar ciri (p-q) adalah kecil, maka persamaan (3.14.) dapat didekati dengan:

$$\mathbf{X} \cong \mathbf{X}^* = \sum_{\alpha=1}^{q} \sqrt{\lambda_\alpha}\, \mathbf{v}_\alpha \mathbf{u}_\alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.15.)$$

Untuk mengetahui seberapa besar keunggulan formula diatas, dapat dikoreksi dengan besaran:

$$\tau_q = \frac{\sum_{i,j} \mathbf{X}^{*2}_{ij}}{\sum_{i,j} \mathbf{X}^2_{ij}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.16.)$$

$$\tau_q = \frac{\mathrm{tr}\ \mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*}{\mathrm{tr}\ \mathbf{X}'\,\mathbf{X}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.17.)$$

Dengan memasukkan persamaan (3.14.) dan (3.15.) kedalam persamaan (3.17.), maka diperoleh:

$$\tau_\alpha = \frac{\sum_{\alpha \le q} \lambda_\alpha}{\sum_{\alpha = 1}^{p} \lambda_\alpha} \quad \text{..........................(3.18)}$$

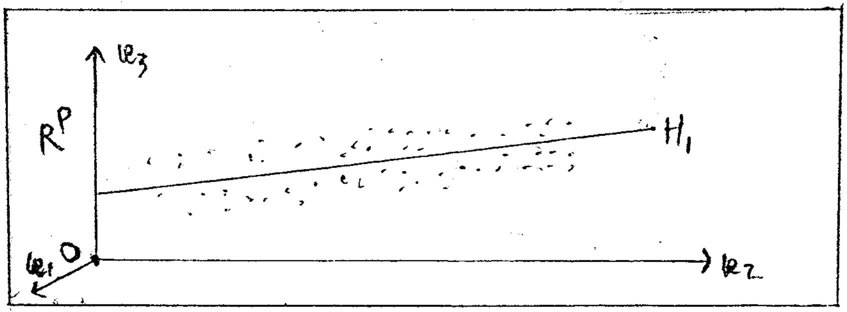
Besaran $\tau_\alpha \le 1$ disebut prosentase penyimpangan relatif untuk q faktor-faktor yang pertama.

3.3. PENERAPAN ANALISIS KOMPONEN UTAMA

Diperlihatkan lebih jelas penerapan analisis komponen utama untuk menyederhanakan himpunan-himpunan data yang besar. Pandang suatu matriks R dengan n baris dan p kolom.

3.3.1. Analisa dalam ruang dimensi p (R^p)

Dapat dijelaskan dengan mengeplot himpunan sebanyak n nilai pada satu dimensi atau dua dimensi pada suatu salib sumbu. Untuk mendapatkan jarak antara individu seteliti mungkin dalam p pengukuran , dengan memaksimumkan jumlah kuadrat proyeksi-proyeksi jarak nilai-nilai dari titik asli. Dapat digambarkan pada gambar 7. sebagai berikut:



Gambar 7. Pendekatan garis H_1 terhadap titik pengamatan

h_i dan h_j merupakan harga-harga proyeksi dari pengamatan ke-i dan ke-j pada H_1, maka persamaannya menjadi:

$$\sum_{i,j}^{n} (h_i - h_j)^2 = n \sum_i h_i^2 + n \sum_j h_j^2 - 2 (\Sigma h_i) (\Sigma h_j) \ldots\ldots (3.19.)$$

$$= 2 n^2 (\frac{1}{n} \Sigma h_i^2 - \bar{h}^2) = 2 n \Sigma (h_i - \bar{h})^2 \ldots\ldots\ldots (3.20.)$$

$\bar{h}$ adalah rata-rata nilai hitung dari proyeksi-proyeksi n pengukuran dan karena itu juga merupakan proyeksi dari titik pusat G pada H_1. Suatu titik dengan absis $\bar{h}$ pada H_1 adalah proyeksi titik G yang mempunyai koordinat yang ke-j adalah:

$$\bar{r}_j = \frac{1}{n} \sum_i r_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.21.)$$

Di mana r_{ij} merupakan nilai pengamatan ke-i dan ke-j. Penemuan titik pusat baru G, dengan tujuan memaksimumkan jumlah kuadrat jarak ke titik pusat. Jarak antara dua pengamatan k dan k' dalam R^p, di mana V r_k, $r_{k'}$, $\in$ R adalah:

$$d^2 (k,k') = \sum_{j=1}^{p} (r_{kj} - r_{k'j})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.22.)$$

Bila terdapat perbedaan pada unit pengukuran, maka digunakan analisis sumbu utama yang distandartkan dengan menggunakan ukuran jarak sebagai berikut:

$$d^2 (k,k') = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{r_{kj} - r_{k'j}}{s_j \sqrt{n}} \right)^2 \qquad (3.23.)$$

s_j adalah simpangan baku dari pengukuran ke-j, yaitu:

$$s_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (r_{ij} - \bar{r}_j) \qquad (3.24.)$$

Untuk memperoleh subruang dapat dilakukan dengan metransformasi data matriks asli ke sebuah matriks **X** dengan hubungan :

$$\mathbf{X}_{ij} = \frac{(r_{ij} - \bar{r}_j)}{s_j \sqrt{n}} \qquad (3.25.)$$

Sehingga analisis yang distandartkan dalam R^p dari baris data matriks R adalah juga analisis dari matriks **X**. Dalam ruang ini diagonal matriks adalah $c = \mathbf{X}' \mathbf{X}$ dan koefisien korelasi antara pengukuran j dan j' adalah:

$$c_{jj'} = \Sigma X_{ij} X_{ij'} \qquad (3.26.)$$

$$c_{jj}' = \frac{(1/n) \sum_i (r_{ij} - \bar{r}_j) (r_{ij}' - \bar{r}_j')}{s_j s_j'} \qquad (3.27.)$$

Koordinat-koordinat dari n titik pengamatan atas sumbu utama u_α adalah n komponen dari vektor $\hat{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{X}\, \mathbf{u}_\alpha$. Absis dari pengamatan ke-i pada sumbu ini secara jelas ditulis:

$$\hat{v}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{p} u_{\alpha j} X_{ij} = \sum_{j=1}^{p} u_{\alpha j} \frac{r_{ij} - r_j}{s_j \sqrt{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.28.)$$

3.3.2.. Analisa dalam ruang dimensi n (R^n)

Dalam analisis ruang dimensi n (R^n) tidak digunakan matriks **R** tetapi menggunakan matriks transformasi **X** seperti dalam persamaan (3.25.). Hal ini dengan tujuan:

1. Memperoleh kecocokan perhitungan jarak sebaik mungkin antara pengamatan.
2. Memberi bobot yang sama pada setiap pengukuran dalam penentuan jarak antara pengamatan.

Jarak Euclid antara dua pengamatan j dan j', dimana V x_j, x_j', $\in$ X adalah:

$$d^2 (j, j') = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - x_{ij}')^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.29.)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^{2}{}' - 2 \sum_{i=1}^{n} X_{ij} X_{ij} \quad \ldots\ldots (3.30.)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{s_j \sqrt{n}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{s_j \sqrt{n}}\right)'^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{s_j \sqrt{n}}\right)\left(\frac{r_{ij} - \bar{r}_{j'}}{s_j \sqrt{n}}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.31.)$$

Dengan memasukan nilai s_j :

$$s_j = \sqrt{s_j^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (r_{ij} - \bar{r}_j)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.31.)$$

Akan terlihat bahwa:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^{'2'} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.32.)$$

Ini berarti bahwa semua nilai peubah terletak dalam suatu lingkaran dengan jari-jari 1 mempunyai pusat pada sumbu asli. Dari persamaan (3.26.) dan (3.32.) didapat hubungan bahwa:

$$d^2 (j,j') = 1 + 1 - 2c_{jj}$$

$$d^2 (j,j') = 2 (1 - c_{jj}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.33.)$$

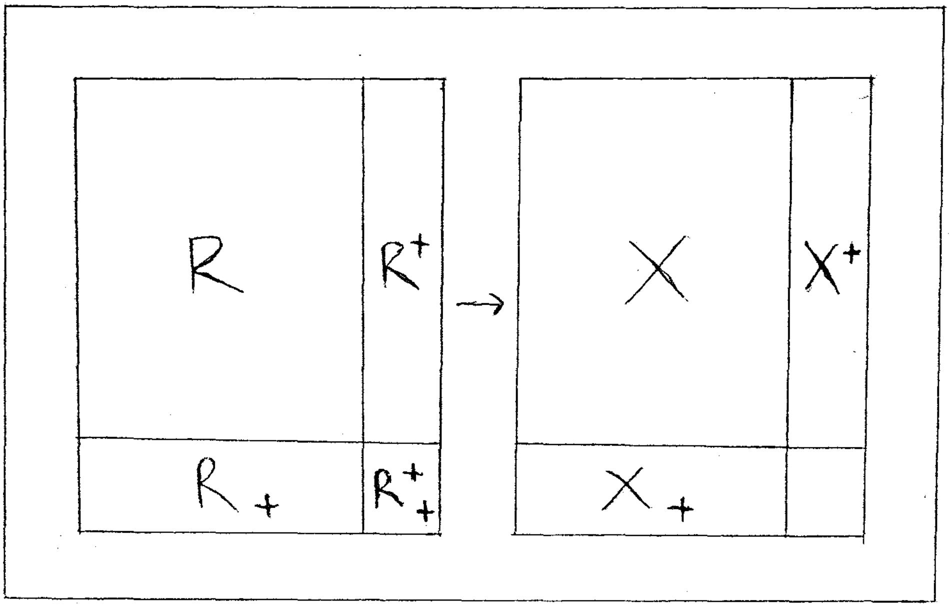
Jarak antara peubah-peubah mempunyai Karakteristik sebagai berikut:

1. dua peubah adalah mempunyai korelasi tinggi bila letak peubah satu dengan lainnya sangat berdekatan berarti $c_{jj'} \longrightarrow 1$ atau $c_{jj'} \longrightarrow -1$, tergantung pada hubungannya secara positif atau negatif.
2. dua peubah adalah saling tegak lurus ("orthogonal") atau tidak berkorelasi berarti $c_{jj'} \longrightarrow 0$, yaitu dua peubah tersebut mempunyai jarak yang tidak dekat.

Cosinus dari dua peubah vektor di dalam ruang dimensi R^n adalah merupakan koefisien korelasi antara dua peubah.

3.4. PEUBAH-PEUBAH PELENGKAP DAN PENGAMATAN-PENGAMATAN PELENGKAP

Pandang suatu matriks $R_{(nxp)}$, penambahan informasi dapat dilakukan dengan menambahkan sejumlah baris-baris (pengamatan) pelengkap dan lajur-lajur (pengukuran) pelengkap pada matriks R. Seperti terlihat pada gambar 8. berikut:



Gambar 8. Penggambaran baris-baris dan lajur-lajur pelengkap terhadap baris-baris dan lajur-lajur asal.

Penambahan sejumlah baris-baris dan lajur-lajur pelengkap bertujuan untuk memperjelaskan interpretasi, sehingga hasil yang didapat akan menjadi lebih terjamin validitasnya. Misal akan diteliti hubungan atau kecenderungan antara penghasilan masyarakat pada suatu daerah tertentu terhadap pola konsumsi makanan. Pada masalah ini dapat ditambahkan informasi pelengkap mengenai umur masyarakat tersebut, sehingga didapat hasil yang lebih baik.

Matriks R adalah suatu matriks korelasi dengan n baris dan p lajur.

Matriks R^{+} adalah suatu matriks dengan n baris dan p_s lajur pelengkap.

Matriks R_{+} adalah suatu matriks dengan n_s baris pelengkap p lajur.

Matriks R_{+}^{+} adalah suatu matriks dengan n_s baris pelengkap p_s lajur pelengkap.

Matriks-matriks R^{+} dan R_{+} ditransformasi ke dalam matriks-matriks X^{+} dan X_{+} untuk membuat baris-baris dan lajur-lajur yang sebanding ("comparable").

Dalam R^{n} ada p_s kolom pelengkap. Bentuk analisa sumbu utama yang dinormalkan adalah:

$$X_{ij}^{+} = \frac{r_{ij}^{+} - \bar{r}_{j}^{+}}{s_{j}^{+} \sqrt{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.34.)$$

Operator proyeksi pada sumbu α adalah unit vektor:

$$v_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} X\, u_{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.35.)$$

Absis dari p_s kolom pelengkap pada sumbu adalah p_s komponen dari vektor $X^{+'} v_{\alpha}$.

Dalam ruang dimensi p (R^p), dengan cara serupa didapat:

$$X_{+ij} = \frac{r_{+ij} - \bar{r}_j}{s_j \sqrt{n}} \quad \text{.......................(3.36.)}$$

Operator proyeksi pada sumbu α adalah unit vektor $\mathbf{u}_\alpha$. Absis dari n_s baris pelengkap adalah n_s komponen dari vektor $\mathbf{X}_+\mathbf{u}_\alpha$. Bila $\mathbf{X}_s$ adalah matriks $\begin{bmatrix} X \\ X_+ \end{bmatrix}$ maka produk skalar $\mathbf{X}_s\ \mathbf{u}_\alpha$ secara serentak menghasilkan ($n+n_s$) koordinat dari pengamatan-pengamatan asal dan pengamatan-pengamatan pelengkap. Peubah-peubah yang terlibat secara langsung sesuai dengan tujuan disebut "variabel active", sedang peubah-peubah pelengkap disebut "variabel illustratif". Baris-baris dan kolom-kolom pelengkap ditambahkan dengan tujuan memperjelas atau mempertegas tafsiran.

BAB IV

ANALISIS HUBUNGAN ("CORRESPONDENCE ANALYSIS")

Analisis hubungan adalah suatu metode yang digunakan untuk mereduksi dimensi peubah, serupa dengan tujuan analisis komponen pokok. Perbedaan dari kedua metode tersebut adalah bahwa analisis komponen pokok digunakan pada data dengan pengukuran kontinyu, sedang analisis hubungan lebih tepat digunakan pada tabel kontingensi ("kontingensi table").

Analisis hubungan banyak bekerja dengan aljabar-aljabar dan geometri-geometri dalam menjelaskan suatu himpunan data yang disajikan dalam bentuk matriks. Dapat dikatakan analisis hubungan sebagai penemuan terbaik yang menjelaskan secara serentak dari dua data himpunan lajur-lajur dan baris-baris dari sebuah matriks data.

4.1. GEOMETRI DARI BENTUK TITIK-TITIK DAN KRITERIA GOODNESS OF FIT

4.1.1. Bentuk kontruksi

Suatu matriks $K_{(nxp)}$ dengan n baris dan p lajur, k_{ij} menyatakan banyaknya frekuensi pengamatan ke-i dan lajur ke-j, untuk i=1,2,....n dan j=1,2,....p. Setiap baris diperlakukan sebagai satu titik dalam ruang dimensi p yang dilambangkan R^p. Demikian pula untuk lajur-lajur, suatu lajur diperlakukan sebagai satu titik dalam ruang dimensi n yang dilambangkan R^n. Jumlah seluruh lajur ke-j adalah:

$$K_{i.} = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.1.)$$

sehingga jumlah seluruh baris ke-i adalah:

$$K_{.j} = \sum_{j=1}^{p} k_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.2.)$$

Jumlah seluruh sampel adalah:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} K_{ij}$$

Ambil sebagai lajur yang ke-j dari baris-baris yang ke-i dalam ruang dimensi p (R^p) adalah:

$$\left[\frac{k_{ij}}{k_{i.}} \right] \quad \text{untuk semua } j=1,2,\ldots\ldots p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.4.)$$

dan baris yang ke-i dari lajur-lajur yang ke-j dalam ruang dimensi n (R^n) adalah:

$$\left[\frac{k_{ij}}{k_{.j}} \right] \quad \text{untuk semua } i=1,2,\ldots\ldots n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.5.)$$

Frekuensi relatif untuk masing-masing baris ke-i dan lajur ke-j adalah:

$$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{k} \quad \text{dimana} \quad \sum_i \sum_j f_{ij} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6.)$$

maka frekuensi relatif untuk masing-masing baris dan lajur:

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{p} f_{ij} = \frac{k_{i.}}{k} \quad \text{dimana} \quad \sum_{i=1}^{n} f_{i.} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.7.)$$

$$f_{.j} = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = \frac{k_{.j}}{k} \quad \text{dimana} \quad \sum_{j=1}^{p} f_{.j} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.8.)$$

Sehingga didapat hubungan sebagai berikut:

$$\frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{k_{ij}}{k_{.j}} \quad \text{dan} \quad \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{k_{ij}}{k_{i.}} \quad \text{untuk semua } i\&j \quad \ldots\ldots (4.9.)$$

4.1.2. Pemilihan jarak

Untuk tujuan memberi gambaran bentuk titik dengan hasil yang invarian, diambil sebuah definisi jarak yang berbeda dengan definisi jarak pada ruang euclic. Jarak antara dua baris i dan i' untuk $\forall\ f_i,\ f_{i'} \in F$ adalah diberikan oleh:

$$d^2(i,i') = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{.j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{.j}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'.}} \right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.10.)$$

Dan jarak antara dua kolom j dan j' untuk $\forall\ f_j,\ f_{j'} \in F$:

$$d^2 (j,j') = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_{i.}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{.j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{.j'}} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.11.)$$

Jarak-jarak yang didefinisikan diatas disebut jarak khi-kuadrat, jarak ini dalam kenyataannya berbeda dengan jarak euclic, yang mana dalam jarak khi-kuadrat pada setiap suku kuadratnya diboboti oleh kebalikan frekuensi masing-masing. Gagasan pengambilan jarak khi-kuadrat ini didasarkan pada sifat-sifat sebaran yang sederajat ("equivalenty distribusional"), yang dinyatakan sebagai berikut:

1. jika dua kolom memiliki profil sebaran yang serupa dihimpun bersama-sama maka jarak antara keduanya tidak berubah.
2. jika dua baris memiliki profil sebaran yang serupa dihimpun bersama-sama maka jarak antara keduanya tidak berubah.

Sifat-sifat tersebut menjamin hasil yang invarian dengan tidak mempedulikan peubah asalnya. Sehingga dapat dipertimbangkan dua titik yang saling menutupi sebagian ("overlapping") atau dekat dapat dianggap sebagai suatu titik tunggal, yang mana titik tunggal tersebut merupakan jumlahan dari dua titik yang overlapping tersebut. Dengan demikian akan menyusutkan dimensi peubah, tetapi tidak mengurangi informasi dari data asli.

Misalkan dua lajur ke-i_1 dan ke-i_2 digabung kedalam satu lajur menjadi lajur ke-io, yang mempunyai frekuensi relatif f_{io}, dan memenuhi hubungan sebagai berikut:

$$f_{io} = f_{i1} + f_{i2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.12.)$$

Jarak antara dua baris ke-j dan ke-j', yang dibatasi hanya untuk lajur i1 dan i2 dan masing-masing ditulis dengan T_1 dan T_2 adalah:

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{f_{i1.}}\left[\frac{f_{i1j}}{f_{.j}} - \frac{f_{i1j}}{f_{.j'}}\right]^2 + \frac{1}{f_{i2.}}\left[\frac{f_{i2j}}{f_{.j}} - \frac{f_{i2j'}}{f_{.j'}}\right]^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.13.)$$

Bila $T_1 + T_2$ dinotasikan dengan T_o maka didapat:

$$T_o = \frac{1}{f_{io.}} \quad \frac{f_{ioj}}{f_{.j}} - \frac{f_{ioj'}}{f_{.j'}} \quad {}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.14.)$$

Mengingat bahwa $T_o = T_1 + T_2$, maka:

$$T_o = f_{io.}\left[\frac{f_{ioj}}{f_{io.}\ f_{.j}} + \frac{f_{ioj'}}{f_{io.}\ f_{.j'}}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4.15.)$$

4.1.3. Prinsip dari sebaran ekivalen

Jika nilai dua baris menempati posisi-posisi yang identik dalam ruang multi dimensi, maka keduanya dapat disamakan (identik), tanpa merubah nilai dan jarak antar lajur-lajurnya. Jadi prinsip dari sebaran ekivalen "jika dua profil baris adalah identik maka hubungan dua baris dari data matriks dapat disamakan dalam satu nilai tunggal, yang mana tidak merubah geometri dari profil-profil lajur".

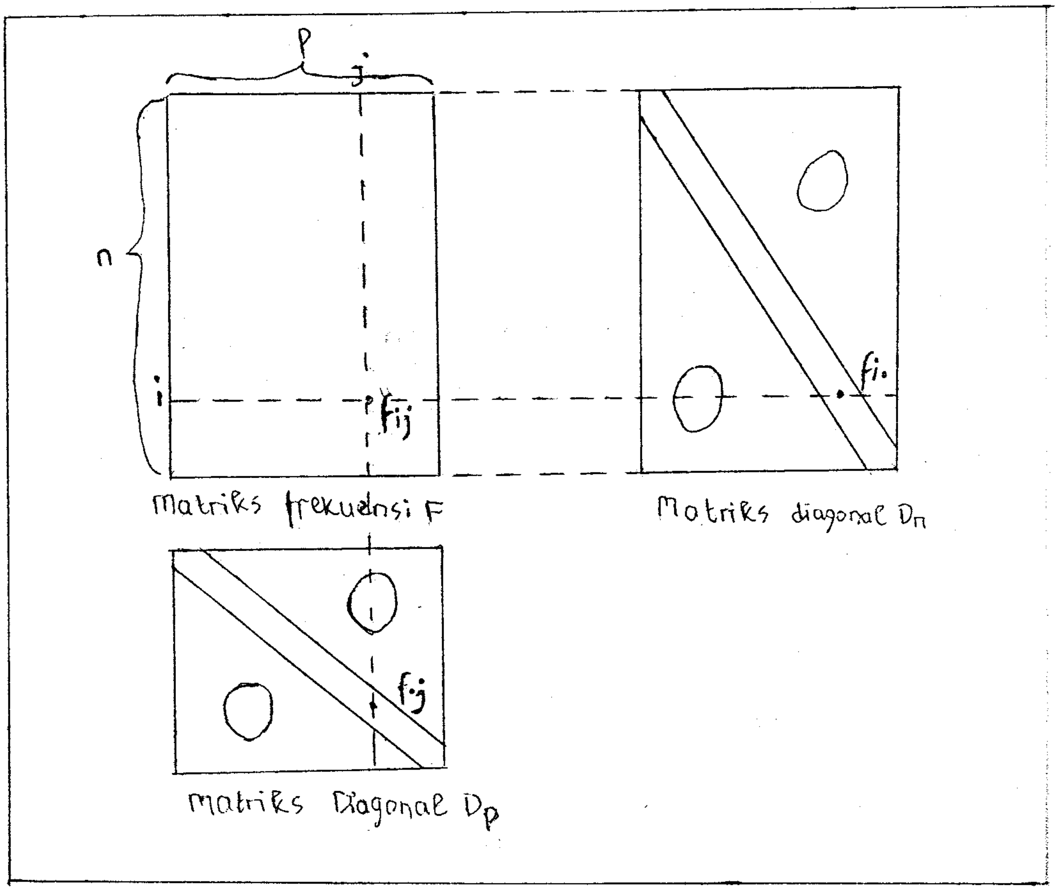
4.1.4. Memilih kriteri Goodness of fit

Didalam penyusunan bentuk dari titik dalam ruang dimensi n dan p (R^n & R^p), pemilihan profil-profil seperti koordinat-koordinat memberikan bobot secara sama pada setiap baris dan lajur. Dalam tingkatan menghitung goodness of fit, secara alamiah memberi setiap nilai suatu bobot yang proporsional pada frekuensinya, sehingga tidak terjadi penggambaran suatu kolom atau baris dengan jumlah yang terlalu kecil, dan sebaran populasi menjadi nyata. Bobot ini digunakan dalam penghitungan koordinat dari pusat gravity. Suatu titik i dalam ruang dimensi p (R^p) mempunyai bobot $f_{i.}$, sedangkan titik j dalam ruang dimensi n (R^n) mempunyai bobot $f_{.j}$.

Pandang suatu matriks **F**, dimana matriks **F** merupakan transformasi dari matriks **K** dengan hubungan sebagai berikut:

$$F = \frac{1}{k} K \quad \text{dimana } k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} k_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.16.)$$

Matriks diagonal D_p adalah suatu matriks berukuran (pxp), dimana elemen diagonal yang ke-j adalah $f_{.j}$. Matriks D_n adalah suatu matriks (nxn), dimana elemen diagonal yang ke-i adalah $f_{i.}$. Penggambaran matriks diagonal D_p dan D_n dapat terlihat pada gambar 9. berikut:



Gambar 9. Penggambaran matriks diagonal D_p dan D_n terhadap matriks F

4.2. PRINSIP SUMBU DAN KOORDINAT

Ada keserupaan lengkap antara indek i dan j. Dalam penjelasannya dibatasi satu ruang dimensi p (R^p), karena untuk ruang dimensi n (R^n) disimpulkan oleh pertukaran ("permutation") indek i dan j. Yaitu dengan transformasi matriks F dan penggantian matriks D_p dan D_n. Akan disajikan secara grafik jarak-jarak antara profil-profil baris dan lajur. Karena itu peletakannya pada kedua ruang, dengan pusat gravitasi dari konfigurasi titik-titik. Ini salah satu kelebihan Analisis Hubungan, yaitu kedua profil dapat ditampilkan secara serentak yang relatif ke pusat sumbu atau pusat grafitasi.

4.2.1. Analisa umum dengan jarak dan kriteria

Pandang suatu matriks data $X_{(nxp)}$, M adalah matriks definit positif yang mendefinisikan jarak-jarak dalam ruang dimensi p (R^p), dan $N_{(nxn)}$ adalah matriks diagonal yang mempunyai elemen-elemen diagonal adalah bobot-bobot dari n titik. Suatu unit vektor u dalam ruang dimensi p memenuhi persamaan $u' M u = 1$, n proyeksi pada sumbu u adalah n baris-baris dari $\hat{v} = X M u$. Pembobotan jumlah kuadrat dari proyeksi adalah $\hat{v}' N \hat{v} = u' M X' N X M u$

Persamaan tersebut diatas akan maksimum dengan kendala $u' M u = 1$. Dengan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\zeta = u' M X' N X M u - \lambda (u' M u - 1)$$

untuk mendapatkan nilai u, maka turunan persamaan di atas sama dengan 0:

$$\frac{\delta \zeta}{\delta u} = 2 M X' N X M u - 2 \lambda M u = 0$$

$$u (X'N X M - \lambda) = 0$$

Dari metode pengali Lagrange dinyatakan bahwa u adalah vektor ciri dari matriks $X' N X M$ yang berpadanan dengan akar ciri terbesar λ. Vektor u disebut prinsip sumbu dan memenuhi persamaan $\mathbf{X}'\mathbf{N}\,\mathbf{X}\,\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$.

Operator proyeksi atas sumbu $\mathbf{u}$, didefinisikan oleh $\varphi = \mathbf{M}\ \mathbf{u}$, kadang-kadang disebut faktor, yang memenuhi persamaan:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{X}'\mathbf{N}\,\mathbf{X}\,\varphi = \lambda\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.17.)$$

Faktor mempunyai norm 1, dan untuk jarak didefinisikan oleh $\mathbf{M}^{-1}$:

$$\varphi'\,\mathbf{M}^{-1}\,\varphi = \mathbf{u}'\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{M}\,\mathbf{u} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.18.)$$

4.2.2. Analisa dalam ruang dimensi p (R^p)

Pandang dalam ruang ini n baris-baris dari $D_n^{-1}F$ dan u merupakan vektor satuan untuk jarak dalam ruang dimensi p dengan kendala $\mathbf{u}'\mathbf{D}_p\ \mathbf{u} = 1$. Proyeksi n vektor pada sumbu u $\mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}$. Besaran yang dimaksimumkan adalah bobot jumlah kuadrat:

$$\hat{v}'\,D_n\,\hat{v} = u'\,D_p^{-1}\,F'\,D_n^{-1}\,F\,D_p^{-1}\,u \quad \text{dimana } u'D_p^{-1}\ u = 1$$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$$\zeta = u'\ D_p\ F'\ D_n^{-1}\ F\ D_p\ u - \lambda\ (u'\ D_p\ u - 1) = 0$$

Untuk mandapatkan nilai u, maka turunan dari persamaan di atas sama dengan 0:

$$\frac{\delta \zeta}{\delta u} = 2\, D_p^{-1}\, F'\, D_n^{-1}\, F\, D_p^{-1}\, u - 2\lambda\, D_p^{-1}\, u = 0$$

$$u\,(F'\, D_n^{-1}\, F\, D_p^{-1} - \lambda) = 0$$

Dengan metode fungsi berkendala oleh Lagrange didapat bahwa vektor u merupakan vektor ciri dari:

$$S = F' D_n^{-1}\, F\, D_p^{-1}$$

Yang berpadanan dengan akar karakteristik terbesar λ, sehingga $S\,u = \lambda\,u$, bentuk umum $s_{jj'}$ dari S adalah ditulis:

$$s_{jj'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}\; f_{ij'}}{f_{i.}\; f_{.j'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.19.)$$

Dalam ruang satu dimensi vektor u disebut sumbu utama yang pertama, vektor $\varphi = D_p^{-1}\, u$ disebut faktor yang pertama dimana φ adalah suatu vektor ciri dari matriks $A = D_p^{-1}\, F' D_n\, F$. Proyeksi-proyeksi dari n titik pada prinsip sumbu u adalah komponen-komponen dari:

$$D_n^{-1}\, F\, D_p^{-1}\, u = D_n^{-1} F\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.20.)$$

Jika u_α adalah vektor ciri dari matriks S yang berpadanan dengan akar ciri λ_α, maka u_α adalah prinsip sumbu yang ke-α maka $\varphi_\alpha = D_p^{-1}\, u_\alpha$ adalah faktor yang ke-α dan proyeksi dari n titik pada sumbu u_α adalah komponen-komponen dari $D_n^{-1}\, F\, \varphi_\alpha$.

4.2.3. Analisa dalam ruang dimensi n (R^n)

Dengan cara yang serupa dengan analisa dalam ruang dimensi p, maka dalam analisa ruang dimensi n, bobot jumlah kuadrat yang dimaksimumkan adalah:

$$\mathbf{v}'\mathbf{F}_n^{-1}\ \mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\ \mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{v} \text{ dengan kendala } \mathbf{v}'\mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{v} = 1 \quad \ldots\ldots(4.21.)$$

Persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut:

$$\zeta = \mathbf{v}'\ \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\ \mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{v} - \lambda\ (\mathbf{v}'\ \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{v} - 1)$$

Untuk mendapatkan nilai $\mathbf{v}$, maka persamaannya disamakan 0:

$$\frac{\delta\ \zeta}{\delta\ \mathbf{u}} = 2\ \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\ \mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{v} - 2\ \lambda\ \mathbf{D}_n^{-1}\ \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}\ (\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\ \mathbf{D}_n^{-1} - \lambda) = 0$$

Dengan metode fungsi berkendala oleh Lagrange $\mathbf{v}$ merupakan vektor ciri dari matriks $\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\mathbf{D}_n^{-1}$ yang berpadanan dengan nilai akar ciri terbesar λ. Kita tulis kembali persamaan $S\ \mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{u}$ berikut, dalam ruang dimensi n, $S = \mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\mathbf{D}_n^{-1}$ sehingga:

$$\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}\ \mathbf{F}'\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.22.)$$

Kedua ruas persamaan (4.22.) dikalikan dengan $\mathbf{F}\ \mathbf{D}_p^{-1}$ didapat:

$$F\ D_p^{-1}\ F'\ D_n^{-1}\ (\ F\ D_p^{-1}\ u\ )\ =\ \lambda\ (\ F\ D_p^{-1}\ u\ )\ ....(4.23.)$$

Seperti pada kasus jarak pada umumnya, itu kelihatan bahwa v proporsional ke $F\ D_p^{-1}\ u$. Norm dari $F\ D_p^{-1}$ sama dengan λ, dengan kendala $v'\ D_n\ v\ =\ 1$. Norm vektor $F\ D_p^{-1}\ u$ adalah sama dengan λ maka:

$$u'\ D_p^{-1}\ F'\ F\ D_p^{-1}\ u\ =\ \lambda\ =\ D_n^{-1}$$

Supaya panjangnya sama dengan satu, persamaan di atas dibagi dengan λ:

$$\frac{u'\ D_p^{-1}\ F'\ F\ D_p^{-1}\ u\ =\ \lambda}{\lambda}$$

$$\frac{u'\ D_p^{-1}\ F'\ F\ D_p^{-1}\ u}{\lambda} = 1$$

$$\frac{u'\ D_p^{-1}\ F'}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{F\ D_p^{-1}\ u}{\sqrt{\lambda}} =1 \quad \text{dan} \quad \frac{(F\ D_p^{-1}\ F)'}{\sqrt{\lambda}}\ \frac{(F\ D_p^{-1}\ u)}{\sqrt{\lambda}} = 1$$

Sehingga dapat ditentukan bahwa:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F D_p^{-1} u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.24.)$$

Dengan cara serupa dapat ditentukan:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F \quad D_n \quad v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.25.)$$

Koordinat-koordinat dari p peubah dalam sumbu **v** adalah komponen-komponen dari:

$$D_p^{-1} F' \; D_n^{-1} v = D_p^{-1} F' \psi \quad \text{dimana } \psi = D_n^{-1} v \ldots\ldots\ldots (4.26.)$$

ψ disebut faktor yang berpadanan dengan akar ciri λ, faktor tersebut adalah operator proyeksi pada sumbu **utama v**. Bila persamaan (4.20.), dan (4.24.), masuk dalam persamaan (4.26.) maka didapatkan hubungan sebagai berikut:

$$\psi = D_n^{-1} v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_n^{-1} F D_p^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_n^{-1} F \varphi \ldots\ldots (4.27.)$$

dengan cara serupa didapatkan hubungan:

$$\varphi = D_p^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_p^{-1} F' D_n^{-1} v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_p^{-1} F' \psi \ldots\ldots (4.28.)$$

Persamaan (4.27.) dan (4.28.) memperlihatkan bahwa koordinat-koordinat dari titik-titik pada sumbu utama dalam suatu ruang adalah proporsional ke komponen-komponen faktor dari ruang lainnya yang berpadanan ke akar ciri yang sama. Untuk suatu faktor ke-α didapatkan hubungan :

$$\psi_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_{n}^{-1} F \varphi_{\alpha} \quad \text{......................(4.29.)}$$

$$\varphi_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_{p}^{-1} F' \psi_{\alpha} \quad \text{......................(4.30.)}$$

$\hat{\psi}_{\alpha}$ dan $\hat{\varphi}_{\alpha}$ disebut vektor-vektor dari koordinat pada sumbu α, dengan hubungan sebagi berikut:

$$\hat{\varphi}_{\alpha} = \varphi_{\alpha} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \quad \text{......................(4.31.)}$$

$$\hat{\psi}_{\alpha} = \psi_{\alpha} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \quad \text{......................(4.32.)}$$

Persamaan (4.29.) dan (4.30.) merupakan persamaan-persamaan transisi, dapat ditulis secara jelas untuk koodinat-koordinat baris dan kolom sebagai berikut:

$$\hat{\psi}_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha}}} \sum_{j=1}^{p} \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \hat{\varphi}_{\alpha j} \quad \text{..................(4.33.)}$$

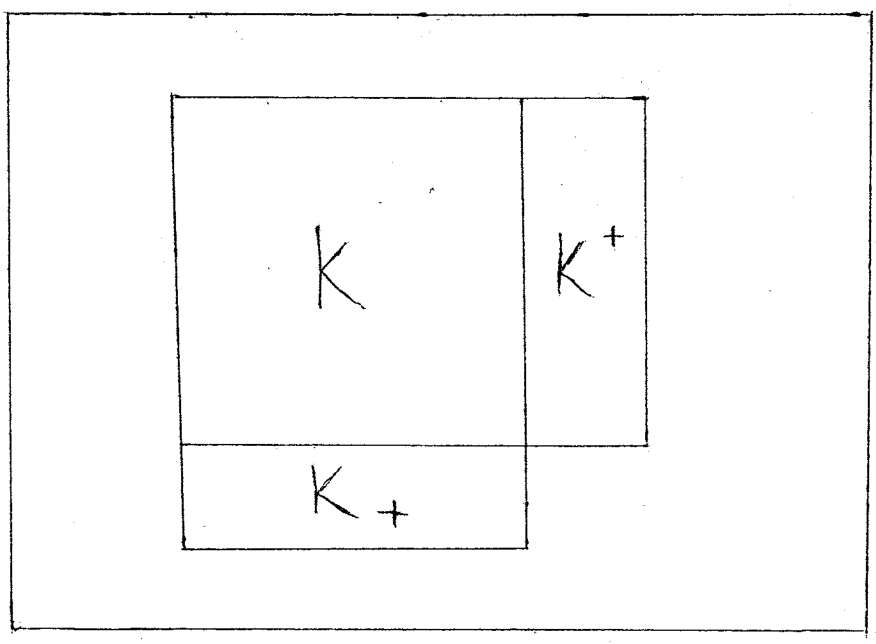
Dan untuk lajur ke j sebagi berikut:

$$\hat{\varphi}_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} \hat{\psi}_{\alpha i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.34.)$$

4.3. ELEMEN-ELEMEN PELENGKAP ("SUPPLEMENTARY ELEMENS")

Di sini tidak perlu dibedakan antara pengukuran pelengkap atau pengamatan pelengkap, karena baris-baris dan kolom-kolom dapat ditunjukan secara serentak.

Suatu matriks K dapat ditambah oleh p_s kolom-kolom pelengkap maupun n_s baris-baris pelengkap. Dapat dijelaskan melalui gambar 10. sebagai berikut:



Gambar 10. Penggambaran baris-baris dan lajur-lajur pelengkap terhadap matriks asal K.

Masalahnya bagaimana meletakan p_s kolom baru sebagai kolom pelengkap pada p kolom dalam ruang dimensi n. K^{+}_{ij} adalah merupakan koodinat yang ke-i dari kolom pelengkap ke-j. Profil dari elemen ini adalah suatu vektor yang mempunyai komponen ke-i sebagai berikut:

$$\frac{k_{ij}}{k^{+}_{.j}} \qquad \text{dengan } k^{+}_{.j} = \sum_{i=1}^{n} k^{+}_{ij}$$

Proyeksi titik j pada sumbu α dengan menggunakan formula transisi adalah:

$$\hat{\varphi}^{+}_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k^{+}_{ij}}{k^{+}_{.j}} \right) \hat{\psi}_{\alpha i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.36.)$$

Dengan cara serupa, maka untuk baris pelengkap ke-i adalah:

$$\hat{\psi}^{+}_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{k_{+ij}}{k_{+i.}} \right) \varphi_{\alpha j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.37.)$$

Pembentukan kembali data asli seperti pada metode analisis komponen utama, juga dapat diterapkan dalam analisis hubungan, dengan hasil sebagai berikut:

$$f_{ij} = f_{i.}\; f_{.j} \left(1 + \sum_{\alpha} \sqrt{\lambda_\alpha}\; \psi_{i\alpha}\, \varphi_{j\alpha} \right. \quad \ldots\ldots\ldots (4.38.)$$

Persamaan di atas disebut persamaan identifikasi Fisher's.

4.4. INTERPRETASI ATAU PENJELASAN SECARA SERENTAK

Pandang suatu matriks $K_{(nxp)}$ adalah suatu tabel silang dengan n baris dan p kolom. Akan dijelaskan pada sumbu yang sama, baris-baris dan lajur-lajur agar mendekati suatu keadaan ideal sebagai berkut:

1. Masing-masing nilai lajur j adalah suatu "barycenter" dari nilai-nilai baris, masing-masing baris i mempunyai bobot "bahwa bagian dari baris i adalah dalam profil lajur j", dengan kata lain bobotnya:

$$p_i = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} \quad \text{dengan kendala} \quad \sum_i p_i = 1 \ldots\ldots\ldots (4.39.)$$

2. Masing-masing nilai baris i adalah suatu "barycenter" dari nilai-nilai lajur, masing-masing lajur j mempunyai bobot "bahwa lajur j adalah dalam profil baris i", dengan kata lain bobotnya:

$$p'_j = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \quad \text{dengan kendala} \quad \sum_j p'_j = 1 \ldots\ldots\ldots (4.40.)$$

Situasi ideal ini biasanya tidak mungkin atau jarang terjadi, karena itu hal ini mengandung pengertian bahwa masing-masing himpunan secara keseluruhan dikandung dalam himpunan lainnya.

Jika φ_j adalah absis dari lajur ke j dalam sumbu atau dengan kata lain φ_j adalah komponen ke-j dari suatu vektor φ, dan jika ψ_i adalah absis dari baris ke i dalam sumbu yang sama, maka keadaan (1) dan (2) dapat ditulis secara berturut-turut sebagai berikut:

$$\varphi = D_p^{-1} F' \psi \quad \text{dan} \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} \psi_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.41.)$$

$$\psi = D_n^{-1} F \varphi \quad \text{dan} \quad \psi_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \varphi_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.42.)$$

Kedua persamaan diatas secara umum tidak mungkin diwujudkan secara serentak. Dengan menemukan koefisien β yang positif, dan setertutup mungkin ke 1 maka persamaan berikut menjadi benar:

$$\varphi = \beta\, D_p^{-1} F' \psi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.43.)$$

$$\psi = \beta\, D_n^{-1} F \varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.44.)$$

Nilai β adalah perlu lebih besar atau sama dengan 1, dipilih β yang terkecil agar kedua persamaan tersebut terpenuhi. Bila persamaan (4.43.) masuk dalam persamaan (4.44.), maka didapat:

$$\psi = \beta^2\ D_n^{-1}\ F\ D_p^{-1}\ F'\ \psi \qquad (4.45.)$$

Bila nilai $\lambda = \dfrac{1}{\beta^2}$ maka persamaannya menjadi:

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\ D_n^{-1}\ F\ D_p^{-1}\ F'\ \psi$$

$$\psi\ \lambda = D_n^{-1}\ F\ D_p^{-1}\ F'\ \psi$$

$$0 = \psi\ (D_n^{-1}\ F\ D_p\ F' - \lambda)$$

Dengan metode fungsi berkendala oleh Lagrange didapat bahwa ψ adalah merupakan vektor ciri dari matriks:

$$D_n^{-1}\ F\ D_p^{-1}\ F' \qquad (4.46.)$$

yang berpadanan dengan nilai akar ciri terbesar:

$$\lambda = \frac{1}{\beta^2} \qquad (4.46.)$$

Pesamaan (4.43.) dan (4.44.) dimana $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ adalah merupakan persamaan-persamaan (4.33.) dan (4.34.). Vektor-vektor ψ dan φ adalah faktor-faktor pertama yang menghubungkan ke masing-masing himpunan.

4.2. KONTRIBUSI ABSOLUT DAN KUADRAT CORELASI

Dalam susunan untuk menafsirkan sumbu, menggunakan perhitungan dua runtun ("series") dari koefisien-koefisien untuk masing-masing sumbu, dimana koefisien di sini adalah baris-baris dan lajur-lajur dari matriks data. Perhitungan-perhitungan tersebut adalah sebagai berikut:

1. kontrbusi mutlak, menunjukan proporsi keragaman an, yang dijelaskan oleh masing-masing peubah dalam hubungannya ke masing-masing prinsip sumbu, proporsi ini dihitung dengan memperhatikan seluruh himpunan dari peubah-peubah.

   norm dari sumbu u_α sama dengan 1, sehingga $u'_\alpha D_p^{-1} u_\alpha = 1$. Karena $u_\alpha = D_p \varphi_\alpha$, maka dari itu norm dari faktor φ_α adalah sama dengan 1, $\varphi'_\alpha D_p v_\alpha = 1$, ini adalah bahwa:

$$\sum_{j=1}^{p} f_{.j} \varphi^2_{\alpha j} = 1 \qquad \text{.......................(4.48.)}$$

   proyeksi dari titik j dari ruang dimensi n dalam sumbu α adalah sama dengan:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} \psi_{\alpha i} = \sqrt{\lambda_\alpha}\, \varphi_{\alpha j} = \hat{\varphi}_{\alpha j} \qquad \text{.........(4.49.)}$$

   Keragaman dari himpunan titik yang diproyeksikan pada sumbu α dengan memperhatikan "barycentre" G adalah:

$$\sum_{j} f_{.j}\, \hat{\varphi}^{2}_{\alpha j} = \sum_{j} f_{.j} \left(\sqrt{\lambda_{\alpha}}\, \varphi_{\alpha j} \right)^{2} = \lambda_{\alpha} \quad \ldots.(4.50.)$$

$$\frac{\lambda_{\alpha}\, \varphi^{2}_{\alpha j}\, f_{.j}}{\lambda_{\alpha}} = f_{.j}\, \varphi^{2}_{\alpha j} = ca_{\alpha(j)} \quad \ldots\ldots..(4.51.)$$

Persamaan di atas menjelaskan kontribusi mutlak dari elemen j ke sumbu utama α, dimana kendalanya:

$$\sum_{j=1}^{p} ca_{\alpha}(j) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.52.)$$

Dengan cara yang sama didefinisikan kontribuasi mutlak dari elemen i dalam ruang dimensi p adalah:

$$ca_{\alpha(i)} = f_{i.}\, \psi^{2}_{\alpha i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.53.)$$

dimana kendalanya $\sum_{i=1}^{n} ca(i) = 1$ ....(4.54.)

2. korelasi kuadrat, menunjukan bagian keragaman dari peubah yang dijelaskan oleh sumbu utama. Dalam ruang dimensi n jarak kuadrat dari peubah j ke "barycentre" G ("grafity") adalah sama dengan:

$$d^2\,(j,G) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{f_{i.}}\;\frac{f_{ij}}{f_{.j}} - f_{i.}\right]^2 \quad \ldots\ldots(4.55.)$$

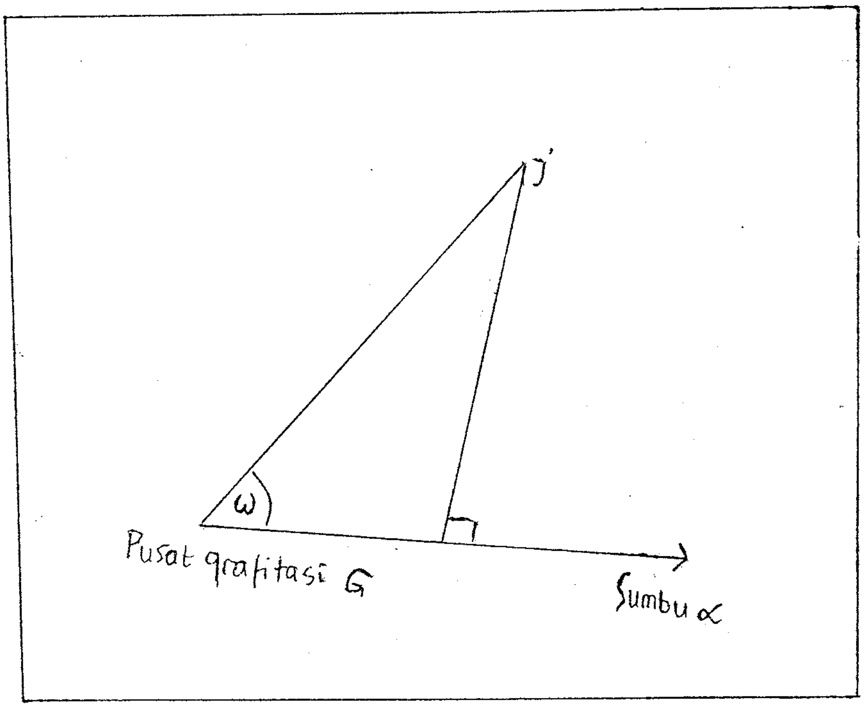
Poyeksi kuadrat dari peubah j pada sumbu α adalah sama dengan:

$$d^2\,(j,G) = (\sqrt{\lambda_\alpha}\;\varphi_{\alpha j}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.56.)$$

Dengan catatan bahwa:

$$d^2\,(j,G) = \sum_{\alpha} d^2_\alpha\,(j,G) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.57.)$$

Dapat dijelaskan melalui gambar 11 . berikut:



Gambar 11. Proyeksi antara titik j terhadap sumbu α dengan sudut ω

$$\cos^2\omega = \frac{d_\alpha^2\ (j,G)}{d^2\ (j,G)} = cr_{\alpha(j)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.58.)$$

persamaan tersebut menjelaskan bagian dari sumbu α dalam posisi titik j. Hal ini adalah korelasi kuadrat dari sumbu α dengan elemen j. Dengan kendala:

$$\sum_\alpha cr_{\alpha(j)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.59.)$$

Proyeksi p elemen pada sumbu α sama dengan:

$$\{ (\sqrt{\lambda_\alpha}\ \varphi_{\alpha j});\ \text{dimana } j=1,2,\ldots.p \} \ldots\ldots (4.60.)$$

Dengan cara yang sama proyeksi n elemen. pada sumbu α sama dengan:

$$\{ (\sqrt{\lambda_\alpha}\ \psi_{\alpha i});\ \text{dimana } i=1,2,\ldots.n \} \ldots\ldots (4.61.)$$

Koordinat-koordinat peubah j pada sumbu baru proporsional ke $u_{\alpha j} \sqrt{\lambda}$, dan mempunyai kutub:

$$\sum_j (u_{\alpha j} \sqrt{\lambda_\alpha})^2 = \lambda_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.62.)$$

dimana $u_{\alpha j}$ adalah tunggal. Angka 100 $u_{\alpha j}^2$ menjelaskan posentase penyimpangan dari sumbu α yang dijelaskan oleh peubah j (kontribusi mutlak).

Pada sisi lain, jarak dari suatu peubah ke titik pusat dalam ruang dimensi n adalah sama dengan 1.

Pada basis orthonor-mal dari sumbu utama:

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} u^{2}_{\alpha j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.63.)$$

Besaran $\lambda_{\alpha} u^{2}_{\alpha j}$ menjelaskan bagian dari total keragaman peubah j pada sumbu α.

Analisis hubungan dapat diperluas ke Analisis Hubungan-ganda, dengan matriks masukan data berupa tabel kontingensi Burt. Tabel kontingensi Burt merupakan perluasan dari tabel kontingensi dwi arah (tabulasi silang dua peubah kategori) ke tabel kontingensi multi arah.

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN PENELITIAN SEBAGAI CONTOH KASUS ("CASE STUDY")

Pembahasan penelitian dalam Tugas Akhir ini dianalisa dengan metode Analisis Hubungan, dengan program paket FORTRAN 77.

VI BAHAN PENELITIAN

Kasus dalam Tugas Akhir ini, penelitian dilakukan di PT. Trio Indah Sukses Malang dengan menggunakan data sekunder mulai bulan Januari 1988 sampai bulan Januari 1990, yaitu data mengenai sifat-sifat karakteristik pembeli dan sifat-sifat karakteristik tenaga pemasaran ("sales"). Adapun pembagian kategorinya sebagai berikut:

1. Barang yang terjual dikategorikan menjadi 11 kategori yaitu: mesin ketik; pompa air; televisi; tape recorder; meja tamu; meja belajar; mesin cuci; video; kompor gas; lemari es; dan mesin jahit.
2. Karakteristik pembeli dibagi menjadi dua yaitu pekerjaan pembeli dan tempat tinggal pembeli, masing-masing dikategorikan menjadi 5 dan 11 kategori sebagai berikut:

   Untuk pekerjaan pembeli: wiraswasta; pegawai swasta; pegawai negeri; petani; dan ABRI.

Untuk tempat tinggal pembeli: kecamatan Klojen; kecamatan Sukun; kecamatan Blimbing; kecamatan Batu; kecamatan Ngantang; kecamatan Gondang Legi; kecamatan Turen; kecamatan Singosari; kecamatan Dampit; kecamatan Lowok Waru; dan kecamatan Sumber Pucung.

3. Karakteristik tenaga pemasaran dikategorikan menjadi 4 kategori yaitu: SMA; SMEA; Sarjana Muda; dan Sarjana.

Hubungan-hubungan yang akan dianalisa adalah hubungan antara pendidikan sales dengan barang yang terjual; hubungan antara pekerjaan pembeli dengan barang yang terjual; dan hubungan antara tempat tinggal pembeli dengan barang yang terjual.

Data penelitian ini hanya merupakan contoh kasus dari metode Analisis Hubungan. Dan hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan suatu informasi bagi PT. Trio Indah Sukses di Malang. Dan informasi tersebut akan dijadikan sebagai salah satu bahan pertimbangan untuk menentukan kebijaksanaan-kebijaksanaan yang diambil, serta sebagai informasi awal untuk melakukan penelitian lebih lanjut.

V.II. HASIL DAN PEMBAHASAN.

V.2.1. Hubungan antara tempat tinggal pembeli dengan barang yang terjual.

Tabel 2, 3, dan 4 merupakan cuplikan dari keluaran cetak komputer hasil masukan data tabel kontingensi antara peubah tempat tinggal pembeli dan peubah barang yang terjual di PT. Trio Indah Sukses Malang. Tabel 2. berisikan akar ciri-akar ciri yang menerangkan keragaman atau variabilitas. Tabel 3. berisikan unsur-unsur kontribusi mutlak dan korelasi kuadrat bagi vektor peubah barang yang terjual dan peubah tempat tinggal pembeli terhadap enam faktor dominan. Enam faktor dominan tersebut menerangkan keragaman sebanyak:

	akar ciri	prosentase	prosentase kumulatif
1.	0.04388990	29.61%	29.61%
2.	0.02889439	19.49%	49.10%
3.	0.02473411	16.69%	65.79%
4.	0.02087287	14.08%	79.87%
5.	0.01431366	9.66%	89.53%
6.	0.00919692	6.20%	95.73%

Untuk profil-profil lajur faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh Tape Recorder, Meja Belajar, dan Mesin Jahit, masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 39.49%, 16,49%, 33,51% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 77%, 71%, dan 64%.
2. Faktor kedua dicirikan oleh Mesin Ketik dan Mesin Cuci masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 43.24%, 34.27% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 65% dan 60%.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh Pompa Air dengan kontribusi mutlak sebesar 37.10% dan korelasi kuadrat sebesar 65%.

4. Faktor keempat dicirikan oleh Video dan Lemari Es masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 19.82%, 32.12% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 46% dan 60%.
5. Faktor kelima sangat dicirikan oleh Kompor Gas dengan kontribusi mutlak sebesar 56.64% dan korelasi kuadrat sebesar 39%.
6. Faktor keenam dicirikan oleh Televisi dengan kontribusi mutlak sebesar 21% dan korelasi kuadrat sebesar 33%

Pada ruang yang lain (dualnya) seperti terlihat pada tabel 4. yang berisikan kontribusi mutlak dan korelasi kuadrat. Pada ruang ini yaitu profil-profil baris, faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh kecamatan Klojen, kecamatan Blimbing dan kecamatan Lowok Waru masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 38.08%, 17.39%, 11.75% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 65%, 48%, dan 62%.
2. Faktor edua dicirikan oleh kecamatan Batu, kecamatan Ngantang masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 35.71%, 35.71%, 38.68% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 55% dan 72%.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh kecamatan Sukun dan kecamatan Dampit dengan kontribusi mutlak masing-masing sebesar 22.99%, 26.13% dan korelasi kuadrat sebesar 42% dan 47%.
4. Faktor keempat dicirikan oleh kecamatan Sumber Pucung dengan kontribusi mutlak sebesar 41.26% dan korelasi kua-

drat sebesar 55%.

5. Faktor kelima kurang dicirikan oleh manapun.

6. Faktor keenam dicirikan oleh kecamatan Gondang Legi dengan kontribusi mutlak sebesar 53.56% dan korelasi kuadrat sebesar 43%

Gambar 1. pada lampiran menunjukan proyeksi profil-profil baris dan lajur pada faktor 1 dan faktor 2. Terlihat bahwa kecamatan Sukun dan kecamatan Dampit mempunyai sebaran yang sama dan sangat berlawanan dengan peubah kecamatan Batu. Kecamatan Blimbing dan kecamatan Klojen mempunyai sebaran yang serupa dan sangat berlawanan dengan kecamatan Lowok Waru. Sedangkan peubah Mesin Cuci dan Kompor Gas mempunyai sebaran yang serupa dan sangat berlawanan dengan peubah Mesin Ketik. Peubah Meja Belajar, kecamatan Singasari, dan kecamatan Turen sangat dekat ke pusat sumbu berarti mempunyai sebaran rata-rata bagi faktor 1 dan faktor 2.

Sedangkan gambar 2. pada lampiran menunjukan proyeksi profil-profil baris dan lajur pada sumbu 2 dan sumbu 3. Terlihat bahwa kecamatan Dampit, kecamatan Turen dan kecamatan Sumber Pucung mempunyai sebaran yang serupa dan sangat berlawanan dengan kecamatan Sukun. Kecamatan Lowok Waru dan kecamatan Klojen mempunyai sebaran yang sama dan bertentangan dengan kecamatan Ngantang.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

- Peubah Mesin Ketik cenderung dipasarkan di daerah kecamatan Ngantang.
- Tape Recorder cenderung terjual di daerah kecamatan Klojen.
- Kompor Gas cenderung terjual di daerah kecamatan Batu.
- Mesin Jahit cenderung terjual di daerah kecamatan Sukun.

V.2.2. Hubungan antara pekerjaan pembeli dengan barang yang terjual.

Tabel 6,7, dan 8 merupakan cuplikan dari keluaran cetak komputer hasil masukan data tabel kontingensi antara pekerjaan pembeli dan peubah barang yang terjual di PT. Trio Indah Sukses Malang. Tabel 6. berisikan akar ciri-akar ciri yang mnerangkan keragaman atau veriabilitas. Tabel 7. dan tabel 8. berisikan unsur-unsur kontribusi mutlak dan korelasi kuadrat terhadap empat faktor dominan. Empat faktor tersebut menerangkan keragaman sebesar:

	akar ciri	prosentasi	prosentasi kumulatif
1	0.02718784	49.75%	49.75%
2.	0.01271220	23.26%	73.01%
3.	0.01055564	19.31%	92.32%
4.	0.00419501	7.68%	100.00%

Untuk profil-profil lajur faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh Mesin Ketik, Kompor Gas dan Mesin Jahit dengan kontribusi mutlak sebesar 27.22%, 17.28%, 25.15% dan korelasi kuadrat masing-

masing sebesar 100%, 82%, 78% dan 86%.

2. Faktor kedua dicirikan oleh Pompa Air dan Tape Recorder masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 16.34%, 69.69% dan korelasi kuadart sebesar 46% dan 97%.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh Meja Tamu, Lemari Es masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 55.20%, 23.07% dan korelasi kuadart sebesar 73% dan 56%.
4. Faktor keempat dicirikan oleh Meja Belajar dan Mesin Cuci masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 23.57%, 23.11% dan korelasi kuadart 63% dan 72%.

Dalam ruang yang lain (dualnya) seperti terlihat pada tabel 8. berisikan unsur-unsur kontribusi mutlak dan korelasi kuadart. Pada ruang ini profil-profil baris, faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh wiraswasta, pegawai negeri dan petani masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 44.66%, 24.91%, 27.10% dan korelasi kuadart sebesar 93%, 63%, dan 52%.
2. Faktor kedua dicirikan oleh ABRI dengan kontribusi mutlak sebesar 32.04% dan korelasi kuadrat sebesar 52%.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh pegawai swasta dengan kontribusi mutlak sebesar 73.08% dan korelasi kuadrat sebesar 87%.

Gambar 3. yang mana menunjukan profil-profil baris dan lajur yang diproyeksikan pada sumbu 1 dan sumbu 2, terlihat bahwa Mesin Ketik dan Mesin Jahit mempunyai sebaran yang sama. Sedangkan pada gambar 4 yang merupakan proyeksi pada sumbu 2 dan sumbu 3, terlihat bahwa peubah Mesin Ketik terletak sangat dekat dengan pusat sumbu berarti mempunyai sebaran rata-rata bagi faktor 2 dan 3. Peubah Kompor Gas dan Lemari Es mempunyai sebaran yang sama dan sangat berlawanan dengan peubah Meja Tamu. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

- Pompa Air cenderung terjual pada pembeli dengan pekerjaan sebagai petani.
- Video cenderung terjual pada pembeli dengan pekerjaan sebagai pegawai negeri.
- Tape Recorder cenderung terjual pada pembeli dengan pekerjaan sebagai ABRI.

V.2.3. Hubungan antara pendidikan sales dan barang yang terjual.

Tabel 10, 11, dan 12 merupakan cuplikan dari keluaran cetak komputer hasil masukan data tabel kontingensi antara peubah pendidikan sales dan peubah barang yang terjualdi PT Trio Indah Sukses Malang. Tabel 10 berisikan akar ciri-akar ciri yang menerangkan keragaman atau variabilitas. Tabel 11 dan tabel 12 berisikan unsur-unsur kontribusi mutlak dan korelasi kuadrat terhadap tiga faktor dominan. Tiga faktor dominan tersebut menerangkan keragaman sebesar:

	akar ciri	prosentasi	prosentasi kumulatif
1.	0.02946120	53.73%	53.73%
2.	0.01468290	26.78%	80.51%
3.	0.01068737	19.49%	100.00%

Untuk profil-profil lajur faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh Televisi, Tape Recorder dan Meja Belajar, masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 12.22%, 17.70%, 47.58% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 100%, 72%, dan 86%.
2. Faktor kedua dicirikan oleh Mesin Ketik, Mesin Cuci, Kompor Gas dan Mesin Jahit masing-masing dengan kontribusi mutlak sebesar 13.08%, 8.46%, 29.13% dan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 74%, 86%, 91% dan 48%.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh Pompa Air, Meja Tamu, Video dengan kontribusi mutlak masing-masing sebesar 15.36%, 23.53%, 24.64% dengan korelasi kuadrat masing-masing sebesar 66%, 88%, dan 58%.

Pada ruang yang lain seperti terlihat pada tabel 12 berisikan unsur-unsur kontribusi mutlak dan korelasi kuadrat. Pada ruang ini profil-profil baris faktor-faktornya dicirikan oleh peubah-peubah berikut:

1. Faktor pertama dicirikan oleh SMEA, dan Sarjana Muda masing- masing dengan kontribusi mutlak sebesar 32.79%,

50.30% dan korelasi kuadrat sebesar 55% dan 69%.

2. Faktor kedua tidak dicirikan oleh peubah manapun.
3. Faktor ketiga dicirikan oleh SMA dan Sarjana dengan kontribusi mutlak sebesar 28.78%, 54.15%, serta korelasi kuadrat sebesar 75% dan 50%.

Gambar 5. pada lampiran menunjukan proyeksi profil-profil baris dan lajur pada sumbu 1 dan 2, terlihat bahwa Pompa air dan Video mempunyai sebaran yang serupa dan sangat berlawanan dengan Meja Belajar. Sarjana Muda mempunyai pengaruh yang kecil atau lemah terhadap penyusunan sumbu satu dan dua. SMA dan Lemari Es sangat dekat ke pusat sumbu, berarti mempunyai sebaran rata-rata bagi faktor 1 dan 2.

Sedangkan pada gambar 6. menunjukan proyeksi profil-profil baris dan lajur yang diproyeksikan pada sumbu 2 dan 3, terlihat bahwa Pompa Air dan Video mempunyai sebaran yang serupa. Televisi sangat dekat ke pusat sumbu berarti mempunyai sebaran rata-rata bagi faktor 2 dan 3. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

- Lemari Es cenderung terjual oleh sales dengan pendidikan SMA.
- Tape Recorder cenderung terjual oleh sales dengan pendidikan sarjana.
- Kompor Gas dan Mesin Jahit cenderung terjual oleh sales dengan pendidikan SMEA.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1. Kesimpulan

Dari hasil pengkajian buku yang telah dilakukan dalam menyusun Tugas Akhir ini, maka dapat disimpulkan :

1. Metode Analisis Hubungan bisa diterapkan pada tabel kontingensi dengan data berskala nominal, ordinal, atau interval di mana sebaran bersyarat tiap nilai peubah akan menghasilkan profil baris dan profil kolom dari peubah-peubah kategori.
2. Kelebihan Metode Analisis Hubungan dibandingkan metode Analisis komponen pokok adalah: dalam metode analisis hubungan profil-profil baris dan profil-profil kolom dapat ditampilkan secara serentak dalam salib sumbu relatif terhadap pusat sumbu atau pusat grafitasi.
3. Analisis Hubungan dapat diperluas ke Analisis Hubungan ganda dengan matriks data masukan berupa tabel kontingensi Burt. Tabel kontingensi Burt merupakan perluasan dari tabel kontingensi dwi arah (tabulasi silang dua peubah kategori).

6.2. Saran

1. Data dengan skala nominal atau ordinal banyak ditemui dalam ilmu-ilmu sosial yang penyajiannya berupa matriks

data berukuran besar, sehingga di dalam penelitian sosial selayaknya menggunakan metode Analisis Hubungan untuk menyusutkan dimensi peubah dan mencari pola kecenderungan antar peubah.

Tabel 1. Tabulasi silang antara tempat tinggal pembeli dengan barang yang terjual.

	VA1	VA2	V23	VA4	VA5	VA6	VA7	VA8	VA9	VA10	VA11
KLOJ*KLOJEN	9	3	41	35	6	19	12	5	7	13	1
SUKU*SUKUN	12	0	24	9	7	9	6	0	4	9	5
BLIM*BLIMBING	7	1	37	14	5	12	4	9	3	6	0
BATU*BATU	8	1	39	11	17	16	16	7	13	10	4
NGAN*NGANTANG	12	0	19	8	6	7	1	2	1	3	2
GOLE*GONDANG LE.	11	4	27	10	10	11	8	8	5	8	7
TURE*TUREN	6	3	23	6	8	6	4	4	4	8	1
SISA*SINGO SARI	5	2	13	5	5	4	3	4	2	4	0
DAMP*DAMPIT	10	5	24	11	9	11	1	3	7	10	0
LOWA*LOWOK WARU	2	1	6	2	5	6	3	1	2	2	2
SUPU*SUMBER PUC.	1	2	17	4	5	10	1	1	1	8	3

Tabel 2. Tabulasi silang antara pekerjaan pembeli dengan barang yang terjual.

	VA1	VA2	VA3	VA4	VA5	VA6	VA7	VA8	VA9	VA10	VA11
WIRA*WIRASWASTA	28	8	150	49	41	59	28	17	33	36	8
PSWA*PEG. SWASTA	17	3	50	27	25	20	13	9	6	11	5
PENE*PEG. NEGERI	20	3	39	24	11	23	12	9	6	20	6
TANI*PETANI	13	5	28	6	10	12	6	5	2	11	5
ABRI*ABRI	4	1	10	9	2	3	1	2	3	4	2

Tabel 3. Tabulasi silang antara pendidikan sales

dan barang yang terjual.

	va1	va2	va3	va4	va5	va6	va7	va8	va9	va10	va11
S.MA*SMA	52	15	179	75	42	72	41	34	30	59	15
SMEA*SMEA	7	1	20	6	9	14	7	3	8	8	7
SARJ*SARJANA	17	2	56	31	18	14	9	5	8	15	4
SARM*SARJANAMUDA	5	0	5	2	3	10	1	0	0	3	1

LAMPIRAN B

TUGAS AKHIR
ITS

Tabel 1. Akarciri dan Histogram untuk matriks hubungan tempat tinggal pembeli dengan barang yang terjual

JUMLAH AKARCIRI .14822780

HISTOGRAM AKARCIRI-AKARCIRI PERTAMA

	AKARCIRI	PERSEN	PERSEN KUM.	
1	.04388990	29.61	29.61	**
2	.02889439	19.49	49.10	***
3	.02473411	16.69	65.79	**
4	.02087287	14.08	79.87	**********************************
5	.01431366	9.66	89.53	***********************
6	.00919692	6.20	95.73	***************
7	.00454967	3.07	98.80	********
8	.00151867	1.02	99.83	***
9	.00022372	.15	99.98	*
10	.00003384	.02	100.00	*

Tabel 2, Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak

untuk barang yang terjual.

NAMA	MASSA	SEBAR.	KOORDINAT						KONTRIBUSI MUTLAK						KORELASI KUADRAT					
			F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
VA01	.088	.22	.05	.38	-.10	-.20	-.16	-.04	.56	43.24	3.35	16.58	14.94	1.78	.01	.65	.04	.18	.11	.01
VA02	.023	.58	.01	.03	.63	.23	-.13	-.35	.01	.06	37.10	5.96	2.67	30.27	.00	.00	.67	.09	.03	.20
VA03	.287	.02	-.06	.03	.02	-.04	.07	.08	2.68	.81	.56	2.00	10.32	21.00	.20	.04	.02	.07	.26	.33
VA04	.122	.19	-.38	-.01	-.16	.08	-.05	-.09	39.94	.03	12.41	4.04	1.76	11.36	.77	.00	.13	.04	.01	.05
VA05	.088	.12	.29	-.02	.11	-.05	-.08	.05	16.49	.16	4.05	1.07	4.32	2.41	.71	.00	.10	.02	.06	.02
VA06	.118	.05	.01	-.01	.00	.15	.08	.05	.02	.02	.01	12.19	5.12	2.71	.00	.00	.00	.45	.13	.04
VA07	.063	.26	.15	-.40	-.26	-.07	-.05	-.07	3.10	34.27	16.48	1.59	.90	3.10	.08	.60	.25	.02	.01	.02
VA08	.047	.31	-.11	-.16	.24	-.38	.23	-.14	1.21	4.30	10.55	32.12	17.99	9.94	.04	.09	.18	.46	.18	.06
VA09	.052	.19	.14	-.27	.05	-.03	-.27	.06	2.35	13.32	.45	.22	26.64	1.79	.11	.39	.01	.00	.39	.02
VA10	.086	.08	.03	.04	.11	.22	-.02	.04	.13	.56	3.90	19.82	.27	1.54	.01	.02	.14	.60	.01	.02
VA11	.027	.86	.74	.19	-.32	.19	.29	-.22	33.51	3.20	11.13	4.40	15.08	14.09	.64	.04	.12	.04	.09	.06

Tabel 3. Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak untuk

kecamatan tempat tinggal pembeli.

NAMA	MASSA	SEBAR.	KOORDINAT F1	F2	F3	F4	F5	F6	KONTRIBUSI MUTLAK F1	F2	F3	F4	F5	F6	KORELASI KUADRAT F1	F2	F3	F4	F5	F6
KLOJ*KLOJEN	.160	.16	-.32	-.10	-.15	.13	-.04	-.06	38.08	6.12	14.70	12.68	1.66	7.19	.65	.07	.14	.10	.01	.03
SUKU*SUKUN	.090	.15	.18	.19	-.25	.06	-.05	.06	6.49	11.29	22.99	1.70	1.87	3.20	.21	.24	.42	.03	.02	.02
BLIM*BLIMBIN	.104	.15	-.27	-.01	.06	-.17	.20	.08	17.39	.07	1.46	13.94	28.46	7.81	.48	.00	.02	.18	.26	.05
BATU*BATU	.151	.12	.18	-.26	-.06	-.08	-.05	.09	11.49	35.71	2.19	4.97	3.04	14.39	.27	.55	.03	.06	.02	.07
NGAN*NGANTAN	.065	.24	-.02	.42	-.15	-.18	-.02	.05	.04	38.68	6.11	9.50	.22	2.03	.00	.72	.10	.13	.00	.01
GOLE*GONDANG	.116	.10	.20	.02	.01	-.07	.10	-.21	10.26	.21	.03	2.46	7.73	53.56	.40	.01	.00	.05	.10	.43
TURE*TUREN	.077	.06	.04	-.01	.20	-.04	-.04	.03	.29	.01	12.77	.49	.86	.79	.03	.00	.67	.02	.03	.02
SISA*SINGO S	.050	.09	-.06	-.01	.20	-.18	-.05	-.08	.39	.03	8.04	7.34	.72	3.35	.04	.00	.42	.32	.02	.07
DAMP*DAMPIT	.097	.14	-.07	.12	.26	.08	-.21	.01	1.17	4.72	26.13	3.29	30.39	.06	.04	.10	.47	.05	.31	.00
LOWA*LOWOK W	.034	.25	.39	-.12	-.02	.12	.01	-.06	11.75	1.77	.07	2.35	.03	1.39	.62	.06	.00	.06	.00	.02
SUPU*SUMBER	.056	.28	.14	.08	.16	.39	.25	.10	2.66	1.40	5.52	41.26	25.03	6.24	.07	.03	.09	.55	.23	.04

Tabel 4. Akarciri dan Histogram untuk matriks hubungan pekerjaan pembeli dengan barang yang terjual.

JUMLAH AKARCIRI .05465069

HISTOGRAM AKARCIRI-AKARCIRI PERTAMA

	AKARCIRI	PERSEN	PERSEN KUM.	
1	.02718784	49.75	49.75	++
2	.01271220	23.26	73.01	+++++++++++++++++++++++++++++++++
3	.01055564	19.31	92.32	++++++++++++++++++++++++++++
4	.00419501	7.68	100.00	+++++++++++
5	.00000002	.00	100.00	+
6	.00000001	.00	100.00	+
7	.00000000	.00	100.00	+
8	.00000000	.00	100.00	+
9	-.00000001	.00	100.00	+
10	-.00000001	.00	100.00	+

Tabel 5. Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak untuk barang yang terjual.

AMA	MASSA	SEBAR.	KOORDINAT F1	F2	F3	F4	F5	F6	KONTRIBUSI MUTLAK F1	F2	F3	F4	F5	F6	KORELASI KUADRAT F1	F2	F3	F4	F5	F6
A01	.085	.09	-.29	.01	.00	.01	.00	.00	27.22	.06	.00	.22	27.96	9.11	1.00	.00	.00	.00	.00	.00
A02	.021	.22	-.26	.32	.06	-.22	.00	.00	5.14	16.34	.83	23.41	4.94	.04	.31	.46	.02	.21	.00	.00
A03	.289	.02	.13	.06	.00	-.02	.00	.00	17.28	6.97	.03	3.79	31.33	1.53	.82	.15	.00	.03	.00	.00
A04	.120	.08	-.03	-.27	-.02	-.03	.00	.00	.38	69.69	.70	2.58	2.43	.01	.01	.97	.01	.01	.00	.00
A05	.093	.07	.04	.05	-.25	-.02	.00	.00	.44	1.97	55.20	1.04	6.18	2.90	.02	.04	.93	.01	.00	.00
A06	.122	.01	.03	.05	.04	.09	.00	.00	.50	1.96	1.85	23.57	5.19	17.55	.09	.16	.12	.63	.00	.00
A07	.063	.02	-.01	.03	-.07	.12	.00	.00	.02	.35	3.05	23.11	13.70	5.27	.00	.03	.24	.72	.00	.00
A08	.044	.07	-.14	-.04	-.03	.02	.00	.00	2.99	.57	.27	.24	.01	2.95	.88	.08	.03	.01	.00	.00
A09	.052	.17	.36	-.06	.17	-.06	.00	.00	25.15	1.70	14.26	5.14	.01	7.78	.78	.02	.17	.02	.00	.00
A10	.085	.05	-.14	.02	.17	.04	.00	.00	6.40	.34	23.07	3.95	7.13	33.17	.40	.01	.56	.04	.00	.00
A11	.027	.17	-.38	.01	.05	-.14	.00	.00	14.48	.05	.74	12.94	1.11	19.71	.86	.00	.02	.12	.00	.00

Tabel 6. Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak

untuk pekerjaan pembeli.

MA	MASSA	SEBAR.	KOORDINAT						KONTRIBUSI MUTLAK						KORELASI KUADRAT					
			F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
RA+WIRASWA	.476	.03	.16	.03	.03	.00	.60	.31	44.66	2.93	4.75	.06	***********		.93	.03	.04	.00	13.14	3.54
WA+PEG. SW	.194	.05	-.04	-.06	-.20	.00	.60	.31	1.23	6.24	73.08	.08	***********		.04	.09	.87	.00	7.87	2.12
NE+PEG. NE	.180	.06	-.19	-.08	.08	.09	.60	.31	24.91	8.46	12.11	36.49	***********		.64	.10	.12	.14	6.08	1.64
NI+PETANI	.107	.13	-.26	.24	.01	-.07	.60	.31	27.10	50.33	.16	11.68	***********		.52	.45	.00	.03	2.70	.73
RI+ABRI	.043	.18	-.12	-.31	.16	-.23	.60	.31	2.10	32.04	9.90	51.68	***********		.07	.52	.13	.28	1.95	.53

Tabel 7. Akarciri dan Histogram untuk matriks hubungan pendidikan sales dengan barang yang terjual.

JUMLAH AKARCIRI .05483170

HISTOGRAM AKARCIRI-AKARCIRI PERTAMA

	AKARCIRI	PERSEN	PERSEN KUM.	
1	.02946120	53.73	53.73	+++
2	.01468290	26.78	80.51	+++++++++++++++++++++++++++++++++++
3	.01068737	19.49	100.00	++++++++++++++++++++++++++
4	.00000004	.00	100.00	+
5	.00000002	.00	100.00	+
6	.00000001	.00	100.00	+
7	.00000000	.00	100.00	+
8	.00000000	.00	100.00	+
9	-.00000001	.00	100.00	+
10	-.00000001	.00	100.00	+

Tabel 8. Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak

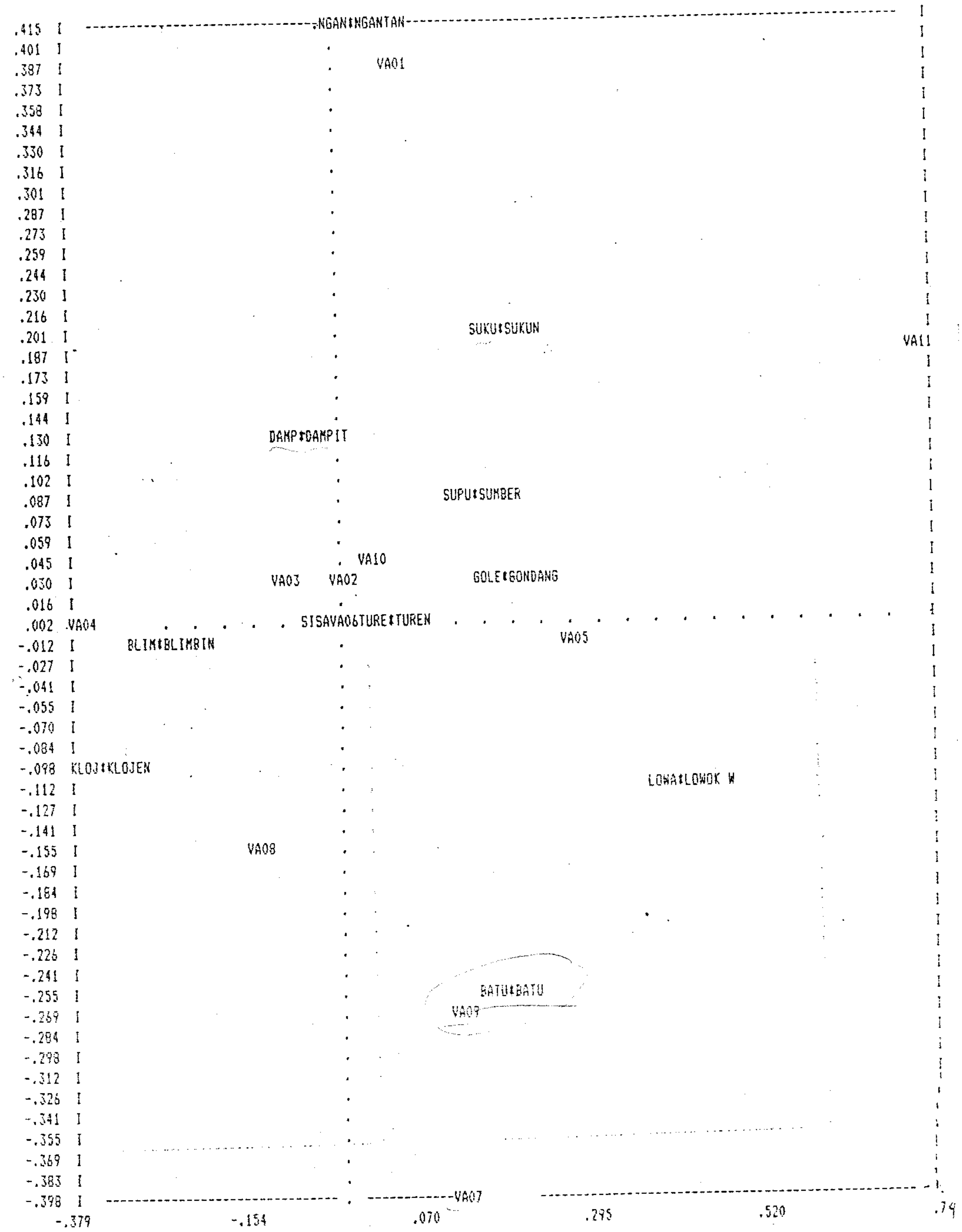
untuk barang yang terjual.

[illegible]	MASSA	SEBAR	KOORDINAT F1	F2	F3	F4	F5	F6	KONTRIBUSI MUTLAK F1	F2	F3	F4	F5	F6	KORELASI KUADRAT F1	F2	F3	F4	F5	F6
1	.089	.03	.09	.15	.02	.00	.00	.00	2.21	13.08	.20	4.13	28.89	.07	.25	.74	.01	.00	.00	.00
2	.020	.13	-.17	-.12	-.29	.00	.00	.00	1.93	1.98	15.36	1.39	2.52	6.54	.23	.12	.66	.00	.00	.00
3	.285	.01	-.11	.01	.00	.00	.00	.00	12.22	.09	.00	41.18	.18	.12	1.00	.00	.00	.00	.00	.00
4	.125	.06	-.20	.10	.08	.00	.00	.00	17.70	8.22	7.95	26.31	1.27	.14	.72	.17	.12	.00	.00	.00
5	.079	.04	.06	.03	.18	.00	.00	.00	.85	.56	23.53	24.41	2.24	4.92	.09	.03	.88	.00	.00	.00
6	.120	.14	.34	.11	-.09	.00	.00	.00	47.58	9.19	8.99	.08	.26	1.98	.86	.08	.06	.00	.00	.00
7	.064	.02	.01	-.14	-.06	.00	.00	.00	.01	8.46	1.82	.04	34.17	9.39	.00	.86	.14	.00	.00	.00
8	.046	.10	-.14	-.14	-.24	.00	.00	.00	3.18	6.55	24.64	1.04	4.65	.15	.21	.21	.58	.00	.00	.00
9	.050	.09	.03	-.29	.09	.00	.00	.00	.17	29.13	3.61	.98	13.50	22.65	.01	.91	.08	.00	.00	.00
[illegible]0	.093	.00	.01	.00	-.05	.00	.00	.00	.06	.00	2.49	.39	8.29	32.97	.06	.00	.94	.00	.00	.00
[illegible]1	.030	.29	.37	-.34	.20	.00	.00	.00	14.09	22.74	11.42	.04	4.02	21.07	.48	.38	.14	.00	.00	.00

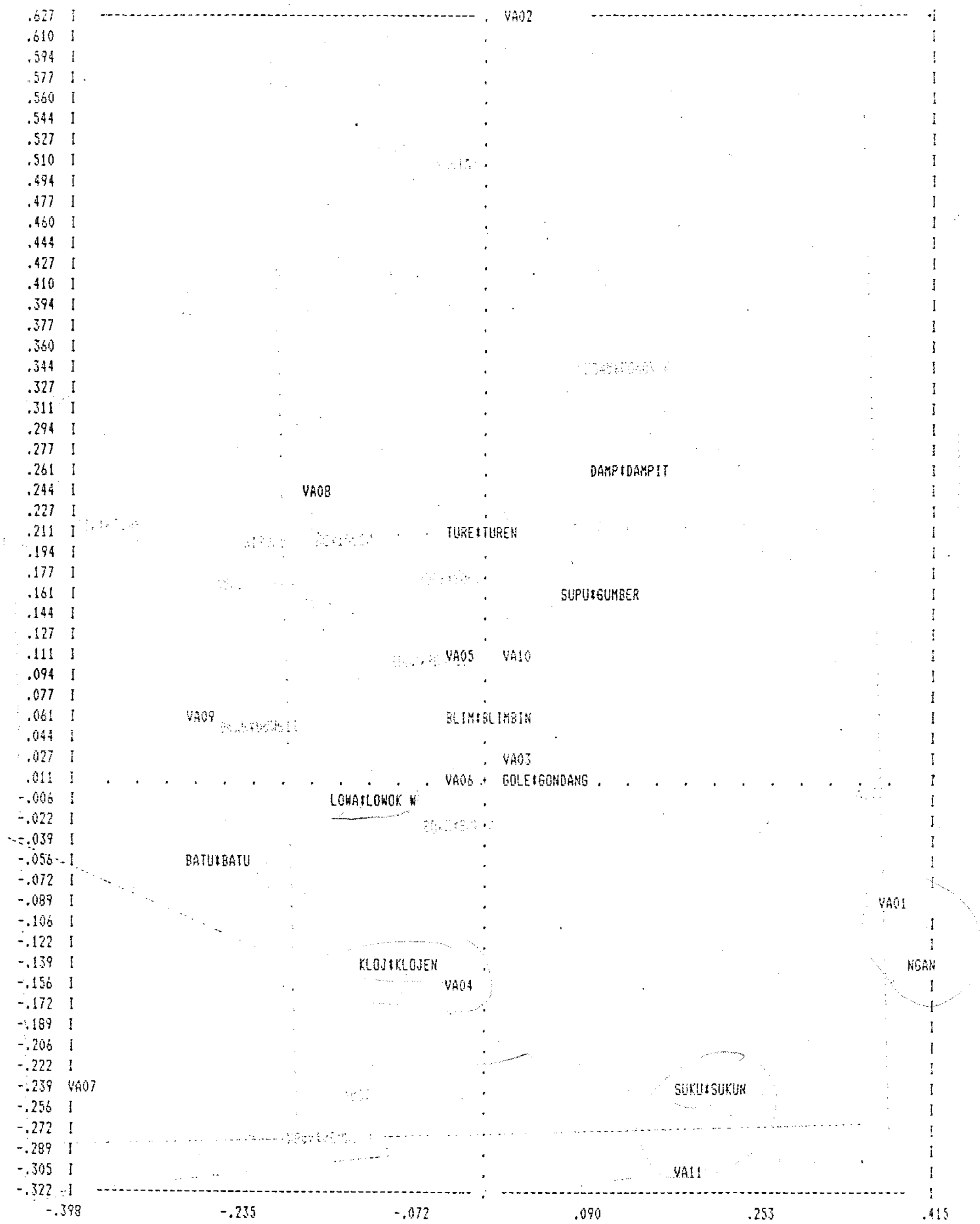
Tabel 9. Korelasi kuadrat dan kontribusi mutlak

untuk pendidikan sales.

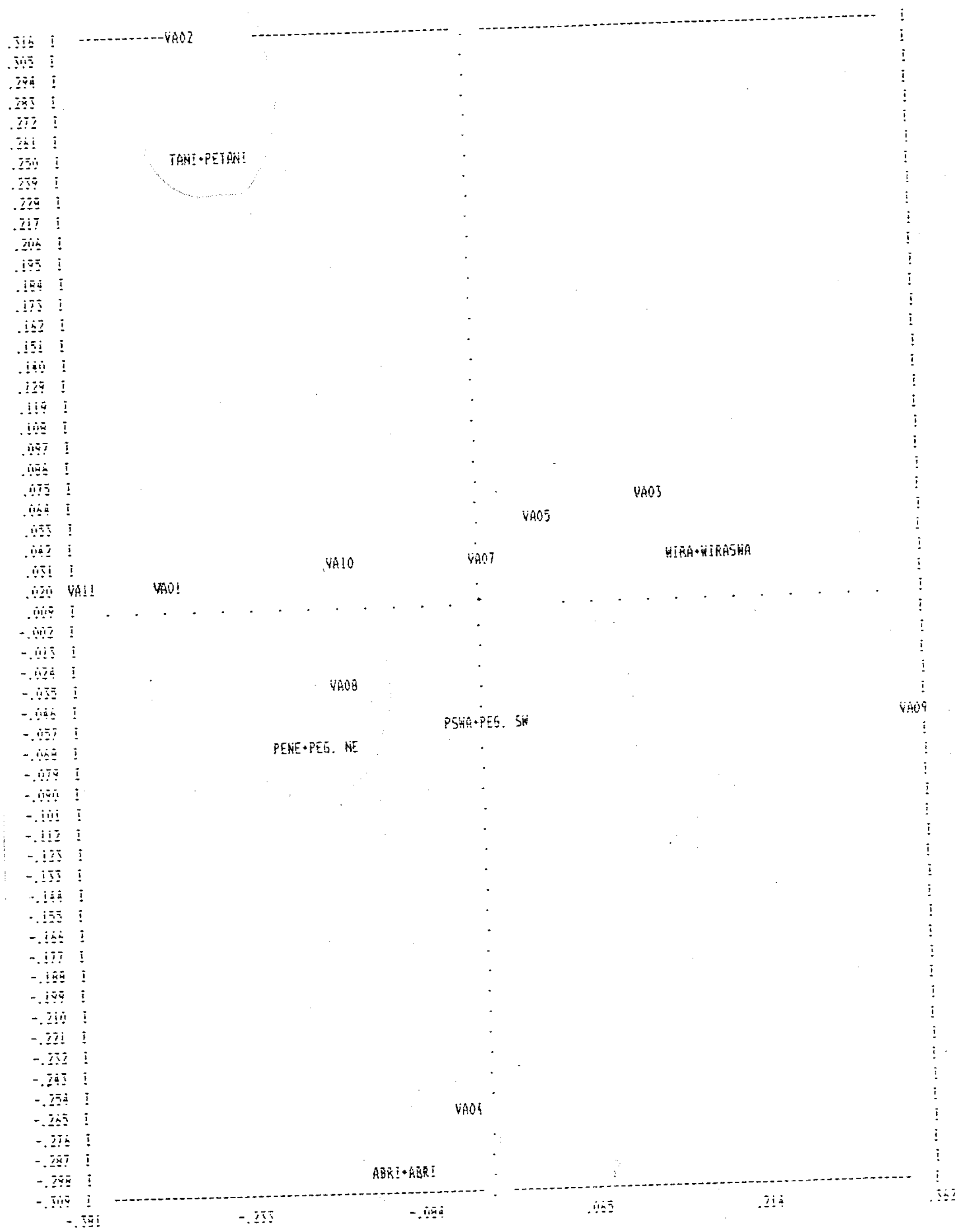
NA	MASSA	SEBAR.	KOORDINAT F1	F2	F3	F4	F5	F6	KONTRIBUSI MUTLAK F1	F2	F3	F4	F5	F6	KORELASI KUADRAT F1	F2	F3	F4	F5	F6
MA+SMA	.673	.01	-.04	-.01	-.07	-.34	-.29	.39	3.07	.91	28.78	+++++++++++++++			.22	.03	.75	18.84	13.66	24.50
EA+SMEA	.099	.18	.31	-.25	.13	-.34	-.29	.39	32.79	40.84	16.51	+++++++++++++++			.55	.34	.10	.65	.47	.85
RJ+SARJANA	.196	.06	-.14	.10	.17	-.34	-.29	.39	13.84	12.40	54.15	+++++++++++++++			.35	.16	.50	1.93	1.40	2.51
RM+SARJANA	.033	.66	.67	.45	-.04	-.34	-.29	.39	50.30	45.85	.56	+++++++++++++++			.69	.31	.00	.18	.13	.23



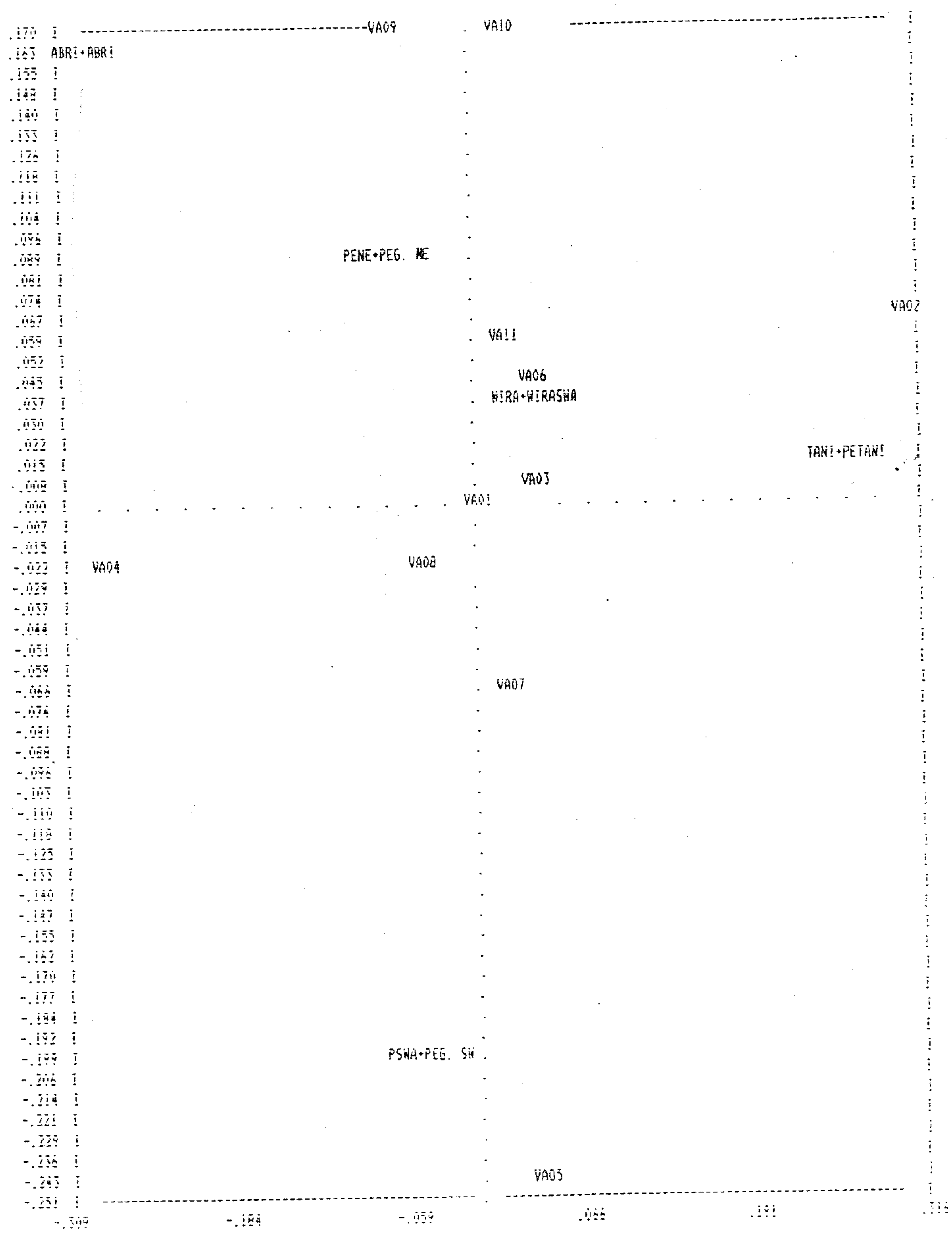
Gambar 1. Gambar semua unsur vektor kategori tempat tinggal pembeli dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor pertama dan kedua.



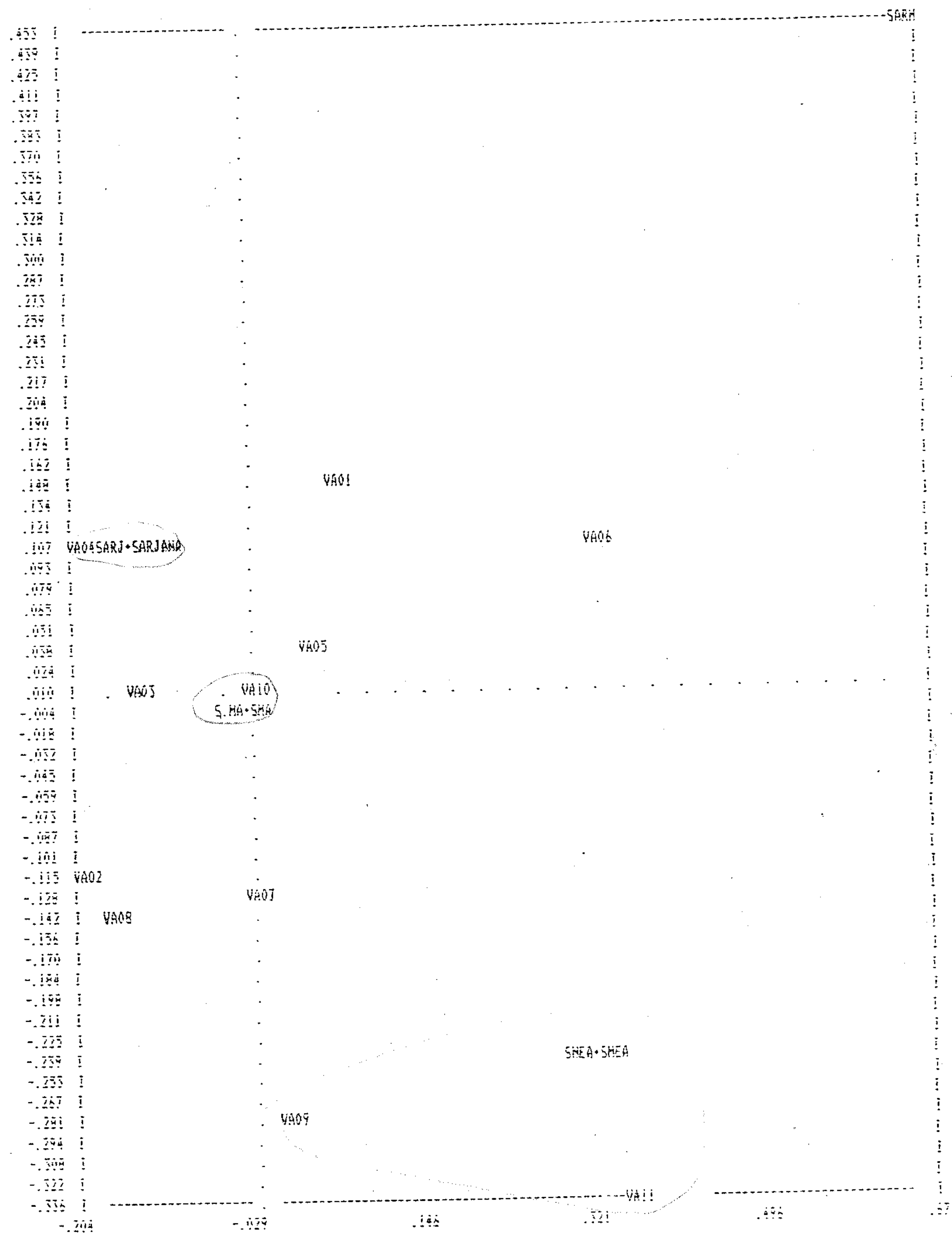
Gambar 2. Gambar semua unsur vektor kategori tempat tinggal pembeli dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor kedua dan ketiga.



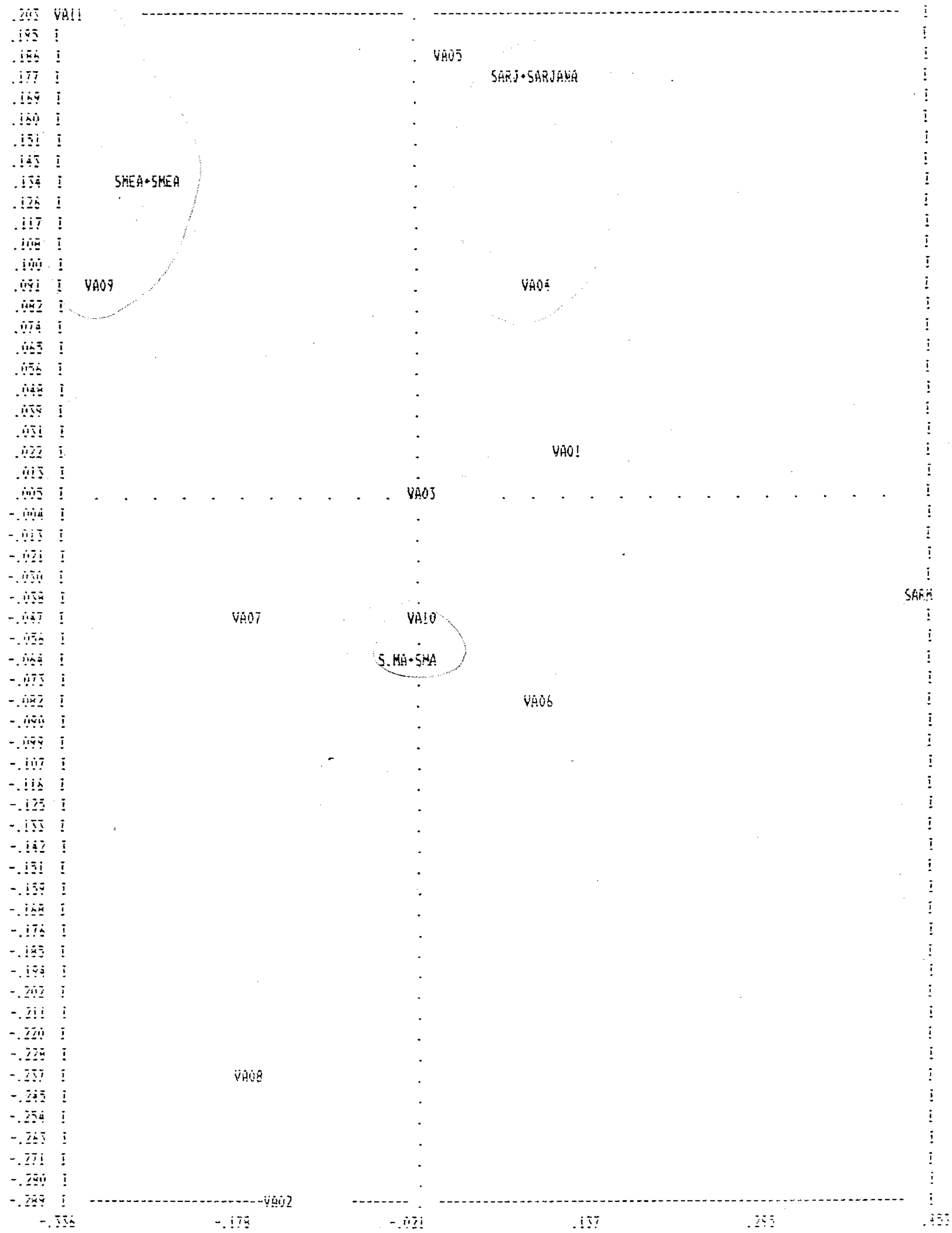
Gambar 3. Gambar semua unsur vektor kategori pekerjaan pembeli dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor pertama dan kedua.



Gambar 4. Gambar semua unsur vektor kategori pekerjaan pembeli dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor kedua dan ketiga.



Gambar 5. Gambar semua unsur vektor kategori pendidikan sales dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor pertama dan kedua.



Gambar 6. Gambar semua unsur vektor kategori pendidikan sales dan barang yang terjual dalam hubungan diproyeksikan pada faktor kedua dan ketiga.