



TUGAS AKHIR - SM141501

**PENERAPAN METODE *EXTENDED KALMAN*
FILTER UNTUK ESTIMASI TRANSMISI
*FILARIASIS***

MOCHAMAD ISMAN SAFII
NRP 1211 100 033

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016



FINAL PROJECT - SM141501

**IMPLEMENTATION OF EXTENDED KALMAN
FILTER FOR ESTIMATION OF FILARIASIS
TRANSMISSION**

MOCHAMAD ISMAN SAFII
NRP 1211 100 033

Supervisor
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

**PENERAPAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER*
UNTUK ESTIMASI TRANSMISI *FILARIASIS***

***IMPLEMENTATION OF EXTENDED KALMAN FILTER FOR
ESTIMATION OF FILARIASIS TRANSMISSION***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

**MOCHAMAD ISMAN SAFII
NRP. 1211 100 033**

Menyetujui,
Pembimbing

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, 2 Februari 2016

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “**Penerapan Metode *Extended Kalman Filter* Untuk Estimasi Transmisi *Filariasis*”** sebagai syarat kelulusan dalam menempuh program S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
 2. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir, atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis.
 3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si, Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si, Bapak Dr. Hariyanto, M.Si, dan Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku dosen penguji.
 4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku Ketua Prodi S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS.
 5. Bapak Drs. Soetrisno, MI.Komp. selaku dosen wali.
 6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA ITS.
 7. Teman – teman angkatan 2011 Jurusan Matematika ITS atas dukungan yang telah diberikan kepada penulis
- Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik dari berbagai pihak sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga laporan ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Januari 2016
Penulis

Special Thank's to :

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang – orang terdekat penulis. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

- Bapak Ismanu, Ibu Marifah, dan Adik Mochammad Afif Dwi Wahyudi selaku keluarga penulis yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.
- Mbak Lita, Mbak Firdha, Mbak Ngatini, Mas Satria, Eni, Yahya atas semua bantuan yang diberikan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
- Teman – teman “Genggong” yang selalu memberi motivasi dan doa kepada penulis serta teman – teman Matematika angkatan 2011 yang tidak bias disebutkan satu persatu. Terimakasih atas segala dukungan dan kebersamaannya selama kurang lebih 4 tahun ini.
- Teman – teman Kabinet HIMATIKA ITS periode 2013-2014 atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
- Teman – teman Pemandu Berarti yang telah banyak memberikan saran dan dukungan selama mengerjakan Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 <i>Filariasis</i>	5
2.2 Model Matematika.....	5
2.3 Metode Beda Hingga.....	7
2.4 Metode <i>Extended Kalman Filter</i>	8
2.5 Kestabilan Titik Tetap.....	10
2.6 Stabil Asimtotis Lokal.....	10
2.7 Tingkat Ketelitian Estimasi.....	11
BAB III METODE PENELITIAN	13
3.1 Studi Literatur.....	13
3.2 Pemodelan Persamaan Transmisi <i>Filariasis</i> ..	13
3.3 Tahap Mencari Titik Kesetimbangan.....	13
3.4 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal.....	13
3.5 Estimasi Transmisi <i>Filariasis</i> dengan <i>Extended Kalman Filter</i>	14
3.6 Membuat Simulasi Model.....	14

3.7 Kesimpulan dan Saran	14
--------------------------------	----

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	17
--	----

4.1 Model Transmisi Penyakit <i>Filariasis</i> dengan Pengobatan.....	17
---	----

4.2 Titik Keseimbangan Model Transmisi Penyakit <i>Filariasis</i>	24
---	----

4.3 Analisis Kestabilan	27
-------------------------------	----

4.4 Simulasi Kestabilan Lokal	41
-------------------------------------	----

4.5 Implementasi Algoritma EKF pada Model Transmisi Penyakit <i>Filariasis</i>	47
--	----

4.6 Simulasi <i>Extended Kalman Filter</i>	57
--	----

BAB V PENUTUP	65
----------------------------	----

5.1 Kesimpulan.....	65
---------------------	----

5.2 Saran	66
-----------------	----

DAFTAR PUSTAKA	67
-----------------------------	----

LAMPIRAN

BIODATA PENULIS

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1. Skema Maju	7
Gambar 3.1. Diagram Alir Penelitian Penelitian	15
Gambar 4.1. Diagram Kompartemen Model Transmisi Penyakit <i>Filariasis</i> dengan Pengobatan	19
Gambar 4.2. Grafik Kestabilan untuk Bebas Penyakit saat $t = 300$	43
Gambar 4.3. Grafik Kestabilan untuk Endemik saat $t = 70$	45
Gambar 4.4. Grafik Kestabilan untuk Endemik saat $t = 700$	47
Gambar 4.5. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Manusia Sehat (S_h)	59
Gambar 4.6. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Manusia Terinfeksi (A)	60
Gambar 4.7. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Manusia Cacat Kronis (K)	60
Gambar 4.8. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Nyamuk Sehat (S_v)	61
Gambar 4.9. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Nyamuk Terinfeksi (I_v)	62
Gambar 4.10. Grafik <i>Error</i> antara Nilai Real dan Nilai Estimasi Semua Populasi	62



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 2.1 Algoritma <i>Extended Kalman Filter</i>	9
Tabel 4.1 Routh – Hurwitz Bebas Penyakit.....	31
Tabel 4.2 Routh – Hurwitz Bebas Endemik.....	37
Tabel 4.3 Nilai Parameter Bebas Penyakit.....	41
Tabel 4.4 Nilai Parameter Endemik.....	41
Tabel 4.5 Nilai Awal Bebas Penyakit dari Masing-masing Populasi.....	42
Tabel 4.6 Nilai Awal Endemik dari Masing-masing Populasi.....	42
Tabel 4.7 Nilai Awal dari Masing-masing Populasi.....	58
Tabel 4.8 Nilai Parameter.....	58
Tabel 4.9 Nilai Rata-rata RMSE.....	63



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

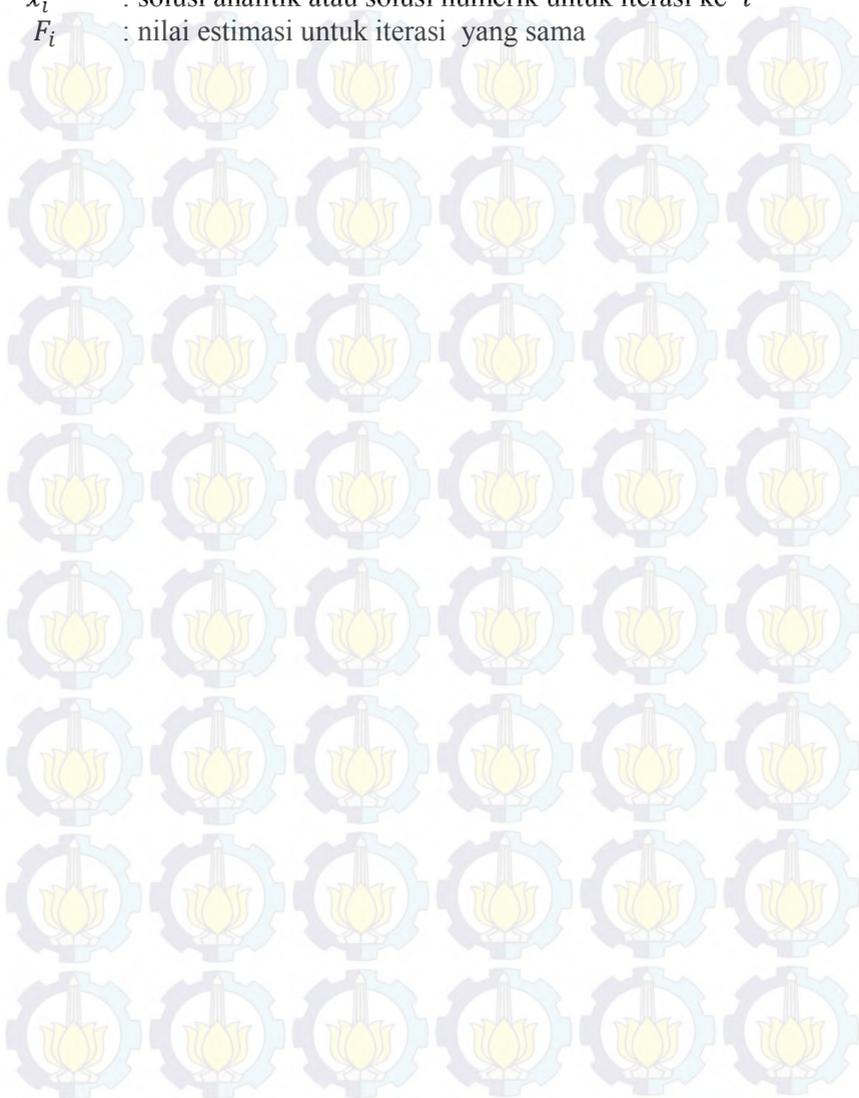
DAFTAR SIMBOL

S_h	: Populasi manusia sehat yang rentan terhadap <i>Filariasis</i>
A	: Populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit
K	: Populasi manusia cacat kronis
S_v	: Populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filarial
I_v	: Populasi nyamuk terinfeksi
N_h	: Populasi total manusia
R_h	: Rata – rata pertambahan manusia per satuan waktu
μ_h	: Rata – rata kematian alami manusia per satuan waktu
p_h	: Rata – rata keberhasilan transmisi filarial dari nyamuk terinfeksi ke manusia sehat
b	: Rata – rata gigitan pada manusia yang disebabkan satu ekor nyamuk per satuan waktu
δ	: Laju munculnya gejala klinis per satuan waktu
R_v	: Rata – rata pertambahan nyamuk per satuan waktu
μ_v	: Rata – rata kematian alami nyamuk per satuan waktu
p_v	: Rata – rata keberhasilan transmisi filaria dari nyamuk terinfeksi ke nyamuk sehat
n	: Banyaknya orang yang diperiksa per satu orang kronis yang ditemukan
α	: Rata – rata efektifitas obat per satuan waktu
x_k	: variabel keadaan sistem pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0 dan kovarian awal P_{x_0}
u_k	: variabel input deterministik pada waktu k
w_k	: noise pada sistem dengan mean $\bar{w}_k = 0$ dan kovarian Q_k
Z_k	: state model pengukuran
H_k	: matrik pengukuran
v_k	: noise pada pengukuran dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R_k
\hat{x}_k	: estimasi state pada tahap inialisasi
\hat{x}_k^-	: estimasi state pada tahap prediksi
P_k^-	: kovariansi error pada tahap prediksi
P_k	: kovariansi error pada tahap koreksi

K_k : Kalman gain

x_i : solusi analitik atau solusi numerik untuk iterasi ke i

F_i : nilai estimasi untuk iterasi yang sama



BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatar-belakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Diperkirakan sekitar 20% penduduk dunia atau 1,1 milyar penduduk di 83 negara beresiko terinfeksi *Filariasis*, terutama di daerah tropis dan beberapa daerah subtropis. Penyakit ini dapat menyebabkan kecacatan, stigma sosial, hambatan psikososial, dan penurunan produktifitas kerja penderita, keluarga dan masyarakat sehingga menimbulkan kerugian ekonomi yang besar [1].

Berdasarkan hasil survei cepat *Filariasis* di Indonesia 42% dari 7.000 kuesioner pada tahun 2.000, jumlah penderita kronis yang dilaporkan sebanyak 6.233 orang yang tersebar di 674 puskesmas, 1.553 desa di 231 Kabupaten, 26 propinsi. Data ini belum menggambarkan keadaan yang sebenarnya karena hanya dilaporkan oleh 42% puskesmas dari 7.221 Puskesmas. Tingkat endemisitas *Filariasis* di Indonesia berdasarkan hasil survei darah jari tahun 1999 masih tinggi dengan prevelansi mikrofilaremia 3,1% [1].

Dari data dinas kesehatan provinsi Jawa Timur di ketahui bahwa pada tahun 2012 dengan jumlah penduduk sekitar 38.052.950 jiwa terdapat 341 penderita *Filariasis* dirawat di puskesmas yang tersebar di kota/kabupaten di Jawa Timur. Pada tahun 2013 jumlah penduduk Jawa Timur sekitar 38.318.719 jiwa dan orang yang terkena *Filariasis* sekitar 359 orang.

Sampai pada tahun 2013 di Jawa Timur jumlah penderitanya paling banyak adalah kabupaten Lamongan. Penderitanya sebanyak 56 orang dari jumlah penduduknya sebanyak 1.200.558 jiwa.

Transmisi *Filariasis* di suatu daerah dapat diformulasikan dalam bentuk model matematika. Pemodelan matematika yang diperoleh tersebut kemudian digunakan untuk mengestimasi penyebaran *Filariasis* pada suatu daerah menggunakan *Extended Kalman Filter*. Diharapkan hasil dari estimasi tersebut digunakan untuk mempercepat penanggulangan dan pencegahan proses transmisi *Filariasis* di suatu daerah. Dan dilakukan analisis kestabilan model transmisi penyakit *Filariasis*.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang ada dalam tugas akhir ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit ?
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan beserta simulasinya ?
3. Bagaimana estimasi dari transmisi *Filariasis* dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* ?
4. Bagaimana simulasi dari hasil estimasi transmisi *Filariasis* menggunakan metode *Extended Kalman Filter* ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada usulan Tugas Akhir ini adalah :

1. Populasi total manusia dan nyamuk adalah konstan.
2. Jenis cacing dan nyamuk diabaikan.
3. Faktor lingkungan diabaikan.
4. Setiap manusia dan nyamuk terlahir dalam kondisi sehat artinya tidak ada penularan secara vertikal antara induk dan anak.

5. Model matematika dan parameter yang digunakan berdasarkan pada referensi

1.4 Tujuan

Dari permasalahan yang ada maka tujuan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan endemik serta titik kesetimbangan bebas penyakit sehingga dapat diketahui terjadi penyebaran penyakit atau tidak.
2. Mengintrepetasikan hasil analisis dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan beserta simulasinya.
3. Mengestimasi transmisi *Filariasis* dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*.
4. Mengetahui analisis dan simulasi dari pemodelan matematika transmisi *Filariasis*.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Mengetahui dinamika penyebaran penyakit *Filariasis*.
2. Sebagai bahan pertimbangan pencegahan transmisi *Filariasis* untuk meminimalisir penderita yang diakibatkan oleh penyakit tersebut.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing – masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir, antara lain *Filariasis*, model transmisi *Filariasis* dengan pengobatan, metode beda hingga, metode *Kalman Filter*, metode *Extended Kalman Filter*, kestabilan titik tetap dan stabil asimtotis lokal.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan beserta simulasinya, pendiskritan dari model transmisi *Filariasis* dengan pengobatan kemudian estimasi transmisi penyakit *Filariasis* menggunakan metode *Extended Kalman Filter*. Hasil dari estimasi tersebut akan disajikan simulasi dengan bantuan program Matlab.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai analisis kestabilan lokal dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan dan estimasi transmisi penyakit *Filariasis* dengan metode *Extended Kalman Filter*.

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan tugas akhir serta menunjang metode – metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini.

2.1 Filariasis

Filariasis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh cacing filaria yang ditularkan melalui berbagai jenis nyamuk. Terdapat tiga spesies cacing penyebab *Filariasis* yaitu : *Wuchereria bancrofti*, *Brugia malayi* dan *Brugia timori*. Cacing tersebut hidup di kelenjar dan saluran getah bening sehingga menyebabkan kerusakan pada sistem limfatik yang dapat menimbulkan gejala akut dan kronis. Gejala akut berupa peradangan kelenjar dan saluran getah bening (*adenolimfangitis*) terutama di daerah pangkal paha dan ketiak tetapi dapat pula di daerah lain. Gejala kronis terjadi akibat penyumbatan aliran limfe terutama di daerah yang sama dengan terjadinya peradangan dan menimbulkan gejala seperti kaki gajah (*elephantiasis*) dan hidrokela.

Penularan *Filariasis* melibatkan manusia dan nyamuk. Proses penularan penyakit dimulai saat nyamuk sehat (tidak memiliki mikrofilaria) menggigit manusia sakit (memiliki mikrofilaria). Saat nyamuk tersebut menggigit manusia sakit, maka secara tidak langsung mikrofilaria yang ada di tubuh manusia akan berpindah ke tubuh nyamuk. Nyamuk tersebut siap untuk menularkan penyakit ini. [2].

2.2 Model Matematika

Model transmisi *Filariasis* ini dengan pengobatan. Pengobatan dilakukan pada populasi manusia pembawa penyakit (A) dengan asumsi pengobatan jika di dalam darahnya

mengandung mikrofilaria dan saat temukan orang terinfeksi filaria (carier) dari proses pemeriksaan darah jari.[3].

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h$$

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v$$

Keterangan :

S_h : Populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*

A : Populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit

K : Populasi manusia cacat kronis

S_v : Populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filarial

I_v : Populasi nyamuk terinfeksi

N_h : Populasi total manusia

R_h : Rata – rata pertambahan manusia per satuan waktu

μ_h : Rata – rata kematian alami manusia per satuan waktu

p_h : Rata – rata keberhasilan transmisi filarial dari nyamuk terinfeksi ke manusia sehat

b : Rata – rata gigitan pada manusia yang disebabkan satu ekor nyamuk per satuan waktu

δ : Laju munculnya gejala klinis per satuan waktu

R_v : Rata – rata pertambahan nyamuk per satuan waktu

μ_v : Rata – rata kematian alami nyamuk per satuan waktu

p_v : Rata – rata keberhasilan transmisi filaria dari nyamuk terinfeksi ke nyamuk sehat

n : Banyaknya orang yang diperiksa per satu orang kronis yang ditemukan

α : Rata – rata efektifitas obat per satuan waktu

2.3 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Secara umum metode beda hingga adalah metode yang mudah digunakan dalam menyelesaikan problem fisis yang mempunyai bentuk geometri yang teratur, seperti interval dalam satu dimensi, domain kotak dalam dua dimensi, dan kubik dalam ruang tiga dimensi.

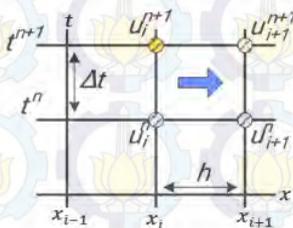
Terdapat tiga skema beda hingga yang biasa digunakan dalam diskritisasi persamaan differensial parsial, yaitu skema maju, skema mundur, dan skema tengah.[4]

Skema Maju

Berikut persamaan pada skema maju dengan $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t_i+h) - u(t_i)}{\Delta t}$$

Pada skema maju, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i + 1$ yang berada di depannya.



Gambar 2.1. Skema Maju

Dengan menggunakan kisi beda hingga, maka skema maju biasa ditulis sebagai berikut,

Skema maju waktu:

Laju perubahan u terhadap t di titik $x = i, x = i + 1$ pada waktu $= t^n, t = t^{n+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \text{ atau } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

2.4 Metode *Extended Kalman Filter*

Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) adalah perluasan dari metode *kalman filter* yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem nonlinear dan kontinu. Pada *extended kalman filter*, sama halnya dengan *kalman filter*, estimasi dilakukan dengan dua tahapan, yaitu dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time update*) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) terhadap data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Bentuk umum sistem dinamik nonlinear diskrit pada EKF (Welch & Bishop, 2006) adalah :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

$$z_k = h(x_k, v_k)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

Dengan :

x_k = variabel keadaan sistem pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0 dan kovarian awal P_{x_0}

u_k = variabel input deterministik pada waktu k

w_k = noise pada sistem dengan mean $\bar{w}_k = 0$ dan kovarian Q_k

z_k = variabel pengukuran

v_k = noise pada pengukuran dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R_k

Pada *Extended Kalman Filter*, estimasi dilakukan dengan dua tahapan, yaitu dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time*

update) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) terhadap data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tingkat akurasiya dihitung menggunakan persamaan kovariansi error.

Pada tahap koreksi hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi menggunakan data pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks *Kalman Gain* yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi error. Selanjutnya algoritma *Extended Kalman Filter* diberikan pada tabel 2.1 yaitu[5]

Tabel 2.1 Algoritma *Extended Kalman Filter*

Model Sistem dan Model Pengukuran	
$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$ $z_k = h(x_k, v_k)$ $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$	
Inisialisasi	
$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ $P_0 = P_{x_0}$	
Tahap Prediksi	
Estimasi	: $\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k, u_k, 0)$
Kovariansi error	: $P_{k+1}^- = A_k P_k^- A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T$
Tahap Koreksi (measurement update)	
Kalman Gain	: $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T]^{-1}$
Estimasi	: $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_k (z_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-, 0))$
Kovariansi error	: $P_{k+1} = [I - K_k H_k] P_k^-$

Pada tabel 2.1 menunjukkan algoritma *Extended Kalman Filter* yang terdiri dari 4 bagian, diantaranya bagian pertama dan kedua memberikan suatu model sistem dan model pengukuran dan nilai awal (inisialisasi), selanjutnya bagian ketiga dan keempat masing-masing tahap prediksi dan koreksi tetapi sebenarnya secara umum *extended kalman filter* hanya terdiri dari 2 tahap yaitu tahap prediksi dan koreksi.

2.5 Kestabilan Titik Tetap

Persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \text{ dan } \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.1)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$x(t) = \bar{x}_0$ dan $y(t) = \bar{y}_0$ merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.1) untuk semua t . [6]

2.6 Stabil Asimtotis Lokal

Kestabilan asimtotis lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.[7]

Teorema 1 :

Titik setimbang (x_0, y_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$\text{Matriks } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.7 Tingkat Ketelitian Estimasi

Ketelitian atau “accuracy” dipandang sebagai suatu kriteria untuk menyatakan tingkat kepercayaan suatu hasil estimasi. Dalam tugas akhir ini digunakan ukuran tingkat ketelitian yakni root mean square error (RMSE). RMSE merupakan ukuran ketelitian dengan menghitung akar rata-rata kuadrat selisih dari solusi ideal (analitik) atau solusi numerik dengan hasil estimasi dari seluruh iterasi yang dilakukan atau dirumuskan sebagai[8]:

$$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(x_i - F_i)^2}{n}}$$

dengan x_i solusi analitik atau solusi numerik untuk iterasi ke i dan F_i nilai estimasi untuk iterasi yang sama. Nilai RMSE yang semakin kecil menunjukkan bahwa hasil estimasi semakin mendekati solusi idealnya (analitik/numerik). Sehingga, dapat dikatakan hasil estimasinya semakin baik atau dipercaya.



BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas lima tahap, antara lain: studi literatur, pemodelan persamaan transmisi *Filariasis*, estimasi transmisi *Filariasis* dengan metode *Extended Kalman Filter*, simulasi model dengan menggunakan software MATLAB, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Sebelum melakukan pemodelan matematika dari transmisi *Filariasis*, dilakukan pengkajian literatur yang sesuai untuk menunjang pemodelan tersebut, mempelajari *Extended Kalman Filter*, dan metode Beda Hingga serta mencari parameter – parameter yang terkait dalam menyusun Tugas Akhir ini.

3.2 Pemodelan Persamaan Transmisi *Filariasis*

Pada Tugas Akhir ini dikaji tentang model dari transmisi *Filariasis*. Model persamaan matematika yang digunakan adalah model transmisi *Filariasis* dengan pengobatan sehingga dapat dibuat model kompartemen proses pengobatan dari penyakit *Filariasis* dan akan diestimasi penyebarannya menggunakan metode *Extended Kalman Filter*.

3.3 Tahap Mencari Titik Keseimbangan

Pada tahap ini dilakukan analisis model transmisi *Filariasis* dengan pengobatan sehingga didapatkan titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik.

3.4 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal

Tahap ini akan mencari kestabilan lokal dari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dengan memasukkan nilai keseimbangan kedalam matriks

Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar – akar karakteristik dari matriks Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik – titik tersebut.

3.5 Estimasi Transmisi Filariasis dengan Metode *Extended Kalman Filter*

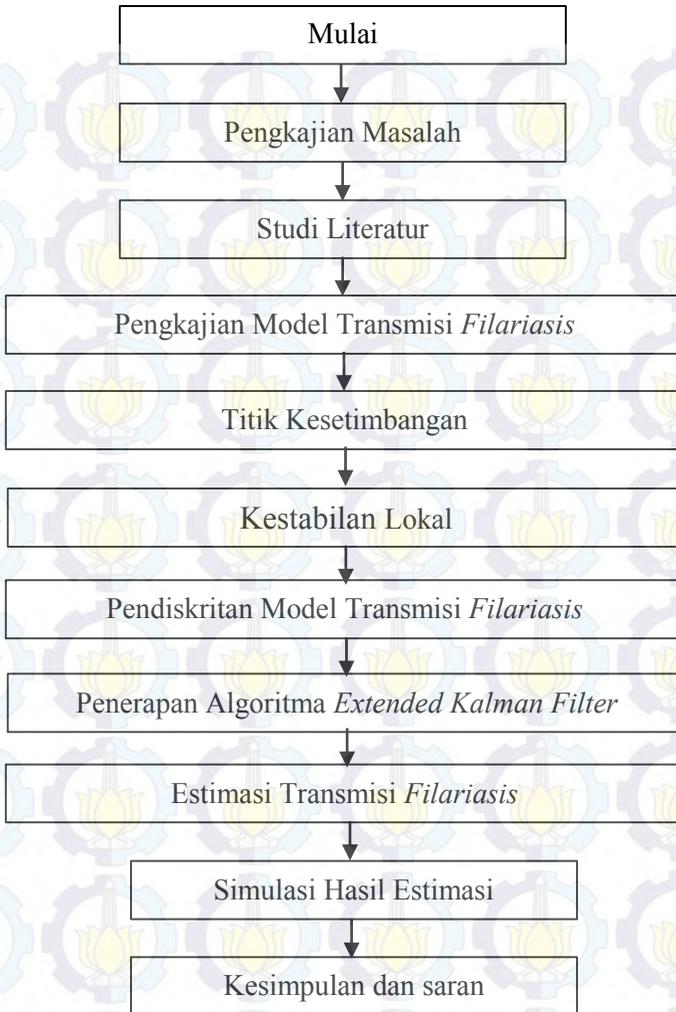
Model persamaan matematika dari transmisi *Filariasis* yang telah diperoleh kemudian dilakukan estimasi terhadap populasi manusia sehat yang rentan terhadap filaria, populasi manusia pembawa penyakit, populasi manusia cacat kronis, populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria dan populasi nyamuk terinfeksi. Kelima estimasi tersebut merepresentasikan transmisi penyakit *Filariasis*.

3.6 Membuat Simulasi Model

Selanjutnya, pemodelan estimasi transmisi *Filariasis* tersebut disimulasikan dengan bantuan program Matlab. Dalam kegiatan ini penulis akan mencoba untuk membuat simulasi dari model yang didapatkan untuk mengetahui grafik kestabilan dan grafik *Extended Kalman Filter* dari transmisi *Filariasis*.

3.7 Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan mengenai penerapan metode *Extended Kalman Filter* dalam estimasi transmisi *Filariasis* dan saran yang diperlukan untuk penelitian selanjutnya.



Gambar 3.1. Diagram Alir Penelitian



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan, titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik serta ditentukan kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut dan model dari transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan berupa sistem persamaan diferensial nonlinier dan kontinu. Oleh karena itu, dilakukan estimasi setiap *state space* dari model dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*.

4.1 Model Transmisi Penyakit *Filariasis* dengan Pengobatan

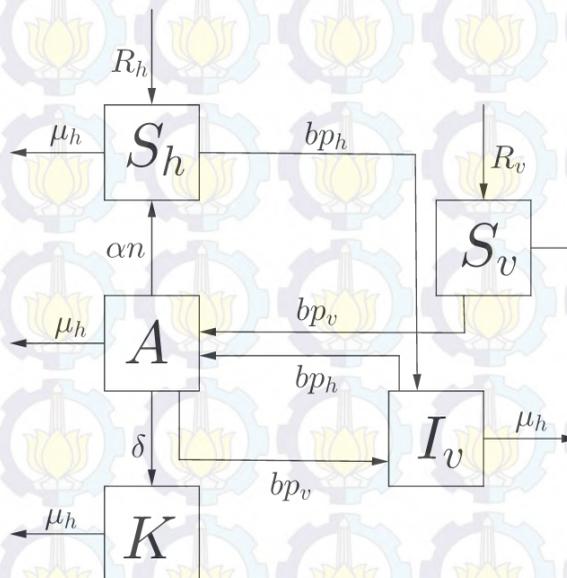
Pada model transmisi penyakit *Filariasis* mempunyai definisi – definisi sebagai berikut :

- a. Populasi dibagi menjadi 5 kelompok individu yaitu :
 - S_h adalah populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*.
 - A adalah populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit.
 - K adalah populasi manusia cacat kronis.
 - S_v adalah populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria.
 - I_v adalah populasi nyamuk terinfeksi.
- b. N_h adalah populasi total manusia yaitu jumlahan dari populasi manusia sehat yang rentan terinfeksi, populasi manusia terinfeksi filaria dan populasi manusia cacat kronis serta N_v adalah populasi total nyamuk yaitu jumlahan dari populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria dan populasi nyamuk terinfeksi.
- c. Pada saat ditemukan satu orang penderita cacat (kronis) maka dilakukan pemeriksaan sebanyak n orang dan saat populasi manusia cacat dalam tubuhnya sudah tidak mengandung filaria, maka proses pengobatan hanya dikenakan pada populasi pembawa penyakit saja.

- d. Perpindahan populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis* S_h menjadi populasi manusia pembawa penyakit A , yang mempunyai konstruksi sebagai berikut :
- i. Peluang terambilnya satu orang dari populasi S_h secara acak $\frac{S_h}{N_h}$
 - ii. Rata-rata satu orang yang berasal dari populasi S_h tergigit oleh satu ekor nyamuk terinfeksi per satuan waktu $b \frac{S_h}{N_h}$
 - iii. Rata-rata satu orang yang berasal dari populasi S_h terinfeksi filaria akibat dari gigitan satu ekor nyamuk terinfeksi per satuan waktu $p_h b \frac{S_h}{N_h}$
 - iv. Rata-rata satu orang yang berasal dari S_h terinfeksi filaria akibat tergigit oleh nyamuk terinfeksi selama selang waktu t yaitu $I_v p_h b \frac{S_h}{N_h}$
- e. Perpindahan populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria S_v menjadi populasi nyamuk terinfeksi I_v , yang mempunyai konstruksi sebagai berikut :
- i. Rata-rata terambilnya satu orang A pada populasi manusia $\frac{A}{N_h}$
 - ii. Rata-rata satu ekor nyamuk yang berasal dari populasi S_v menggigit satu orang manusia terinfeksi A per satuan waktu $b \frac{A}{N_h}$
 - iii. Rata-rata satu ekor nyamuk yang berasal dari populasi S_v menggigit satu orang manusia terinfeksi filaria per satuan waktu dan nyamuk tersebut terinfeksi filaria $p_v b \frac{A}{N_h}$
 - iv. Rata-rata satu ekor nyamuk yang berasal dari populasi S_v menggigit satu orang manusia terinfeksi filaria yang menyebabkan nyamuk tersebut terinfeksi filarial selama selang waktu t yaitu $S_v p_v b \frac{A}{N_h}$
- f. Konstruksi proses pengobatan pada populasi A sehingga berpindah menjadi populasi S_h adalah sebagai berikut :

- i. Jika ditemukan satu orang penderita cacat (kronis) maka akan diperiksa sebanyak n orang yang tinggal disekitar penderita cacat (kronis). Sehingga banyaknya orang yang diperiksa pada proses pemeriksaan darah jari nK
- ii. Banyaknya orang yang ditemukan terinfeksi filaria dari proses pemeriksaan darah jari $\frac{A}{N_h}nK$
- iii. Perpindahan populasi A menjadi populasi S_h dengan pengobatan $\alpha \frac{A}{N_h}nK$. Hal ini dikarenakan populasinya masih rentan terjangkit penyakit lagi.

Dari definisi – definisi tersebut maka didapatkan diagram kompartemen model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan sebagai berikut :



Gambar 4.1. Diagram Kompartemen Model Transmisi Penyakit *Filariasis* dengan Pengobatan

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model transmisi sebagai berikut :

- a. Persamaan diferensial untuk populasi manusia sehat yang rentan S_h adalah :

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h$$

yaitu besarnya laju populasi dari suatu individu yang rentan terhadap penyakit dipengaruhi oleh penambahan rata-rata pertumbuhan manusia per satuan waktu R_h , perpindahan populasi A menjadi populasi S_h dengan pengobatan $\alpha \frac{A}{N_h} nK$ dan menurun disebabkan perpindahan populasi S_h menjadi populasi A yaitu $bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h$, banyaknya kematian alami pada populasi S_h per satuan waktu $\mu_h S_h$.

- b. Persamaan diferensial untuk populasi manusia pembawa penyakit A adalah :

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A$$

yaitu besarnya laju populasi yang terkena penyakit tapi belum tampak tanda penyakitnya dipengaruhi oleh penambahan jumlah populasi S_h yang berpindah menjadi populasi A $bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h$ dan menurun disebabkan perpindahan populasi A menjadi populasi K per satuan waktu δA , banyaknya kematian alami pada A per satuan waktu $\mu_h A$, perpindahan populasi A menjadi populasi S_h dengan pengobatan yaitu $\alpha \frac{A}{N_h} nK$

- c. Persamaan diferensial untuk populasi manusia cacat kronis K adalah :

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K$$

yaitu besarnya laju populasi manusia cacat kronis dipengaruhi oleh penambahan perpindahan populasi A menjadi populasi K per satuan waktu δA , dan menurun disebabkan banyaknya kematian alami pada K per satuan waktu $\mu_h K$.

- d. Persamaan diferensial untuk nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filarial S_v adalah :

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v$$

yaitu besarnya laju populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria dipengaruhi oleh penambahan rata-rata pertumbuhan nyamuk per satuan waktu R_v , dan menurun disebabkan oleh banyaknya kematian alami pada populasi S_v per satuan waktu $\mu_v S_v$, perpindahan populasi S_v menjadi populasi I_v yaitu $bS_v \frac{A}{N_h} p_v$

- e. Persamaan diferensial untuk populasi nyamuk terinfeksi I_v adalah :

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v$$

yaitu besarnya laju populasi nyamuk yang terinfeksi dipengaruhi oleh penambahan dari perpindahan populasi S_v menjadi populasi I_v yaitu $bS_v \frac{A}{N_h} p_v$ dan menurun disebabkan

oleh banyaknya kematian alami nyamuk terinfeksi per satuan waktu $\mu_v I_v$.

Model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h \quad (4.1)$$

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A \quad (4.2)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (4.3)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} S_h(0) &> 0, & A(0) &\geq 0 & K(0) &\geq 0 \\ S_v(0) &> 0, & I_v(0) &\geq 0 \end{aligned}$$

Pada populasi total manusia jumlahnya tetap maka dapat dinyatakan $\frac{dN_h}{dt} = 0$ dengan

$$\begin{aligned} N_h &= S_h + A + K \\ \frac{dN_h}{dt} &= \frac{dS_h}{dt} + \frac{dA}{dt} + \frac{dK}{dt} \\ 0 &= R_h - (\mu_h S_h + \mu_h A + \mu_h K) \\ &= R_h - \mu_h (S_h + A + K) \\ &= R_h - \mu_h N_h \\ \mu_h N_h &= R_h \\ N_h &= \frac{R_h}{\mu_h} \end{aligned}$$

sedangkan pada populasi total nyamuk jumlahnya juga tetap maka dapat dinyatakan $\frac{dN_v}{dt} = 0$ dengan

$$\begin{aligned} N_v &= S_v + I_v \\ \frac{dN_v}{dt} &= \frac{dS_v}{dt} + \frac{dI_v}{dt} \\ 0 &= R_v - (\mu_v S_v + \mu_v I_v) \\ &= R_v - \mu_v (S_v + I_v) \\ &= R_v - \mu_v N_v \\ \mu_v N_v &= R_v \\ N_v &= \frac{R_v}{\mu_v} \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit didapat dengan menghitung $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0, \frac{dK}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$. keadaan bebas penyakit terjadi jika populasi $A = 0, K = 0, I_v = 0$ maka akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit.

Pada persamaan (4.1) dan (4.4) dengan $A = 0, K = 0, I_v = 0$ maka didapatkan

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h$$

$$0 = R_h - \mu_h S_h$$

$$S_h^0 = \frac{R_h}{\mu_h}$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v$$

$$0 = R_v - \mu_v S_v$$

$$S_v^0 = \frac{R_v}{\mu_v}$$

maka akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (S_h^0, A^0, K^0, S_v^0, I_v^0)$$

$$E_0 = \left(\frac{R_h}{\mu_h}, 0, 0, \frac{R_v}{\mu_v}, 0 \right)$$

Karena $S_h = N_h$ dan $S_v = N_v$ sehingga akan direduksi persamaan laju populasi S_h dan persamaan laju populasi S_v , dengan mensubstitusi $S_h = N_h = \frac{R_h}{\mu_h}$ kedalam persamaan (4.2) dan persamaan (4.1) dieliminasi dan mensubstitusi $S_v = N_v = \frac{R_v}{\mu_v}$ kedalam persamaan (4.5) dan persamaan (4.4) dieliminasi, sehingga didapat persamaan baru dari model hasil reduksi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= bI_v \frac{\frac{R_h - A - K}{R_h}}{\mu_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{R_h} nK - \mu_h A \\ &= bI_v p_h \left(\frac{R_h - A - K}{R_h} \right) - \delta A - \alpha \frac{A \mu_h}{R_h} nK - \mu_h A \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_v}{dt} &= b \left(\frac{R_v}{\mu_v} - I_v \right) \frac{A}{R_h} p_v - \mu_v I_v \\ &= b \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right) \frac{A \mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Titik Kesetimbangan Model Transmisi Penyakit *Filariasis*

Titik kesetimbangan model transmisi penyakit *Filariasis* adalah titik yang diperoleh ketika sistem (4.6), (4.7), dan (4.8) berada pada keadaan setimbang. Keadaan setimbang adalah keadaan dimana perubahan banyaknya individu dari setiap populasi A , K dan I_v sepanjang waktu adalah nol.

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam populasi, dengan mengambil $\frac{dA}{dt} = 0$, $\frac{dK}{dt} = 0$, $\frac{dI_v}{dt} = 0$ maka akan diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut :

Dari persamaan (4.7)

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= 0 \\ \delta A - \mu_h K &= 0 \\ \mu_h K &= \delta A \\ K^* &= \frac{\delta A^*}{\mu_h} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{dI_v}{dt} &= 0 \\ b \left(\frac{R_v}{\mu_v} - I_v \right) \frac{A}{R_h} p_v - \mu_v I_v &= 0 \\ b \left(\frac{R_v}{\mu_v} - I_v \right) \frac{A \mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v &= 0 \\ \frac{b R_v A \mu_h p_v}{\mu_v R_h} - \left(\frac{b A \mu_h p_v}{R_h} + \mu_v \right) I_v &= 0 \\ \left(\frac{b A \mu_h p_v}{R_h} + \mu_v \right) I_v &= \frac{b R_v A \mu_h p_v}{\mu_v R_h} \\ I_v &= \frac{b R_v A \mu_h p_v}{\mu_v R_h} \cdot \frac{R_h}{(b A \mu_h p_v + \mu_v R_h)} \\ I_v^* &= \frac{b R_v A^* \mu_h p_v}{b A^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 0 \\ b I_v \frac{\left(\frac{R_h - A - K}{\mu_h} \right)}{\frac{R_h}{\mu_h}} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{R_h} n K - \mu_h A &= 0 \\ b I_v \frac{(R_h - A \mu_h - K \mu_h)}{R_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{R_h} n K - \mu_h A &= 0 \end{aligned}$$

$$b \left(\frac{bR_v A \mu_h p_v}{bA\mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h} \right) \frac{(R_h - A\mu_h - \delta A)}{R_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A^2}{R_h} n\delta - \mu_h A = 0$$

$$\frac{b^2 R_v A \mu_h p_v p_h}{bA\mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h} - \frac{b^2 R_v A^2 \mu_h^2 p_v p_h}{(bA\mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h) R_h} - \frac{b^2 R_v A^2 \mu_h p_v p_h \delta}{(bA\mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h) R_h} -$$

$$(\delta + \mu_h) A - \alpha \frac{A^2}{R_h} n\delta = 0$$

$$(-b\mu_v \mu_h p_v \alpha n\delta) A^3 - (b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h + b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta + b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h + b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h + \mu_v^2 R_h \alpha n\delta) A^2 + (b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h) A = 0$$

Dari perhitungan ini, terdapat tiga kondisi untuk titik kesetimbangan endemik A^* yaitu

$$1. A_1^* = 0$$

$$2. A_2^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$3. A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan

$$a = -b\mu_v \mu_h p_v \alpha n\delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n\delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Terlihat bahwa nilai $a < 0$ dan $b < 0$

untuk $c < 0$ jika $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h < \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

untuk $c > 0$ jika $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h > \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

Akan diselidiki pada persamaan A_2^* dan A_3^* sehingga diperoleh :

- Untuk $a < 0, b < 0, c < 0$ maka didapat
Nilai $A_2^* < 0$ dengan syarat $b^2 > 4ac$
Nilai $A_3^* > 0$ dengan syarat $b^2 > 4ac$ dan $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$
- Untuk $a < 0, b < 0, c > 0$ maka didapat

Nilai $A_2^* < 0$

Nilai $A_3^* > 0$ dengan syarat $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$

Setelah diselidiki, maka A_2^* bukan titik kesetimbangan karena bernilai negatif atau $A_2^* < 0$ maka A_1^* dan A_3^* disubstitusikan ke persamaan (4.9) dan (4.10) sehingga diperoleh :

- Saat $A_1^* = 0$ maka didapat $K_1^* = 0$ dan $I_{v(1)}^* = 0$
- Saat $A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ maka didapat $K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$ dan $I_{v(3)}^* = \frac{bR_v A_3^* \mu_h p_v}{bA_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$

Dapat dilihat dari kedua kondisi itu, pada kondisi pertama didapat $A_1^*, K_1^*,$ dan $I_{v(1)}^*$ bernilai nol. Ini menunjukkan bahwa pada kondisi pertama dalam keadaan bebas penyakit sehingga didapatkan titik kesetimbangannya adalah

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0, 0, 0)$$

Sedangkan pada kondisi kedua menunjukkan bahwa pada kondisi tersebut adalah titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* dapat ditulis sebagai berikut:

$$E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$

4.3 Analisis Kestabilan

Setelah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Model transmisi penyakit *Filariasis* merupakan model persamaan yang tak linier. Maka dari itu, perlu dilakukan pelinieran terlebih dahulu sebelum melakukan analisis kestabilan.

Setelah dilakukan proses linearisasi, didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial A} & \frac{\partial T}{\partial K} & \frac{\partial T}{\partial I_v} \\ \frac{\partial U}{\partial A} & \frac{\partial U}{\partial K} & \frac{\partial U}{\partial I_v} \\ \frac{\partial V}{\partial A} & \frac{\partial V}{\partial K} & \frac{\partial V}{\partial I_v} \end{bmatrix}$$

Persamaan (4.6) – (4.8) diturunkan secara parsial terhadap masing – masing variabelnya, maka :

$$\text{dari } T = bI_v p_h \left(\frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right) - \delta A - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} nK - \mu_h A$$

diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial A} = bI_v p_h \left(\frac{-\mu_h}{R_h} \right) - \delta - \alpha \frac{\mu_h}{R_h} nK - \mu_h$$

$$\frac{\partial T}{\partial K} = bI_v p_h \left(\frac{-\mu_h}{R_h} \right) - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} n$$

$$\frac{\partial T}{\partial I_v} = b p_h \left(\frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right)$$

$$\text{dari } U = \delta A - \mu_h K$$

diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \delta$$

$$\frac{\partial U}{\partial K} = -\mu_h$$

$$\frac{\partial U}{\partial I_v} = 0$$

$$\text{dari } V = b \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right) \frac{A\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v$$

diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{b\mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_v \mu_v}{\mu_v} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial I_v} = -bA \frac{\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v$$

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0,0,0)$ menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -(\delta + \mu_h) & 0 & bp_h \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -(\delta + \mu_h) & 0 & bp_h \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & -\mu_v \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\delta + \mu_h) & 0 & -bp_h \\ -\delta & \lambda + \mu_h & 0 \\ -\frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & \lambda + \mu_v \end{vmatrix} = 0$$

Dicari determinannya sehingga diperoleh nilai eigen dari persamaan karakteristik, dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (\lambda + \delta + \mu_h)(\lambda + \mu_h)(\lambda + \mu_v) - \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} (\lambda + \mu_h) bp_h = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda + \delta + \mu_h)(\lambda^2 + \lambda\mu_v + \lambda\mu_h + \mu_h\mu_v) - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v \lambda p_h}{R_h \mu_v} - \\ & \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 \mu_v + \lambda^2 \mu_h + \lambda \mu_h \mu_v + \lambda^2 \delta + \lambda \mu_v \delta + \delta \lambda \mu_h + \frac{\delta \mu_h \mu_v + \mu_h \lambda^2 + \lambda \mu_v \mu_h + \lambda \mu_h^2 + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v \lambda p_h}{R_h \mu_v}}{R_h \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (\mu_v + 2\mu_h + \delta)\lambda^2 + \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right)\lambda + \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right) = 0 \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat ditulis seperti berikut :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

dengan masing – masing nilai untuk a_1 , a_2 dan a_3 adalah

$$a_1 = (\mu_v + 2\mu_h + \delta)$$

$$a_2 = \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right)$$

$$a_3 = \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model (4.6) – (4.8) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $c_1 > 0$. Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 4.1 Routh – Hurwitz Bebas Penyakit

$a_0 = 1$	a_2	$a_4 = 0$
a_1	a_3	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	0
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	0

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$a_1 = (\mu_v + 2\mu_h + \delta)$$

terlihat bahwa nilai a_1 bernilai positif

untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

nilai b_1 akan bernilai positif ($a_1 a_2 - a_3 > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$) dan $a_1 a_2 > a_3$

maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_2 = \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

nilai a_2 akan bernilai positif jika $(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$

untuk nilai $a_1 a_2 > a_3$

$$\Leftrightarrow (\mu_v + 2\mu_h + \delta) \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right) > \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$= a_3$$

nilai c_1 akan bernilai positif jika ($a_3 > 0$)

maka akibatnya nilai a_3 harus positif dengan analisa sebagai berikut:

$$a_3 = \left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

nilai a_3 akan bernilai positif ($a_3 > 0$) jika $(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel-variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika

$$\text{memenuhi } (2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right),$$

$$(\mu_v + 2\mu_h + \delta) \left(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right) >$$

$$\left(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right), \text{ dan}$$

$$(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} \right)$$

Setelah didapatkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit maka selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan endemik.

Matriks Jacobian di titik kesetimbangan endemik yaitu $E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$ menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h\right) & -\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}\right) & b p_h \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h}\right) \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v}\right) & 0 & -b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v \end{bmatrix}$$

Dengan

$$A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$$

$$I_{v(3)}^* = \frac{b R_v A_3^* \mu_h p_v}{b A_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

dengan memisalkan dipersamaan A_3^*

$$a = -b \mu_v \mu_h p_v \alpha n \delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b \mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b \mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h & -\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}\right) & b p_h \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h}\right) \\ \delta & \lambda + \mu_h & 0 \\ \frac{b \mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v}\right) & 0 & \lambda + b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \end{vmatrix} = 0$$

Dicari determinannya sehingga diperoleh nilai eigen dari persamaan karakteristik, dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h \right) (\lambda + \mu_h) \left(\lambda + bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \right) - \left(\frac{b\mu_h p_v}{R_h} \left(\frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v} \right) \right) (\lambda + \mu_h) b p_h \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h} \right) - \\
& \left(\lambda + bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \right) \delta \left(- \left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) \right) = 0 \\
& \left(\lambda^2 + \lambda \mu_h + \left(\frac{\lambda b I_{v(3)}^* p_h \mu_h + \lambda \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} \right) + \left(\frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 + \alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} \right) + \right. \\
& \left. \delta \lambda + \delta \mu_h + \mu_h \lambda + \mu_h^2 \right) \left(\lambda + bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \right) - \left(\frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} - \right. \\
& \left. \frac{b\mu_h p_v I_{v(3)}^*}{R_h} \right) (\lambda b p_h + \mu_h b p_h) \left(\frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h} \right) + (\lambda \delta + \\
& bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v \delta + \mu_v \delta) \left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) = 0 \\
& \left(\lambda^3 + \lambda^2 bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \lambda^2 \mu_v + \lambda^2 \mu_h + \lambda bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \lambda \mu_h \mu_v + \right. \\
& \left. \frac{\lambda^2 b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\lambda b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\lambda b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\lambda^2 \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \right. \\
& \left. \frac{\lambda \alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\lambda \alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{\lambda b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^3 A_3^* p_v}{R_h^2} + \right. \\
& \left. \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\lambda \alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta \lambda^2 + \right. \\
& \left. \delta \lambda bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \lambda \mu_v + \delta \mu_h \lambda + \delta bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + \mu_h \lambda^2 + \right. \\
& \left. \lambda bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \mu_h \lambda \mu_v + \mu_h^2 \lambda + bA_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v \right) - \\
& \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v \lambda p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h}{R_h} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} - \right. \\
& \left. \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v \lambda p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h A_3^*}{R_h^2} + \right. \\
& \left. \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h A_3^*}{R_h^2} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v \lambda p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \right. \\
& \left. \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right) + \left(\frac{\lambda \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\lambda \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} = 0$$

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2 b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \lambda^2 \mu_v + \lambda^2 \mu_h + \frac{\lambda^2 b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\lambda^2 \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \\ & \delta \lambda^2 + \mu_h \lambda^2 + \lambda b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \lambda \mu_h \mu_v + \frac{\lambda b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 A_3^* p_v}{R_h^2} + \\ & \frac{\lambda b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\lambda \alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\lambda \alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{\lambda b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \\ & \frac{\lambda \alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta \lambda b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \lambda \mu_v + \delta \mu_h \lambda + \lambda b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \\ & \mu_h \lambda \mu_v + \mu_h^2 \lambda - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v \lambda p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v \lambda p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \\ & \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h A_3^*}{R_h^2} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v \lambda p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* \lambda p_h K_3^*}{R_h^2} + \\ & \frac{\lambda \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\lambda \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} + \frac{b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^3 A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \\ & \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + \\ & b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \\ & \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h A_3^*}{R_h^2} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \\ & \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \\ & \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \left(b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2 \mu_h + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta \right) \lambda^2 + \\ & \left(2 b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2 \mu_h \mu_v + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \right. \\ & \left. \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \right. \\ & \left. \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) \lambda + \\
& \left(\frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \right. \\
& \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \\
& \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \\
& \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \\
& \left. \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) = 0 \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.12) dapat ditulis seperti berikut :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

dengan masing – masing nilai untuk a_1 , a_2 dan a_3 adalah

$$\begin{aligned}
a_1 &= b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2 \mu_h + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta \\
a_2 &= 2 b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2 \mu_h \mu_v + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \\
& \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \\
& \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \\
& \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \\
a_3 &= \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \\
& \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \\
& \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} +
\end{aligned}$$

$$\frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} +$$

$$\frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$

Titik kesetimbangan endemik dari model (4.6) – (4.8) dikatakan stabil jika akar – akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $c_1 > 0$. Dengan rumus Routh – Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 4.2 Routh- Hurwitz Endemik

$a_0 = 1$	a_2	$a_4 = 0$
a_1	a_3	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	0
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	0

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$a_1 = b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2\mu_h + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta$$

Terlihat bahwa nilai a_1 bernilai positif

Untuk nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

Nilai b_1 akan bernilai positif ($a_1 a_2 - a_3 > 0$) jika a_2 bernilai positif ($a_2 > 0$) dan $a_1 a_2 > a_3$

Maka akibatnya nilai a_2 harus positif dengan analisa sebagai berikut :

$$a_2 = 2b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} +$$

$$\frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v +$$

$$\delta\mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2\mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2\mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2\mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2\mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2\mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$

Nilai a_2 akan bernilai positif ($a_2 > 0$) jika

$$\left(2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$

Untuk nilai $a_1 a_2 > a_3$

$$\Leftrightarrow \left(bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2\mu_h + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta \right) \left(2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right)$$

Untuk nilai c_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$= a_3$$

Nilai c_1 akan bernilai positif jika $a_3 > 0$

Maka akibatnya nilai a_3 harus positif dengan analisa sebagai berikut :

$$a_3 = \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{\delta b A_3^* \mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$

Nilai a_3 akan bernilai positif ($a_3 > 0$) jika

$$\left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel-variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi

$$\begin{aligned}
& \left(2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \right. \\
& \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \\
& \delta \mu_h + \mu_h^2 + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \\
& \left. \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right), \\
& \left(b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2\mu_h + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \right. \\
& \delta \left. \right) \left(2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \right. \\
& \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \\
& \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \\
& \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \left. \right) > \\
& \left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \right. \\
& \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \\
& \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \\
& \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \\
& \left. \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right), \text{ dan} \\
& \left(\frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \right. \\
& \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \\
& \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \\
& \left. \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \right. \\
& \left. \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)
\end{aligned}$$

4.4 Simulasi Kestabilan Lokal

Setelah didapatkan titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik dan stabilitas asimtotis lokal. Maka dilakukan simulasi dengan parameter yang digunakan sebagai berikut [3]:

Tabel 4.3 Nilai Parameter Bebas Penyakit

NO	Parameter	Nilai Parameter
1	R_h	235
2	μ_h	0.014
3	p_h	0.001
4	b	143
5	δ	0.2
6	R_v	45000
7	μ_v	12.67
8	p_v	0.5
9	n_1	300
10	n_2	500
11	α	0.9

Tabel 4.4 Nilai Parameter Endemik

NO	Parameter	Nilai Parameter
1	R_h	235
2	μ_h	0.014
3	p_h	0.001
4	b	243
5	δ	0.2
6	R_v	45000
7	μ_v	12.67
8	p_v	0.5
9	n_1	300
10	n_2	500
11	α	0.9

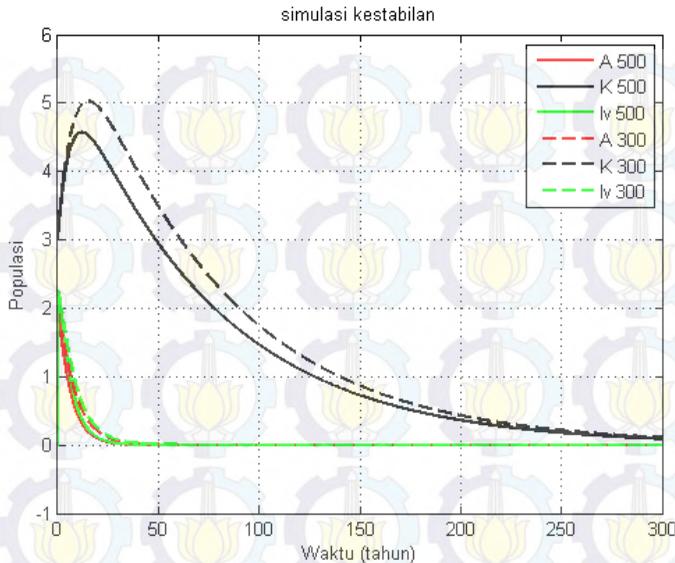
Tabel 4.5 Nilai Awal Bebas Penyakit dari Masing- masing Populasi

No	Populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	A	2
2	K	3
3	I_v	0

Tabel 4.6 Nilai awal Endemik dari Masing- masing Populasi

No	Populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	A	2
2	K	7
3	I_v	0

Setelah dilakukan simulasi dengan memasukkan nilai parameter maka didapat grafik kestabilan bebas penyakit dan endemik yang telah dijelaskan sebelumnya. Simulasi pada keadaan bebas penyakit dan endemik akan dilakukan dengan memasukkan parameter dan nilai awal diatas. Untuk simulasi kestabilan bebas penyakit dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal dari Tabel 4.3 dan Tabel 4.5 sedangkan untuk simulasi kestabilan endemik dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal dari Tabel 4.4 dan Tabel 4.6 dengan sehingga didapat grafik seperti dibawah ini :

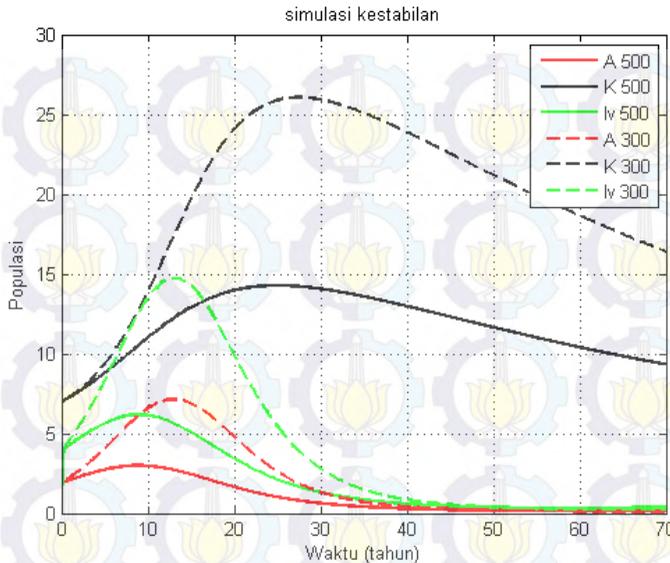


Gambar 4.2 Grafik Kestabilan untuk Bebas Penyakit
Saat $t = 300$

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa untuk $0 \leq t \leq 300$ grafik A , K , dan I_v sudah menunjukkan arah ke titik setimbang di $E_1 = (0,0,0)$. Untuk laju pertumbuhan masing – masing populasi dijelaskan sebagai berikut :

- Laju Populasi Manusia Terinfeksi (A)
Laju pertumbuhan populasi manusia terinfeksi (A) mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan sedikitnya populasi S_h yang berpindah menjadi populasi A , banyaknya perpindahan populasi A menjadi populasi K , banyaknya kematian alami pada populasi A , dan banyaknya perpindahan populasi A menjadi populasi S_h . Dari Gambar 4.2 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

- **Laju Populasi Manusia Cacat Kronis (K)**
Laju pertumbuhan populasi manusia cacat kronis (K) awalnya naik. Hal ini dikarenakan adanya perpindahan populasi A menjadi populasi K . Setelah itu grafik mengalami penurunan dikarenakan banyaknya kematian alami pada populasi K . Dari Gambar 4.2 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$
- **Laju Populasi Nyamuk Terinfeksi (I_v)**
Laju pertumbuhan populasi nyamuk terinfeksi (I_v) mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan perpindahan populasi S_v menjadi populasi I_v itu lebih sedikit dibanding banyaknya kematian alami pada populasi I_v . Populasi ini akan terus turun hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$



Gambar 4.3 Grafik Kestabilan untuk Endemik Saat $t = 70$

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa untuk $0 \leq t \leq 70$ grafik A, K , dan I_v belum menunjukkan arah ke titik setimbang dan titik kesetimbangan turun pada saat $n = 500$. Untuk laju pertumbuhan masing – masing populasi dijelaskan sebagai berikut :

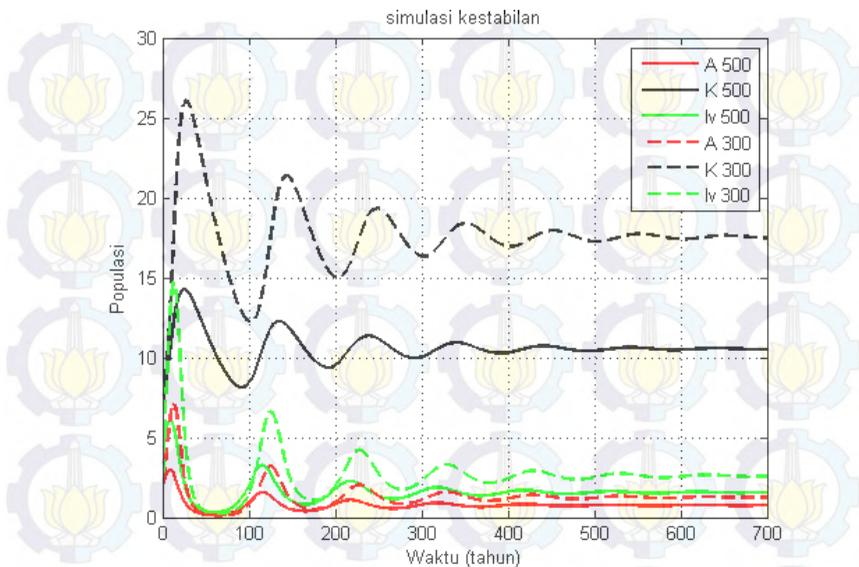
- Laju Populasi Manusia Terinfeksi (A)
Laju pertumbuhan populasi manusia terinfeksi (A) dengan awalnya naik, kurang lebih pada kurun waktu 10 tahun. Hal ini dikarenakan banyaknya populasi S_h yang berpindah menjadi populasi A . Setelah itu grafik mengalami penurunan dikarenakan banyaknya perpindahan populasi A menjadi populasi K , banyaknya kematian alami pada populasi A , dan banyaknya perpindahan populasi A menjadi populasi S_h . Dari Gambar 4.3 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

- Laju Populasi Manusia Cacat Kronis (K)

Laju pertumbuhan populasi manusia cacat kronis (K) awalnya naik kurang lebih pada kurun waktu 30 tahun. Hal ini dikarenakan sedikitnya populasi manusia cacat kronis yang terjadi karena kematian alami. Setelah itu laju pertumbuhan mengalami penurunan karena laju perpindahan dari populasi A menjadi populasi K lebih besar daripada laju penambahan populasinya. Dari Gambar 4.3 terlihat populasi ini akan terus berkurang hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$

- Laju Populasi Nyamuk Terinfeksi (I_v)

Laju pertumbuhan populasi Nyamuk Terinfeksi (I_v) awalnya naik pada kurun waktu 10 tahun. Laju pertumbuhan pada populasi I_v mengalami kenaikan, hal ini disebabkan oleh laju kematian alami pada nyamuk terinfeksi lebih kecil dari laju perpindahan populasi S_v menjadi populasi I_v . Populasi ini akan terus turun hingga menuju suatu titik dan stabil di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$



Gambar 4.4 Grafik Kestabilan Endemik Saat $t = 700$

Pada Gambar 4.4 terlihat jelas bahwa laju pertumbuhan populasi A , K , dan I_v awalnya naik dan turun pada selang waktu 10 sampai 30 tahun, setelah berjalan turun grafik semua populasi ini mulai bergerak naik turun sampai stabil dititik setimbang.

4.5 Implementasi Algoritma EKF pada Model Transmisi penyakit *Filariasis*

Selanjutnya dilakukan estimasi pada model transmisi penyakit *Filariasis* dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*. Sebelumnya dilakukan diskritisasi model transmisi penyakit *Filariasis* terlebih dahulu.

Dari persamaan transmisi penyakit *Filariasis* yaitu persamaan (2.15), dirancang dalam bentuk *state space*. Maka ada 5 variabel x yang merupakan populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis* (S_h), populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala

klinis dan dapat menularkan penyakit (A), populasi manusia cacat kronis (K), populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filarial (S_v) dan populasi nyamuk terinfeksi (I_v).

Dari persamaan (4.1) – (4.5) kemudian dilakukan diskritisasi terhadap persamaan tersebut. Pendiskritan dilakukan dengan metode beda hingga maju untuk perubahan variabel terhadap waktu. Berikut pendiskritan dari model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan :

$$S_{h(i+1)} = \left(R_h + \alpha \frac{A_i}{N_h} nK_i - bI_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \mu_h S_{h(i)} \right) \Delta t + S_{h(i)} \quad (4.14)$$

$$A_{i+1} = \left(bI_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \delta A_i - \alpha \frac{A_i}{N_h} nK_i - \mu_h A_i \right) \Delta t + A_i \quad (4.15)$$

$$K_{i+1} = (\delta A_i - \mu_h K_i) \Delta t + K_i \quad (4.16)$$

$$S_{v(i+1)} = \left(R_v - bS_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v S_{v(i)} \right) \Delta t + S_{v(i)} \quad (4.17)$$

$$I_{v(i+1)} = \left(bS_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v I_{v(i)} \right) \Delta t + I_{v(i)} \quad (4.18)$$

dengan memisalkan

$$x_1 = S_h$$

$$x_2 = A$$

$$x_3 = K$$

$$x_4 = S_v$$

$$x_5 = I_v$$

persamaan menjadi

$$x_{1(i+1)} = \left(R_h + \alpha \frac{x_{2(i)}}{N_h} n x_{3(i)} - b x_{5(i)} \frac{x_{1(i)}}{N_h} p_h - \mu_h x_{1(i)} \right) \Delta t + x_{1(i)}$$

$$x_{2(i+1)} = \left(bx_{5(i)} \frac{x_{1(i)}}{N_h} p_h - \delta x_{2(i)} - \alpha \frac{x_{2(i)}}{N_h} n x_{3(i)} - \mu_h x_{2(i)} \right) \Delta t + x_{2(i)}$$

$$x_{3(i+1)} = (\delta x_{2(i)} - \mu_h x_{3(i)}) \Delta t + x_{3(i)}$$

$$x_{4(i+1)} = \left(R_v - bx_{4(i)} \frac{x_{2(i)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{4(i)} \right) \Delta t + x_{4(i)}$$

$$x_{5(i+1)} = \left(bx_{4(i)} \frac{x_{2(i)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{5(i)} \right) \Delta t + x_{5(i)}$$

sehingga dapat dituliskan menjadi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_{2(i)}}{N_h} n x_{3(i)} - bx_{5(i)} \frac{x_{1(i)}}{N_h} p_h - \mu_h x_{1(i)} \right) \Delta t + x_{1(i)} \\ \left(bx_{5(i)} \frac{x_{1(i)}}{N_h} p_h - \delta x_{2(i)} - \alpha \frac{x_{2(i)}}{N_h} n x_{3(i)} - \mu_h x_{2(i)} \right) \Delta t + x_{2(i)} \\ (\delta x_{2(i)} - \mu_h x_{3(i)}) \Delta t + x_{3(i)} \\ \left(R_v - bx_{4(i)} \frac{x_{2(i)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{4(i)} \right) \Delta t + x_{4(i)} \\ \left(bx_{4(i)} \frac{x_{2(i)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{5(i)} \right) \Delta t + x_{5(i)} \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 0$ sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_{2(0)}}{N_h} n x_{3(0)} - b x_{5(0)} \frac{x_{1(0)}}{N_h} p_h - \mu_h x_{1(0)} \right) \Delta t + x_{1(0)} \\ \left(b x_{5(0)} \frac{x_{1(0)}}{N_h} p_h - \delta x_{2(0)} - \alpha \frac{x_{2(0)}}{N_h} n x_{3(0)} - \mu_h x_{2(0)} \right) \Delta t + x_{2(0)} \\ \left(\delta x_{2(0)} - \mu_h x_{3(0)} \right) \Delta t + x_{3(0)} \\ \left(R_v - b x_{4(0)} \frac{x_{2(0)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{4(0)} \right) \Delta t + x_{4(0)} \\ \left(b x_{4(0)} \frac{x_{2(0)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{5(0)} \right) \Delta t + x_{5(0)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Dalam hal ini $x_{1(0)}$, $x_{1(0)}$, $x_{1(0)}$, $x_{1(0)}$, dan $x_{1(0)}$ adalah input nilai awal variabel state pada saat $t = 0$

Untuk $i = 1$ sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_{2(1)}}{N_h} n x_{3(1)} - b x_{5(1)} \frac{x_{1(1)}}{N_h} p_h - \mu_h x_{1(1)} \right) \Delta t + x_{1(1)} \\ \left(b x_{5(1)} \frac{x_{1(1)}}{N_h} p_h - \delta x_{2(1)} - \alpha \frac{x_{2(1)}}{N_h} n x_{3(1)} - \mu_h x_{2(1)} \right) \Delta t + x_{2(1)} \\ \left(\delta x_{2(1)} - \mu_h x_{3(1)} \right) \Delta t + x_{3(1)} \\ \left(R_v - b x_{4(1)} \frac{x_{2(1)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{4(1)} \right) \Delta t + x_{4(1)} \\ \left(b x_{4(1)} \frac{x_{2(1)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{5(1)} \right) \Delta t + x_{5(1)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

dan seterusnya hingga $i = k$, dengan k adalah jumlah iterasi yang diinginkan yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_k =$$

$$\begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_{2(k)}}{N_h} n x_{3(k)} - b x_{5(k)} \frac{x_{1(k)}}{N_h} p_h - \mu_h x_{1(k)} \right) \Delta t + x_{1(k)} \\ \left(b x_{5(k)} \frac{x_{1(k)}}{N_h} p_h - \delta x_{2(k)} - \alpha \frac{x_{2(k)}}{N_h} n x_{3(k)} - \mu_h x_{2(k)} \right) \Delta t + x_{2(k)} \\ \left(\delta x_{2(k)} - \mu_h x_{3(k)} \right) \Delta t + x_{3(k)} \\ \left(R_v - b x_{4(k)} \frac{x_{2(k)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{4(k)} \right) \Delta t + x_{4(k)} \\ \left(b x_{4(k)} \frac{x_{2(k)}}{N_h} p_v - \mu_v x_{5(k)} \right) \Delta t + x_{5(k)} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Jika dituliskan secara lengkap untuk $i = 1, 2, 3, \dots, k$ maka model diskrit pada persamaan (4.19) – (4.21) secara umum dapat dituliskan ke dalam bentuk fungsi nonlinear

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

Model transmisi penyakit *Filariasis* dengan pengobatan pada (4.19) – (4.21) masih dalam bentuk deterministik. seharusnya dalam kondisi sebenarnya, persamaan tersebut memuat noise masing – masing persamaan. Oleh karena itu, harus ditambahkan faktor stokastik dalam bentuk noise. Dengan demikian didapatkan model stokastik sebagai berikut.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \quad (4.22)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (4.23)$$

dengan $f(x_k, u_k)$ adalah fungsi nonlinear sebagaimana yang didefinisikan pada persamaan (4.19) – (4.21). Noise sistem (w_k) pada model sistem dan noise pengukuran (v_k) pada model pengukuran.

Faktor stokastik berupa noise yang termuat dalam persamaan dibangkitkan dari sejumlah bilangan acak dari komputer melalui program Matlab. Noise yang dibangkitkan diasumsikan memiliki sebaran normal dengan mean nol sedangkan variansi noise diasumsikan konstan sebesar Q dan R. Selanjutnya metode Extended Kalman Filter dapat diterapkan pada model (4.22) dan (4.23) untuk estimasi transmisi penyakit *Filariasis*.

Untuk dilakukan estimasi transmisi penyakit *Filariasis* pada persamaan (4.1) – (4.5) menggunakan metode *Extended Kalman Filter*, diperlukan model sistem dan model pengukuran.

Dalam algoritma EKF seperti tertuang dalam tabel 2.1, model stokastik (4.22) disebut model sistem sedangkan model stokastik (4.23) disebut sebagai model pengukuran.

langkah awal harus dilakukan adalah mendefinisikan x , yaitu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya memberikan nilai awal x_0 untuk masing-masing variabel yang terdiri dari nilai awal populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis* (x_{1_0}), nilai awal populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit (x_{2_0}), nilai awal populasi manusia cacat kronis (x_{3_0}), nilai awal populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria (x_{4_0}), nilai awal populasi nyamuk terinfeksi (x_{5_0}). Sehingga dapat ditulis

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \\ x_{4_0} \\ x_{5_0} \end{bmatrix}$$

Model Sistem dan Model Pengukuran

Langkah selanjutnya adalah membentuk model sistem dan model pengukuran, seperti persamaan (4.22) dan (4.23) yaitu

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ z_k &= Hx_k + v_k \end{aligned}$$

Model sistem dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \left(R_h + \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \mu_h x_1(i) \right) \Delta t + x_1(i) \\ \left(b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \delta x_2(i) - \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - \mu_h x_2(i) \right) \Delta t + x_2(i) \\ \left(\delta x_2(i) - \mu_h x_3(i) \right) \Delta t + x_3(i) \\ \left(R_v - b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_4(i) \right) \Delta t + x_4(i) \\ \left(b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_5(i) \right) \Delta t + x_5(i) \end{bmatrix} + w_k$$

dengan w_k adalah noise sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* nol dan kovarian Q atau bisa ditulis $w_k \sim N(0, Q_k)$.

Jika populasi manusia terinfeksi merupakan variabel yang bisa diukur maka digunakan matriks pengukuran sebagai berikut :

$$H = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

sehingga diperoleh data pengukuran z sebagai berikut :

$$z_k = H x_k + v_k$$

$$z_k = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + v_k$$

dengan v_k adalah noise sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* nol dan kovarian Q atau biasa ditulis $w_k \sim N(0, Q_k)$

Inisialisasi

Pada tahap inisialisasi ini atau nilai awal pada saat $t = 0$ yaitu diketahui bahwa model transmisi penyakit *Filariasis* diberikan nilai awal berdasarkan referensi yaitu :

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 80 \\ 2 \\ 7 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = P_{x_0}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Kemudian Q (kovarian noise pada sistem) dan R (kovarian noise pada pengukuran) dapat didefinisikan sebagai matriks diagonal berikut :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.001$$

Tahap Prediksi

Pada tahap prediksi ini nilai variabel yang diestimasi diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k + w_k$$

dan nilai kovarian *error*-nya diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$P_{k+1}^- = AP_kA^T + Q_k$$

dengan A adalah matriks Jacobian. Persamaan (4.10) – (4.14) diturunkan secara parsial terhadap masing – masing variabelnya, maka :

$$\text{dari } F_1 = \Delta t \left(R_h + \alpha \frac{A_i}{N_h} n K_i - b I_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \mu_h S_{h(i)} \right) + S_{h(i)}$$

diperoleh

$$\frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} = \Delta t \left(-b I_{v(i)} \frac{p_h}{N_h} - \mu_h \right) + 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial A_i} = \Delta t \left(\alpha \frac{K_i n}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_i} = \Delta t \left(\alpha \frac{A_i n}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} = -\Delta t \left(\frac{b S_{h(i)} P_h}{N_h} \right),$$

$$\text{dari } F_2 = \Delta t \left(b I_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \delta A_i - \alpha \frac{A_i}{N_h} n K_i - \mu_h A_i \right) + A_i$$

diperoleh

$$\frac{\partial F_2}{\partial S_{h(i)}} = \Delta t \left(\frac{b I_{v(i)} P_h}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial A_i} = \Delta t \left(-\delta - \frac{\alpha n K_i}{N_h} - \mu_h \right) + 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial K_i} = \Delta t \left(-\frac{\alpha A_i n}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial S_{v(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial I_{v(i)}} = \Delta t \left(\frac{b S_{h(i)} P_h}{N_h} \right),$$

$$\text{dari } F_3 = \Delta t (\delta A_i - \mu_h K_i) + K_i$$

diperoleh

$$\frac{\partial F_3}{\partial S_{h(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial A_i} = \Delta t \delta$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial K_i} = \Delta t (-\mu_h) + 1$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial S_{v(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial I_{v(i)}} = 0,$$

$$\text{dari } F_4 = \Delta t \left(R_v - bS_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v S_{v(i)} \right) + S_{v(i)}$$

diperoleh

$$\frac{\partial F_4}{\partial S_{h(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial A_i} = \Delta t \left(-\frac{bS_{v(i)}P_v}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial K_i} = 0$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial S_{v(i)}} = \Delta t \left(-\frac{bA_iP_v}{N_h} - \mu_v \right) + 1$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial I_{v(i)}} = 0$$

$$\text{dari } F_5 = \Delta t \left(bS_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v I_{v(i)} \right) + I_{v(i)}$$

diperoleh

$$\frac{\partial F_5}{\partial S_{h(i)}} = 0$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial A_i} = \Delta t \left(\frac{bS_{v(i)}P_v}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial K_i} = 0$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial S_{v(i)}} = \Delta t \left(\frac{bA_iP_v}{N_h} \right)$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial I_{v(i)}} = \Delta t(-\mu_v) + 1$$

matriks Jacobian A dapat dituliskan menjadi :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_{h(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial A_i} & \frac{\partial F_1}{\partial K_i} & \frac{\partial F_1}{\partial S_{v(i)}} & \frac{\partial F_1}{\partial I_{v(i)}} \end{bmatrix}$$

Tahap Koreksi

Pada tahap ini dilakukan perhitungan *Kalman Gain* berdasarkan persamaan sebagai berikut

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R_k)^{-1}$$

dengan P_k^- adalah kovarian *error* pada tahap prediksi, H adalah matriks pengukuran, dan R_k adalah kovarian pada noise pengukuran.

Kemudian dihitung nilai estimasi koreksi dengan menggunakan persamaan sebagai berikut

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0))$$

dengan \hat{x}_k^- adalah nilai estimasi pada tahap prediksi, K_k adalah *Kalman Gain*, z_k adalah data pengukuran pada tahap koreksi, dan H adalah matriks pengukuran.

Setelah itu dilakukan perhitungan kovariansi *error* terhadap hasil estimasi pada tahap koreksi yaitu

$$P_k = [I - K_k H_k] P_k^-$$

4.6 Simulasi *Extended Kalman Filter*

Pada sub bab ini simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma *Extended Kalman Filter* pada model transmisi penyakit *Filariasis*. Hasil simulasi akan dievaluasi dengan cara membandingkan real dengan hasil estimasi EKF dan diakhir simulasi ditampilkan nilai RMSE (*Root Mean Square Error*) dari masing-masing populasi.

Dalam simulasi ini, nilai awal dan parameter yang digunakan adalah [3] :

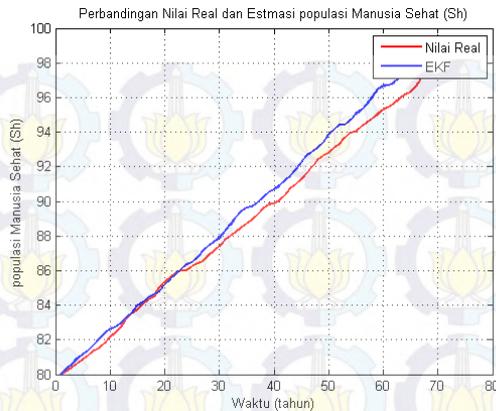
Tabel 4.7 Nilai awal dari masing – masing populasi

No	populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	S_h	80
2	A	2
3	K	7
4	S_v	15
5	I_v	0

Tabel 4.8 Nilai Parameter

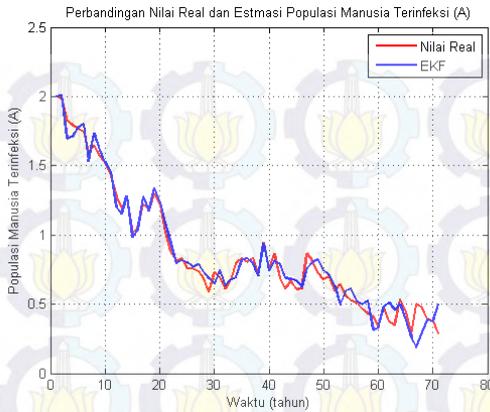
NO	Parameter	Nilai Parameter
1	R_h	235
2	μ_h	0.014
3	p_h	0.001
4	b	243
5	δ	0.2
6	R_v	45000
7	μ_v	12.67
8	p_v	0.5
10	n	500
11	α	0.9
12	N_h	87
13	dt	0.001

Hasil simulasi dan nilai RMSE dengan mengambil parameter dan nilai awal berdasarkan yang terdapat pada Tabel 4.7 dan Tabel 4.8 dengan iterasi sebanyak 70 didapatkan grafik dengan waktu komputasi sebesar 3,183017 detik sebagai berikut:



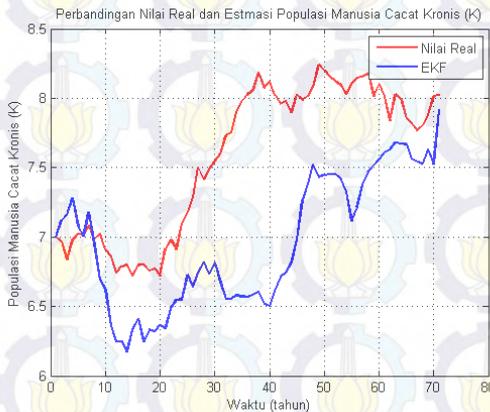
Gambar 4.5 Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populasi Manusia Sehat (S_h)

Warna merah pada grafik diatas menunjukkan nilai real yang memuat noise sedangkan warna biru menunjukkan nilai hasil estimasi. Gambar 4.5 diatas merupakan perbandingan nilai real dengan nilai hasil estimasi terhadap populasi manusia sehat. Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih nilai antara nilai real dengan nilai hasil estimasi sebesar 0.74.



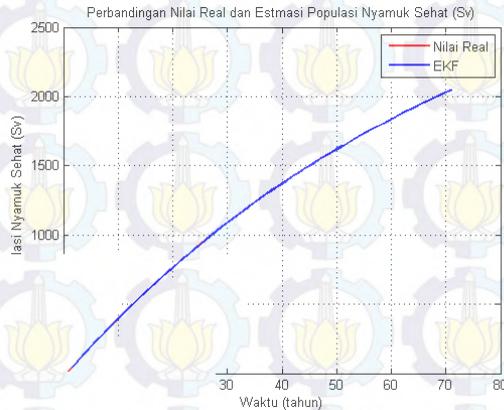
Gambar 4.6 Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Terinfeksi (A)

Gambar 4.6 diatas merupakan perbandingan nilai real dengan nilai hasil estimasi terhadap populasi manusia terinfeksi. Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih nilai antara nilai real dengan nilai hasil estimasi sebesar 0.07.



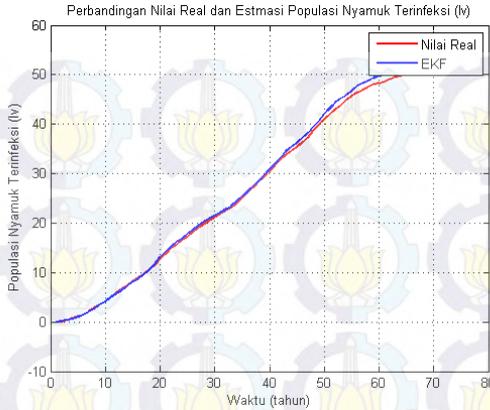
Gambar 4.7 Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Cacat Kronis (K)

Gambar 4.7 diatas merupakan perbandingan nilai real dengan nilai hasil estimasi terhadap populasi manusia cacat kronis. Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih 0.77 antar nilai real dengan nilai estimasi.



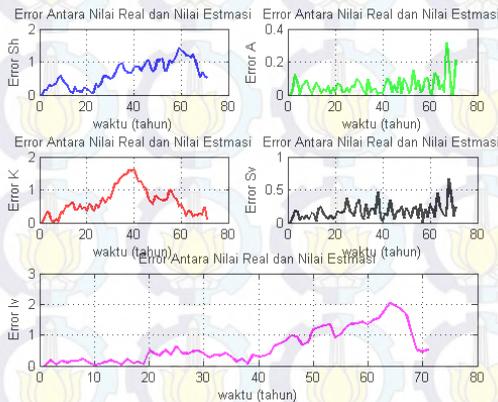
Gambar 4.8 Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Sehat (S_v)

Gambar 4.8 diatas merupakan perbandingan nilai real dengan nilai hasil estimasi terhadap populasi nyamuk sehat. Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih 0.2 antar nilai real dengan nilai estimasi.



Gambar 4.9 Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Terinfeksi (I_v)

Gambar 4.9 diatas merupakan perbandingan nilai real dengan nilai hasil estimasi terhadap populasi nyamuk terinfeksi. Hasil yang diperoleh menunjukkan selisih 0.83 antar nilai real dengan nilai estimasi.



Gambar 4.10 Grafik *Error* antara Nilai Real dan Nilai Estimasi Semua Populasi

Pada Gambar 4.5 – Gambar 4.9 menunjukkan bahwa grafik dari hasil estimasi populasi manusia terinfeksi lebih mendekati grafik realnya jika dibandingkan dengan estimasi populasi yang lain. Terbukti dengan nilai RMSE pada populasi manusia terinfeksi yang paling kecil. Hal ini dikarenakan dari matriks H yang dipilih yaitu $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$, menggambarkan bahwa data pengukuran yang digunakan adalah populasi manusia terinfeksi.

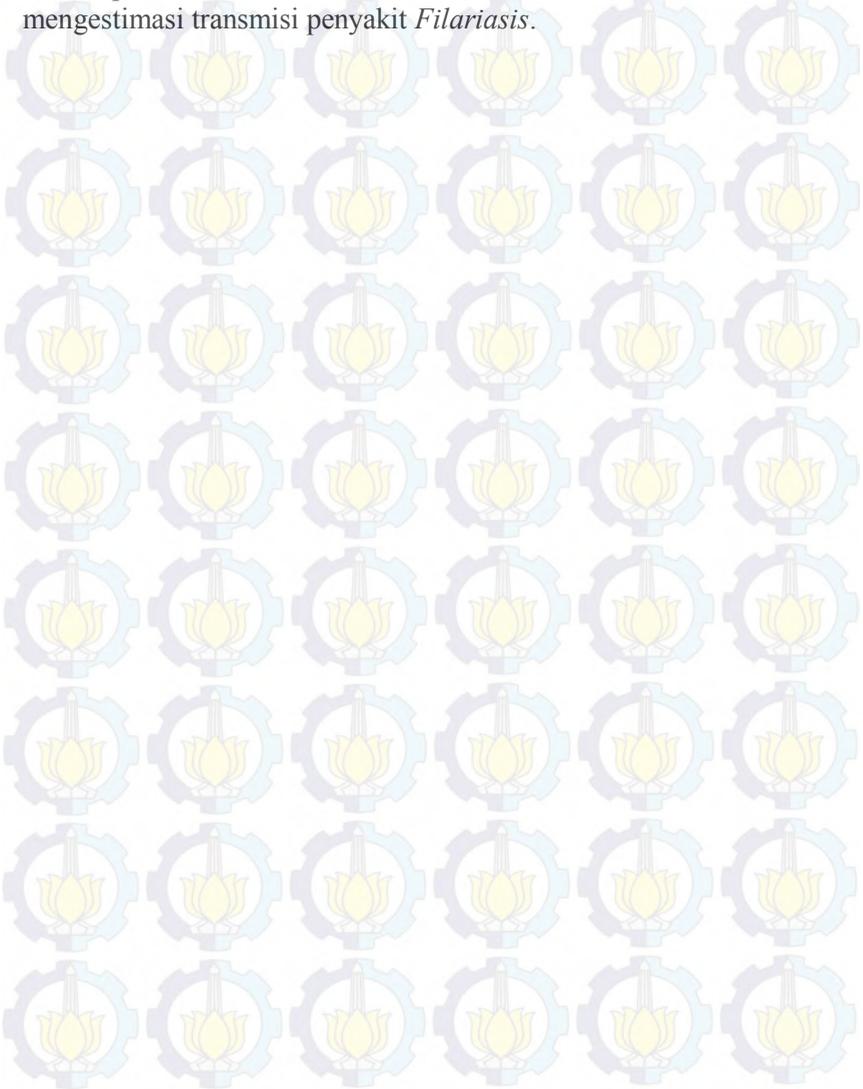
Gambar 4.10 menunjukkan grafik dari *error* antara nilai real dan nilai hasil estimasi dari semua populasi. Terlihat bahwa nilai *error* yang paling kecil pada populasi manusia terinfeksi.

Tabel 4.9 Nilai rata – rata RMSE

Simulasi ke	Nilai rata – rata RMSE				
	S_h	A	K	S_v	I_v
1	0.7414	0.0728	0.7725	0.2042	0.8377
2	0.5243	0.0578	0.4831	0.1449	0.6182
3	0.7098	0.0926	0.5330	0.2341	0.9467
4	0.4393	0.0536	0.8032	0.1743	0.3232
5	0.3166	0.0777	0.9310	0.2119	0.2119
6	0.2698	0.0492	1.1651	0.1692	0.4359
7	0.3713	0.0917	0.5593	0.1956	0.7022
8	0.4690	0.0966	0.5283	0.2512	0.8088
9	0.6099	0.0627	0.7904	0.3287	0.5126
10	0.3817	0.1237	0.5199	0.2536	0.4587

Pada Tabel 4.9 terlihat bahwa nilai RMSE dari setiap populasi relatif kecil yaitu nilai *error* (ne) pada populasi S_h diinterval $0.27 < ne < 0.74$, pada populasi A diinterval $0.04 < ne < 0.12$, pada populasi K diinterval $0.48 < ne < 1.16$, pada populasi S_v diinterval $0.14 < ne < 0.32$, dan pada populasi

I_v diinterval $0.21 < ne < 0.94$. Sehingga secara keseluruhan hal ini dapat dikatakan bahwa metode EKF cocok untuk mengestimasi transmisi penyakit *Filariasis*.



BAB V PENUTUP

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisa model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

5.1 Kesimpulan

1. Model transmisi penyakit *Filariasis* yang telah dikaji, telah didapatkan titik setimbang dan analisis kestabilan sebagai berikut :

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0,0,0)$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$

- b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$

dengan

$$K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$$

$$I_{v(3)}^* = \frac{b R_v A_3^* \mu_h p_v}{b A_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

$$A_3^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan memisalkan dipersamaan A_3^*

$$\begin{aligned} a &= -b\mu_v\mu_h p_v \alpha n \delta \\ b &= -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h - \\ &\quad b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta \\ c &= b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h \end{aligned}$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$

2. Metode *Extended Kalman Filter* yang digunakan dapat diterapkan untuk mengestimasi transmisi Filariasis. Hal ini berdasarkan RMS Error yang diperoleh relatif kecil setiap statenya.

5.2 Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Pada Tugas Akhir ini hanya memakai parameter dari referensi, akan lebih baik jika pakai data sesungguhnya untuk melakukan estimasi.
2. Mencari hubungan antara hasil analisis kestabilan dengan hasil estimasi metode *Extended Kalman Filter*.

LAMPIRAN A

Listing program kestabilan menggunakan ODE

- M-File dengan judul **taode.m**

```
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-9  
1e-9 1e-9]);  
[t,x] = ode45(@rigid,[0 300],[2 3 0],options);  
  
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'k',t,x(:,3),'g','Lin  
eWidth',2);  
  
grid on  
hold on  
  
[T,y] = ode45(@rigid1,[0 300],[2 3 0],options);  
  
plot(T,y(:,1),'--r',T,y(:,2),'--k',T,y(:,3),'--  
g','LineWidth',2);  
  
title('simulasi kestabilan');  
  
xlabel('Waktu (tahun)');  
ylabel('Populasi');  
  
legend('A 500','K 500','Iv 500','A 300','K  
300','Iv 300');
```

- M-File dengan judul **rigid1.m**

```
function dx = rigid1(T,x)  
dx = zeros(3,1);
```

```

dx(1)=b*x(3)*Ph*((Rh-x(1)*Uh-x(2)*Uh)/Rh-
delta*x(1)-alfa*x(1)*(Uh/Rh)*n*x(2)-Uh*x(1);

```

```

dx(2)=delta*x(1)-Uh*x(2);

```

```

dx(3)=b*((Rv-x(3)*Uv)/Uv)*x(1)*Uh/Rh*Pv-
Uv*x(3);

```

```

end

```

- M-File dengan judul **rigid.m**

```

function dx = rigid(t,x)

```

```

dx = zeros(3,1);

```

```

dx(1)=b*x(3)*Ph*((Rh-x(1)*Uh-x(2)*Uh)/Rh-
delta*x(1)-alfa*x(1)*(Uh/Rh)*n*x(2)-Uh*x(1);

```

```

dx(2)=delta*x(1)-Uh*x(2);

```

```

dx(3)=b*((Rv-x(3)*Uv)/Uv)*x(1)*Uh/Rh*Pv-
Uv*x(3);

```

```

end

```

LAMPIRAN B

Listing Program EKF

```

disp('-----');
disp('          PROGRAM SIMULASI');
disp('          ESTIMASI TRANSMISI FILARIASIS ');
disp('MENGUNAKAN METODE EXTENDED KALMAN
FILTER');
disp('-----');
%% Inisialisasi awal
Q=input('Masukan nilai Q : ');
R=input('Masukan nilai R : ');

tic
% parameter
x1(1)=80;
x2(1)=2;
x3(1)=7;
x4(1)=15;
x5(1)=0;
Nh=87;
Rh=235;
Uh=1/70;
Ph=0.001;
b=243;
delta=0.2;
Rv=45000;
Uv=12.67;
Pv=0.5;
n=500;
alfa=0.9;
dt=0.001;

k=70;
x=[x1(1);x2(1);x3(1);x4(1);x5(1)];
H=[0 1 0 0 0];

```

```

Qk=[1 0 0 0 0;0 1 0 0 0;0 0 1 0 0;0 0 0 1 0;0 0
0 0 1]*Q;
Rk=R;

%% Tahap Inisialisasi
x1topi(1)=x1(1);
x2topi(1)=x2(1);
x3topi(1)=x3(1);
x4topi(1)=x4(1);
x5topi(1)=x5(1);
xtopi=[x1topi(1);x2topi(1);x3topi(1);x4topi(1);x
5topi(1)];
P0=0.5*eye(5);

%% Model Sistem dan Model Pengukuran
for i=1:k
    % Matriks Jacobi Sistem
    D11(i)=dt*((-b*x5(i)*Ph)/Nh-Uh)+1;
    D12(i)=dt*alfa*n*x3(i)/Nh;
    D13(i)=dt*alfa*n*x2(i)/Nh;
    D15(i)=-dt*b*x1(i)*Ph/Nh;
    D21(i)=dt*b*x5(i)*Ph/Nh;
    D22(i)=(dt*(-delta-alfa*n*x3(i)/Nh-Uh))+1;
    D23(i)=dt*(-alfa*x2(i)*n/Nh);
    D25(i)=dt*b*x1(i)*Ph/Nh;
    D32(i)=dt*delta;
    D33(i)=(dt*(-Uh))+1;
    D42(i)=dt*(-b*x4(i)*Pv/Nh);
    D44(i)=(dt*(-b*x2(i)*Pv/Nh-Uv))+1;
    D52(i)=dt*(b*x4(i)*Pv/Nh);
    D54(i)=dt*(b*x2(i)*Pv/Nh);
    D55(i)=(dt*(-Uv))+1;
    A=[D11(i) D12(i) D13(i) 0 D15(i);
        D21(i) D22(i) D23(i) 0 D25(i);
        0 D32(i) D33(i) 0 0;
        0 D42(i) 0 D44(i) 0;

```

```
0 D52(i) 0 D54(i) D55(i)];
```

```
%x(:,i+1)=A*x(:,i)+wk(:,i);
```

```
x1(i+1)=(dt*(Rh+alfa*(x2(i)/Nh)*n*x3(i)-  
b*x5(i)*(x1(i)/Nh)*Ph-
```

```
Uh*x1(i))+x1(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x2(i+1)=(dt*(b*x5(i)*(x1(i)/Nh)*Ph-
```

```
delta*x2(i)-alfa*(x2(i)/Nh)*n*x3(i)-  
Uh*x2(i))+x2(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x3(i+1)=(dt*(delta*x2(i)-
```

```
Uh*x3(i))+x3(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x4(i+1)=(dt*(Rv-b*x4(i)*(x2(i)/Nh)*Pv-
```

```
Uv*x4(i))+x4(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x5(i+1)=(dt*(b*x4(i)*(x2(i)/Nh)*Pv-
```

```
Uv*x5(i))+x5(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x(:,i+1)=[x1(i+1);x2(i+1);x3(i+1);x4(i+1);x5(i+1)  
];
```

```
z0(:,i+1)=(1/2*(x2(i+1))^2+normrnd(0,sqrt(R),1,1  
));
```

```
z(:,i+1)=[z0(:,i+1)];
```

```
% Tahap Prediksi
```

```
x1pre(i+1)=(dt*(Rh+alfa*(x2topi(i)/Nh)*n*x3topi(i)-  
b*x5topi(i)*(x1topi(i)/Nh)*Ph-
```

```
Uh*x1topi(i))+x1topi(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x2pre(i+1)=(dt*(b*x5topi(i)*(x1topi(i)/Nh)*Ph-
```

```
delta*x2topi(i)-alfa*(x2topi(i)/Nh)*n*x3topi(i)-  
Uh*x2topi(i))+x2topi(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```
x3pre(i+1)=(dt*(delta*x2topi(i)-
```

```
Uh*x3topi(i))+x3topi(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);
```

```

x4pre(i+1)=(dt*(Rv-
b*x4topi(i)*(x2topi(i)/Nh)*Pv-
Uv*x4topi(i)))+x4(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);

x5pre(i+1)=(dt*(b*x4topi(i)*(x2topi(i)/Nh)*Pv-
Uv*x5topi(i)))+x5topi(i)+normrnd(0,sqrt(Q),1,1);

xpre(:,i+1)=[x1pre(i+1);x2pre(i+1);x3pre(i+1);x4
pre(i+1);x5pre(i+1)];

Ppre=A*P0*A'+Qk;

%Tahap koreksi
Ka=Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+Rk);
xtopi(:,i+1)=xpre(:,i+1)+Ka*(z(:,i+1)-
([1/2*x2pre(i+1)^2]));
x1topi(i+1)=xtopi(1,i+1);
x2topi(i+1)=xtopi(2,i+1);
x3topi(i+1)=xtopi(3,i+1);
x4topi(i+1)=xtopi(4,i+1);
x5topi(i+1)=xtopi(5,i+1);
P0=(eye(5)-Ka*H)*Ppre;

end

e1=abs(x1-x1topi);
temp=0;
for i=1:k
temp=temp+e1(i)^2;
end
RMSE1=sqrt(temp/k)

e2=abs(x2-x2topi);
temp=0;
for i=1:k
temp=temp+e2(i)^2;
end

```

```
RMSE2=sqrt (temp/k)
```

```
e3=abs (x3-x3topi) ;
temp=0;
for i=1:k
    temp=temp+e3(i)^2;
end
```

```
RMSE3=sqrt (temp/k)
```

```
e4=abs (x4-x4topi) ;
temp=0;
for i=1:k
    temp=temp+e4(i)^2;
end
```

```
RMSE4=sqrt (temp/k)
```

```
e5=abs (x5-x5topi) ;
temp=0;
for i=1:k
    temp=temp+e5(i)^2;
end
```

```
RMSE5=sqrt (temp/k)
```

```
figure(1)
```

```
plot((1:k+1),x(1,:), '-r', (1:k+1),xtopi(1,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Perbandingan Nilai Real dan Estmasi populasi Manusia Sehat (Sh)');
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('populasi Manusia Sehat (Sh)');
legend('Nilai Real','EKF');
grid on
```

```
figure(2)
```

```
plot((1:k+1),x(2,:), '-r', (1:k+1),xtopi(2,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Perbandingan Nilai Real dan Estmasi Populasi Manusia Terinfeksi (A)');
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('Populasi Manusia Terinfeksi (A)');
legend('Nilai Real','EKF');
```

```
grid on
```

```
figure(3)
plot((1:k+1),x(3,:), '--r', (1:k+1),xtopi(3,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Perbandingan Nilai Real dan Estmasi Populasi Manusia Cacat Kronis (K)');
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('Populasi Manusia Cacat Kronis (K)');
legend('Nilai Real','EKF');
grid on
```

```
figure(4)
plot((1:k+1),x(4,:), '--r', (1:k+1),xtopi(4,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Perbandingan Nilai Real dan Estmasi Populasi Nyamuk Sehat (Sv)');
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('Populasi Nyamuk Sehat (Sv)');
legend('Nilai Real','EKF');
grid on
```

```
figure(5)
plot((1:k+1),x(5,:), '--r', (1:k+1),xtopi(5,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Perbandingan Nilai Real dan Estmasi Populasi Nyamuk Terinfeksi (Iv)');
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('Populasi Nyamuk Terinfeksi (Iv)');
legend('Nilai Real','EKF');
grid on
```

```
figure(6)
subplot(3,2,1);
plot((1:k+1),e1(1,:), '-b', 'LineWidth',2),title('Error Antara Nilai Real dan Nilai Estmasi');
xlabel('waktu (tahun)');
ylabel('Error Sh');
grid on
hold on;
subplot(3,2,2);
```

```
plot((1:k+1),e2(1,:), '-  
g', 'LineWidth',2),title('Error Antara Nilai Real  
dan Nilai Estmasi');  
xlabel('waktu (tahun)');  
ylabel('Error A');  
grid on  
hold on;  
subplot(3,2,3);  
plot((1:k+1),e3(1,:), '-  
r', 'LineWidth',2),title('Error Antara Nilai Real  
dan Nilai Estmasi');  
xlabel('waktu (tahun)');  
ylabel('Error K');  
grid on  
hold on;  
subplot(3,2,4);  
plot((1:k+1),e4(1,:), '-  
k', 'LineWidth',2),title('Error Antara Nilai Real  
dan Nilai Estmasi');  
xlabel('waktu (tahun)');  
ylabel('Error Sv');  
grid on  
hold on;  
subplot(3,2,[5,6]);  
plot((1:k+1),e5(1,:), '-  
m', 'LineWidth',2),title('Error Antara Nilai Real  
dan Nilai Estmasi');  
xlabel('waktu (tahun)');  
ylabel('Error Iv');  
grid on  
hold off;  
toc
```



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
Lampiran A Listing Program Kestabilan.....	69
Lampiran B Listing Program <i>Extended Kalman Filter</i>	71





“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim. (2006). “Epidemiologi Filariasi”. Departemen kesehatan republik Indonesia, direktorat jendral PP & PL, Jakarta.
- [2] Supriana, A.K, Serviana, H., Soewono. E. (2008). “A Mathematical Model to Investigate the Long-Term Effects of the Lymphatic *Filariasis* Medical Treatment in Jati Sampurna, West Java”. ITB: Bandung
- [3] Husain, H. S.,(2007). “Model penebaran Penyakit Kaki Gajah di kelurahan Jati Sampurna”. ITB : Bandung
- [4] Djoko, Luknanto. (2003). “Model Matematika”. Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta.
- [5] Welch, G. Dan Bishop, G. (2011). “An introduction to the Kalman Filter”. University of North Carolina: Chapel Hil, Amerika.
- [6] Thieme HR. (1992). “Epidemic and Demographic Interaction in The Spread of Potentially Fatal Diseases in Growing Populatio”. Math Biosci.
- [7] Sun, C, Hsieh, Ying-Hen. (2010). “Global Analysis of an SEIR Model with Varying Population Size and Vaccinatio”. Applied Mathematical Modelling
- [8] Makridakis, S., Wheelwright, S.C., dan McGee, V.E. (1999). “Metode dan Aplikasi Peramalan”. Edisi kedua. Jakarta: Binarupa Aksara.



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Jombang pada tanggal 5 Januari 1993, merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu TK Dharma Wanita Dukuhmojo, SD Negeri Dukuhdimoro, SMP Negeri 1 Mojoagung, dan SMA Negeri Mojoagung Jombang.

Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika pada tahun 2011 dan terdaftar dengan NRP 1211 100 033. Di Jurusan Matematika ini, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Penulis juga aktif di beberapa organisasi intra kampus diantaranya : Himpunan Mahasiswa Matematika ITS sebagai *staff* Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa pada periode 2012-2013 dan menjabat sebagai Ketua pada periode 2012-2013 serta sebagai Pemandu Berarti LKMM TM ITS 2015.

Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke salam.insaf@gmail.com