TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG ULTRAMETRIK DISKRIT

Nama Mahasiswa	**: Wihdatul Ummah**
NRP	**: 1209 100 080**
Jurusan	**: Matematika**
Pembimbing	**: 1. Sunarsini, S. Si, M. Si**
	2. Drs. Sadjidon, M. Si

Abstrak

Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan ruang ultrametrik jika metrik d memiliki sifat ketaksamaan segitiga kuat; untuk $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. Jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong, maka ruang ultrametrik (X, d) disebut ruang ultrametrik bola lengkap. Dalam tugas akhir ini dikaji mengenai teorema titik tetap pemetaan di ruang ultrametrik bola lengkap khususnya pada ruang ultrametrik diskrit. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan satu-satu pada ruang ultrametrik itu ada dan tunggal.

Kata kunci: Titik Tetap, Bola Lengkap, Ruang Metrik, Ruang Ultrametrik

FIXED POINT THEOREM ON DISCRIT ULTRAMETRIC SPACE

Name	**: Wihdatul Ummah**
NRP	**: 1209 100 080**
Department	**: Matematika**
Supervisor	**: 1. Sunarsini, S. Si, M. Si**
	2. Drs. Sadjidon, M. Si

Abstract

A metric spaces (X, d) is called ultrametric space if the metric d satisfies a strong triangle inequality; $for\ x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq max\{d(x, z)\ , d(z, y)\}$.If every shrinking collection of balls in X has a non empty intersection, than an ultrametric space (X, d) is said spherically complete ultrametric space. In this final project has been studied about fixed point theorem for single map on discrit ultrametric space. This theorem suppose that fixed point from a single map is exist and unique.

Keywords: Fixed Point, Spherically Complete, Metric Space, ultrametric space

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^2$	: Himpunan pasangan terurut bilangan real 2 tupel
d	: Metrik
d_u	: Ultrametrik
(X, d)	: Ruang metrik
$(\mathbb{R}^2, d)$	: Ruang metrik $\mathbb{R}^2$
(X, d_u)	: Ruang ultrametrik
$(\mathbb{R}^2, d_u)$	: Ruang ultrametrik $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{A}$	: Himpunan semua bola
$\mathcal{B}$	: Himpunan bola

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan beberapa konsep atau teori dasar yang akan digunakan untuk mendapatkan titik tetap pada ruang ultrametrik. Konsep-konsep atau teori dasar tersebut antara lain pengertian ruang metrik, pengertian ruang ultrametrik, pengertian ruang ultrametrik bola lengkap, pengertian titik tetap secara umum serta pengertian *coincidentally commuting*.

2.1 Ruang Metrik

Sebelum membahas mengenai ruang ultrametrik, terlebih dahulu perlu dijelaskan mengenai pengertian ruang metrik.

Definisi 2.1 [4] *Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak sebagai fungsi bernilai real $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:*
Untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

(M1) $d(x,y) \geq 0$

$(M2)$ $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Jika d *metrik di* X, *maka pasangan* (X, d) *disebut ruang metrik.*

Contoh 2.2 [3] *Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ruang metrik terhadap ρ, dengan ρ: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah*

$$\rho(x,y) = |x - y|$$

untuk setiap $x,y \in \mathbb{R}$.

Bukti. Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(M1) Karena $|x - y| \geq 0$ maka $\rho\,(x,y) = |x - y| \geq 0$.

(M2) (⇒) Jika $\rho\ (x, y) = 0$ maka didapatkan $|x - y| = 0$.
Akibatnya $x - y = 0$, sehingga diperoleh $x = y$,
(⇐) Jika $x = y$ maka
$\rho\ (x, y) = |x - y| = |x - x| = |0| = 0$
sehingga diperoleh $\rho\ (x, y) = 0$.

(M3) $\rho(x, y) = |x - y|$
$= |-(x - y)|$
$= |y - x|$
$= \rho(y, x)$
maka diperoleh $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(M4) $\rho\ (x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$
$\leq |x - z| + |z - y|$
maka diperoleh $\rho\ (x, y) \leq \rho\ (x, z) + \rho\ (z, y)$.

Terbukti bahwa $\rho\ (x, y) = |x - y|$ adalah metrik, dan pasangan (X, ρ) adalah ruang metrik. ■

2.2 Ruang Ultrametrik

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 1.1, bahwa ruang ultrametrik adalah pengembangan dari konsep ruang metrik dimana ruang ultrametrik memiliki sifat ketaksamaan segitiga kuat. Sedangkan sifat-sifat lainnya dari ruang metrik terdapat pula pada ruang ultrametrik.

Definisi 2.3 [4] *Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan ultrametrik sebagai fungsi bernilai real* $d_u : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*
Untuk setiap $x, y, z \in X$ *berlaku:*

(UM1) $d_u(x, y) \geq 0$

$(UM2)$ $d_u(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(UM3) $d_u(x,y) = d_u\,(y,x)$

(UM4) $d_u(x,y) \leq d_u(x,z) + d_u(z,y)$

(UM5) $d_u(x,y) \leq \max\{\, d_u\,(x,z), d_u(z,y)\}$

Jika d_u *ultrametrik di X, maka pasangan* (X, d_u) *disebut ruang ultrametrik.*

Dari Definisi 2.3 dapat dilihat bahwa ruang ultrametrik adalah pengkhususan dari ruang metrik, dengan kata lain setiap ruang ultrametrik pasti ruang metrik, namun setiap ruang metrik belum tentu ruang ultrametrik.

Berikut ini diberikan contoh ruang metrik pada $\mathbb{R}^2$ yang bukan merupakan ruang ultrametrik karena tidak memenuhi sifat ketaksamaan segitiga kuat.

Contoh 2.4 *Misalkan* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. *Didefinisikan* $d\colon \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dengan*

$$d(x,y) = max\{|x_1 - y_1|\,, |x_2 - y_2|\}$$

maka $(\mathbb{R}^2, d)$ *merupakan ruang metrik dan bukan merupakan ruang ultrametrik.*

Bukti. Ambil sebarang $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(UM1) Karena $|x_1 - y_1| \geq 0$ dan $|x_2 - y_2| \geq 0$, maka

$$max\{|x_1 - y_1|\,, |x_2 - y_2|\} \geq 0.$$

Jadi terbukti bahwa $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$.

(UM2) ($\Rightarrow$) Jika $d(x,y) = 0$ maka

$$max\{|x_1 - y_1|\,, |x_2 - y_2|\} = 0$$

Sehingga didapat

$$|x_1 - y_1| = 0 \text{ dan } |x_2 - y_2| = 0.$$

dan diperoleh $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$.
Jadi didapatkan $x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $x = y$ maka $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$.
Akibatnya

$$\begin{aligned} d(x, y) &= max\{|x_1 - x_1|, |x_2 - x_2|\} \\ &= max\,\{0,0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi didapatkan $d(x, y) = 0$.

(UM3) Karena $|x_1 - y_1| = |-(x_1 - y_1)|$, maka

$$|x_1 - y_1| = |y_1 - x_1|$$

dan karena $|x_2 - y_2| = |-(x_2 - y_2)|$, maka

$$|x_1 - y_1| = |y_2 - x_2|.$$

Sehingga didapat

$$max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = max\{|y_1 - x_1|, |y - x_2|\}.$$

Jadi $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$.

(UM4) Diambil $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, sedemikian hingga

$$\begin{aligned} d(x, y) &= max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \\ &= max\,\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, \\ &\quad |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\le max\,\{(|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|), \\
&\quad (|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \\
&\le max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \\
&\quad max\,\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\} \\
&\le d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

(UM5) Diambil $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, sedemikian hingga

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|\,, |x_2 - y_2| \\
&= max\,\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, \\
&\quad |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \\
&\le max\,\{(|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|), \\
&\quad (|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \\
&\le max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \\
&\quad max\,\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\}.
\end{aligned}
$$

Karena $max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\}$ dan $max\,\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\}$ belum diketahui, maka dibagi empat kasus sebagai berikut

(i) Jika $|x_1 - z_1| < |x_2 - z_2|$ dan $|z_1 - y_1| < |z_2 - y_2|$ maka

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\le |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\
&= |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\
&= |x_2 - y_2|
\end{aligned}
$$

(ii) Jika $|x_1 - z_1| < |x_2 - z_2|$ dan $|z_1 - y_1| > |z_2 - y_2|$ maka

$$d(x,y) \le |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1|$$

(iii) Jika $|x_1 - z_1| > |x_2 - z_2|$ dan $|z_1 - y_1| < |z_2 - y_2|$ maka

$$d(x,y) \leq |x_1 - z_1| + |z_2 - y_2|$$

(iv) Jika $|x_1 - z_1| > |x_2 - z_2|$ dan $|z_1 - y_1| > |z_2 - y_2|$ maka

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| \\ &= |x_1 - y_1| \end{aligned}$$

Sehingga, dari keempat kasus di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq\ & max\{\, |x_2 - y_2|, |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1|, \\ & |x_1 - z_1| + |z_2 - y_2|, |x_1 - y_1|\} \\ \leq\ & max\{\, |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \\ & max\{\, |x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} + \\ & max\,\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\}\} \end{aligned}$$

Karena $d(x,y) \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq max\ \{max\{\, |x_1 - z_1|, |x_2 - z_2| \\ &\qquad + \ max\,\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\}\} \\ &\leq max\ \{\, d(x,z) + \mathrm{d}(z,y)\} \end{aligned}$$

Jadi, dari pembuktian di atas tidak terbukti bahwa

$$d(x,y) \leq \max\ \{d(x,z), \mathrm{d}(z,y)\}.$$

Sehingga, terlihat bahwa $d(x,y)$ memenuhi (UM1), (UM2), (UM3) dan (UM4) yang merupakan sifat – sifat pada metrik, akan tetapi tidak memenuhi (UM5) yaitu sifat ketaksamaan segitiga kuat, maka $d(x,y)$ adalah metrik akan tetapi bukan ultrametrik. Sehingga pasangan $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang metrik dan bukan ruang ultrametrik. ■

Pada umumnya, untuk membuktikan teorema titik tetap atau teorema titik tetap umum untuk suatu pemetaan harus menunjukkan kekontinuan dari pemetaan tersebut. Sedangkan pada ruang ultrametrik bola lengkap, kekontinuan dari pemetaannya tidak diperlukan untuk mendapatkan titik tetap [5]. Selanjutnya ruang ultrametrik yang dikaji disini adalah ruang ultrametrik bola lengkap. Berikut ini adalah definisi dari ruang ultrametrik bola lengkap.

Definisi 2.5 [5] *Ruang ultrametrik* (X, d_u) *dikatakan bola lengkap jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong*

Lemma 2.6 [7] *Misal* (X, d_u) *merupakan ruang ultrametrik bola lengkap dan misal* $\{B_i\}_{i\in I}$ *adalah keluarga dari bola pada X sehingga* $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ *untuk setiap* $i, j \in I$ *dan* $i \neq j$ *, maka* $\cap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$.

2.3 Titik Tetap

Titik tetap atau dikenal juga sebagai titik invarian dari suatu fungsi adalah suatu pemetaan yang mengkaitkan setiap titik pada domain tepat satu titik di kodomain sehingga menghasilkan daerah hasil atau range. Pada suatu pemetaan dengan domain yang sama dengan kodomainnya, kemungkinan pemetaan tersebut akan menyebabkab adanya titik-titik pada domain yang hasil pemetaannnya adalah tepat titik-titik yang sama [9]. Berikut definisi dari titik tetap

Definisi 2.7 [9] *(Titik Tetap). Diberikan X suatu himpunan tak kosong dan pemetaan* $f : X \to X$ *. Titik* $x \in X$ *disebut titik tetap untuk* f *jika* $f(x) = x$ *.*

Contoh 2.8 [9] *Misalkan fungsi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$*, maka* 2 *merupakan titik tetap dari* f *.*

Bukti. Untuk membuktikan bahwa 2 merupakan titik tetap dari f maka akan dibuktikan bahwa $f(2) = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 3.2 + 4 \\ &= 4 - 6 + 4 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Karena $f(2) = 2$, maka terbukti bahwa 2 merupakan titik tetap dari f. ■

2.4 Lemma Zorn

Lemma Zorn dibutuhkan untuk membuktikan teorema titik tetap pada ruang ultrametrik. Berikut ini adalah teorema dari Lemma Zorn.

Teorema 2.9 [8] (Lemma Zorn) *Dimisalkan $(X, \preccurlyeq)$ adalah himpunan terurut parsial. Jika setiap subhimpunan terurut total dari $(X, \preccurlyeq)$ memiliki batas atas, maka S memiliki elemen maksimal.*

Untuk memahami Teorema 2.11, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai terurut parsial, terurut total (keseluruhan), batas atas dan elemen maksimal.

Pada himpunan tak kosong *X* dapat didefinisikan suatu relasi yang dinotasikan dengan $\preccurlyeq$ yang berada diantara elemen-elemen pada himpunan tersebut.

Definisi 2.10 [2] *Relasi biner $\preccurlyeq$ pada suatu himpunan X adalah terurut parsial, jika untuk setiap $a, b, c \in X$*
PO1: $a \preccurlyeq a$ (refleksif)
PO2: jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq a$ maka $a = b$ (antisimetri)
PO3: jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $a \preccurlyeq c$ (transitif).
Jika $\preccurlyeq$ adalah terurut parsial pada himpunan X maka $(X, \preccurlyeq)$ dinamakan himpunan terurut parsial.

Definisi 2.11 [2]*Relasi biner* $\preccurlyeq$ *pada suatu himpunan X adalah terurut total, jika untuk setiap* $a, b, c \ \in X$

TO1: jika $a \preccurlyeq b$ *dan* $b \preccurlyeq a$ *maka* $a = b$ *(antisimetri)*
TO2: jika $a \preccurlyeq b$ *dan* $b \preccurlyeq c$ *maka* $a \preccurlyeq c$ *(transitif)*
TO3: $a \preccurlyeq b$ *atau* $b \preccurlyeq a$ *(totalitas).*

Totalitas menunjukkan sifat refleksif. Sehingga terurut total merupakan terurut parsial. Jika $\preccurlyeq$ adalah terurut total pada himpunan X maka $(\mathrm{X}, \preccurlyeq)$ dinamakan himpunan terurut total.

Definisi 2.12 [8] *Misalkan* $(X, \preccurlyeq)$ *adalah suatu himpunan dan misalkan* $A \subseteq X$ *adalah subhimpunan pada* X. *Suatu elemen,* $m \in X$ *adalah batas atas pada A jika* $a \preccurlyeq m$ *untuk setiap* $a \in A$.

Definisi 2.13 [2] *Misalkan* $(X, \preccurlyeq)$ *adalah himpunan terurut parsial dan* $y \subset X$. *Sehingga* $m \in y$ *dinamakan elemen maksimal dari y jika* $m \preccurlyeq x \ maka \ m = x, untuk \ semua \ x \in y$.

2.5 *Coincidentally Commuting*

Coincidentally commuting akan digunakan pada dua pembahasan titik tetap umum tunggal untuk dua pemetaan pada himpunan *X* tak kosong. Sebelumnya dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi komutatif

Definisi 2.14 [11] *Dua pemetaan* $f, g: X \to X$ *dikatakan komutatif atau commuting jika* $(fg)(x) = (gf)(x)$ *untuk semua* $x \in X$.

Contoh 2.15 *Misalkan* $X = \mathbb{R}$ *dan didefinisikan* $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dengan* $f(x) = x$ *dan* $g(x) = x^2$ *untuk* $x \in \mathbb{R}$. *Sedemikian hingga* $(fg)(x) = x^2 = (gf)(x)$, *maka pemetaan* f *dan* g *komutatif.*

Definisi 2.16 *Titik u dikatakan pertukaran titik pada dua pemetaan f dan g jika $f(u) = g(u)$.*

Berikut ini definisi dari *coincidentally commuting*

Definisi 2.17 [11] *Dua pemetaan $f, g: X \to X$ dikatakan coincidentally commuting atau coincidence preserving jika f dan g komutatif pada pertukaran titiknya.*

Untuk lebih memahami definisi tersebut, diberikan contoh sederhana mengenai *coincidentally commuting*

Contoh 2.18 [11] *Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \frac{x}{2}$ dan $g(x) = x^2$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Sehingga disana terdapat dua pertukaran titik untuk pemetaan $f dan\ g$ pada $\mathbb{R}$, yaitu $0\ dan\ \frac{1}{2}$, karena $f(0) = 0 = g(0)$ dan $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = g(\frac{1}{2})$. Pemetaan f dan g kommutatif pada 0 sedemikian hingga*

$$fg(0) = gf(0),$$

Tetapi

$$fg\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16} = gf\left(\frac{1}{2}\right).$$

Jadi f dan g bukan coincidentally commuting pada $\mathbb{R}$. ■

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir ini adalah :

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi mengenai ruang metrik, ruang ultrametrik, ruang ultrametrik bola lengkap, titik tetap, lemma zorn dan *coincidentally commuting* . Referensi yang dipakai adalah buku dan jurnal.

3.2 Mengkaji konsep ruang ultrametrik dan ruang metrik bola lengkap

Pada tahap ini dikaji bahwa ruang ultrametrik adalah pengkhususan dari ruang metrik. Sedangkan ruang metrik bola lengkap merupakan penyusutan bola pada ultrametrik yang irisannya tak kosong.

3.3 Mengkaji teorema titik tetap pada ruang ultrametrik

Pada tahap ini akan dikaji mengenai teorema-teorema titik tetap pada ruang ultrametrik dengan mengkaji langkah-langkah pembuktian teoremanya, khususnya pada ruang ultrametrik diskrit.

3.4 Penarikan kesimpulan dan penyusunan laporan.

Pada tahap ini berdasarkan analisis dan pembahasan maka didapatkan kesimpulan mengenai ruang ultra metrik, titik tetap pada ruang ultra metrik dan saran untuk penelitian selanjutnya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dikaji mengenai teorema titik tetap pada ruang ultrametrik bola lengkap, kemudian diambil teorema titik tetap yang berlaku pada ruang ultrametrik diskrit.

4.1 Teorema Titik Tetap Ruang Ultrametrik Pada Suatu Pemetaan

Berikut ini adalah teorema titik tetap yang berlaku pada ruang ultrametrik untuk suatu pemetaan T pada X .

Teorema 4.1 [2] *Misal* (X, d_u) *sebagai ruang ultrametrik bola lengkap. Jika T: X→X adalah pemetaan, sedemikian hingga*

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x, y), d_u(x, Tx), d_u(y, Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y \tag{4.1}$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal pada X.

Bukti:
Misalkan $T : X \to X$ suatu pemetaan, Untuk setiap $a \in X$ dapat didefinisikan bola

$$\mathcal{B}_a = \mathcal{B}(a, d_u(a, Ta))$$

yang menunjukkan bahwa pusat bola di *a* dan jari-jari di $d_u(a, Ta)$. Misalkan $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ himpunan semua bola. Diantara himpunan tersebut terdapat himpunan $\mathcal{A}_1$ dengan $\mathcal{A}_1$ adalah subhimpunan dari $\mathcal{A}$, dengan

$$\mathcal{A}_1 = \{\mathcal{B}_{a_1}, \mathcal{B}_{a_2}, \dots \dots\},$$

Sehingga

$$\mathcal{B}_{a_1} \supseteq \mathcal{B}_{a_2} \supseteq \cdots$$

maka diperoleh irisan $\mathcal{B}_{a_i}$ tak kosong,, atau dapat dituliskan

$$\cap \mathcal{B}_{a_i} = \emptyset$$

sebut saja irisan $\mathcal{B}_{a_i}$ adalah B atau dapat dituliskan

$$B = \cap \mathcal{B}_{a_i}.$$

Misalkan $b \in B,$ maka

$$\mathcal{B}_b = \mathcal{B}(b, d_u(b, Tb)).$$

Misalkan $x \in \mathcal{B}_b$,maka

$$\begin{aligned} d(x, b) &\leq d(b, Tb) \\ &= max\{d_u(b, a), d_u(a, Tb)\} \\ &= max\,\{d_u(b, a), d_u(a, Ta), d_u(Ta, Tb)\}. \end{aligned}$$

Karena $d_u(b, a) < d_u(a, Ta)$, maka

$$d(x, b) \leq max\,\{d_u(a, Ta), d_u(Ta, Tb)\}.$$

Karena

$$max\,\{d_u(a, Ta), d_u(Ta, Tb)\}$$

belum diketahui, maka dibagi dua kasus sebagai berikut:

(i) Untuk

$$d_u(Ta, Tb) \leq d_u(a, Ta).$$

Akibatnya

$$d_u(x, b) \leq d_u(a, Ta).$$

(ii) Untuk

$$d_u(Ta, Tb) > d_u(a, Ta).$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} d_u(x, b) \leq d_u(b, Tb) \leq\ & d_u(Ta, Tb) \\ & = max\{(Ta, a), d_u(a, Tb)\} \\ & = max\ \{d_u(a, Ta), d_u(a, b), d_u(b, Tb)\}. \end{aligned}$$

Karena $d_u(a, b) < d_u(a, Ta)$, maka

$$d_u(x, b) \leq max\ \{d_u(a, Ta), d_u(b, Tb)\}.$$

Untuk $d_u(b, Tb) \leq d_u(a, Ta)$, maka

$$d_u(x, b) < d_u(a, Ta)$$

dan untuk $d_u(b, Tb) > d_u(a, Ta)$, maka

$$d_u(b, Tb) < max\ \{d_u(a, b), d_u(b, Tb)\}.$$

Karena $d_u(a, b) < d_u(b, Tb)$, maka

$$d_u(b, Tb) < d_u(b, Tb)$$

yang kontradiksi dengan $d_u(b, Tb) = d_u(b, Tb)$.
Sehingga dapat ditunjukkan bahwa untuk $x \in \mathcal{B}_b$ diperoleh

$$d_u(x, b) \leq d_u(a, Ta).$$

Jika terdapat

$$d_u(x,a) \leq d_u(a,Ta),$$

maka hal ini menunjukkan bahwa $x \in \mathcal{B}_a$ dan karena $x \in \mathcal{B}_b$ sebarang, maka

$$\mathcal{B}_b \subseteq \mathcal{B}_a \ .$$

Karena

$$\mathcal{B}_b \subseteq \mathcal{B}_{a_1} \subseteq \mathcal{B}_{a_2} \subseteq \cdots$$

maka

$$\mathcal{B}_b \subseteq \cap \mathcal{B}_{a_i}$$

sehingga

$$\mathcal{B}_b \subseteq B.$$

Jadi, $\mathcal{B}_b$ bola terkecil di $\mathcal{A}$.

Menurut Lemma 2.9 (Lemma Zorn), $\mathcal{A}$ memiliki elemen maksimal, karena $\mathcal{A}$ merupakan bola lengkap yang irisan terkecilnya tak kosong, maka setiap subhimpunan dari $\mathcal{A}$ memiliki batas atas. Dimisalkan elemen maksimal $\mathcal{B}_z$, dimana $z \in X$. Kemudian untuk menunjukkan bahwa z titik tetap dari T, maka akan dibuktikan bahwa

$$z = Tz.$$

Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $z \neq Tz$, maka dari ketaksamaan (4.1)

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$
$$\forall x,y \in X, x \neq y$$

diperoleh

$$d_u(Tz,T(Tz)) < max\{d_u(z,Tz), d_u(z,Tz), d_u(Tz,T(Tz))\}$$

$$< d_u(z, Tz) .$$

Jika $y \in \mathcal{B}_{Tz}$,maka

$$d_u(y, Tz) \leq d_u(Tz, T(Tz)) < d_u(z, Tz).$$

Jadi didapat

$$d_u(y, z) \leq \max\{d_u(y, Tz), d_u(Tz, z)\} = d_u(Tz, z).$$

Ini berarti bahwa, $y \in \mathcal{B}_z$ dan $\mathcal{B}_{Tz} \subseteq \mathcal{B}_z$.

Karena

$$d_u(z, Tz) > d_u(Tz, T(Tz))$$

maka hal ini menunjukkan bahwa z $\notin \mathcal{B}_{Tz}$.
Sehingga didapatkan $\mathcal{B}_{Tz} \subsetneqq \mathcal{B}_z$ yang kontradiksi dengan $\mathcal{B}_{Tz} \subseteq \mathcal{B}_z$, maka $\mathcal{B}_z$ bukan elemen maksimal dari $\mathcal{A}$.

Jadi diperoleh bahwa $z = Tz$.

Kemudian, akan diuji ketunggalannya sebagai berikut

Ambil u sebagai titik tetap yang berbeda.
Untuk $u \neq z$ didapatkan

$$d_u(z, u) = d_u(Tz, Tu).$$

Karena

$$d_u(Tz, Tu) \leq max\{d_u(Tz, z), d_u(z, Tu)\},$$

sehingga

$$d_u(z, u) = d_u(Tz, Tu) < max\,\{d_u(Tz, z), (z, Tu)\}$$

dan karena

$$d_u(z,Tu) \leq max\{d_u(z,u), d_u(u,Tu)\},$$

maka

$$\begin{aligned} d_u(z,u) &= d_u(Tz,Tu) \\ &< max\ \{d_u(Tz,z), d_u(z,u), d_u(u,Tu)\} \\ &= d_u(z,u) \end{aligned}$$

yang kontradiksi dengan ketaksamaan (4.1)

$$\begin{aligned} d_u(Tx,Ty) &< max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\} \\ &\forall x, y \in X, x \neq y \end{aligned}$$

Terbukti bahwa z merupakan titik tetap tunggal pada T.■

Dari penjabaran teorema diatas maka memunculkan akibat berikut ini:

Akibat 4.2 [4]. *Jika terdapat ruang ultrametrik* (X, d_u) *dan pemetaan* $T: X \to X$, *maka berlaku ketaksamaan*

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\{d_u(Tx,x), d_u(x,y), d_u(y,Ty)\}, x, y \in X$$

Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa untuk $x \neq y$ *maka berlaku*

$$d_u(Tx,Ty) \neq max\{d_u(Tx,x), d_u(x,y), d_u(y,Ty)\}.$$

Bukti. Misalkan $T: X \to X$ suatu pemetaan, karena $d_u(Tx,Ty)$ merupakan ultrametrik dimana $x, y \in X$ dan pasangan (X, d_u) disebut ruang ultrametrik maka $d_u(Tx,Ty)$ memenuhi ketaksamaan segitiga kuat yaitu untuk sebarang elemen $x, y \in X$, maka

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(x,Ty)\}$$

Karena

$$d_u(x,Ty) \leq max\,\{d_u(x,y),d_u(y,Ty)\}$$

maka

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,max\,\{d_u(x,y),d_u(y,Ty)\}.$$

Karena $max\,\{d_u(x,y),d_u(y,Ty)$ belum diketahui, maka terdapat dua kasus sebagai berikut:

(i) Jika $d_u(x,y) < d_u(y,Ty)$, maka

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(y,Ty)\}.$$

(ii) Jika $d_u(x,y) > d_u(y,Ty)$, maka

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(x,y)\}.$$

Karena,

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,max\,\{d_u(x,y),d_u(y,Ty)\}$$

menunjukkan bahwa

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(y,Ty)\}$$

atau

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(x,y)\}.$$

Sehingga dapat dituliskan

$$d_u(Tx,Ty) \leq max\,\{\,d_u(Tx,x)\,,d_u(x,y),d_u(y,Ty)\}.$$

Jadi untuk $x \neq y$ diperoleh

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(Tx, x), d_u(x, y), d_u(y, Ty)\}.$$

dan berakibat

$$d_u(Tx, Ty) \neq max\{d_u(Tx, x), d_u(x, y), d_u(y, Ty)\}. \blacksquare$$

Pada tugas akhir ini diambil kasus mengenai teorema titik tetap pada ultrametrik diskrit. Sebelum membahas teorema titik tetap ruang ultrametrik diskrit, berikut ini diberikan terlebih dahulu mengenai teorema ruang ultrametrik bola lengkap.

Teorema 4.3 *Misalkan $X \neq \emptyset$, ultrametrik d_u didefinisikan pada X dengan*

$$d_u(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

maka d_u merupakan ultrametrik pada X dan dinamakan ultrametrik diskrit. Sedangkan (X, d_u) adalah ruang ultrametrik diskrit.

Bukti. Diambil sebarang $x, y, z \in X$

(UM1) Untuk $x = y$, maka $d_u(x, y) = 0$ dan untuk $x \neq y$, maka $d_u(x, y) = 1 > 0$.

Karena untuk $x = y$ dan $x \neq y$ telah terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa :

$$d_u(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$$

(UM2) ($\Rightarrow$) Jika $d_u\,(x, y) = 0$ sudah jelas bahwa $x = y$
($\Leftarrow$) Jika $x = y$ sudah jelas bahwa $d_u\,(x, y) = 0$

(UM3) Untuk $x = y$,

maka $d_u(x,y) = d_u(x,x) = d_u(y,x)$.
Sehingga diperoleh $d_u(x,y) = d_u(y,x)$.
Sedangkan untuk $x \neq y$,
maka $d_u(x,y) = 1 = d_u(y,x)$.
Jadi diperoleh $d_u(x,y) = d_u(y,x)$.

(UM4) Diberikan sebarang $z \in \mathbb{R}$, sehingga terdapat lima kasus sebagai berikut:

(i) Untuk $x = y$ dan $x = z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(ii) Untuk $x = y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) < d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(iii) Untuk $x \neq y$ dan $x = z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(iv) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) < d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(v) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

Sehingga, dari kasus (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) terlihat bahwa

$$d_u(x,y) \leq d_u(x,z) + d_u(z,y), \forall x,y,z \in X.$$

(UM5) Diberikan sebarang $z \in \mathbb{R}$, sehingga terdapat lima kasus sebagai berikut:

(i) Untuk $x = y$ dan $x = z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x, y) = 0$, $d_u(x, z) = 0$ dan $d_u(z, y) = 0$.
Jadi, $d_u(x, y) = max\{ d_u(x, z), d_u(z, y)\}$.
(ii) Untuk $x = y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x, y) = 0$, $d_u(x, z) = 1$ dan $d_u(z, y) = 1$.
Jadi, $d_u(x, y) < max\ \{ d_u(x, z), d_u(z, y)\}$.

(iii) Untuk $x \neq y$ dan $x = z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x, y) = 1$, $d_u(x, z) = 0$ dan $d_u(z, y) = 1$.
Jadi, $d_u(x, y) = max\ \{ d_u(x, z), d_u(z, y)\}$.

(iv) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x, y) = 1$, $d_u(x, z) = 1$ dan $d_u(z, y) = 1$.
Jadi, $d_u(x, y) = max\ \{ d_u(x, z), d_u(z, y)\}$.

(v) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x, y) = 1$, $d_u(x, z) = 1$ dan $d_u(z, y) = 0$.
Jadi, $d_u(x, y) = max\ \{d_u(x, z), d_u(z, y)\}$.

Dari kelima kasus tersebut terlihat bahwa
$d_u(x, y) \leq max\{ d_u\ (x, z), d(z, y)\}$.

Jadi terbukti bahwa $d_u(x, y)$ adalah ultrametrik dan pasangan (X, d_u) adalah ruang ultrametrik. Ruang ultrametrik ini disebut ruang ultrametrik diskrit. ■

Teorema 4.4 *Diberikan $(X,\ d_u)$ ruang ultrametrik diskrit, jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong maka (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap.*

Bukti. Misalkan $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{B}_n \supseteq \cdots$. merupakan bola tertutup pada X dan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ merupakan pusat bola tersebut. Sehingga dapat didefinisikan bahwa

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r_n\}$$

dengan $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ merupakan jari-jari bola. Akan dibuktikan bahwa barisan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ konvergen. Untuk membuktikannya digunakan $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ yang merupakan jari-jari bola, karena r_n konvergen ke suatu titik dan dimisalkan r, maka

1. Untuk $r \geq 1$
   maka untuk setiap $n, r \geq 1$ berakibat

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r\} = X$$

2. Sedangkan untuk $r < 1$
   maka untuk setiap n berakibat

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r\} = \{r_n\}$$

Terlihat bahwa untuk

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

merupakan suatu bola yang konvergen ke suatu bola terkecil yang tak kosong. Sehingga d_u merupakan ultrametrik bola lengkap dan pasangan (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap. ■

Teorema 4.5 *Misalkan (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik diskrit. Didefinisikan pemetaan $T: X \to X$ dengan $y = T_x$ dan*

$$Tx = x_0\,, \quad x_0 \text{ identitas}$$

karena (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap sedemikian hingga

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y.$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti. Untuk membuktikan teorema tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa T memiliki titik tetap dan selanjutnya dibuktikan bahwa jika z titik tetap dari T, maka z adalah titik tetap tunggal dari T.

(i) Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap.

T memiliki titik tetap jika memenuhi ketaksamaan (4.1)

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y.$$

Untuk membuktikan ketaksamaan (4.1) yaitu dengan membuktikan ruas kiri dan ruas kanan. Seperti yang telah diketahui bahwa $Tx = x_0$ dengan

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Sehingga ruas kiri dapat dituliskan sebagai berikut:

- Karena $Tx = x_0$ dan $Tx = y$ maka $Ty = T(Tx) = x_0$ sehingga

$$d_u(Tx, Ty) = d_u(x_0, x_0) = 0$$

dan ruas kanan dituliskan sebagai berikut:

- max $\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)$
  $= \max\ (d_u(x,y), d_u(x,x_0), d_u(y,x_0)$

  Karena $x \neq y$ maka $d_u(x,y) = 1$
  Sehingga,
  $$max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)$$
  $$= max\ (1, d_u(x,x_0), d_u(y,x_0).$$

Karena
$$d_u(Tx, Ty) < \max\{1, d_u(x,x_0), d_u(y,x_0)\}$$

maka terbukti bahwa

$$d_u(Tx, Ty) < d_u(x, y)$$
$$< max\{d_u(x, y), d_u(x, Tx), d_u(y, Ty)\}$$

Sehingga ketaksamaan (4.1) terbukti, yaitu

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x, y), d_u(x, Tx), d_u(y, Ty)\},$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

Karena ketaksamaan (4.1) terbukti, maka T memiliki titik tetap.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa z merupakan titik tetap tunggal dari T.

Jika terdapat $u \in X$ merupakan titik tetap yang lain dengan $u \neq z$, maka didapatkan

$$Tz = z = x_0 \text{ dan } Tu = u = x_0$$

dari pembuktian tersebut, maka $z = u = x_0$
yang kontradiksi dengan $u \neq z$. Terbukti bahwa z merupakan titik tetap tunggal dari T. ■

4.2 Teorema Titik Tetap Ruang Ultrametrik Pada Dua Pemetaan

Berikut ini adalah teorema titik tetap ruang ultrametrik pada dua pemetaan menurut K.P.R Rao dan G.N.V. Kishore

Teorema 4.6 [2] *Ambil (X, d_u) sebagai ruang ultrametrik bola lengkap. Jika f dan T adalah pemetaan diri sendiri pada X, dengan :*

$$T(X) \subseteq f(X) \qquad (4.2)$$

dan

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x = y \qquad (4.3)$$

maka terdapat $z \in X$ *sedemikian hingga* $fz = Tz$. *Kemudian jika f dan T coincidentally commuting pada z, maka z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.*

Selanjutnya, untuk kasus pada ultrametrik diskrit, teorema titik tetap yang berlaku pada ruang ultrametrik diskrit untuk dua pemetaan T dan f adalah sebagai berikut

Teorema 4.7 *Misalkan* (X, d_u) *ruang ultrametrik diskrit*

Didefinisikan pemetaan $T, f : X \to X$ *, dengan*

$$Tx = 1$$

serta

$$fx = \frac{x+1}{2}, \forall x \in X.$$

Sedemikian hingga

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x = y$$

maka terdapat $z \in X$ *sedemikian hingga* $fz = Tz$ *Kemudian jika f dan T coincidentally commuting pada z, maka z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.*

Bukti. Untuk membuktikan teorema tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa f dan T memenuhi ketaksamaan

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty\})$$

$$\forall x, y \in X, x = y$$

dan yang terakhir dibuktikan bahwa z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.

(i) Akan dibuktikan bahwa pemetaan T memiliki titik tetap, yaitu dengan membuktikan ketaksamaan (4.2)

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan ketaksamaan (4.3)

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty\})$$

(a) Pembuktian ketaksamaan (4.2)

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dengan $Tx = 1$ dan $fx = \frac{x+1}{2}$.
Untuk membuktikan bahwa

$$T(X) \subseteq f(X)$$

Dibuktikan dengan menunjukkan bahwa, untuk setiap elemen di $T(X)$ maka dia juga berada di $f(X)$. Sehingga untuk $Tx = 1$,harus ditunjukkan bahwa $1 \in f(X)$. Sehingga

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$$

Jadi, terbukti bahwa

$$T(X) \subseteq f(X).$$

(b) Pembuktian ketaksamaan (4.3)

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty\})$$
$$\forall x,y \in X, x \neq y$$

- Pembuktian ruas kiri:
  Karena $Tx = 1$ dan $Ty = 1$, maka

  $$d_u(Tx,Ty) = d_u(1,1)$$

  karena $Tx = Ty = 1$,

  maka $d_u(Tx,Ty) = 0$

- Pembuktian ruas kanan:

  max $\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty\})$

  $= \max \{ d_u\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+1}{2}\right), d_u\left(\frac{x+1}{2},1\right), d_u\left(\frac{y+1}{2},1\right)\}$

  Karena $x \neq y$ maka $\frac{x+1}{2} \neq \frac{y+1}{2}$, sehingga $d_u\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+1}{2}\right) = 1$.

Karena $d_u(Tx,Ty) < d_u(fx,fy)$
maka jelas bahwa

$$d_u(Tx,Ty) < \max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty\}).$$
$$\forall x,y \in X, x \neq y$$

Karena ketaksamaan (4.2) dan (4.3) telah terpenuhi maka pemetaan T dan f memiliki titik tetap .

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa *z* adalah titik tetap tunggal pada T dan f .

Untuk membuktikan bahwa *z* adalah titik tetap tunggal pada T dan f , yaitu dengan dibuktikan bahwa pemetaan f dan T adalah *coincidentally commuting* dan memenuhi persamaan

$$fz = Tz$$

Sesuai dengan definisi 2.17, f dan T dikatakan *coincidentally commuting* jika f dan T kommutatif pada pertukaran titiknya

(a) Pembuktian

$$fz = Tz$$

yaitu

$$fz = \frac{z+1}{2} = 1 = Tz.$$

Selanjutnya jika terdapat $u \in X$ titik tetap yang lain dengan $u \neq z$, maka didapatkan

$$fz = \frac{z+1}{2} = 1 = z \text{ dan } Tu = u = 1$$

maka diperoleh $z = u = 1$ yang kontradiksi dengan $u \neq z$. Sehingga terbukti bahwa z merupakan satu satunya titik tetap atau titik tetap tunggal pada pemetaan f dan T.

(b) Dari pembuktian (a) dapat dikatakan bahwa pertukaran titik untuk pemetaan T dan f yaitu pada titik $z = 1$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa f dan T *coincidentally commuting*, yaitu jika f dan T kommutatif pada pertukaran titiknya, sedangkan dari definisi 2.14, f dan T dikatakan kommutatif jika

$$fT(\mathrm{z}) = Tf(z)$$

Dengan $z = 1$.
Sehingga,

$$fT(1) = Tf(1)$$
$$fT(1) = \frac{1+1}{2} = 1 = Tf(1)$$

Jadi, jelas bahwa f dan T kommutatif pada $z = 1$.
Sehingga f dan T *coincidentally commuting.*

Dari pembuktian (a) dan (b) maka jelas bahwa pemetaan f dan T memiliki titik tetap tunggal. ■

Dari Teorema-teorema diatas tentang titik tetap pada dua pemetaan f dan T maka memunculkan akibat sebagai berikut

Akibat 4.8 [5] *Jika terdapat ruang ultrametrik* (X, d_u) *dan pemetaan* $T, f: X \to X$, *maka dapat ditunjukkan bahwa ketaksamaan*

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\},$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

dapat diubah menjadi

$$d_u\ (Tx, Ty) < max\ \{d_u\ (fx, fy),\ d_u\ (fx, Tx),\ d_u\ (fy, Ty),$$
$$d_u\ (fx, Tx),\ d_u\ (fy, Ty)\}\ ,\ \forall x,\ y \in X,\ x \neq y$$

Bukti.

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

$$< max\{\ d_u(fx, fy), d_u(fx, fy), d_u(fx, fy),$$
$$d_u(fx, Ty),\ d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty), d_u(fy, Ty)\}$$

$$< max\ \{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty),$$

$$d_u(fx, fy), d_u(fy, Ty), d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx)\}$$

menurut sifat ultrametrik $d_u(fx, fy) = d_u(fy, fx)$, maka

$$d_u(Tx, Ty) < \ max \{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty), d_u(fx, fy), d_u(fy, Ty), d_u(fy, fx), d_u(fx, Tx)\}$$

karena

$$d_u\ (fx, Ty) \leq max\ \{d_u\ (fx, fy),\ d_u\ (fy, Ty)\ \}$$

dan

$$d_u\ (fy, Tx) \leq max\ \{d_u\ (fy, fx),\ d_u\ (fx, Tx)$$

jadi

$$d_u(Tx, Ty) < \ max \{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty), d_u(fx, Ty), d_u(fy, Tx)\}. \blacksquare$$

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB V
PENUTUP

Dari kajian, analisis serta pembahasan yang telah dilakukan, dapat ditarik kesimpulan serta diberikan saran untuk pengembangan dan perbaikan penelitian tentang ruang ultrametrik pada sifat- sifat maupun teorema yang lainnya.

1.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

a. Ruang ultrametrik adalah pengkhususan dari ruang metrik, dengan kata lain setiap ruang ultrametrik pasti ruang metrik, namun setiap ruang metrik belum tentu ruang ultrametrik.
b. Jika $X \neq \emptyset$ dan ultrametrik d_u didefinisikan pada X dengan

$$d_u(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

maka d_u merupakan ultrametrik pada X yang selanjutnya disebut ultrametrik diskrit dan (X, d_u) disebut ruang ultrametrik diskrit.
c. Karena pada ruang ultrametrik diskrit (X, d_u) setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong maka ruang ultrametrik diskrit (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap.
d. Jika (X, d_u) ruang ultrametrik diskrit dan didefinisikan pemetaan $T: X \to X$ dengan $y = Tx$ dan $Tx = x_0$, x_0 identitas, sedemikian hingga

$$d_u\ (Tx\ , Ty) < max\{d_u(x, y), d_u(x, Tx), d_u(y, Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y.$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal.

e. Sedangkan jika (X, d_u) ruang ultrametrik diskrit dan didefinisikan dua pemetaan $T, f: X \to X$ dengan $Tx = 1$ dan $fx = \frac{x+1}{2}$, sedemikian hingga

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan ketaksamaan

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty\})$$
$$\forall x, y \in X, x = y$$

maka pemetaan T dan f memiliki titik tetap tunggal.

1.2 Saran

Pada tugas akhir ini hanya mengkaji teorema titik tetap pada ultrametrik diskrit. Oleh karena itu, tugas akhir ini dapat dikembangkan lebih lanjut , dengan mengkaji teorema titik tetap pada ultrametrik pada ruang yang lainnya selain pada ultrametrik diskrit. Ataupun dapat dilanjutkan dengan mengkaji sifat-sifat yang terdapat pada ruang ultrametrik seperti konvergensi, kekompakan, kelengkapan dan lain sebagainya.

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Wihdatul Ummah. Putri dari pasangan Bapak Saefuddin dan Ibu Tri Lasmi. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Aisyah Cilacap dan dilanjutkan di SD Negri Mernek Cilacap, kemudian dilanjutkan di MTs AL-FATAH Maos Cilacap, kemudian dilanjutkan lagi di MA AL-FATAH Maos Cilacap. Setelah lulus MA, penulis melanjutkan kuliah di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), diterima melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri) pada tahun 2009 dengan NRP 1209100080. Penulis dalam perkuliahan di Jurusan Matematika ITS memfokuskan pembelajaran pada bidang dan minat Analisis dan Aljabar. Untuk membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini, penulis dapat dihubungi melalui email ummah.wihdah@gmail.com.