



PENERAPAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER* UNTUK ESTIMASI TRANSMISI *FILARIASIS*

Oleh:

Mochamad Isman Safii (1211100033)

Dosen Pembimbing:

Prof. DR. Erna Apriliani, M.Si

**JURUSAN MATEMATIKA - FMIPA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016**

Abstrak

Filariasis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh cacing filaria yang ditularkan melalui berbagai jenis nyamuk. Penularan Filariasis melibatkan manusia dan nyamuk. Dalam permasalahan tersebut dilakukan analisa model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan. Pada model ini didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada setiap titik kesetimbangan tersebut yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Selain itu dilakukan simulasi kestabilan lokal, hasil dari simulasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik menunjukkan stabil asimtotik. Pada model ini juga akan diestimasi penyebarannya dengan menggunakan Extended Kalman Filter. Extended Kalman Filter adalah perluasan dari metode Kalman Filter yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem nonlinear dan kontinu. Awalnya dilakukan pendiskritan model terhadap waktu.

Hasil akhir dari estimasi tersebut berupa grafik dan nilai error (ne) pada setiap populasinya. Pada populasi S_h diinterval $0.27 < ne < 0.74$, pada populasi A diinterval $0.04 < ne < 0.12$, pada populasi K diinterval $0.48 < ne < 1.16$, pada populasi S_v diinterval $0.14 < ne < 0.32$, dan pada populasi I_v diinterval $0.21 < ne < 0.94$.

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG MASALAH

1.2

1.3

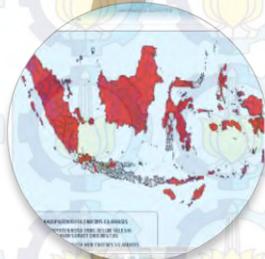
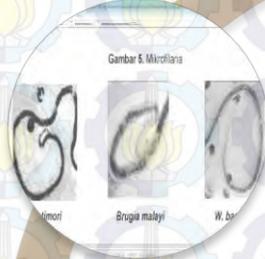
1.4

1.5

Diperkirakan sekitar 20% penduduk dunia atau 1,1 milyar penduduk di 83 Negara berisiko terinfeksi *Filariasis*

Jumlah penderita kronis di Indonesia pada tahun 1999 masih tinggi dengan prevalensi mikrofilaremia 3,1%

Sampai tahun 2013 dari data dinas kesehatan jawa timur jumlah penderita sebanyak 341 orang



Estimasi transmisi *Filariasis*



Model matematika dari transmisi *filariasis* dengan proses pengobatan

Menggunakan *Extended Kalman Filter* dan Analisis Kestabilan



Rumusan masalah yang ada dalam tugas akhir ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1.

- Bagaimana menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit ?

2.

- Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan beserta simulasinya ?

3.

- Bagaimana estimasi dari transmisi *filariasis* dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* ?

4.

- Bagaimana simulasi dari hasil estimasi transmisi *filariasis* menggunakan metode *Extended Kalman Filter* ?



Batasan masalah dalam tugas akhir ini sebagai berikut:

1

- Populasi total manusia dan nyamuk adalah konstan.

2

- Jenis cacing dan nyamuk diabaikan.

3

- Faktor lingkungan diabaikan.

4

- Model matematika dan parameter yang digunakan berdasarkan pada referensi.

5

- Solusi permasalahan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dengan bantuan program Matlab.



Dari permasalahan yang ada maka tujuan dari tugas akhir ini adalah :

1.

- Menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemic serta titik kesetimbangan bebas penyakit sehingga dapat diketahui terjadi penyebaran penyakit atau tidak.

2.

- Menginterpretasikan hasil analisis dari model transmisi penyakit Filariasis dengan proses pengobatan beserta simulasinya.

3.

- Mengestimasi transmisi *filariasis* dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*.

4.

- Mengetahui analisis dan simulasi dari pemodelan matematika transmisi *filariasis*.



Manfaat yang diharapkan dari usulan tugas akhir ini adalah:

1.

- Mengetahui dinamika penyebaran penyakit Filariasis.

2.

- Sebagai bahan pertimbangan pencegahan transmisi *Filariasis* untuk meminimalisir penderita yang diakibatkan oleh penyakit tersebut.

TINJAUAN PUSTAKA

2.1

FILARIASIS

2.2

2.3

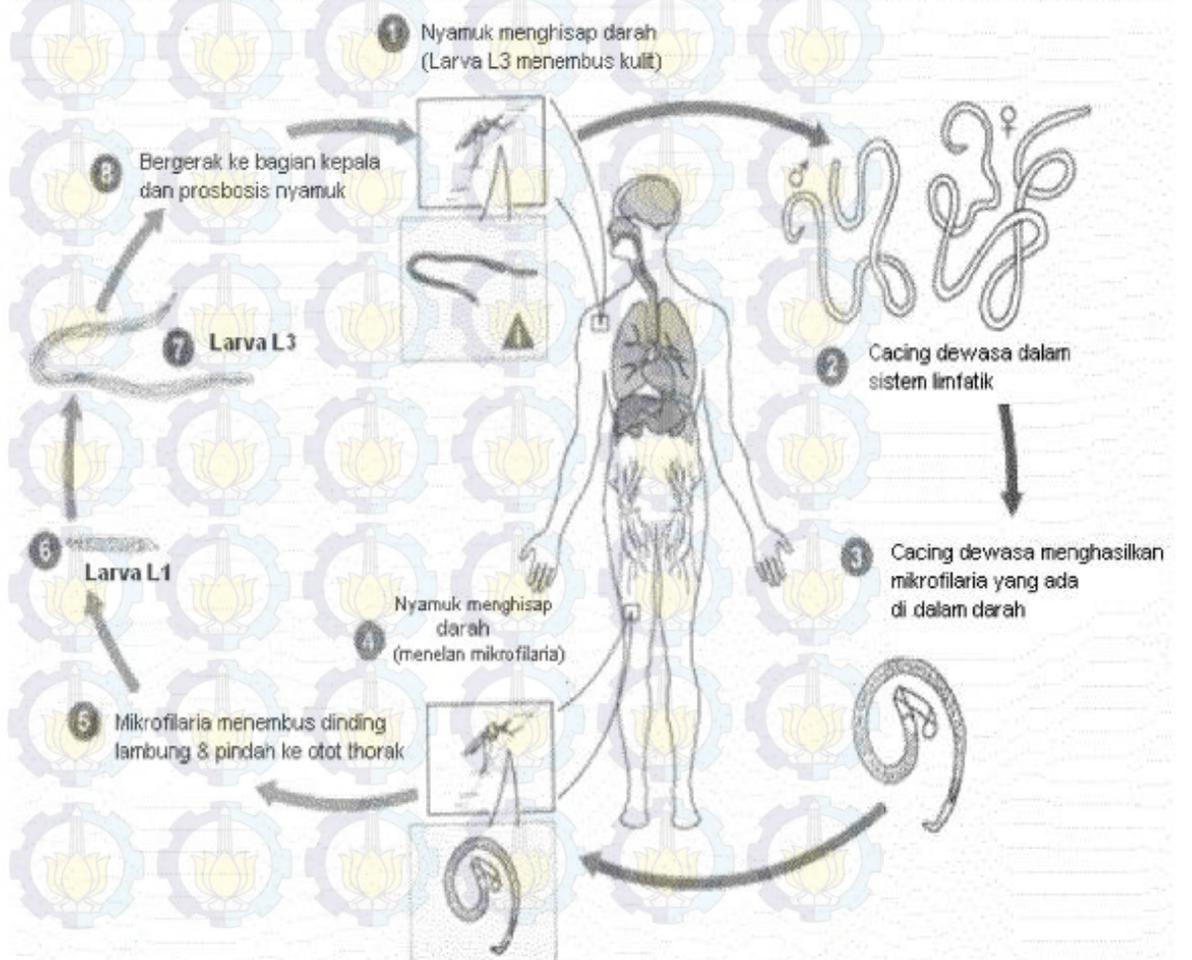
2.4

2.5

Filariasis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh cacing filaria yang ditularkan melalui berbagai jenis nyamuk. Terdapat tiga spesies cacing penyebab Filariasis yaitu : *Wuchereria bancrofti*; *brugia malayi* dan *Brugia timori*. Cacing tersebut hidup di kelenjar dan saluran getah bening sehingga menyebabkan kerusakan pada sistem limfatik yang dapat menimbulkan gejala akut dan kronis. Gejala akut berupa peradangan kelenjar dan saluran getah bening (adenolimfangitis) terutama di daerah pangkal paha dan ketiak tetapi dapat pula di daerah lain. Gejala kronis terjadi akibat penyumbatan aliran limfe terutama di daerah yang sama dengan terjadinya peradangan dan menimbulkan gejala.

FASE DALAM TUBUH NYAMUK

FASE DALAM TUBUH MANUSIA



Gambar 2.1 Proses Infeksi Penyakit *Filariasis*



Model transmisi *Filariasis*

Model transmisi penyakit filariasis ini dengan proses pengobatan. Pengobatan dilakukan pada populasi manusia pembawa penyakit (A) dengan asumsi pengobatan jika di dalam darahnya mengandung mikrofilaria dan saat temukan orang terinfeksi filaria (carier) dari proses pemeriksaan darah jari.[3]

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h \quad (2.1)$$

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A \quad (2.2)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (2.3)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v \quad (2.4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v \quad (2.5)$$

Keterangan :

- S_h : Populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*
- A : Populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit
- K : Populasi manusia cacat kronis
- N_h : populasi total manusia
- S_v : populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria
- I_v : Populasi nyamuk terinfeksi
- R_h : Rata-rata pertambahan manusia per satuan waktu
- μ_h : rata-rata kematian alami manusia per satuan waktu
- p_h : rata-rata keberhasilan transmisi filaria dari nyamuk terinfeksi ke manusia sehat
- b : rata-rata gigitan pada manusia yang disebabkan satu ekor nyamuk per satuan waktu
- δ : laju munculnya gejala klinis per satuan waktu
- R_v : rata-rata pertambahan nyamuk per satuan waktu
- μ_v : rata-rata kematian alami nyamuk per satuan waktu
- p_v : rata-rata keberhasilan transmisi filaria dari manusia terinfeksi ke nyamuk sehat
- n : Banyaknya orang yang diperiksa per satu orang kronis yang ditemukan
- α : rata-rata efektifitas obat per satuan waktu

METODE BEDA HINGGA

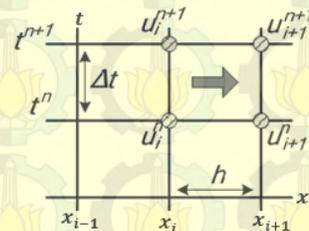
Metode beda hinga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Secara umum metode beda hinga adalah metode yang mudah digunakan dalam menyelesaikan problem fisis yang mempunyai bentuk geometri yang teratur.

Skema Maju

Persamaan pada skema maju dengan $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t_i+h) - u(t_i)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

Pada skema maju, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i + 1$ yang berada di depannya.



Skema maju waktu:

Laju perubahan u terhadap t di titik $x = i$,
 $x = i + 1$ pada waktu $t = t^n$, $t = t^{n+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} \text{ atau } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$



- Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) adalah perluasan dari metode kalman filter yang dapat digunakan untuk mengestimasi model system nonlinear dan kotinu. Pada extended kalman filter, sama halnya dengan kalman filter, estimasi dilakukan dengan dua tahapan, yaitu dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (time update) dan selanjutnya tahap koreksi (measurement update) terhadap data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Algoritma EKF

Model Sistem dan Model Pengukuran

$$x_{k+1} = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$

$$z_k = h(x_k, v_k)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

Inisialisasi

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

$$P_0 = P_{x_0}$$

Tahap Prediksi

Estimasi : $\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$

Kovariansi error : $P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T$

Tahap Koreksi (measurement update)

Kalman Gain : $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T]^{-1}$

Estimasi : $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0))$

Kovariansi error : $P_k = [I - K_k H_k] P_k^-$



Model Sistem dan Model Pengukuran

$$x_{k+1} = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$

$$z_k = h(x_k, v_k)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

Inisialisasi

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

$$P_0 = P_{x_0}$$

Tahap Prediksi

Estimasi : $\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$

Kovariansi error : $P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T$

Tahap Koreksi (measurement update)

Kalman Gain : $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T]^{-1}$

Estimasi : $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0))$

Kovariansi error : $P_k = [I - K_k H_k] P_k^-$

Dengan :

x_k = variabel keadaan sistem pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0 dan kovarian awal P_{x_0}

u_k = variabel input deterministik pada waktu k

w_k = noise pada sistem dengan mean $\bar{w}_k = 0$ dan kovarian Q_k

Z_k = variabel pengukuran

v_k = noise pada pengukuran dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R_k .





RMSE merupakan ukuran ketelitian dengan menghitung akar rata-rata kuadrat selisih dari solusi ideal (analitik) atau solusi numerik dengan hasil estimasi dari seluruh iterasi yang dilakukan

$$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(x_i - F_i)^2}{n}}$$





METODE PENELITIAN

METODE PENELITIAN

1. Studi literatur

2. Pemodelan Persamaan Transmisi *Filariasis*

3. Tahap Mencari Titik Keseimbangan

4. Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal

5. Estimasi Transmisi *Filariasis* dengan *Metode Extended Kalman Filter*

6. Simulasi Model

7. Kesimpulan dan Saran



Analisis dan Pembahasan

Model Transmisi Penyakit *Filariasis*

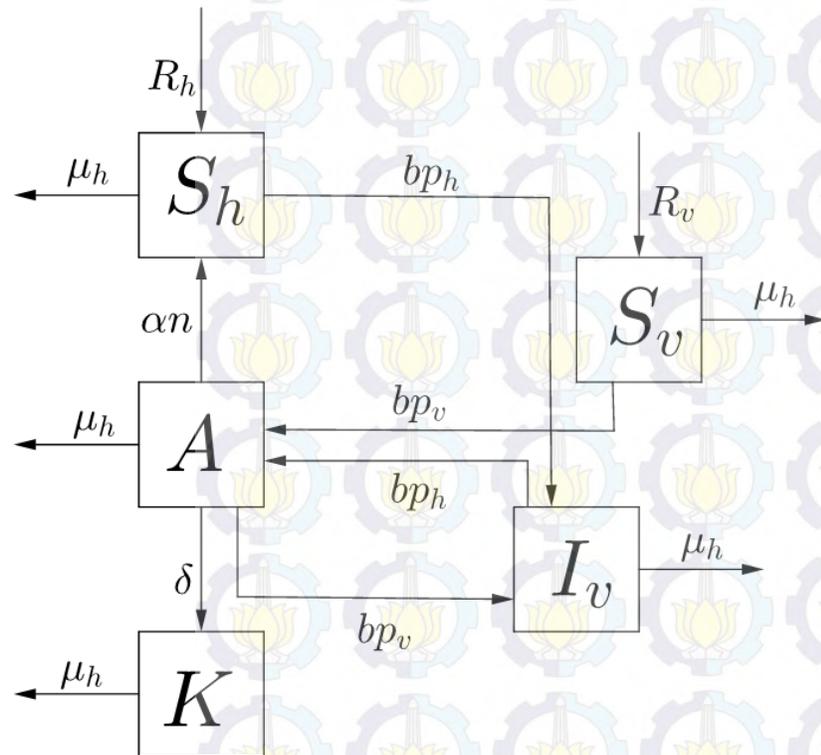
Pada model transmisi penyakit *Filariasis* mempunyai definisi – definisi sebagai berikut :

a. Populasi dibagi menjadi 5 kelompok individu yaitu :

- S_h adalah populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*.
- A adalah populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit.
- K adalah populasi manusia cacat kronis.
- S_v adalah populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria.
- I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi.

Model Transmisi Penyakit *Filariasis*

Diagram Kompartemen



Keterangan :

- S_h : Populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*
- A : Populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit
- K : Populasi manusia cacat kronis
- N_h : populasi total manusia
- S_v : populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria
- I_v : Populasi nyamuk terinfeksi
- R_h : Rata-rata pertambahan manusia per satuan waktu
- μ_h : rata-rata kematian alami manusia per satuan waktu
- p_h : rata-rata keberhasilan transmisi filaria dari nyamuk terinfeksi ke manusia sehat
- b : rata-rata gigitan pada manusia yang disebabkan satu ekor nyamuk per satuan waktu
- δ : laju munculnya gejala klinis per satuan waktu
- R_v : rata-rata pertambahan nyamuk per satuan waktu
- μ_v : rata-rata kematian alami nyamuk per satuan waktu
- p_v : rata-rata keberhasilan transmisi filaria dari manusia terinfeksi ke nyamuk sehat
- n : Banyaknya orang yang diperiksa per satu orang kronis yang ditemukan
- α : rata-rata efektifitas obat per satuan waktu



Model Transmisi Penyakit *Filariasis*

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h$$

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v$$

$$\begin{aligned} S_h(0) &> 0, & A(0) &\geq 0 & K(0) &\geq 0 \\ S_v(0) &> 0, & I_v(0) &\geq 0 & & \end{aligned}$$

Dengan $N_h = S_h + A + K$ dan $N_v = S_v + I_v$



Model Transmisi Penyakit *Filariasis*

Setelah direduksi

$$\frac{dA}{dt} = bI_v p_h \left(\frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right) - \delta A - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} nK - \mu_h A$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K$$

$$\frac{dI_v}{dt} = b \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right) \frac{A\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v$$



Titik Kesetimbangan

Pada model transmisi penyakit *Filariasis* mempunyai definisi – definisi sebagai berikut :

a. Populasi dibagi menjadi 5 kelompok individu yaitu :

- S_h adalah populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*.
- A adalah populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit.
- K adalah populasi manusia cacat kronis.
- S_v adalah populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria.
- I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi.



Titik Kesetimbangan

Keadaan setimbang adalah keadaan dimana perubahan banyaknya individu dari setiap populasi A, K dan I_v sepanjang waktu adalah nol. Dengan mengambil $\frac{dA}{dt} = 0, \frac{dK}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$ maka akan diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut :

$$K^* = \frac{\delta A^*}{\mu_h}$$

$$I_v^* = \frac{bR_v A^* \mu_h p_v}{bA^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

terdapat tiga kondisi untuk titik kesetimbangan endemik A^* yaitu

$$A_1^* = 0$$

$$A_2^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Titik Kesetimbangan

Dengan

$$a = -b\mu_v\mu_h p_v \alpha n \delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Terlihat bahwa nilai $a < 0$ dan $b < 0$

untuk $c < 0$ jika $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h < \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

untuk $c > 0$ jika $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h > \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

Akan diselidiki pada persamaan A_2^* dan A_3^* sehingga diperoleh :

Untuk $a < 0, b < 0, c < 0$ maka didapat

Nilai $A_2^* < 0$ dengan syarat $b^2 > 4ac$

Nilai $A_3^* > 0$ dengan syarat $b^2 > 4ac$ dan $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$

Untuk $a < 0, b < 0, c > 0$ maka didapat

Nilai $A_2^* < 0$

Nilai $A_3^* > 0$ dengan syarat $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$



Titik Kesetimbangan

Setelah diselidiki, maka A_2^* bukan titik kesetimbangan karena bernilai negative sehingga diperoleh :

Saat $A_1^* = 0$ maka didapat $K_1^* = 0$ dan $I_{v(1)}^* = 0$

Saat $A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ maka didapat $K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$ dan $I_{v(3)}^* = \frac{bR_v A_3^* \mu_h p_v}{bA_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$

Dapat dilihat dari kedua kondisi itu, pada kondisi pertama didapat A_1^* , K_1^* , dan $I_{v(1)}^*$ bernilai nol. Ini menunjukkan bahwa pada kondisi pertama dalam keadaan bebas penyakit sehingga didapatkan titik kesetimbangannya adalah

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0, 0, 0)$$

Sedangkan pada kondisi kedua menunjukkan bahwa pada kondisi tersebut adalah titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* dapat ditulis sebagai berikut:

$$E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$



Analisis Kestabilan

Proses Linearisasi

- $T = bI_V p_h \left(\frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right) - \delta A - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} nK - \mu_h A$

diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial A} = bI_V p_h \left(\frac{-\mu_h}{R_h} \right) - \delta - \alpha \frac{\mu_h}{R_h} nK - \mu_h$$

$$\frac{\partial T}{\partial K} = bI_V p_h \left(\frac{-\mu_h}{R_h} \right) - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} n$$

$$\frac{\partial T}{\partial I_V} = b p_h \left(\frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right)$$

- $U = \delta A - \mu_h K$

diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \delta$$

$$\frac{\partial U}{\partial K} = -\mu_h$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_V} = 0$$



Analisis Kestabilan

- $V = b \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right) \frac{A \mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v$

diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial I_v} = -b A \frac{\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial A} & \frac{\partial T}{\partial K} & \frac{\partial T}{\partial I_v} \\ \frac{\partial U}{\partial A} & \frac{\partial U}{\partial K} & \frac{\partial U}{\partial I_v} \\ \frac{\partial V}{\partial A} & \frac{\partial V}{\partial K} & \frac{\partial V}{\partial I_v} \end{bmatrix}$$



Analisis Kestabilan

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0,0,0)$ menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -(\delta + \mu_h) & 0 & b p_h \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b \mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$



Analisis Kestabilan

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$
$$\begin{vmatrix} \lambda + (\delta + \mu_h) & 0 & -bp_h \\ -\delta & \lambda + \mu_h & 0 \\ \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & \lambda + \mu_v \end{vmatrix} = 0$$



Analisis Kestabilan

Mencari determinan menggunakan metode *Sarrus* sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan masing - masing nilai untuk a_1 , a_2 dan a_3 adalah

$$a_1 = (\mu_v + 2\mu_h + \delta)$$

$$a_2 = \left(2\mu_h\mu_v + \mu_v\delta + \delta\mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2\mu_h p_v R_v p_h}{R_h\mu_v} \right)$$

$$a_3 = \left(\delta\mu_h\mu_v + \mu_h^2\mu_v - \frac{b^2\mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h\mu_v} \right)$$

Analisis Kestabilan

Dengan rumus Routh - Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 4.1 Routh - Hurwitz

$a_0 = 1$	a_2	$a_4 = 0$
a_1	a_3	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	0
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	0



Analisis Kestabilan

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$a_1 = (\mu_v + 2\mu_h + \delta)$$

terlihat bahwa nilai a_1 bernilai positif ($a_1 > 0$)

untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

nilai b_1 akan bernilai positif ($a_1 a_2 - a_3 > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$) dan $a_1 a_2 > a_3$

maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_2 = \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

nilai a_2 akan bernilai positif ($a_2 > 0$) jika $(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$



Analisis Kestabilan

untuk nilai $a_1 a_2 > a_3$

$$\Leftrightarrow (\mu_v + 2\mu_h + \delta) \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right) > \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$= a_3$$

nilai c_1 akan bernilai positif jika ($a_3 > 0$)

maka akibatnya nilai a_3 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_3 = \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

nilai a_3 akan bernilai positif ($a_3 > 0$) jika $(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$



Analisis Kestabilan

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel- variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$.

Setelah didapatkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit maka selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan endemik



Analisis Kestabilan

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan endemik yaitu $E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$ menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h\right) & -\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}\right) & b p_h \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h}\right) \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v}\right) & 0 & -b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v \end{bmatrix}$$



Analisis Kestabilan

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h & - \left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) & b p_h \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h} \right) \\ \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{\delta}{\mu_v} \right) & \lambda + \mu_h & 0 \\ \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v} \right) & 0 & \lambda + b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \end{vmatrix} = 0$$

Analisis Kestabilan

Mencari determinan menggunakan metode *Sarrus* sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan masing - masing nilai untuk a_1 , a_2 dan a_3 adalah

$$a_1 = bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2\mu_h + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta$$

$$a_2 = 2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* bA_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} +$$

$$\delta bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} -$$

$$\frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_2^*}{R_h^2} + \frac{\delta bI_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$



Analisis Kestabilan

$$\begin{aligned}
 a_3 &= bI_{v(3)}^* p_h \frac{\mu_h^2}{R_h} \mu_v + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v \\
 &+ \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} \\
 &- \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} \\
 &+ \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}
 \end{aligned}$$

Analisis Kestabilan

Dengan rumus Routh - Hurwitz yang diatas maka dapat dijabarkan sebagai berikut :
terlihat bahwa nilai a_1 bernilai positif ($a_1 > 0$)

untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

nilai b_1 akan bernilai positif ($a_1 a_2 - a_3 > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$) dan $a_1 a_2 > a_3$

maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$\text{nilai } a_2 \text{ akan bernilai positif jika } \left(2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$



Analisis Kestabilan

untuk nilai $a_1 a_2 > a_3$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$= a_3$$

nilai c_1 akan bernilai positif jika ($a_3 > 0$)

maka akibatnya nilai a_3 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

nilai a_3 akan bernilai positif jika

$$\left(b I_{v(3)}^* p_h \frac{\mu_h^2}{R_h} \mu_v + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$



Analisis Kestabilan

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel - variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$.

Simulasi Kestabilan

parameter dan nilai awal yang digunakan sebagai berikut :

Tabel 4.2 Nilai Parameter

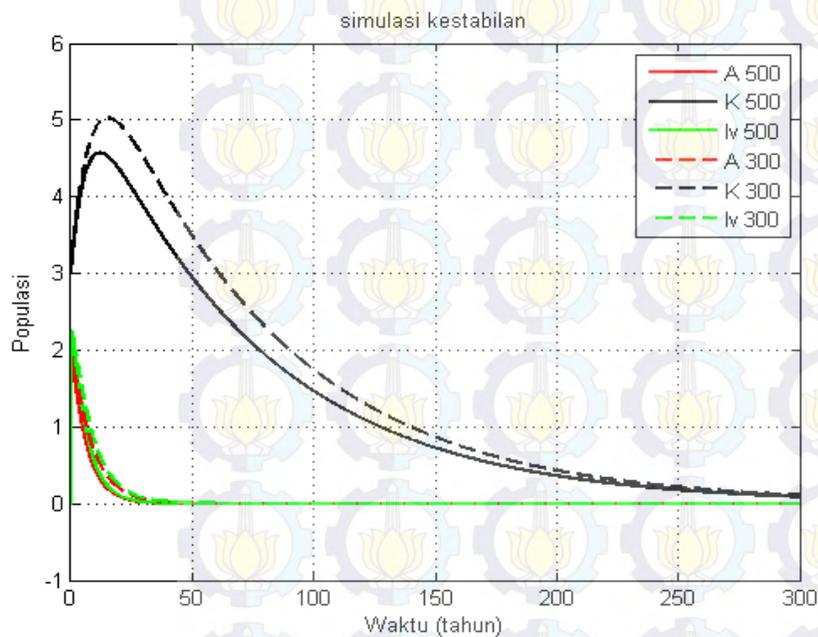
NO	Parameter	Nilai Parameter
1	R_h	235
2	μ_h	0.014
3	p_h	0.001
4	δ	0.2
5	R_v	45000
6	μ_v	12.67
7	p_v	0.5
8	n_1	300
9	n_2	500
10	α	0.9

Tabel 4.3 Nilai awal

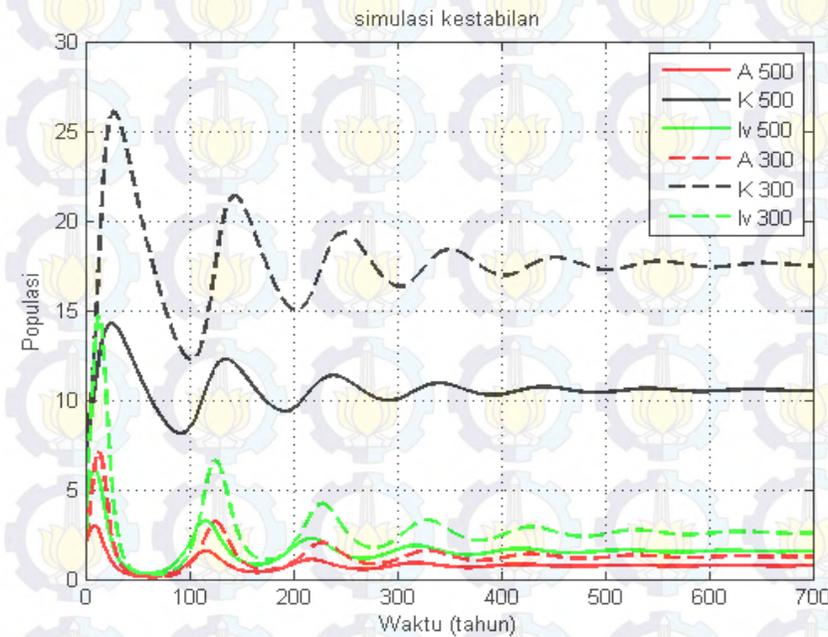
No	Populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	A	2
2	I_v	0

Simulasi Kestabilan

Hasil simulasi dengan mengambil parameter dan nilai awal berdasarkan yang terdapat pada Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 Didapatkan grafik kestabilan sebagai berikut :



Gambar 2. Grafik Kestabilan Bebas Penyakit dengan $b = 143, K = 3, t = 300$



Gambar 3. Grafik Kestabilan Endemik dengan $b = 243, K = 7, t = 700$



Penerapan Extended Kalman Filter

Setelah dianalisa kestabilan, selanjutnya dilakukan estimasi dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*. Sebelumnya dilakukan diskritisasi model dengan Beda Hingga maju maka didapat persamaan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \mu_h x_1(i) \right) \Delta t + x_1(i) \\ \left(b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \delta x_2(i) - \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - \mu_h x_2(i) \right) \Delta t + x_2(i) \\ \left(\delta x_2(i) - \mu_h x_3(i) \right) \Delta t + x_3(i) \\ \left(R_v - b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_4(i) \right) \Delta t + x_4(i) \\ \left(b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_5(i) \right) \Delta t + x_5(i) \end{bmatrix}$$



Penerapan Extended Kalman Filter

Model sistem

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k$$

Persamaan pengukuran

$$z_k = Hx_k + v_k$$

Penerapan algoritma *Extended Kalman Filter*



Simulasi EKF

Tabel 4.4 Nilai Awal

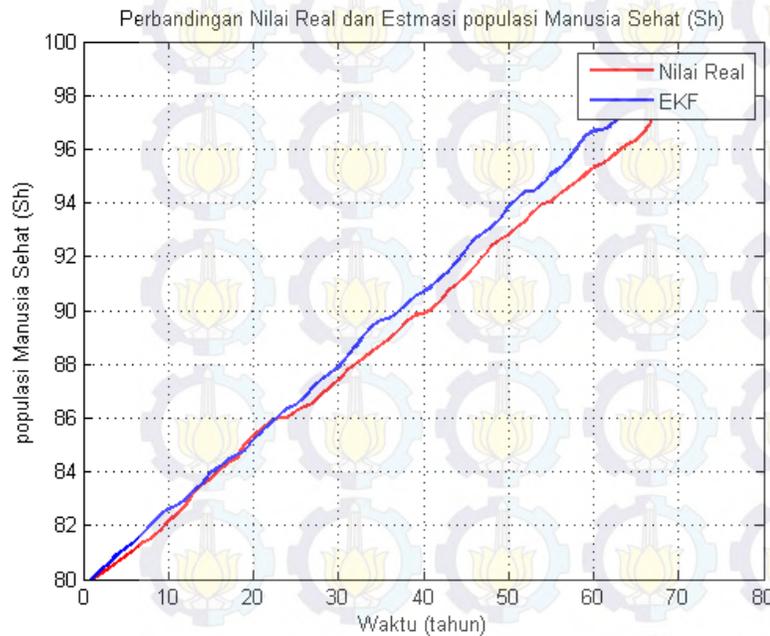
No	populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	S_h	80
2	A	2
3	K	7
4	S_v	15
5	I_v	0

Tabel 4.5 Nilai Parameter

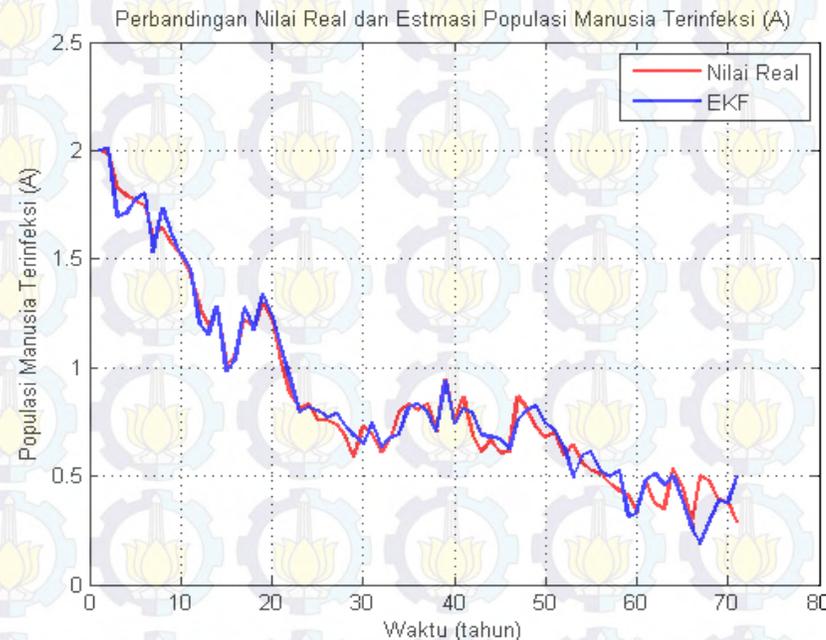
NO	Parameter	Nilai Parameter
1	R_h	235
2	μ_h	0.014
3	p_h	0.001
4	b	243
5	δ	0.2
6	R_v	45000
7	μ_v	12.67
8	p_v	0.5
10	n	500
11	α	0.9
12	N_h	87
13	dt	0.001

Simulasi EKF

Hasil simulasi dan nilai RMSE dengan mengambil parameter dan nilai awal berdasarkan yang terdapat pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5 dengan iterasi sebanyak 70 didapatkan grafik dengan waktu komputasi sebesar 3,183017 detik sebagai berikut

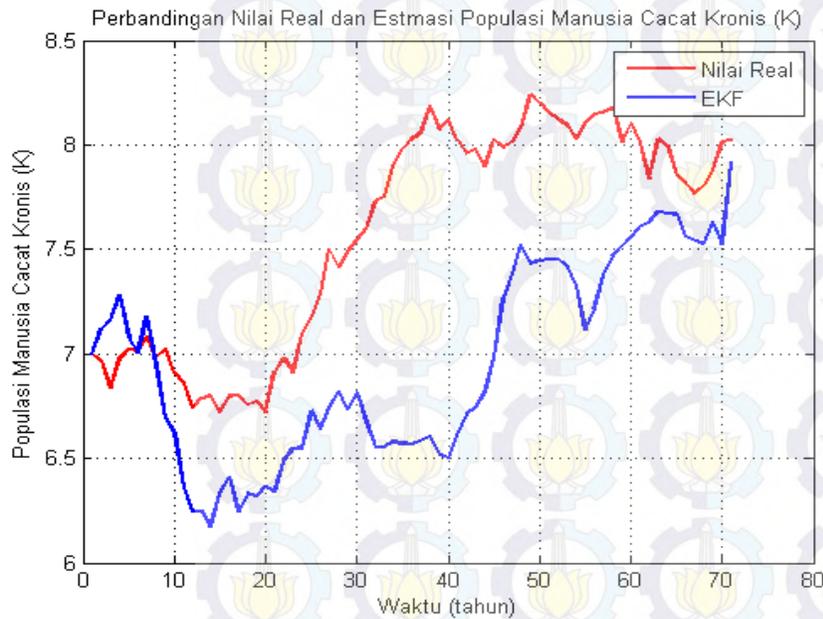


Gambar 4. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Sehat (S_h)

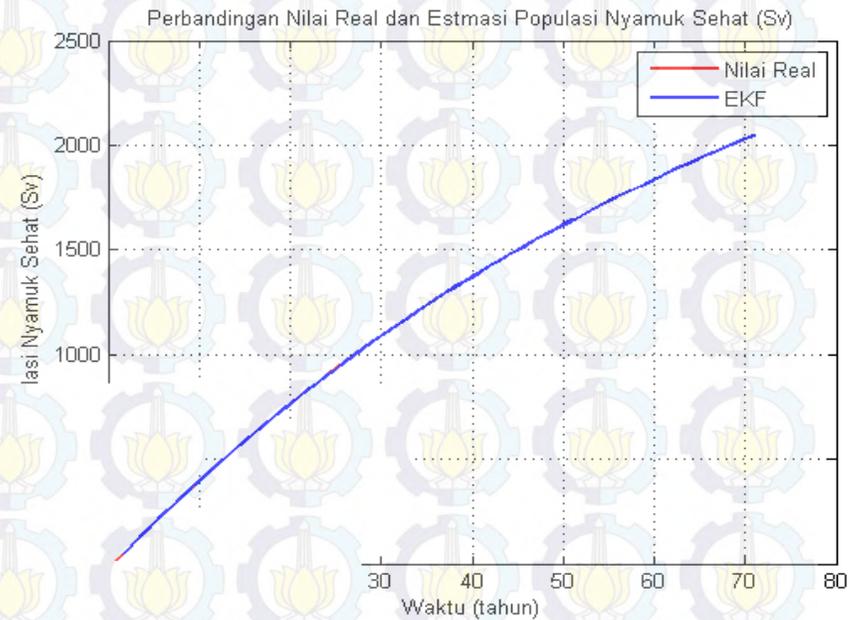


Gambar 5. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Terinfeksi (A)

Simulasi EKF

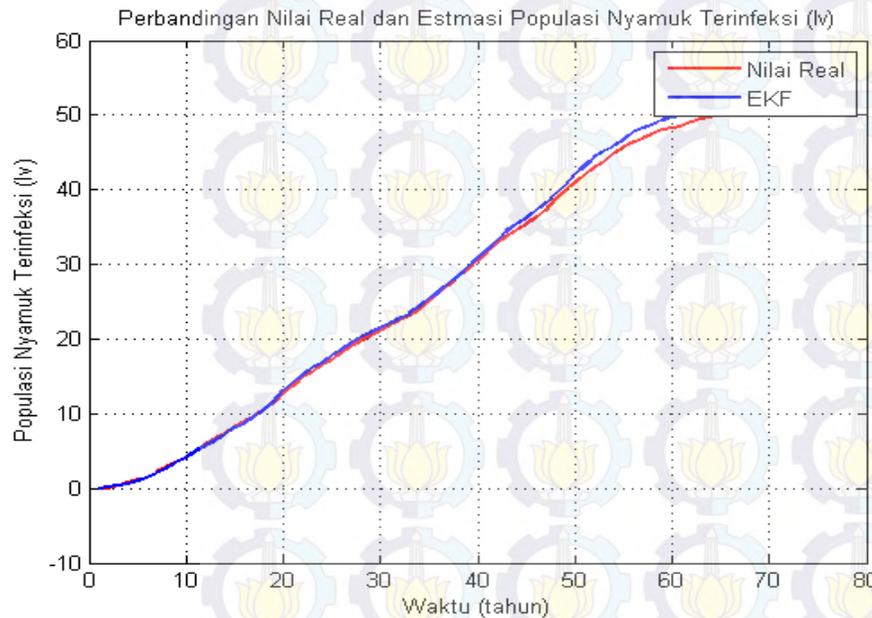


Gambar 6. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Cacat Kronis (K)

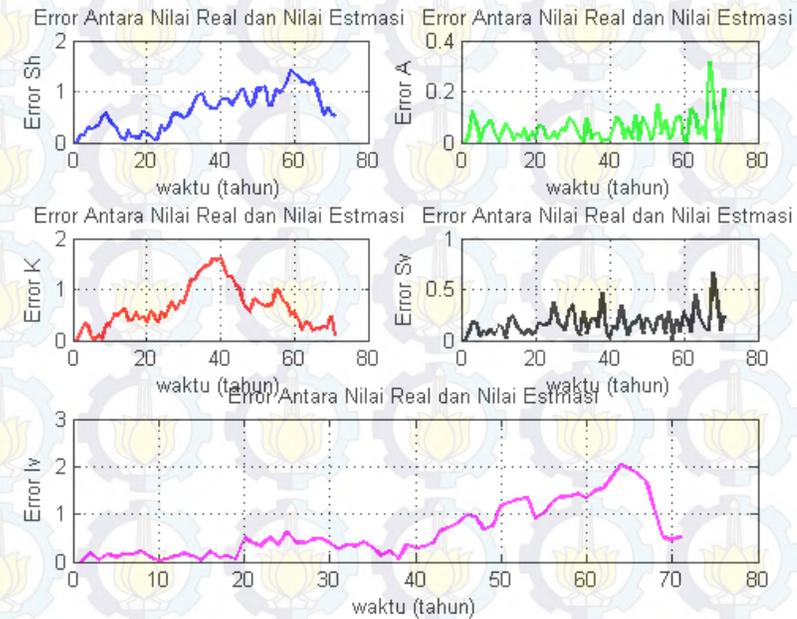


Gambar 7. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Sehat (S_v)

Simulasi EKF



Gambar 8. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Terinfeksi (I_v)



Gambar 9. Grafik *Error* antara Nilai Real dan Nilai Estimasi Semua Populasi

Analisis dan Pembahasan

Simulasi EKF

Tabel 4.6 Nilai rata – rata RMSE

Simulasi ke	Nilai rata – rata RMSE				
	S_h	A	K	S_v	I_v
1	0.7414	0.0728	0.7725	0.2042	0.8377
2	0.5243	0.0578	0.4831	0.1449	0.6182
3	0.7098	0.0926	0.5330	0.2341	0.9467
4	0.4393	0.0536	0.8032	0.1743	0.3232
5	0.3166	0.0777	0.9310	0.2119	0.2119
6	0.2698	0.0492	1.1651	0.1692	0.4359
7	0.3713	0.0917	0.5593	0.1956	0.7022
8	0.4690	0.0966	0.5283	0.2512	0.8088
9	0.6099	0.0627	0.7904	0.3287	0.5126
10	0.3817	0.1237	0.5199	0.2536	0.4587



Kesimpulan

1. Model transmisi penyakit *Filariasis* yang telah dikaji, telah didapatkan titik setimbang dan analisis kestabilan sebagai berikut :
 - a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0,0,0)$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$



Kesimpulan

b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_3 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$

dengan

$$K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$$

$$I_{v(3)}^* = \frac{bR_v A_3^* \mu_h p_v}{bA_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

$$A_3^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Kesimpulan

dengan pemisalan dipersamaan A_2^* dan A_3^*

$$a = -b\mu_v\mu_h p_v \alpha n \delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h \delta - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$

2. Metode *Extended Kalman Filter* yang digunakan dapat diterapkan untuk mengestimasi transmisi Filariasis. Hal ini berdasarkan *RMS Error* yang diperoleh relatif kecil setiap statenya.

Daftar Pustaka

- [1] Anonim. (2006). “Epidemiologi Filariasi”. Departemen kesehatan republik Indonesia, direktorat jendral PP & PL, Jakarta.
- [2] Supriana, A.K, Serviana, H., Soewono. E. (2008). “A Mathematical Model to Investigate the Long-Term Effects of the Lymphatic *Filariasis* Medical Treatment in Jati Sampurna, West Java”. ITB: Bandung
- [3] Husain, H. S.,(2007). “Model penebaran Penyakit Kaki Gajah di kelurahan Jati Sampurna”. ITB : Bandung
- [4] Djoko, Luknanto. (2003). “Model Matematika”. Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta.
- [5] Welch, G. Dan Bishop, G. (2011). “An introduction to the Kalman Filter”. University of North Carolina: Chapel Hil, Amerika.
- [6] Thieme HR. (1992). “Epidemic and Demographic Interaction in The Spread of Potentially Fatal Diseases in Growing Populatio”. Math Biosci.
- [7] Sun, C, Hsieh, Ying-Hen. (2010). “Global Analysis of an SEIR Model with Varying Population Size and Vaccinatio”. Applied Mathematical Modelling
- [8] Makridakis, S., Wheelwright, S.C., dan McGee, V.E. (1999). “Metode dan Aplikasi Peramalan”. Edisi kedua. Jakarta: Binarupa Aksara.