SEMINAR TUGAS AKHIR

ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL EPIDEMIOLOGI SEIR DEMAM BERDARAH DI SURABAYA

BIFURCATION ANALISYS ON EPIDEMIOLOGICAL SEIR MODEL OF DENGUE IN SURABAYA

Oleh :
Desy Kusuma Ningsih
1211100018

Dosen Pembimbing :
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Mochamad Setijo Winarko, M.Si

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2016

RINGKASAN

Penyakit demam berdarah merupakan penyakit yang terjadi pada manusia yang penularannya melalui vektor (perantara) nyamuk dan penyakit endemik dengan angka kematian yang tinggi di daerah Surabaya. Penyakit demam berdarah menunjukkan peningkatan dalam jumlah kasus dan luas daerah yang berjangkit. Dikarenakan informasi mengenai penyebaran penyakit demam berdarah yang kurang maka perlu dilakukan kegiatan surveilans penyakit demam berdarah. Metode yang digunakan pada Tugas Akhir dengan mengkonstruksi kombinasi dari dua model non linear populasi individu yaitu kelompok susceptible, infected, exposed, dan recovered dan populasi vektor yaitu aquatic phase, susceptible dan infected serta menganalisis kestabilan dan bifurkasi dari model. Dalam Tugas Akhir ini membahas tentang kestabilan dari titik-titik kesetimbangan, yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Selanjutnya membahas analisis bifurkasi pada model penyakit demam berdarah dengan menentukan basic reproduction number $(\mathcal{R}_0)$ *yang akan disimulasikan dengan pemrograman matematika. Sehingga akan didapatkan informasi tentang hasil* $\mathcal{R}_0$*, dan rate transmission terhadap kestabilan dan bifurkasi serta peta penyebaran penyakit demam berdarah di Surabaya berdasarkan data yang diperoleh.*

Kata kunci: Model Epidemiologi SEIR, Bilangan Reproduksi Dasar, Bifurkasi, Metode Runge-Kutta

PENDAHULUAN

TINJAUAN PUSTAKA

METODE PENELITIAN

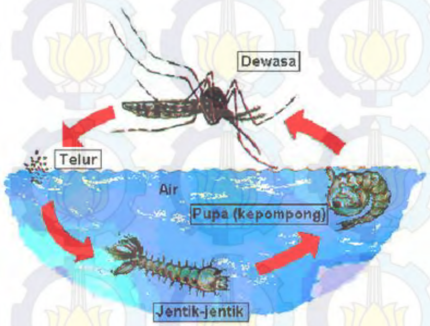
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

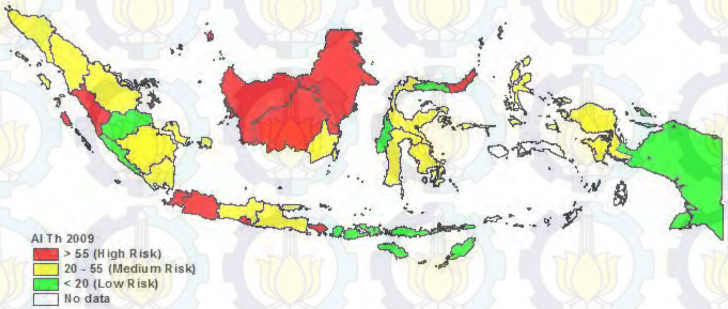
KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah | 1.2 Rumusan Masalah | 1.3 Batasan Masalah | 1.4 Tujuan | 1.5 Manfaat





Per 100.000 penduduk Indonesia

KEGIATAN SURVEILANS EPIDEMIOLOGI

Deretan adanya Bifurkasi

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah | **1.2 Rumusan Masalah** | 1.3 Batasan Masalah | 1.4 Tujuan | 1.5 Manfaat

1. Bagaimana memodelkan epidemiologi demam berdarah?

2. Bagaimana menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik, titik kesetimbangan bebas penyakit dan bilangan reproduksi (R_o) untuk model demam berdarah?

3. Bagaimana menganalisis bifurkasi pada model penyakit demam berdarah di Surabaya?

4. Bagaimana hasil simulasi model epidemiologi berdasarkan analisis yang diperoleh?

Permasalahan yang dibahas pada usulan Tugas Akhir ini akan dibatasi pada model epidemiologi demam berdarah tipe SEIR

Kelompok manusia

- S adalah individu yang rentan penyakit (*Susceptible*)
- E adalah individu terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi belum menunjukkan gejala awal *(Exposed)*
- I adalah individu terinfeksi (*Infected)*
- R adalah individu telah memperoleh kekebalan (*Recovered*).

Kelompok nyamuk

- A adalah fase akuatik meliputi telur, larva dan tahap pupa *(Aquatic Phase)*
- S adalah nyamuk yang rentan penyakit *(Susceptible)*
- I adalah nyamuk yang terinfeksi penyakit *(Infected)*

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah | 1.2 Rumusan Masalah | 1.3 Batasan Masalah | 1.4 Tujuan | 1.5 Manfaat

1.
- Membuat model epidemiologi demam berdarah

2
- Menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit serta bilangan reproduksi (R_o) untuk model epidemiologi demam berdarah.

3.
- Menganalisis bifurkasi pada penyakit demam berdarah di Surabaya.

4.
- Mensimulasikan model epidemiologi berdasarkan analisis yang dilakukan.

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah | 1.2 Rumusan Masalah | 1.3 Batasan Masalah | 1.4 Tujuan | 1.5 Manfaat

1.

- Membantu menganalisis bifurkasi mundur dari model epidemiologi penyebaran demam berdarah.

2.

- Membantu menentukan daerah yang menjadi titik rawan terjangkitnya penyakit demam berdarah.

3.

- Memperoleh pengetahuan dalam menginterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model penyakit demam berdarah dengan menggunakan *pemrograman matematika*.

BACK

TINJAUAN PUSTAKA

"Sensitivity Analysis in a Dengue Epidemiological Model". (2013)
Dalam penelitian ini, menganalisis sensitifitas model epidemiologi bertipe SIR yang menggambarkan penyebaran penyakit diantara individu sehat yang rentan penyakit (*Susceptible*), individu penginfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah

"SEIR Model for Transmission of Dengue Fever in Selangor Malaysia". (2012)
Dalam penelitian ini, menganalisis model SEIR penyebaran demam berdarah di daerah Selangor Malaysia, dengan SEIR menggambarkan individu yang rentan penyakit demam berdarah (*Susceptible*), individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi tidak menunjukkan gejala awal (*Exposed*), individu penginfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah (*Recovered*)

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Tugas Akhir ini akan membahas model epidemiologi SEIR demam berdarah, dengan mengkonstruksi dari model penelitian Noorani M. S. M [4] dan model penelitian Helena Sofia Rodrigues [5] yang menggambarkan SEIR dengan individu yang rentan penyakit demam berdarah (*Susceptible*), individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit tetapi tidak menunjukkan gejala awal (*Exposed*), individu yang terinfeksi penyakit demam berdarah (*Infected*), individu yang telah sembuh dari penyakit demam berdarah (*Recovered*). Sedangkan kelompok nyamuk dinyatakan dengan nyamuk pada tahap aquatik *(Aquatic phase)*, nyamuk yang rentan *(Susceptible)* dan nyamuk penginfeksi demam berdarah *(Infected)*.

Penyakit Demam Berdarah

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) merupakan suatu penyakit endemik yang disebabkan oleh virus yang ditransmisikan oleh *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*.

Bilangan Reproduksi Dasar

- Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) atau biasa disebut R_o adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit
- Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu infeksi
- Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai *eigen* (nilai karakteristik) dari matriks *Jacobian* yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit

Kestabilan Titik Tetap

Misal suatu sistem bila variabelnya memiliki pangkat tertinggi satu atau berderajat satu. Persamaan berikut ini merupakan sistem:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 \\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 \\
\frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 \\
\frac{dx_5}{dt} &= a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 \\
\frac{dx_6}{dt} &= a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6
\end{aligned} \qquad (1)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil, untuk i,j=1,...,6

TINJAUAN PUSTAKA

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \\ \frac{dx_6}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

atau secara ringkas dapat dituliskan sebagai $\frac{dx}{dt} = Ax$

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5,$ dan λ_6 adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem dengan det(A)≠0. Titik kesetimbangan $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$ dan x_6 bersifat[8]

a. stabil asimtotik, jika bagian riil semua nilai eigen matriks A negatif,

b. stabil center, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil bernilai nol,

c. tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil positif

Kestabilan asimtotis lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema :

Titik setimbang $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$ stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$Matriks\ J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

Nilai eigen matriks Jacobi dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang dapat juga ditulis sebagai

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad (2)$$

Teorema 2.1 Kriteria Routh-Hurwitz

Akar-akar persamaan karakteristik (2) mempunyai bagian riil negatif jika $a_n > 0$ dan

$$D_1 = a_1 > 0; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \dots; D_k$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0, k = 1,2, \dots, n$$

TINJAUAN PUSTAKA

Pada metode ini nilai k sebelumnya digunakan. Perhitungan x dan y bergantian.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

Dengan

$$k_{1,x} = hf\,(t_0, x_0)$$

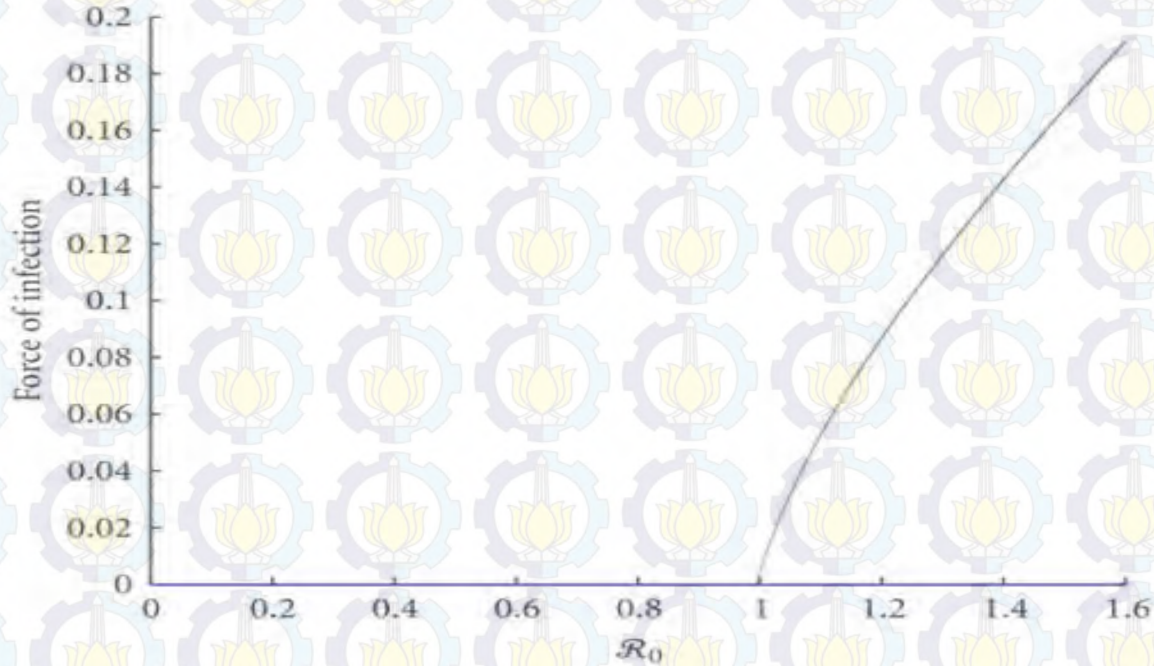
$$k_{2,x} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{k_{2,x}}{2})$$

$$k_{4,x} = hf\left(t_0 + h, x_0 + k_{3,x}\right)$$

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu | 2.2 Penyakit Demam Berdarah | 2.3 Bilangan Reproduksi Dasar | 2.4 Kestabilan titik tetap | 2.5 Stabil Asimtotik Lokal | 2.6 Routh-Hurwitz | 2.7 Metode Runge Kutta | 2.8 Bifurkasi



BACK

METODELOGI PENELITIAN

Studi Literatur

Mengkonstruksi Model Interaksi Dinamis

Daerah Penyelesaian Model

Mencari Titik Kesetimbangan

- Bebas Penyakit
  - Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R0)
- Endemik
  - Menyelidiki Terjadinya Bifurkasi

Simulasi Numerik

Kesimpulan dan Saran

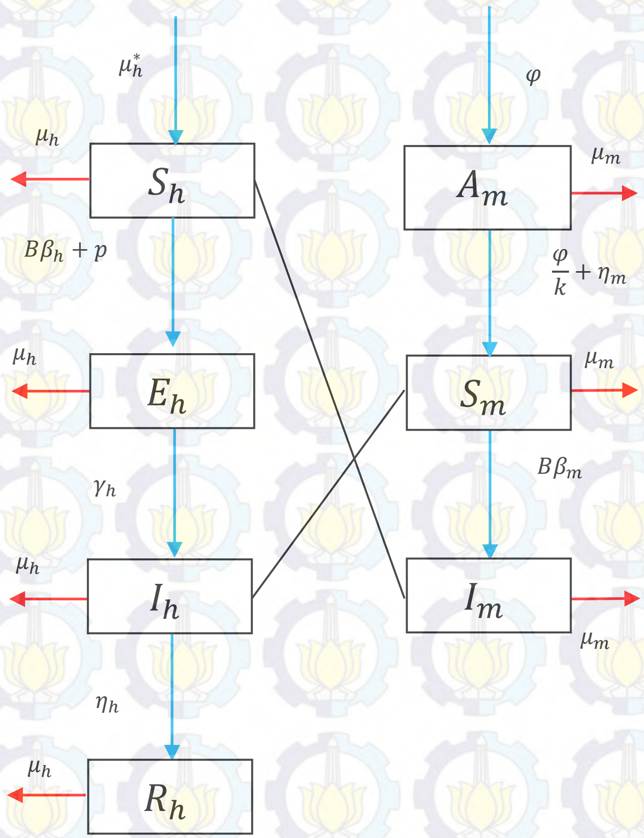
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1 Mengkonstruksi Model dan Daerah Penyelesaiannya

4.2 Titik kesetimbangan dan Kestabilan Lokal

4.3 Bifurkasi dan R0

4.4 Simulasi Numerik



Parameter yang mengakibatkan laju perubahan subpopulasi berkurang

Parameter yang mengakibatkan laju perubahan subpopulasi bertambah

Interaksi antara manusia dengan nyamuk

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \qquad (4.1)$$ MODEL

$$\frac{dE_h(t)}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h)E_h \qquad (4.2)$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h)I_h \qquad (4.3)$$

$$\frac{dR_h(t)}{dt} = \eta_h I_h - \mu_h R_h \qquad (4.4)$$

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = \varphi\left(1 - \frac{A_m}{kN_h}\right)(S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m)A_m \qquad (4.5)$$

$$\frac{dS_m(t)}{dt} = \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m\right)S_m \qquad (4.6)$$

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \qquad (4.7)$$

dengan kondisi batas

$S_h(0) = S_{h0}$, $E_h(0) = E_{h0}$, $I_h(0) = I_{h0}$, $R_h(0) = R_{h0}$, $A_m(0) = A_{m0}$, $S_m(0) = S_{m0}$, $I_m(0) = I_{m0}$

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h \qquad (4.8)$$ MODEL

$$\frac{dE_h(t)}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - (\mu_h + \gamma_h)E_h \qquad (4.9)$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h)I_h \qquad (4.10)$$

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = \varphi\left(1 - \frac{A_m}{kN_h}\right)(S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m)A_m \qquad (4.11)$$

$$\frac{dS_m(t)}{dt} = \eta_m A_m - \left(B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m\right) S_m \qquad (4.12)$$

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \qquad (4.13)$$

dengan kondisi batas,

$$S_h(0) = S_{h0}\, , E_h(0) = E_{h0}\, , I_h(0) = I_{h0}\, , A_m(0) = A_{m0}\, ,$$
$$S_m(0) = S_{m0}\, , I_m(0) = I_{m0} \qquad (4.14)$$

DAERAH PENYELESAIAN MODEL

- Daerah untuk sistem persamaan (4.8) sampai (4.13) adalah

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (A_m, S_m, I_m) \in R_+^3 : \\ A_m \leq kN_h,\ S_m + I_m \leq \frac{\eta_m A_m}{\mu_m} \end{matrix} \right\}$$

dikarenakan kondisi awal pada persamaan (4.14) bernilai positif dan pada R_+^3, maka merupakan invarian positif.

- $\frac{dN_h}{dt} \leq 0, \frac{dA_m}{dt} \leq 0, \frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} \leq 0$ memenuhi Ω yang invarian positif dan t→ ∞ sehingga dapat ditulis $0 \leq (N_h, A_m, S_m + I_m) \leq ((\mu_h^* - \mu_h)N_h, kN_h, \frac{\eta_m A_m}{\mu_m})$

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

$$E_0 = (S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0)$$

$$E_0 = \left\{\frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)}, p\frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)}, 0, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\varphi\eta_m}, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}, 0\right\}$$

Titik Kesetimbangan Endemik

$E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ dengan

$$S_h^* = \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}$$

$$E_h^* = \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)}\right)\left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}\right)$$

$$I_h^* = \frac{\gamma_h}{(\eta_h + \mu_h)}\left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h + \gamma_h)}\right)\left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}\right)$$

$$A_m^* = \frac{\mu_m I_m^*(\mu_h B\beta_m \gamma_h (B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)(B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m \mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

$$S_m^* = \frac{\mu_m I_m^*(\eta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)(B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^* \gamma_h B\beta_m (B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

$$f(I_m^*) = AI_m^{*4} + BI_m^{*3} + CI_m^{*2} + DI_m^* = 0$$

Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit :

$$E_0 = \left(S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0\right) = \left(\frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)}, p\frac{\mu_h^* N_h}{(p+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)}, 0, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\varphi\eta_m}, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}, 0\right)$$

Diperoleh akar-akar karakteristiknya sebagai berikut :

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model (4.8) – (4.13) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif. Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini

a_0	a_2	a_4	a_6	$a_8 = 0$	$a_{10} = 0$
a_1	a_3	a_5	$a_7 = 0$	$a_9 = 0$	$a_{11} = 0$
b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
c_1	c_2	c_3	0	0	0
d_1	d_2	0	0	0	0
e_1	0	0	0	0	0

dengan

$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$, $b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = a_6$,

$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1} = 0$, $c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}$, $c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$,

$c_3 = \frac{b_1 a_7 - b_4 a_1}{b_1} = 0$, $d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}$,

$d_2 = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{c_1} = b_3$, dan $e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$

Dari tabel Routh-Hurwitz variabel- variabel pada kolom pertama harus memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk model epidemiologi SEIR demam berdarah terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$, $b_1 a_3 > b_2 a_1$, $c_1 b_2 > c_2 b_1$, dan $d_1 c_2 > d_2 c_1$

Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Titik Kesetimbangan Endemik :

$E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$

diperoleh akar-akar karateristiknya sebagai berikut

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

Titik kesetimbangan endemik dari model (4.8) – (4.13) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0,$ dan $e_1 > 0.$ Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini

a_0	a_2	a_4	a_6	$a_8 = 0$	$a_{10} = 0$
a_1	a_3	a_5	$a_7 = 0$	$a_9 = 0$	$a_{11} = 0$
b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
c_1	c_2	c_3	0	0	0
d_1	d_2	0	0	0	0
e_1	0	0	0	0	0

dengan

$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$, $b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = a_6$,

$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1} = 0$, $c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}$, $c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$,

$c_3 = \frac{b_1 a_7 - b_4 a_1}{b_1} = 0$, $d_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}$,

$d_2 = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{c_1} = b_3$, dan $e_1 = \frac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{d_1}$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel- variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan endemik untuk model epidemiologi SEIR demam berdarah terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$, $b_1 a_3 > b_2 a_1$, $c_1 b_2 > c_2 b_1$, dan $d_1 c_2 > d_2 c_1$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR (R0)

$\mathcal{F}_i$ dan $V_i = V_i^- - V_i^+$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B\beta_h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\beta_m & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \mu_h + \gamma_h & 0 & 0 \\ -\gamma_h & \eta_h + \mu_h & 0 \\ 0 & 0 & \mu_m \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh *Basic Reproduction Number* sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$$

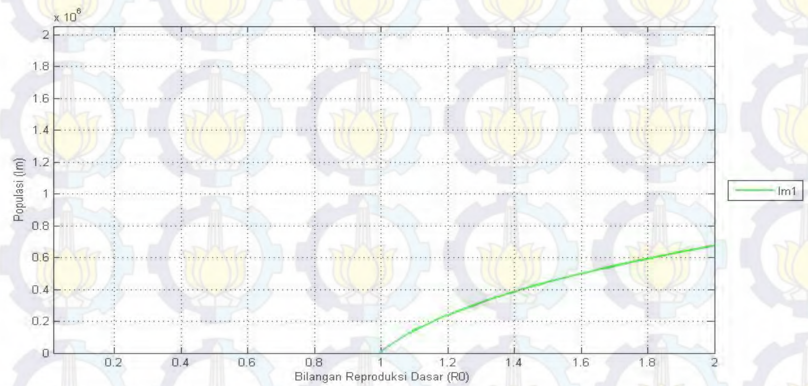
$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)\mu_m}}$$

Dengan $\beta_h = \left(1 + \frac{\mu_h}{\gamma_h}\right) \frac{(\eta_h + \mu_h)\mu_m}{B^2 \beta_m}$

ANALISIS BIFURKASI

$$f(I_m^*) = (AI_m^{*3} + BI_m^{*2} + CI_m^* + D)I_m^* = 0$$

Ketika salah satu nilai eigen sama dengan nol maka akan diselidiki bifurkasi yang terjadi. Dari hasil analisis diperoleh hasil bifurkasi yang ada. Dapat dilihat gambar berikut

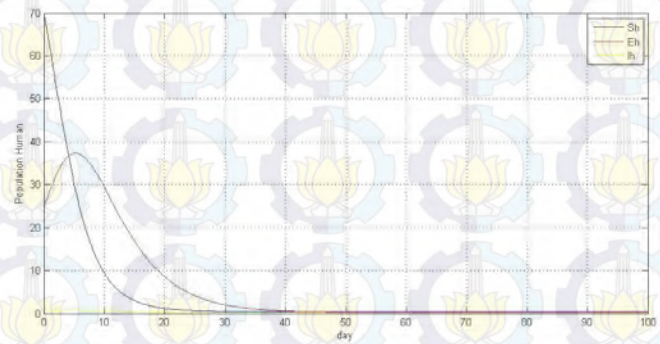


Metode numerik yang digunakan adalah metode numerik Runge- Kutta orde empat. Berikut ini dapat dilihat tabel nilai awal parameter dan sub populasi.

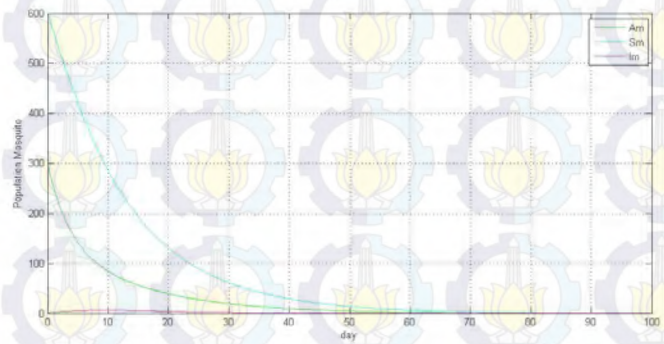
NO	Parameter	Nilai Parameter
1	B	0.8
2	φ	0.1
3	γ_h	0.1667
4	μ_h	0.0000385
5	μ_m	0.1
6	β_h	2.92356
7	β_m	0.375
8	η_h	7
9	η_m	0.08
10	p	0.09
11	κ	3

No	Sub populasi ketika $t = 0$	Nilai awal (per jiwa)
1	S_h	70
2	E_h	25
3	I_h	5
4	A_m	300
5	S_m	600
6	I_m	0
7	N_h	100

Dari nilai awal parameter dan subpopulasi diperoleh grafik Kestabilan sub populasi manusia dan sub populasi nyamuk berikut ini.



Grafik Dinamika Sub populasi manusia



Grafik Dinamika Sub populasi nyamuk

BACK

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada penulisan tugas akhir ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

Dengan mempelajari fenomena yang ada dan diberikan beberapa definisi, diperoleh konstruksi model penyebaran demam berdarah sebagai berikut

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h^* N_h - B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m - pS_h - \mu_h S_h$$

$$\frac{dE_h}{dt} = B\beta_h \frac{S_h}{N_h} I_m + pS_h - \mu_h E_h - \gamma_h E_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h E_h - (\eta_h + \mu_h) I_h$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \varphi\left(1 - \frac{A_m}{kN_m}\right)(S_m + I_m) - (\eta_m + \mu_m) A_m$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \eta_m A_m - (B\beta_m \frac{I_h}{N_h} + \mu_m) S_m$$

$$\frac{dI_m}{dt} = B\beta_m \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m$$

KESIMPULAN

2. Model epidemiologi *SEIR* demam berdarah di Surabaya yang telah dikaji, telah didapatkan titik setimbang dan analisis kestabilan sebagai berikut :

Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, A_m^0, S_m^0, I_m^0)$$

$$E_0 = \left\{\frac{\mu_h N_h}{(p+\mu_h)}, p\frac{\mu_h N_h}{(p+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)}, 0, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\varphi\eta_m}, \frac{kN_h\mathcal{M}}{\mu_m\varphi}, 0\right\}$$

Titik kesetimbangan endemik

$$E_0^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$$

dengan

$$S_h^* = \frac{\mu_h^* N_h^2}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}$$

$$E_h^* = \left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h+\gamma_h)}\right)\left(\frac{\mu_h^* N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}\right)$$

$$I_h^* = \frac{\gamma_h}{(\eta_h+\mu_h)}\left(\frac{B\beta_h I_m^* + pN_h}{(\mu_h+\gamma_h)}\right)\left(\frac{\mu_h N_h}{B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h}\right)$$

$$A_m^* = \frac{\mu_m I_m^*(\mu_h B\beta_m\gamma_h(B\beta_h I_m^* + pN_h) + \mu_m(\eta_h+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)(B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h))}{\eta_m\mu_h^*\gamma_h B\beta_m(B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

$$S_m^* = \frac{\mu_m I_m^*(\eta_h+\mu_h)(\mu_h+\gamma_h)(B\beta_h I_m^* + pN_h + \mu_h N_h)}{\mu_h^*\gamma_h B\beta_m(B\beta_h I_m^* + pN_h)}$$

LANJUTAN KESIMPULAN

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $\mathcal{R}_0 > 1$

dengan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) yaitu :

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_h B^2 \beta_m \beta_h}{\mu_m(\gamma_h + \mu_h)(\eta_h + \mu_h)}}$$

dan *rate transmission*

$$\beta_h \geq \beta_{h_{min}} = \left(1 + \frac{\mu_h}{\gamma_h}\right)\frac{(\eta_h + \mu_h)\mu_m}{B^2 \beta_m}$$

3.Perubahan jenis kurva bifurkasi dipengaruhi oleh perubahan nilai $\mathcal{R}_0$ yang mempengaruhi nilai A,B, C, dan D sehingga nilai titik puncaknya pun berubah. Bifurkasi maju terjadi pada saat titik puncak dari sistem persamaan $f(I_m)$ yaitu pada saat I_m bernilai real positif.

4.Simulasi model epidemiologi *SEIR* demam berdarah dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta menghasilkan grafik dari kesetimbangan jika nilai h = 0.01. Serta pengaruh dari input nilai awal pada populasi ,jika nilai awal pada populasi lebih sedikit maka waktu untuk menuju titik setimbang semakin cepat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Radhianti, R. 2012. *"Simulasi dan Analisa Kestabilan Model Matematika Mengenai Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia"*. Bandung : Skripsi Jurusan Matematika UIN Gunung Djati.

[2] Rangkuti, Y.M dan Side, S. 2013. *"Solusi Numerik Pemodelan Matematika SIR dan SEIR untuk Penularan Demam Berdarah dengan Metode Semi Analitik di Sulawesi Selatan"*. Medan : Laporan Akhir Tahun I Penelitian Fundamental Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan.

[3] Widi, C.A, Nataliani, Y, dan Hendry. 2011. *"Deteksi Dan Prediksi Daerah Endemis Demam Berdarah Dengue (Dbd) Dengan Pemodelan Matematis Susceptible, Infected, Recovered (SIR) (Studi Kasus : Kabupaten Semarang)"*. Semarang : Tugas Akhir Jurusan Teknologi Informasi Aiti.

[4] Noorani, M.S.M. 2012. *"SEIR Model For Transmission Of Dengue Fever In Selangor Malaysia"*. Selangor : International Journal of Modern Physics. Vol. 9

[5] Rodrigues, Helena Sofia, Monteiro, M. Teresa T, dan Torres, Delfim F.M. 2013. *"Sensitivity Analysis in a Dengue Epidemiological Model"*. Portugal : Conference Paper.

[6] Achmadi, F.U. Buletin Jendela Epidemiologi, Volume 2, Agustus 2010 hal 17

[7] Driessche, P. v., & Wetmough, J. (2002), "*Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*", *Mathematical Biosciences,* Vol. 180, hal. 29-48.

[8] Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008), "*Differential Equations and Linear Algebra*", 6th edition, Prentice-Hall, New Jersey..