



TUGAS AKHIR - SM141501

**KAJIAN KENDALI OPTIMAL UNTUK
MENGURANGI PENYEBARAN PENYAKIT
MALARIA**

MUHAMMAD REZA GIOVANNI
NRP 1211 100 074

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016



FINAL PROJECT - SM141501

**STUDY OF OPTIMAL CONTROL TO REDUCE
THE SPREAD OF MALARIA**

MUHAMMAD REZA GIOVANNI
NRP 1211 100 074

Supervisors:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

**KAJIAN KENDALI OPTIMAL UNTUK
MENGURANGI PENYEBARAN PENYAKIT
MALARIA**

***STUDY OF OPTIMAL CONTROL TO
REDUCE THE SPREAD OF MALARIA***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada

Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

MUHAMMAD REZA GIOVANNI


NRP. 1211 100 074

Menyetujui,
Dosen Pembimbing,



Dr. Dra. Mardlijah, M.T
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FPMIPA ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Januari 2016



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhanahu wata'ala, Tuhan semesta alam, yang telah memberikan segalanya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"KAJIAN KENDALI OPTIMAL UNTUK MENGURANGI PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA".

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi S-1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
2. Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp, Bapak Dr. Hariyanto, M.Si, dan Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritik demi perbaikan Tugas Akhir ini.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp selaku Koordinator Program Studi S1 Matematika ITS.

5. Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik, motivasi, dan semangat selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA ITS.

6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat Penulis sebut satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

UCAPAN TERIMA KASIH

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Mama dan Papa, kedua orang tua ku tercinta terima kasih atas segala doanya, kasih sayang, nasihat dan pendidikan yang selalu dicurahkan kepada penulis selama ini.
2. Kedua saudara ku, Muhammad Dimas Toscani dan Muhammad Fidqy Alfarash, yang selalu memberikan motivasi, semangat, ilmu, nasihat dan humor kepada penulis. Sukses buat kalian!
3. Sahabat-sahabatku, Jijong, Agyl, Virama, Musa, Agus, Andika dan Willy, yang selalu memberikan semangat dan *guyonan*. Menjadi tempat *sharing* tentang hal yang penting sampai hal yang *nggak* penting bagi penulis. Sukses buat kalian!
4. Maruli dan Mbak Irma (Matematika-ITS 2010), yang telah membantu penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini. Sukses buat kalian!
5. Fiyan, karena penulis sudah berjanji untuk memasukkan namanya di ucapan terima kasih Tugas Akhir ini. Sukses yan!
6. Keluarga Besar MATEMATIKA 2011 secara bersama-sama mengukir segenap asa, impian, dan cita-cita selama kuliah. Sukses buat kalian!
7. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini. Sukses buat kalian!

DAFTAR ISI

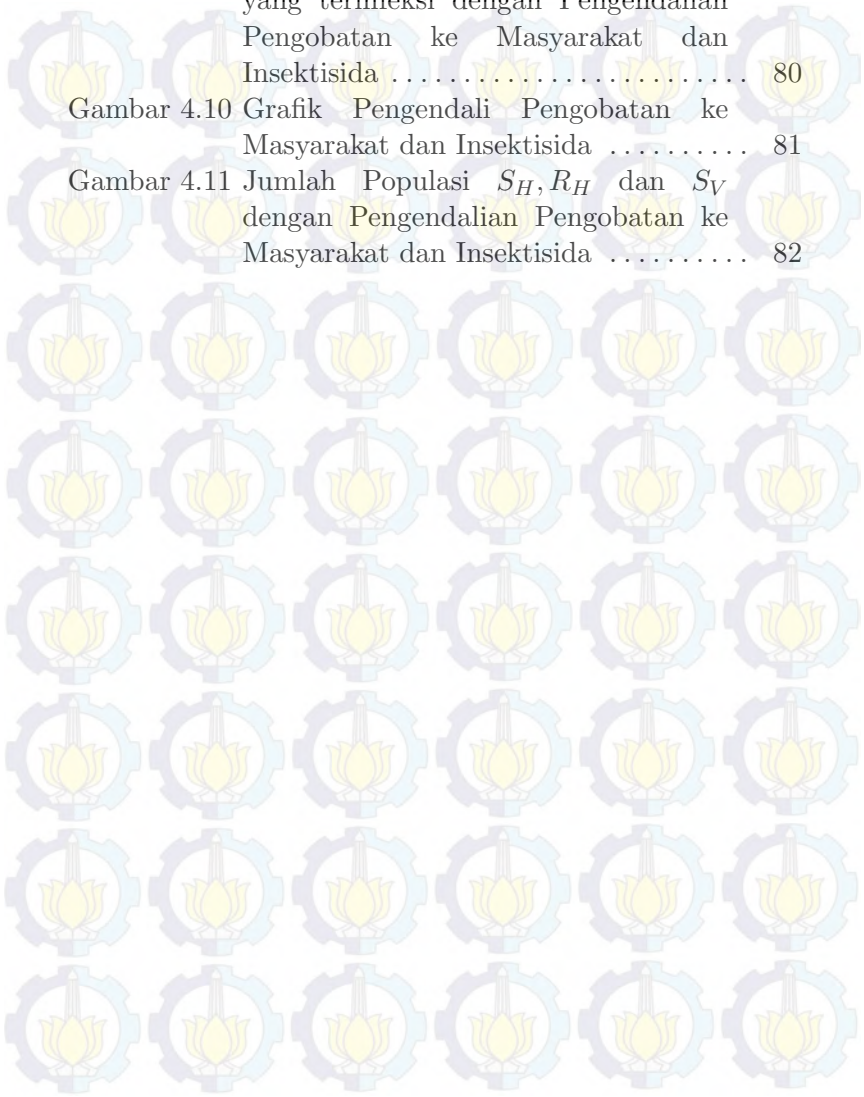
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Dasar Teori	9
2.3 Model Sistem Dinamik	12
2.4 Teori Kendali Optimal	15
BAB III METODE PENELITIAN	21

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....	25
4.1 Deskripsi Model dan Asumsi	25
4.2 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	26
4.3 Titik Kesetimbangan Endemik.....	29
4.3.1 Titik Kesetimbangan Endemik Malaria Resisten	29
4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik Malaria Sensitif	34
4.4 Kestabilan Model	39
4.4.1 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	49
4.4.2 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Edemik Resisten.....	54
4.4.3 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Edemik Sensitif	59
4.5 Formulasi Kendali Optimal.....	65
4.6 Penyelesaian Kendali Optimal	66
4.7 Analisis Hasil Simulasi.....	72
BAB V PENUTUP.....	85
5.1 Kesimpulan	85
5.2 Saran	86
DAFTAR PUSTAKA	87
LAMPIRAN A Elemen Matriks Jacobian.....	89
LAMPIRAN B Biodata Penulis.....	97

DAFTAR GAMBAR

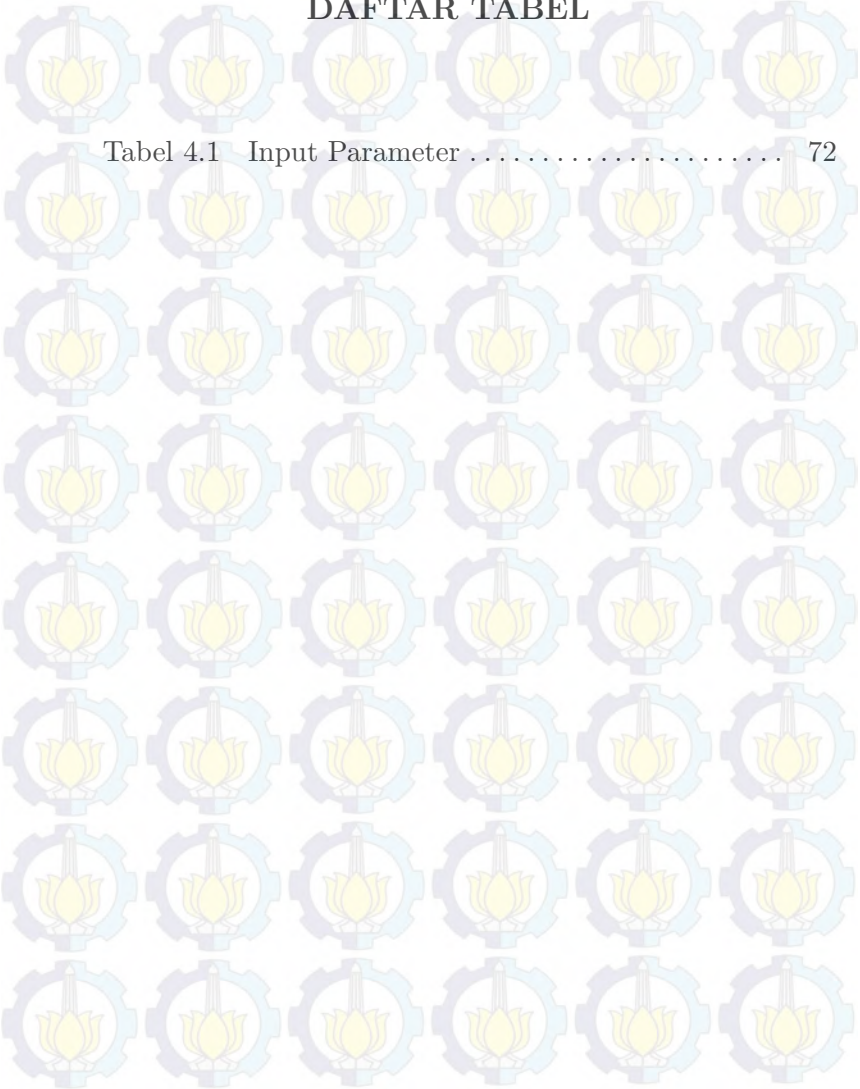
Gambar 2.1	Diagram kompartemen model penyebaran penyakit Malaria pada populasi manusia	14
Gambar 2.2	Diagram kompartemen model penyebaran penyakit Malaria pada populasi malaria	15
Gambar 4.1	Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi Tanpa Pengendalian . . .	73
Gambar 4.2	Jumlah Populasi S_H, R_H dan S_V Tanpa Pengendalian	74
Gambar 4.3	Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat	75
Gambar 4.4	Grafik Pengendali Pengobatan ke Masyarakat	76
Gambar 4.5	Jumlah Populasi S_H, R_H dan S_V dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat	77
Gambar 4.6	Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang terinfeksi dengan Pengendalian Insektisida	78
Gambar 4.7	Grafik Pengendali Insektisida	78
Gambar 4.8	Jumlah Populasi S_H, R_H dan S_V dengan Pengendalian Insektisida	79

Gambar 4.9 Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida	80
Gambar 4.10 Grafik Pengendali Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida	81
Gambar 4.11 Jumlah Populasi S_H, R_H dan S_V dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida	82



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Input Parameter	72
-----------	-----------------	----

A decorative background pattern consisting of a grid of repeating icons. Each icon is a light blue gear with a yellow lotus flower in the center. The icons are arranged in a grid that covers most of the page, with the table of contents text overlaid on top.

Daftar Simbol



$\frac{1}{\delta_H}$	Masa hidup manusia (<i>host</i>).
α	Laju kehilangan imunitas.
Λ	Laju perkembang biakan.
δ_L	Laju kematian alami dari pupa atau larva.
ϵ_L	Laju kematian larva atau pupa dari gangguan luar.
η	Laju pertumbuhan larva menjadi nyamuk dewasa.
δ_V	Laju kematian malaria (<i>vector</i>) dari insektisida.
δ_V	Laju kematian alami dari malaria (<i>vector</i>).
μ_s dan μ_r	Laju penyembuhan populasi manusia dari pengobatan.
λ_{Vs} dan λ_{Vr}	Laju infeksi untuk malaria(<i>vector</i>).
λ_{Hs} dan λ_{Hr}	Laju infeksi untuk manusia(<i>host</i>).
$\frac{1}{\gamma_s}$ dan $\frac{1}{\gamma_r}$	Waktu penyembuhan dari manusia (<i>host</i>) secara alami.
c_1 dan c_2	Konstanta pembobotan.
p_1 dan p_2	Proporsi kesuksesan dari pengobatan.

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi Tugas Akhir yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bab ini juga dicantumkan batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari Tugas Akhir. Sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab.

1.1 Latar Belakang

Suatu penyakit dikatakan endemik ketika penyakit tersebut menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang sangat lama. Penyakit endemik merupakan ancaman yang besar bagi populasi suatu wilayah, sebab penyakit endemik akan mengakibatkan kepunahan pada populasi di dalamnya jika tidak dilakukan penanganan atau upaya yang tepat guna memberantas penyakit tersebut. Salah satu penyakit endemik tersebut adalah penyakit malaria.

Penyakit malaria adalah penyakit endemik yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium* dan ditularkan oleh nyamuk *Anopheles sp* betina [1]. Dalam skala global, malaria masih menempati peringkat pertama masalah kesehatan di daerah tropis. Dampak dari penyakit malaria tidak hanya pada masalah kesehatan semata, tetapi juga telah menjadi masalah sosial ekonomi, seperti kerugian ekonomi, kemiskinan dan keterbelakangan [2]. Terdapat sekitar 3,4 juta orang beresiko pada malaria, dan di antaranya 1,2 juta orang beresiko tinggi terjangkit malaria. Lebih dari satu kasus malaria terjadi pada setiap 1000 host di daerah yang memiliki

resiko tinggi terjangkit penyakit malaria. Pada tahun 2012, terdapat sekitar 207 juta kasus malaria yang mengakibatkan 627.000 orang meninggal, sebagian besar adalah anak-anak dari benua Afrika. Penelitian tentang upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria sudah banyak dilakukan oleh para peneliti. Pada beberapa dekade terakhir, ketahanan parasit *Plasmodium* terhadap obat anti-malaria telah muncul di beberapa tempat. Maka dibutuhkan perencanaan dan analisis yang menyeluruh untuk mengendalikan penyebaran malaria resisten [1]. Di Indonesia sendiri malaria merupakan masalah kesehatan masyarakat yang sangat penting. Tercatat terdapat 6 juta kasus klinis dan 700 kematian setiap tahun [2].

Penyebaran penyakit endemik merupakan salah satu permasalahan kehidupan yang dapat diselesaikan dengan model matematika. Pengkajian model epidemik matematika merupakan hal yang sangat penting untuk menganalisa penyebaran penyakit dan cara mengendalinya, sehingga dapat dilakukan penanganan atau upaya yang tepat guna memberantas penyakit tersebut dengan tepat dan efektif. S.J. Aneke dan J.C. Koella dkk telah melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit Malaria dengan mempertimbangkan dua jenis malaria sensitif dan malaria resisten penuh [3,4]. H. Tasman dkk mengusulkan model dengan parasit malaria resistensi sebagian. Penelitian model matematika dengan kendali optimal dengan mempertimbangkan resistensi malaria juga telah dilakukan [5]. Penelitian dengan model sederhana untuk mengendalikan penyebaran malaria resisten juga telah dilakukan oleh K.O. Okosun dkk, dimana model tersebut fokus terhadap dampak dari penanganan atau upaya dengan mengasumsikan parasit malaria resistensi penuh terhadap obat anti-malaria [6]. Fatmawati dkk mengusulkan model matematika penyebaran malaria dengan mempertimbangkan

pemberian pengobatan pada masyarakat dan insektisida sebagai kendali [1].

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam Tugas Akhir ini penulis akan melakukan kajian pada model penyebaran penyakit malaria dengan mempertimbangkan jenis malaria resisten dan malaria sensitif sebagai vektor dan melakukan upaya untuk mengurangi penyebaran malaria dengan menggunakan kendali optimal, dimana pemberian pengobatan pada masyarakat dan insektisida adalah dua faktor kendali.

1.2 Rumusan Masalah

Pada Tugas Akhir ini akan dirumuskan model dinamik penyebaran penyakit malaria dari kedua jenis malaria, baik pada *host* maupun *vector*. Model dibagi menjadi empat kompartemen pada *host* dan empat kompartemen pada *vector* yaitu S_H (*Susceptible* manusia) adalah populasi manusia yang rentan, I_{Hs} (*Sensitive-Infected* manusia) adalah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif, I_{Hr} (*Resistance-Infected* manusia) adalah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten, R_H (*Recovered* manusia) adalah populasi manusia yang telah sembuh, L_V (Larva atau pupa) adalah populasi larva atau pupa, S_V (*Susceptible* nyamuk) adalah populasi malaria yang rentan terhadap parasit Plasmodium, I_{Vs} (*Sensitive-Infected* nyamuk) adalah populasi malaria yang terinfeksi oleh parasit Plasmodium, dan I_{Vr} (*Resistance-Infected* nyamuk) adalah populasi malaria resisten yang terinfeksi oleh parasit Plasmodium. Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan endemik, dan bilangan reproduksi

dasar?

2. Bagaimana bentuk kendali optimal pada model upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria dengan pengobatan dan insektisida?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Model dinamik penyebaran penyakit Malaria pada populasi manusia (*host*), malaria resisten dan malaria sensitif (*vector*).
2. Variabel pengendali berupa upaya pengobatan kepada masyarakat dan insektisida (*fogging*).
3. Penyelesaian kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum.
4. Simulasi menggunakan *software* Matlab.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Medapatkan jenis kestabilan pada model upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria.
2. Mendapatkan bentuk kendali optimal dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria dengan melakukan pengobatan dan penyemprotan insektisida (*fogging*).

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapat dari penelitian tugas akhir ini adalah :

1. Membantu mempelajari dampak dari ditentukannya kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kendali optimal menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum.
2. Diperoleh pengetahuan dalam menginterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model penyebaran penyakit Malaria pada suatu populasi dan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria secara optimal.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan laporan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab. Secara garis besar masing-masing bab membahas hal-hal sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang penelitian terdahulu dan teori dasar yang mendukung dalam Tugas Akhir ini, antara lain sistem kompartemen, kestabilan asimtotik lokal, bilangan reproduksi dasar, teori kendali optimal, dan prinsip Pontryagin minimum.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tahapan-tahapan dan metode yang digunakan dalam pengerjaan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang analisis kestabilan lokal

dan masalah kendali optimal pada model dinamik upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria serta penjelasan mengenai hasil simulasi yang diperoleh.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari kajian Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu tentang model penyebaran penyakit malaria, dasar teori, model sistem dinamik, dan teori kendali optimal.

2.1 Penelitian Terdahulu

Sebelum penelitian ini dibuat, telah ada beberapa penelitian mengenai penyebaran penyakit malaria yang selanjutnya akan digunakan sebagai studi literatur.

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh S.J. Aneke, beliau menjelaskan model matematika dari pengaruh obat parasit malaria resisten dan populasi *vector*. Pada penelitian tersebut S.J. Aneke menjelaskan tentang fenomena infeksi dari malaria resisten pada daerah yang memiliki tingkat endemik tinggi dengan menggunakan persamaan diferensial biasa yang terbagi menjadi dua grup pada masing-masing *vector* dan *host*. Pada grup pertama dimana *vector* dan *host* tidak memiliki kendala resisten. Dan pada grup yang kedua *vector* dan *host* memiliki kendala resisten dan sensitif. Dan pada hasil penelitian yang dilakukan S.J. Aneke terlihat bahwa titik-titik kesetimbangannya menunjukkan stabil asimtotik lokal [3].

Pada penelitian yang dilakukan oleh J.C. Koella dan R. Antia, beliau membahas tentang model epidemiologi untuk penyebaran anti malaria resisten. Pada penelitian tersebut, beliau menjelaskan bahwa penyebaran ketahanan akan obat pada malaria menyebabkan malaria semakin sulit untuk dikendalikan. Model dinamik untuk penyebaran sifat

ketahanan dan sensitif terhadap obat malaria dapat menjadi bahan yang bermanfaat untuk membantu dalam memahami faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran ketahanan akan obat anti malaria. Dengan menggunakan model matematika penularan malaria Macdonalds-Ross, sangat membantu dalam menjelaskan proses dan parameter yang sangat berpengaruh pada penyebaran ketahanan obat anti malaria [4].

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh Hengki Tasman dkk, beliau menjelaskan tentang model penyebaran ketahanan sebagian pada obat anti malaria dimana model tersebut cocok pada keadaan penyakit malaria di negara berkembang. Pada penelitian tersebut, Tasman dkk juga mempertimbangkan kendala malaria sensitif dan resisten. Terdapat dua bilangan reproduksi dasar yang sesuai dengan kendala yang diberikan. Jika bilangan reproduksi dasar sesuai dengan infeksi dari kendala sensitif dan resisten tidak sama dan lebih besar dari satu, maka terdapat dua kesetimbangan endemik tidak dapat hidup berdampingan (*non-coexistent*). Sebaliknya, jika terdapat dua bilangan reproduksi dasar yang sama dan lebih besar dari satu, maka terdapat *coexistent* dari kendala sensitif dan resisten pada populasi. Hal ini menjelaskan bahwa laju penyembuhan dari *host* yang terinfeksi dan proporsi dari pengobatan anti malaria memainkan peranan penting pada penyebaran pengobatan anti malaria resisten [5].

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh K.O. Okosun dan O.D. Makinde, beliau menjelaskan tentang model dari dampak obat pada penularan malaria resisten. Okosun dan Makinde menemukan dan menganalisis model deterministik untuk penularan penyakit malaria pada orang yang terinfeksi. Pertama, Okosun dan Makinde mencari bilangan reproduksi dasar dan mencari keberadaan dan kestabilan dari kesetimbangan. Selanjutnya, dengan menggunakan teori kendali optimal, Okosun dan Makinde mendapatkan

kondisi untuk kendali optimal dari penyakit malaria dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin. Dan pada akhirnya, dilakukan simulasi numerik untuk menggambarkan hasil analitik [6].

2.2 Dasar Teori

Dalam menentukan kestabilan suatu sistem dinamik, ada beberapa hal yang dapat dijadikan informasi, di antaranya sistem kompartemen dan bilangan reproduksi dasar. Sistem kompartemen merupakan susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut rentan, terinfeksi, atau sembuh dari penyakit. Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*). Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*.

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan asimtotik lokal dari suatu sistem maka akan dibahas terlebih dahulu tentang kestabilan titik tetap. Pandang persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.2)$$

Sebuah titik (\bar{x}, \bar{y}) merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1) dan (2.2) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan

$$x(t) \equiv \bar{x}_0$$

dan

$$y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari Persamaan (2.1) dan (2.2) untuk setiap t . Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem. Namun, untuk menentukan kestabilan asimtotik lokal dari sistem persamaan diferensial non linear harus dilakukan linearisasi, dimana linearisasi adalah proses hampiran persamaan diferensial non linier dengan bentuk linier.

Tinjau kembali Persamaan (2.1) dan (2.2) dimana f dan g non linear dan (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1) dan (2.2). Setelah itu akan dicari pendekatan fungsi f dan g dengan menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar titik (x_0, y_0) sebagai berikut:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

karena (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = f(x_0, y_0) = 0$. Oleh karena itu, Persamaan (2.1) dan (2.2) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(\Delta x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(\Delta y)$$

Sistem linear dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}^T = J \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Matriks J pada sistem linear tersebut adalah matriks Jacobian pada suatu titik kesetimbangan (x_0, y_0) .

Selanjutnya akan dicari akar-akar karakteristik dari matriks J berukuran $n \times n$. Untuk mencari nilai karakteristik matriks J berukuran $n \times n$, maka diberikan persamaan sebagai berikut:

$$(\lambda I - J)x = 0$$

mempunyai penyelesaian x tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - J| x = 0 \quad (2.3)$$

Jika matriks didefinisikan dengan

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dan

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

maka Persamaan (2.3) dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya [7].

2.3 Model Sistem Dinamik

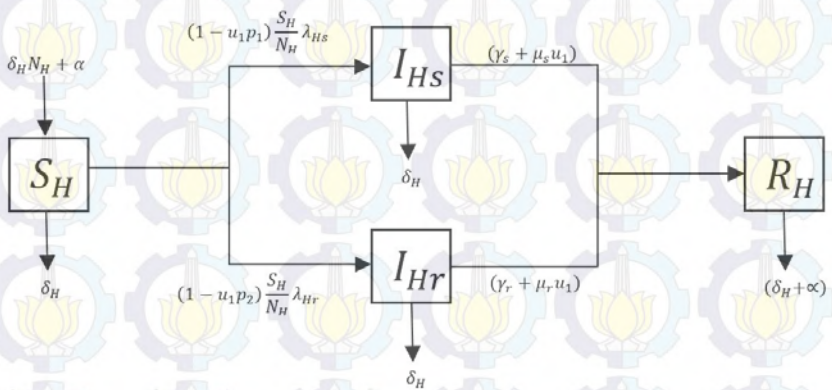
Model dinamik yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini memakai asumsi sebagai berikut:

1. Model dinamik terdiri dari dua populasi yang berbeda, yaitu populasi manusia sebagai *host* dan malaria sebagai *vector*. Model mendeskripsikan interaksi antar populasi, dimana populasi malaria yang terinfeksi parasit *Plasmodium* akan menginfeksi populasi manusia.
2. Populasi malaria yang terinfeksi parasit *Plasmodium* terbagi menjadi dua kelompok, antara lain malaria sensitif yang terinfeksi (I_{Vs}) dan malaria resistan yang terinfeksi (I_{Vr}). Sedangkan populasi manusia yang terjangkit penyakit malaria terbagi menjadi dua kelompok antara lain manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{Hs}) dan manusia yang terinfeksi malaria resistan (I_{Hr}).
3. Berikut merupakan definisi parameter-parameter yang terdapat dalam model, yaitu:
 - (a) $\frac{1}{\delta_H}$ menyatakan masa hidup dari populasi manusia *host*,

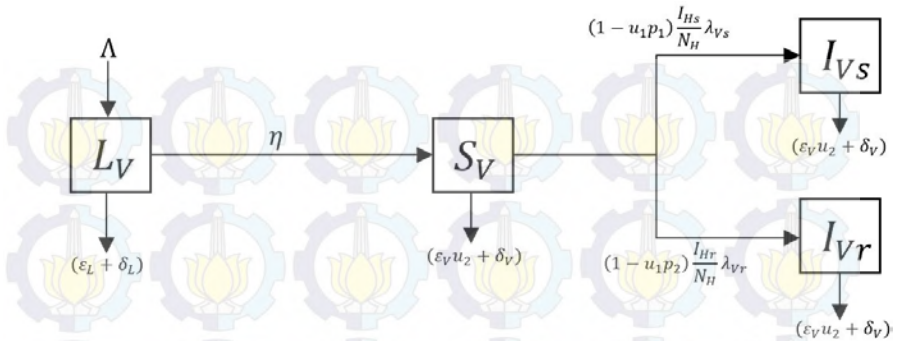
- (b) α menyatakan angka kehilangan imunitas dari populasi manusia yang telah sembuh dari penyakit malaria (R_H),
- (c) Λ menyatakan angka perkembang biakan dari populasi malaria (*vector*),
- (d) δ_L menyatakan angka kematian alami dari populasi larva atau pupa malaria (L_V),
- (e) ϵ_L menyatakan angka kematian populasi larva atau pupa malaria (L_V) dari gangguan luar,
- (f) η menyatakan angka pertumbuhan populasi larva malaria (L_V) menjadi nyamuk malaria dewasa yang rentan terinfeksi oleh parasit *Plasmodium* (S_V),
- (g) ϵ_V menyatakan angka kematian populasi malaria (*vector*) dari insektisida,
- (h) δ_V menyatakan angka kematian alami dari populasi malaria (*vector*),
- (i) μ_s menyatakan angka penyembuhan populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif (I_{H_s}) dengan upaya pengobatan dan μ_r menyatakan angka penyembuhan populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten (I_{H_r}) dengan upaya pengobatan,
- (j) λ_{V_s} dan λ_{V_r} menyatakan angka infeksi parasit *Plasmodium* pada populasi malaria yang rentan terinfeksi parasit (S_V),
- (k) λ_{H_s} menyatakan angka infeksi populasi malaria sensitif (I_{V_s}) kepada populasi manusia yang rentan terinfeksi penyakit malaria (S_H) dan λ_{H_r} menyatakan angka infeksi populasi malaria resisten (I_{V_r}) kepada populasi manusia yang rentan terinfeksi penyakit malaria (S_H),

- (l) $\frac{1}{\gamma_s}$ menyatakan waktu penyembuhan dari populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif (I_{Hs}) secara alami dan $\frac{1}{\gamma_r}$ menyatakan waktu penyembuhan dari populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten (I_{Hr}) secara alami,
- (m) p_1 dan p_2 menyatakan proporsi kesuksesan dari upaya pengobatan.

Dari asumsi tersebut dapat digambarkan diagram kompartemen dari model penyebaran penyakit malaria sebagai berikut [1]:



Gambar 2.1 : Diagram kompartemen model penyebaran penyakit Malaria pada populasi manusia



Gambar 2.2 : Diagram kompartemen model penyebaran penyakit Malaria pada populasi malaria

2.4 Teori Kendali Optimal

Pada prinsipnya, tujuan pengendalian optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai [8]. adapun formulasi masalah kendali optimal terdiri dari:

1. Mendeskripsikan secara matematik artinya diperoleh metode matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variable keadaan)
2. Menentukan fungsi objektif (*performance index*)
3. Menentukan kondisi batas dan pada *state* dan atau kontrol

Dalam permasalahan upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria, tujuan yang ingin dicapai adalah berkurangnya tingkat penyebaran penyakit malaria pada suatu populasi. Caranya adalah dengan mengendalikan

upaya pengobatan kepada populasi manusia baik yang telah terinfeksi maupun yang tidak terinfeksi dan melakukan *fogging* atau penyemprotan insektisida sehingga tingkat penyebaran penyakit malaria menjadi minimal.

Dalam kasus ini, diberikan persamaan *state* dan *objective function* sebagai berikut [1]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_H}{dt} &= \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} I_{V_s} - (1 - u_1 p_2) \lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} I_{V_r} \\
 &\quad - \delta_H S_H + \alpha R_H \\
 \frac{dI_{H_s}}{dt} &= (1 - u_1 p_1) \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{H_s} \\
 \frac{dI_{H_r}}{dt} &= (1 - u_1 p_2) \lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} I_{V_r} - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{H_r} \\
 \frac{dR_H}{dt} &= (\gamma_s + \mu_s u_1) I_{H_s} + (\gamma_r + \mu_r u_1) I_{H_r} - (\delta_H + \alpha) R_H \\
 \frac{dL_V}{dt} &= \Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V \\
 \frac{dS_V}{dt} &= \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \frac{I_{H_s}}{N_H} \lambda_{V_s} S_V - (1 - u_1 p_2) \frac{I_{H_r}}{N_H} \lambda_{V_r} S_V \\
 &\quad - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) S_V \\
 \frac{dI_{V_s}}{dt} &= (1 - u_1 p_1) \frac{I_{H_s}}{N_H} \lambda_{V_s} S_V - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{V_s} \\
 \frac{dI_{V_r}}{dt} &= (1 - u_1 p_2) \frac{I_{H_r}}{N_H} \lambda_{V_r} S_V - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{V_r}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan $0 \leq p_1 + p_2 \leq 1$ dan $0 \leq u_i \leq 1$, $i = 1, 2$.

$$I(x(t), u_1, u_2) = \int_0^{t_f} (I_{H_s} + I_{H_r} + I_{V_s} + I_{V_r} + \frac{c_1}{2} u_1^2 + \frac{c_2}{2} u_2^2) dt \tag{2.5}$$

dimana c_1 dan c_2 masing-masing menunjukkan konstanta pembobotan.

Dengan keadaan awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dan keadaan akhir $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ serta $\mathbf{u}(t)$ yang menyatakan pengendali keadaan pada waktu t . Dalam hal ini, akan dicari pengendali optimal u_1^* dan u_2^* yang memenuhi persamaan keadaan (*state*) dengan syarat nilai I berikut ini:

$$I(x(t), u_1^*, u_2^*) = \min_{\Gamma} I(x(t), u_1, u_2)$$

dimana $\Gamma = \{(u_1^*, u_2^*) | 0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2\}$.

Selanjutnya masalah kendali optimal pada Tugas Akhir ini akan diselesaikan menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum. Prinsip Pontryagin Minimum digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga state akhir, yaitu dengan meminimumkan *index performance* dimana kendali $\mathbf{u}(t)$ terbatas pada $(u(t) \in U)$. Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan diminimalkan di U yang merupakan himpunan dari semua kendali. Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Pontryagin Maksimum yaitu dengan mengalikan (-1) pada *performance index* [8].

Dengan memperhatikan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan pada Sistem (2.4) dan Persamaan (2.5), langkah dalam menyelesaikan masalah kendali adalah sebagai berikut [8]:

- Langkah 1
Bentuk fungsi Hamiltonian yang disimbolkan H , yaitu:

$$\begin{aligned} H &= H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \\ &= H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned}$$

dengan tanda $'$ menyatakan suatu transpose.

- Langkah 2

Meminimumkan H terhadap $\mathbf{u}(t)$ dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner $\mathbf{u}_*(t)$

- Langkah 3

Dengan menggunakan $\mathbf{u}_*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal, H_* , yaitu:

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \lambda^*(t), t)$$

- Langkah 4

Selesaikan $2n$ persamaan, dengan n adalah jumlah variabel keadaan:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}$$

dan persamaan *costate* yaitu:

$$\dot{\lambda}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}}$$

dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut *transversality*.

Kondisi batas secara umum yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \lambda^* \right)_{*t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$

dengan S adalah bentuk Mayer dari fungsi objektif, H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel pengendalinya stasioner.

- Langkah 5

Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 kedalam persamaan $\mathbf{u}^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali optimal yang dicari.

Adapun sistem yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah waktu akhir ditentukan dan *state* pada waktu akhir tidak ditentukan. Dalam sistem tersebut, karena t_f ditentukan maka δt_f bernilai nol karena $\mathbf{x}(t_f)$ tidak ditentukan maka δx_f bernilai sebarang, sehingga batas untuk sistem ini adalah [8]:

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^* \right) = 0$$
$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f}$$

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang akan digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat disusun secara sistematis.

Tahapan-tahapan yang akan dilaksanakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi Masalah dan Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi tentang upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria pada suatu populasi serta teori kendali optimal dan analisis kestabilan dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum. Pembelajaran lebih mendalam mengenai hal tersebut diperoleh baik melalui buku-buku literatur, jurnal, paper, maupun artikel dari internet.

2. Mencari Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Dari model dinamik yang diperoleh akan dicari titik keseimbangan bebas penyakit ($I = 0$) dan titik keseimbangan endemik ($I \neq 0$) yang selanjutnya dapat ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut sehingga dapat ditentukan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0).

3. Menganalisis Kestabilan Lokal dari Setiap Titik Keseimbangan

Pada tahap ini akan dicari kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan memasukkan nilai kesetimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik-titik tersebut.

4. Menyelesaikan Permasalahan Kendali Optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kendali optimal yang telah diformulasikan pada tahapan sebelumnya. Metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah tersebut adalah Prinsip Pontryagin Minimum. Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam tahap ini antara lain:

- (a) Membentuk fungsi Hamiltonian
- (b) Menentukan persamaan *state* dan *costate*
- (c) Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi
- (d) Menentukan pengendali optimal

5. Melakukan Simulasi dengan Menggunakan *Software* Matlab

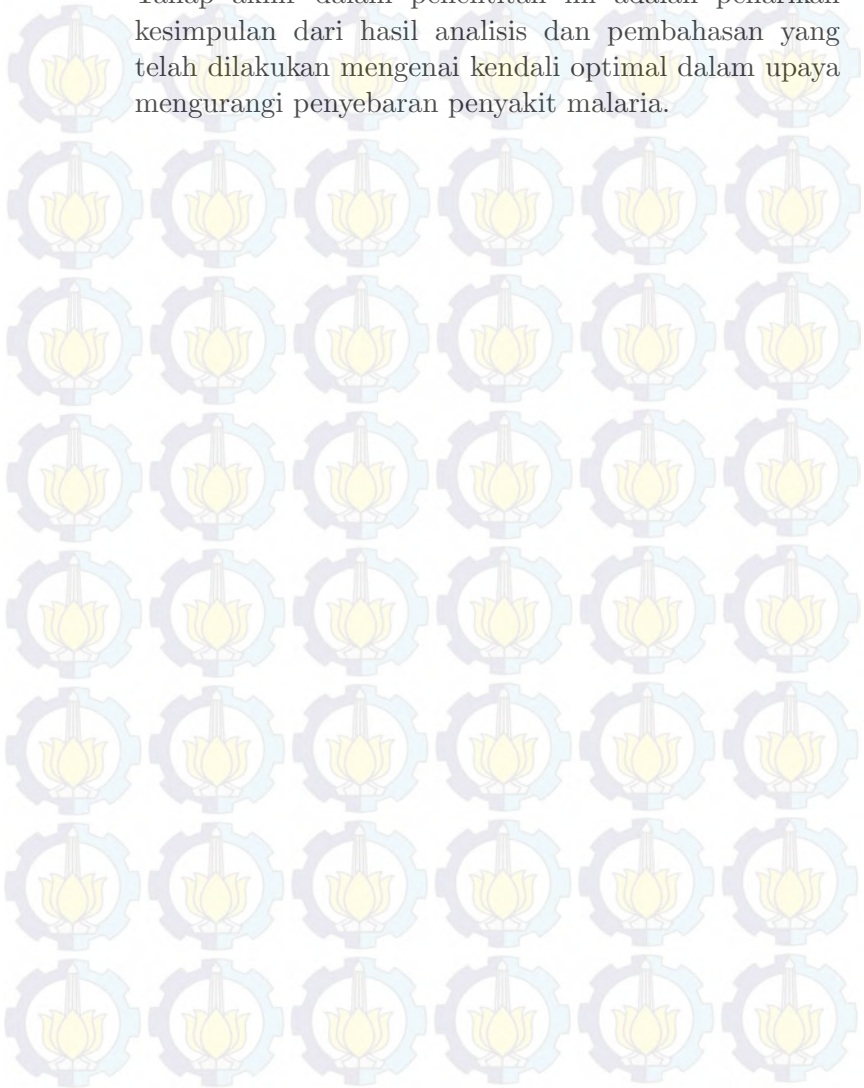
Dalam tahap ini dicari solusi numeric dari permasalahan kendali optimal dengan memanfaatkan persamaan *state* dan *costate*, persamaan pengendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi menggunakan *software* Matlab. Kemudian disimulasikan untuk melihat performansi grafik yang dihasilkan.

6. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

7. Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai kendali optimal dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria.



BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas tentang titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, kemudian akan dicari kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut dan bilangan reproduksi dasar, kemudian akan dilanjutkan dengan penentuan formulasi kendali optimal dan penyelesaiannya dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Setelah itu, pada akhir pembahasan diberikan analisis hasil simulasi untuk menunjukkan pengaruh kendali optimal terhadap upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria.

4.1 Deskripsi Model dan Asumsi

Pada bagian ini dibahas model matematika dari upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria. Model mendeskripsikan interaksi antara populasi malaria dan populasi manusia. Karena pada populasi malaria terdapat dua jenis malaria yang memiliki tingkat ketahanan terhadap parasit yang berbeda dan pada populasi manusia terdapat dua jenis populasi malaria yang terinfeksi jenis malaria yang berbeda, maka model akan dibedakan menjadi dua, yaitu model pada populasi manusia dan model pada populasi malaria. Adapun asumsi-asumsi yang diberikan pada model-model tersebut dijelaskan sebagai berikut:

1. Terdapat empat kelas pada populasi manusia, yaitu:
 S_H : Populasi manusia yang rentan terinfeksi penyakit malaria.
 I_{Hs} : Populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria yang

sensitif terinfeksi parasit *plasmodium*

I_{Hr} : Populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium*

R_H : Populasi manusia yang telah sembuh dari penyakit malaria

2. Terdapat empat kelas pada populasi malaria, yaitu:

L_V : Populasi larva atau pupa dari malaria yang akan tumbuh menjadi malaria dewasa

S_V : Populasi malaria dewasa yang rentan terinfeksi oleh parasit *plasmodium*

I_{Vs} : Populasi malaria sensitif yang terinfeksi oleh parasit *plasmodium*

I_{Vr} : Populasi malaria resisten yang terinfeksi oleh parasit *plasmodium*

3. Upaya untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria ditentukan oleh variabel pengendali, yaitu:

$u_1(t)$: memberikan pengobatan kepada masyarakat baik kepada populasi yang sudah terinfeksi malaria maupun yang rentan terinfeksi penyakit malaria

$u_2(t)$: melakukan insektisida atau *fogging*.

Besarnya upaya-upaya tersebut dinyatakan sebagai fungsi waktu karena nilainya dapat berubah-ubah pada waktu t .

4.2 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit (dalam hal ini malaria) dalam suatu populasi dan tidak adanya upaya atau variabel kendali sehingga $infected = 0$ atau $I_{Hs} = I_{Hr} = I_{Vs} = I_{Vr} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$.

Untuk memperoleh titik keseimbangan bebas penyakit akan dinyatakan ruas kiri pada Sistem (2.4) bernilai nol

kemudian mensubstitusikannya sehingga diperoleh titik $I_0 = (S_H^0, I_{Hs}^0, I_{Hr}^0, R_H^0, L_V^0, S_V^0, I_{Vs}^0, I_{Vr}^0)$. Selanjutnya akan dicari nilai $R_H^0, S_H^0, L_V^0, S_V^0$ dari Sistem (2.4) dengan ruas kanan bernilai nol kemudian mensubstitusikan $I_{Hs}^0 = I_{Hr}^0 = I_{Vs}^0 = I_{Vr}^0 = 0$.

Menentukan nilai R_H^0

$$\frac{dR_H}{dt} = 0$$

$$(\gamma_s + \mu_s u_1)I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1)I_{Hr} - (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

$$(\gamma_s + \mu_s 0)0 + (\gamma_r + \mu_r 0)0 - (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

$$- (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

sehingga didapat

$$R_H^0 = 0 \quad (4.1)$$

Menentukan nilai S_H^0

$$\frac{dS_H}{dt} = 0$$

$$\delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hs} I_{Vs} - (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr}$$

$$- \delta_H S_H + \alpha R_H = 0$$

$$\delta_H N_H - (1 - 0 p_1) \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} 0 - (1 - 0 p_2) \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} 0$$

$$- \delta_H S_H + \alpha 0 = 0$$

$$\delta_H N_H = \delta_H S_H$$

sehingga didapat

$$S_H^0 = N_H \quad (4.2)$$

Menentukan nilai L_V^0

$$\begin{aligned}\frac{dL_V}{dt} &= 0 \\ \Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V &= 0 \\ (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V &= \Lambda\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$L_V^0 = \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.3)$$

Menentukan nilai S_V^0

$$\begin{aligned}\frac{dS_V}{dt} &= 0 \\ \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V \\ &\quad - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) S_V = 0 \\ \eta L_V - (1 - 0 p_1) \lambda_{V_s} \frac{0}{N_H} S_V - (1 - 0 p_2) \lambda_{V_r} \frac{0}{N_H} S_V \\ &\quad - (\epsilon_V 0 + \delta_V) S_V = 0 \\ \eta L_V - \delta_V S_V &= 0\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$S_V^0 = \frac{\eta \Lambda}{\delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.4)$$

Berdasarkan Persamaan (4.1),(4.2),(4.3), dan (4.4), diketahui $I_{H_s} = I_{H_r} = I_{V_s} = I_{V_r} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$ diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $I_0 = (S_H^0, I_{H_s}^0, I_{H_r}^0, R_H^0, L_V^0, S_V^0, I_{V_s}^0, I_{V_r}^0) = \left(N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}, \frac{\eta \Lambda}{\delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}, 0, 0 \right)$

4.3 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik digunakan untuk menunjukkan bahwa dalam populasi terjadi penyebaran penyakit (dalam hal ini malaria). Karena terdapat dua macam malaria yang menyebarkan penyakit tersebut (malaria resisten dan malaria sensitif) maka akan dicari titik kesetimbangan endemik dari masing-masing jenis malaria.

4.3.1 Titik Kesetimbangan Endemik Malaria Resisten

Titik kesetimbangan endemik malaria resisten digunakan untuk menunjukkan bahwa dalam populasi terjadi penyebaran penyakit malaria yang hanya dibawa oleh malaria jenis resisten sehingga $I_{Hs} = I_{Vs} = 0$ dan $I_{Hr} \neq 0, I_{Vr} \neq 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik malaria resisten akan dinyatakan ruas kiri pada Sistem (2.4) bernilai nol sehingga $I_{Hs} = I_{Hr} = 0$ dan $I_{Hr} \neq 0, I_{Vr} \neq 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik malaria resisten akan dinyatakan ruas kiri pada Sistem (2.4) bernilai nol sehingga $\frac{dS_H}{dt} = 0, \frac{I_{Hs}}{dt} = 0, \frac{I_{Hr}}{dt} = 0, \frac{dR_H}{dt} = 0, \frac{dL_V}{dt} = 0, \frac{dS_V}{dt} = 0, \frac{dI_{Vs}}{dt} = 0, \frac{dI_{Vr}}{dt} = 0$. Kemudian mensubstitusikan sehingga diperoleh $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$.

Pertama-tama akan dicari nilai L_V^r sebagai berikut:

$$\frac{dL_V}{dt} = 0$$

$$\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V = 0$$

$$(\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V = \Lambda$$

sehingga didapat

$$L_V^r = \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.5)$$

Selanjutnya akan dicari nilai R_H^r

$$\frac{dR_H}{dt} = 0$$

$$(\gamma_s + \mu_s u_1)I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1)I_{Hr} - (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

$$(\gamma_s + \mu_s 0)0 + (\gamma_r + \mu_r 0)I_{Hr} - (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

$$\gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha)R_H = 0$$

sehingga didapat

$$R_H^r = \frac{\gamma_r I_{Hr}}{(\delta_H + \alpha)} \quad (4.6)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_V^r

$$\frac{dS_V}{dt} = 0$$

$$\eta L_V^r - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V$$

$$- (\epsilon_V u_2 + \delta_V) S_V = 0$$

$$\eta \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} - (1 - 0p_1) \lambda_{Vs} \frac{0}{N_H} S_V - (1 - 0p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V$$

$$- (\epsilon_V 0 + \delta_V) S_V = 0$$

$$\eta \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} - \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - \delta_V S_V = 0$$

$$\eta \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} - \left(\lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} - \delta_V \right) S_V = 0$$

sehingga didapat

$$S_V^r = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.7)$$

Selanjutnya akan dicari nilai I_{Vr}^r

$$\begin{aligned}\frac{dI_{Vr}}{dt} &= 0 \\ (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V^r - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vr} &= 0 \\ (1 - 0 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V^r - (\epsilon_V 0 + \delta_V) I_{Vr} &= 0 \\ \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V^r - \delta_V I_{Vr} &= 0 \\ I_{Vr} &= \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}}{N_H \delta_V} S_V^*\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$I_{Vr}^r = \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.8)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_H^r

$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= 0 \\ \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hs} I_{Vs} - (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} \\ &- \delta_H S_H + \alpha R_H = 0 \\ \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hs} I_{Vs} - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}^r}{N_H} S_H \\ &- \delta_H S_H + \alpha R_H^r = 0 \\ \delta_H N_H - (1 - 0 p_1) \lambda_{Hs} \frac{0}{N_H} S_H - (1 - 0 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}^r}{N_H} S_H \\ &- \delta_H S_H + \alpha R_H^r = 0\end{aligned}$$

$$\delta_H N_H + \alpha R_H^r - \left(\lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}^r}{N_H} - \delta_H \right) S_H = 0$$

$$\begin{aligned}
 S_H &= \frac{N_H(\delta_H N_H + \alpha R_H^r)}{(\lambda_{Hr} I_{Vr}^r + N_H \delta_H)} \\
 S_H &= \frac{N_H \left(\delta_H N_H + \alpha \frac{\gamma_r I_{Hr}}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{\left(\frac{\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} + N_H \delta_H \right)} \\
 S_H &= \frac{N_H \left(\frac{\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{\left(\frac{\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{\delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \right)}
 \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned}
 S_H^r &= \frac{(\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{(\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L))} \\
 &\quad \frac{\delta_V N_H (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr})}{(\delta_H + \alpha)} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai I_{Hr}^r

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{Hr}}{dt} &= 0 \\
 (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} &= 0 \\
 (1 - 0 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r 0) I_{Hr} &= 0 \\
 (\delta_H + \gamma_r) &= \frac{(\eta \Lambda \lambda_{Vr} \lambda_{Hr})}{(\delta_H + \alpha)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{(\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^r)}{(\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L))} \\ (\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)) \\ (\delta_H + \gamma_r) (\delta_H + \alpha) = (\eta \Lambda \lambda_{Vr} \lambda_{Hr}) (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^r)$$

Misal:

$$A = (\delta_H + \gamma_r) (\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \eta \Lambda \lambda_{Vr} \lambda_{Hr}$$

maka

$$A(CI_{Hr}^r + B(\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H)) = C(\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^r)$$

$$(ACI_{Hr}^r + AB(\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H)) = C(\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^*)$$

sehingga didapatkan

$$I_{Hr}^r = \frac{(C\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB\delta_V N_H)}{(AC + AB\lambda_{Vr} - C\alpha\gamma_r)} \quad (4.10)$$

Berdasarkan Persamaan (4.5)-(4.10), diketahui $I_{Hs} = I_{Vs} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$ diperoleh titik kesetimbangan endemik resisten $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$.
dengan:

$$S_H^r = \frac{\delta_V N_H (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{(\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L))} \\ \frac{(\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^r)}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$I_{Hr}^r = \frac{(C\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB\delta_V N_H)}{(AC + AB\lambda_{Vr} - C\alpha\gamma_r)}$$

$$R_H^r = \frac{\gamma_r I_{Hr}^r}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^r = \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^r = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{Vr}^r = \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

dimana

$$A = (\delta_H + \gamma_r)(\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \eta \Lambda \lambda_{Vr} \lambda_{Hr}$$

4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik Malaria Sensitif

Titik kesetimbangan endemik malaria sensitif digunakan untuk menunjukkan bahwa dalam populasi terjadi penyebaran penyakit malaria yang hanya dibawa oleh malaria jenis sensitif sehingga $I_{Hr} = I_{Vr} = 0$ dan $I_{Hs} \neq 0, I_{Vs} \neq 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik malaria sensitif akan dinyatakan ruas kiri pada persamaan (2.4) bernilai nol sehingga $I_{Hs} = I_{Hr} = 0$ dan $I_{Hr} \neq 0, I_{Vr} \neq 0$. Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik malaria resisten akan dinyatakan ruas kiri pada Persamaan (2.4) bernilai nol sehingga $\frac{dS_H}{dt} = 0, \frac{dI_{Hs}}{dt} = 0, \frac{dI_{Hr}}{dt} = 0, \frac{dR_H}{dt} = 0, \frac{dL_V}{dt} = 0, \frac{dS_V}{dt} = 0, \frac{dI_{Vs}}{dt} = 0, \frac{dI_{Vr}}{dt} = 0$. Kemudian mensubstitusikan sehingga diperoleh $I_1^s = (S_H^s, I_{Hs}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{Vs}^s, 0)$. Pertama-tama akan dicari nilai L_V^s

$$\frac{dL_V}{dt} = 0$$

$$\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V = 0$$

$$(\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V = \Lambda$$

sehingga didapat

$$L_V^s = \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.11)$$

Selanjutnya akan dicari nilai R_H^*

$$\begin{aligned} \frac{dR_H}{dt} &= 0 \\ (\gamma_s + \mu_s u_1)I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1)I_{Hr} - (\delta_H + \alpha)R_H &= 0 \\ (\gamma_s + \mu_s 0)I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r 0)0 - (\delta_H + \alpha)R_H &= 0 \\ \gamma_r I_{Hs} - (\delta_H + \alpha)R_H &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$R_H^s = \frac{\gamma_s I_{Hs}}{(\delta_H + \alpha)} \quad (4.12)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_V^s

$$\begin{aligned} \frac{dS_V}{dt} &= 0 \\ \eta L_V^s - (1 - u_1 p_1) \lambda_{V_s} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{V_r} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V \\ &\quad - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) S_V = 0 \\ \eta L_V^s - (1 - 0 p_1) \lambda_{V_s} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - 0 p_2) \lambda_{V_r} \frac{0}{N_H} S_V \\ &\quad - (\epsilon_V 0 + \delta_V) S_V = 0 \\ \eta \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} - \lambda_{V_s} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - \delta_V S_V &= 0 \\ \eta \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} - \left(\lambda_{V_s} \frac{I_{Hs}}{N_H} - \delta_V \right) S_V &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$S_V^s = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{V_s} I_{Hs}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.13)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $I_{V_s}^s$

$$\frac{dI_{V_s}}{dt} = 0$$

$$(1 - u_1 p_2) \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V^s - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{V_s} = 0$$

$$(1 - 0 p_2) \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V^s - (\epsilon_V 0 + \delta_V) I_{V_s} = 0$$

$$\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V^s - \delta_V I_{V_s} = 0$$

$$I_{V_s} = \frac{\lambda_{V_s} I_{H_s}}{N_H \delta_V} S_V^s$$

sehingga didapat

$$I_{V_s}^s = \frac{\lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \quad (4.14)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_H^s

$$\frac{dS_H}{dt} = 0$$

$$\delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r}$$

$$- \delta_H S_H + \alpha R_H = 0$$

$$\delta_H N_H - (1 - 0 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (1 - 0 p_2) \lambda_{H_r} \frac{0}{N_H} S_H$$

$$- \delta_H S_H + \alpha R_H = 0$$

$$\delta_H N_H + \alpha R_H^s - \left(\lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}^s}{N_H} - \delta_H \right) S_H = 0$$

$$S_H = \frac{N_H (\delta_H N_H + \alpha R_H^s)}{(\lambda_{H_r} I_{V_r}^s + N_H \delta_H)}$$

$$S_H = \frac{N_H \left(\delta_H N_H + \alpha \frac{\gamma_s I_{H_s}}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{\left(\frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_r} I_{H_s}^s \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} + N_H \delta_H \right)}$$

$$S_H = \frac{N_H \left(\frac{\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_s I_{H_s}}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{\left(\frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{\delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)} \right)}$$

sehingga didapat

$$S_H^s = \frac{(\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{(\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H) (\eta + \epsilon_L + \delta_L))} \frac{\delta_V N_H (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_s I_{H_s})}{(\delta_H + \alpha)} \quad (4.15)$$

selanjutnya akan dicari nilai $I_{H_s}^s$

$$\frac{I_{H_s}}{dt} = 0$$

$$(1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{H_s} = 0$$

$$(1 - 0 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s 0) I_{H_s} = 0$$

$$(\delta_H + \gamma_s) I_{H_s} = \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s}$$

$$(\delta_H + \gamma_s) = \frac{(\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} \eta \Lambda)}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$\frac{(\delta_H + N_H(\delta_H + \alpha) + \alpha\gamma_s I_{H_s}^s)}{(\lambda_{H_s}\lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L))}$$

$$(\lambda_{H_s}\lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L))$$

$$(\delta_H + \gamma_s)(\delta_H + \alpha) = (\lambda_{H_s}\lambda_{V_s} \eta \Lambda)(\delta_H + N_H(\delta_H + \alpha) + \alpha\gamma_s I_{H_s}^s)$$

Misal:

$$A = (\delta_H + \gamma_s)(\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{H_s} \lambda_{V_s} \eta \Lambda$$

maka

$$A(CI_{H_s}^s + B(\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H)) = C(\delta_H + N_H(\delta_H + \alpha) + \alpha\gamma_s I_{H_s}^s)$$

$$I_{H_s}^s = \frac{C\delta_H N_H(\delta_H + \alpha) - AB\delta_V N_H}{(AC + AB\lambda_{V_s} - C\alpha\gamma_s)}$$

sehingga didapatkan

$$I_{H_s}^s = \frac{C\delta_H N_H(\delta_H + \alpha) - AB\delta_V N_H}{(AC + AB\lambda_{V_s} - C\alpha\gamma_s)} \quad (4.16)$$

Berdasarkan Persamaan (4.11)-(4.16), diketahui $I_{H_r} = I_{V_r} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$ diperoleh titik kesetimbangan endemik sensitif $I_1^s = (S_H^s, I_{H_s}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{V_s}^s, 0)$.
dengan:

$$S_H^s = \frac{\delta_V N_H(\delta_H N_H(\delta_H + \alpha) + \alpha\gamma_s I_{H_s}^s)}{(\lambda_{H_s}\lambda_{V_s} I_{H_s}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{V_s} I_{H_r}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L))}$$

$$\frac{(\lambda_{V_s} I_{H_s}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$I_{H_s}^s = \frac{C\delta_H N_H(\delta_H + \alpha) - AB\delta_V N_H}{(AC + AB\lambda_{V_s} - C\alpha\gamma_s)}$$

$$R_H^s = \frac{\gamma_s I_{Hs}}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^s = \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^s = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vs} I_{Hs}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{Vs}^s = \frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}^s \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{Vs} I_{Hs}^s + \delta_V N_H)(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}$$

dimana

$$A = (\delta_H + \gamma_s)(\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{Hs} \lambda_{Vs} \eta \Lambda$$

4.4 Kestabilan Model

Setelah diperoleh titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit apakah mendekati titik setimbang atau tidak. Analisis ini dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik kesetimbangan endemik (*Endemic Equilibrium*).

Model penyebaran penyakit malaria merupakan model persamaan tak linier, sehingga perlu dilakukan linearisasi sebelum melakukan analisis kestabilan. Untuk melakukan linearisasi digunakan ekspansi deret Taylor pada Persamaan (2.4), karena belum diberikan kendali atau upaya apapun maka $u_1 = u_2 = 0$. sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} &= A(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\ &= \delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hs} I_{Vs} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} \\ &\quad - \delta_H S_H + \alpha R_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{Hs}}{dt} &= B(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hs} I_{Vs} - (\delta_H + \gamma_s) I_{Hs} \\
\frac{dI_{Hr}}{dt} &= C(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \\
\frac{dR_H}{dt} &= D(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H \quad (4.17) \\
\frac{dL_V}{dt} &= E(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V \\
\frac{dS_V}{dt} &= F(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \eta L_V - \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - \delta_V S_V \\
\frac{dI_{Vs}}{dt} &= G(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - \delta_V I_{Vs} \\
\frac{dI_{Vr}}{dt} &= H(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) \\
&= \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - \delta_V I_{Vr}
\end{aligned}$$

Dengan titik tetap $(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0})$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{dS_H}{dt} &= A(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dI_{Hs}}{dt} &= B(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{Hr}}{dt} &= C(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dR_H}{dt} &= D(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dL_V}{dt} &= E(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dS_V}{dt} &= F(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dI_{Vs}}{dt} &= G(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0 \\
\frac{dI_{Vr}}{dt} &= H(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned}
S_H - S_{H_0} &= f \\
I_{Hs} - I_{Hs_0} &= g \\
I_{Hr} - I_{Hr_0} &= h \\
R_H - R_{H_0} &= i \\
L_V - L_{V_0} &= j \\
S_V - S_{V_0} &= k \\
I_{Vs} - I_{Vs_0} &= l \\
I_{Vr} - I_{Vr_0} &= m
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Deret Taylor dari Sistem (4.17) di sekitar titik tetap $(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0})$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS_H}{dt} &= A(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) \\
&\quad + (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial A}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Hs}} \\
&\quad + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial A}{\partial R_H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial A}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial A}{\partial S_V} \\
& + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial A}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial A}{\partial I_{V_r}} + \dots \\
\frac{dI_{H_s}}{dt} & = B(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}}) \\
& + (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial B}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial B}{\partial I_{H_s}} \\
& + (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial B}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial B}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial B}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial B}{\partial S_V} \\
& + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial B}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial B}{\partial I_{V_r}} + \dots \\
\frac{dI_{H_r}}{dt} & = C(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}}) \\
& + (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial C}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial C}{\partial I_{H_s}} \\
& + (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial C}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial C}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial C}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial C}{\partial S_V} \\
& + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial C}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial C}{\partial I_{V_r}} + \dots \\
\frac{dR_H}{dt} & = D(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}}) \\
& + (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial D}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial D}{\partial I_{H_s}} \\
& + (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial D}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial D}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial D}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial D}{\partial S_V} \\
& + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial D}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial D}{\partial I_{V_r}} + \dots
\end{aligned}$$

$$\frac{dL_V}{dt} = E(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}})$$

$$+ (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial E}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial E}{\partial I_{H_s}}$$

$$+ (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial E}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial E}{\partial R_H}$$

$$+ (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial E}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial E}{\partial S_V}$$

$$+ (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial E}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial E}{\partial I_{V_r}} + \dots$$

$$\frac{dS_V}{dt} = F(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}})$$

$$+ (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial F}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial F}{\partial I_{H_s}}$$

$$+ (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial F}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial F}{\partial R_H}$$

$$+ (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial F}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial F}{\partial S_V}$$

$$+ (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial F}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial F}{\partial I_{V_r}} + \dots$$

$$\frac{dI_{V_s}}{dt} = G(S_{H_0}, I_{H_{s_0}}, I_{H_{r_0}}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{V_{s_0}}, I_{V_{r_0}})$$

$$+ (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial G}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{H_s}}$$

$$+ (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial G}{\partial R_H}$$

$$+ (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial G}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial G}{\partial S_V}$$

$$+ (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{V_r}} + \dots$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{Vr}}{dt} = & H(S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) \\
& + (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial H}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial H}{\partial I_{Hs}} \\
& + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial H}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial H}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial H}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial H}{\partial S_V} \\
& + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial H}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial H}{\partial I_{Vr}} + \dots
\end{aligned}$$

Berdasarkan Sistem (4.18), maka linearisasi dari Sistem (4.17) adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS_H}{dt} = & (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial A}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Hs}} \\
& + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial A}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial A}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial A}{\partial S_V} \\
& + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial A}{\partial I_{Vr}} \\
\frac{dI_{Hs}}{dt} = & (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial B}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial B}{\partial I_{Hs}} \\
& + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial B}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial B}{\partial R_H} \\
& + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial B}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial B}{\partial S_V} \\
& + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial B}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial B}{\partial I_{Vr}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{Hr}}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial C}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial C}{\partial I_{Hs}} \\
&\quad + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial C}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial C}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial C}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial C}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial C}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial C}{\partial I_{Vr}} \\
\frac{dR_H}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial D}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial D}{\partial I_{Hs}} \\
&\quad + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial D}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial D}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial D}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial D}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial D}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial D}{\partial I_{Vr}} \\
\frac{dL_V}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial E}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial E}{\partial I_{Hs}} \\
&\quad + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial E}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial E}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial E}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial E}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial E}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial E}{\partial I_{Vr}} \\
\frac{dS_V}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial F}{\partial S_H} + (I_{Hs} - I_{Hs_0}) \frac{\partial F}{\partial I_{Hs}} \\
&\quad + (I_{Hr} - I_{Hr_0}) \frac{\partial F}{\partial I_{Hr}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial F}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial F}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial F}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{Vs} - I_{Vs_0}) \frac{\partial F}{\partial I_{Vs}} + (I_{Vr} - I_{Vr_0}) \frac{\partial F}{\partial I_{Vr}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{Vs}}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial G}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{H_s}} \\
&\quad + (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial G}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial G}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial G}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial G}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dI_{Vr}}{dt} &= (S_H - S_{H_0}) \frac{\partial H}{\partial S_H} + (I_{H_s} - I_{H_{s_0}}) \frac{\partial H}{\partial I_{H_s}} \\
&\quad + (I_{H_r} - I_{H_{r_0}}) \frac{\partial H}{\partial I_{H_r}} + (R_H - R_{H_0}) \frac{\partial H}{\partial R_H} \\
&\quad + (L_V - L_{V_0}) \frac{\partial H}{\partial L_V} + (S_V - S_{V_0}) \frac{\partial H}{\partial S_V} \\
&\quad + (I_{V_s} - I_{V_{s_0}}) \frac{\partial H}{\partial I_{V_s}} + (I_{V_r} - I_{V_{r_0}}) \frac{\partial H}{\partial I_{V_r}}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan permisalan (4.19), maka hasil linearisasi dari Sistem (4.17) seperti yang tertulis tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_H}{dt} &= f \frac{\partial A}{\partial S_H} + g \frac{\partial A}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial A}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial A}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial A}{\partial L_V} + k \frac{\partial A}{\partial S_V} + l \frac{\partial A}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial A}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dI_{H_s}}{dt} &= f \frac{\partial B}{\partial S_H} + g \frac{\partial B}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial B}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial B}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial B}{\partial L_V} + k \frac{\partial B}{\partial S_V} + l \frac{\partial B}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial B}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dI_{H_r}}{dt} &= f \frac{\partial C}{\partial S_H} + g \frac{\partial C}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial C}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial C}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial C}{\partial L_V} + k \frac{\partial C}{\partial S_V} + l \frac{\partial C}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial C}{\partial I_{V_r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR_H}{dt} &= f \frac{\partial D}{\partial S_H} + g \frac{\partial D}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial D}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial D}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial D}{\partial L_V} + k \frac{\partial D}{\partial S_V} + l \frac{\partial D}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial D}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dL_V}{dt} &= f \frac{\partial E}{\partial S_H} + g \frac{\partial E}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial E}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial E}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial E}{\partial L_V} + k \frac{\partial E}{\partial S_V} + l \frac{\partial E}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial E}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dS_V}{dt} &= f \frac{\partial F}{\partial S_H} + g \frac{\partial F}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial F}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial F}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial F}{\partial L_V} + k \frac{\partial F}{\partial S_V} + l \frac{\partial F}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial F}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dI_{V_s}}{dt} &= f \frac{\partial G}{\partial S_H} + g \frac{\partial G}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial G}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial G}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial G}{\partial L_V} + k \frac{\partial G}{\partial S_V} + l \frac{\partial G}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial G}{\partial I_{V_r}} \\
\frac{dI_{V_r}}{dt} &= f \frac{\partial H}{\partial S_H} + g \frac{\partial H}{\partial I_{H_s}} + h \frac{\partial H}{\partial I_{H_r}} + i \frac{\partial H}{\partial R_H} \\
&\quad + j \frac{\partial H}{\partial L_V} + k \frac{\partial H}{\partial S_V} + l \frac{\partial H}{\partial I_{V_s}} + m \frac{\partial H}{\partial I_{V_r}}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pada Persamaan (4.20) dapat ditulis dalam bentuk matriks, sehingga didapat matriks Jacobiannya sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial S_H} & \frac{\partial A}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial A}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial A}{\partial R_H} & \frac{\partial A}{\partial L_V} & \frac{\partial A}{\partial S_V} & \frac{\partial A}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial A}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial B}{\partial S_H} & \frac{\partial B}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial B}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial B}{\partial R_H} & \frac{\partial B}{\partial L_V} & \frac{\partial B}{\partial S_V} & \frac{\partial B}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial B}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial C}{\partial S_H} & \frac{\partial C}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial C}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial C}{\partial R_H} & \frac{\partial C}{\partial L_V} & \frac{\partial C}{\partial S_V} & \frac{\partial C}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial C}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial D}{\partial S_H} & \frac{\partial D}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial D}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial D}{\partial R_H} & \frac{\partial D}{\partial L_V} & \frac{\partial D}{\partial S_V} & \frac{\partial D}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial D}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial E}{\partial S_H} & \frac{\partial E}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial E}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial E}{\partial R_H} & \frac{\partial E}{\partial L_V} & \frac{\partial E}{\partial S_V} & \frac{\partial E}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial E}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial F}{\partial S_H} & \frac{\partial F}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial F}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial F}{\partial R_H} & \frac{\partial F}{\partial L_V} & \frac{\partial F}{\partial S_V} & \frac{\partial F}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial F}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial G}{\partial S_H} & \frac{\partial G}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial G}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial G}{\partial R_H} & \frac{\partial G}{\partial L_V} & \frac{\partial G}{\partial S_V} & \frac{\partial G}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial G}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial H}{\partial S_H} & \frac{\partial H}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial H}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial H}{\partial R_H} & \frac{\partial H}{\partial L_V} & \frac{\partial H}{\partial S_V} & \frac{\partial H}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial H}{\partial I_{Vr}} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian Sistem (4.17) dengan mendiferensialkannya. Karena perhitungannya terlalu panjang, maka perhitungan akan dilampirkan pada Lampiran A.

Dari hasil turunan pada Lampiran A, dapat ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}}{N_H} - \lambda_{H_r} \frac{I_{V_r}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}}{N_H} & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{H_r} \frac{I_{V_r}}{N_H} & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_H + \alpha) \\ 0 & 0 & -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 \\ -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & -\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} & -\delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_V \end{pmatrix}$$

4.4.1 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Sebelumnya akan diberikan teorema sebagai berikut

Teorema 4.4.1.1. [1] *Titik setimbang bebas penyakit stabil lokal asimtotik jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$*

Bukti: Telah diketahui titik setimbang bebas penyakit

adalah $I_0 = (S_{H_0}, I_{Hs_0}, I_{Hr_0}, R_{H_0}, L_{V_0}, S_{V_0}, I_{Vs_0}, I_{Vr_0}) = \left(N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \delta_L + \epsilon_L)}, \frac{\eta\Lambda}{\delta_V(\eta + \delta_L + \epsilon_L)}, 0, 0 \right)$, maka

$$J(I_0) = \begin{pmatrix} -\delta_H & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & -\delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(I_0)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan cara Operasi Baris Elementer. Sehingga didapat matriks Jacobian yang baru.

$$J(I_0) = \begin{pmatrix} -\delta_H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{Hs}\lambda_{Vs}S_V S_H}{\delta_V N_H^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_r \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -\delta_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_V \end{pmatrix}$$

selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(I_0)| = 0$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} \lambda + \delta_H & 0 \\ 0 & \lambda + (\delta_H + \gamma_s) - \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + (\delta_H + \gamma_r) - \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_s & 0 & \gamma_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda + (\delta_H + \alpha) & 0 \\ 0 & \lambda + (\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & \lambda + \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} & (\lambda + \delta_H) \left(\lambda + (\delta_H + \gamma_s) - \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V} \right) \\ & \left(\lambda + (\delta_H + \gamma_r) - \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_r} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V} \right) \\ & (\lambda + (\delta_H + \alpha)) (\lambda + (\eta + \epsilon_L + \delta_L)) (\lambda + \delta_V) (\lambda + \delta_V) (\lambda + \delta_V) = 0 \end{aligned}$$

sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &= -\delta_H < 0 \\ \lambda_2^0 &= -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_s}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V} \\ &= (\delta_H + \gamma_s) \left(\frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_s}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_s)} - 1 \right) \\ &= (\delta_H + \gamma_s) (\mathfrak{R}_{0_1} - 1)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_1} = \frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_s}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_s)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_1} < 1$, maka bagian real dari λ_2^0 akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned}\lambda_3^0 &= -(\delta_H + \gamma_r) + \frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_r}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V} \\ &= (\delta_H + \gamma_r) \left(\frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_r}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_r)} - 1 \right) \\ &= (\delta_H + \gamma_r) (\mathfrak{R}_{0_2} - 1)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_2} = \frac{\lambda_{H_s}\lambda_{V_r}S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_r)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_2} < 1$, maka bagian real dari λ_3^0 akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned}\lambda_4^0 &= -(\delta_H + \alpha) < 0 \\ \lambda_5^0 &= -(\eta + \epsilon_L + \delta_L) < 0 \\ \lambda_6^0 &= -\delta_V < 0 \\ \lambda_7^0 &= -\delta_V < 0 \\ \lambda_8^0 &= -\delta_V < 0\end{aligned}$$

Karena nilai eigen ($\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \lambda_5^0, \lambda_6^0, \lambda_7^0, \text{ dan } \lambda_8^0$) bernilai negatif pada bagian realnya maka titik setimbang

$$I_0 = \left(N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \delta_L + \epsilon_L)}, \frac{\eta\Lambda}{\delta_V(\eta + \delta_L + \epsilon_L)}, 0, 0 \right)$$

stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.

4.4.2 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Edemik Resisten

Telah diketahui bahwa titik setimbang endemik resisten $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$ dalam hal ini $S_H^r, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, I_{Vr}^r > 0$.

Pada titik setimbang $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$ matriks Jacobiannya adalah

$$J(I_1^r) = \begin{pmatrix} -\lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & -\lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} \\
 0 & 0 & \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 \\
 \eta & -\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\delta_V & 0 \\
 0 & \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} & 0 & -\delta_V
 \end{pmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaannya karakteristiknya, maka pada $J(I_1^r)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan cara Operasi Baris Elementer. Sehingga diperoleh matriks Jacobian yang baru

$$J(I_1^r) = \begin{pmatrix}
 a & 0 & 0 & 0 \\
 0 & b & 0 & 0 \\
 \lambda_{H_s} \frac{I_{V_r}}{N_H} & -\frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} \lambda_{V_s} I_{H_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} & c & 0 \\
 0 & \gamma_s & \gamma_r & d \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 \\
 0 & \lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{I_{Hr}}{N_H} & 0 & h \end{pmatrix}$$

dengan

$$a = -\delta_H + \frac{\lambda_{Hr} I_{Vr} \left((\delta_H + \gamma_r) - \frac{\alpha \gamma_r}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H \left(-(\delta_H + \gamma_r) + \frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)} \right)}$$

$$b = -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{Hs} \lambda_{V_s} S_V S_H}{N_H^2}$$

$$c = -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} S_V S_H}{N_H^2} - \frac{\lambda_{Hr} \lambda_{Vr}^2 I_{Hr} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)}$$

$$d = -(\delta_H + \alpha)$$

$$e = -(\eta + \delta_L + \epsilon_L)$$

$$f = -\frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}}{N_H} - \delta_V$$

$$g = -\delta_V$$

$$h = -\delta_V$$

selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(I_1^*)| = 0$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 & 0 \\ \lambda_{H_s} \frac{I_{V_r}}{N_H} - \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} \lambda_{V_s} I_{H_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} & \lambda - c & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & \lambda - d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - g & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{I_{H_r}}{N_H} & 0 & \lambda - h \end{pmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f)(\lambda - g)(\lambda - h) = 0$$

sehingga dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda_1^r &= -\delta_H + \frac{\lambda_{H_r} I_{V_r} \left((\delta_H + \gamma_r) - \frac{\alpha \gamma_r}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H \left(-(\delta_H + \gamma_r) + \frac{\lambda_{V_r} \lambda_{H_r} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} \right)} \\ &= -\delta_H + \frac{\lambda_{H_r} I_{V_r} (\delta_H^2 + \delta_H (\gamma_r + \alpha))}{N_H (\delta_H + \alpha) (\delta_H + \gamma_r) (-1 + \mathfrak{R}_{0_1}^r)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_1}^r = \frac{\lambda_{V_r} \lambda_{H_r} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_r)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_1}^r < 1$, maka bagian real dari λ_1^r akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned} \lambda_2^r &= -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{N_H^2} \\ &= (\delta_H + \gamma_s) (\mathfrak{R}_{0_2}^r - 1) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_2}^r = \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{N_H^2 (\delta_H + \gamma_s)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_2}^r < 1$, maka bagian real dari λ_2^r akan bernilai negatif.

Sehingga

$$\begin{aligned} \lambda_3^r &= -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} S_V S_H}{N_H^2} - \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r}^2 I_{H_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} \\ &= \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)) + \lambda_{H_r} \lambda_{V_r}^2 I_{H_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} \right) \\ &\quad \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} S_V S_H \delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)}{N_H^2 ((\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)) + \lambda_{H_r} \lambda_{V_r}^2 I_{H_r} S_V S_H)} \\ &= \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)) + \lambda_{H_r} \lambda_{V_r}^2 I_{H_r} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)} \right) \\ &\quad (\mathfrak{R}_{0_3}^r - 1) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_3}^r = \frac{\lambda_{H_r} \lambda_{V_r} S_V S_H \delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)}{N_H^2 ((\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_r} I_{H_r} + \delta_V N_H)) + \lambda_{H_r} \lambda_{V_r}^2 I_{H_r} S_V S_H)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_3}^r < 1$, maka bagian real dari λ_3^r akan bernilai negatif.

$$\lambda_4^r = -(\delta_H + \alpha) < 0$$

$$\lambda_5^r = -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) < 0$$

$$\lambda_6^r = -\frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}}{N_H} - \delta_V < 0$$

$$\lambda_7^r = -\delta_V < 0$$

$$\lambda_8^r = -\delta_V < 0$$

Karena nilai eigen $(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \lambda_3^r, \lambda_4^r, \lambda_5^r, \lambda_6^r, \lambda_7^r, \text{ dan } \lambda_8^r)$ bernilai negatif pada bagian realnya maka titik setimbang $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$ stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0^r < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0^r > 1$.

4.4.3 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Setimbang Edemik Sensitif

Telah diketahui bahwa titik setimbang endemik sensitif $I_1^s = (S_H^s, I_{Hs}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{Vs}^s, 0)$ dalam hal ini $S_H^s, I_{Hs}^s, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{Vs}^s > 0$.

Pada titik setimbang $I_1^s = (S_H^s, I_{Hs}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{Vs}^s, 0)$ matriks Jacobiannya adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda_{Hr} \frac{I_{Vs}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & \alpha \\ \lambda_{Hr} \frac{I_{Vs}}{N_H} & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & -\lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} \\
 0 & 0 & \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 \\
 \eta & -\lambda_{V_r} \frac{I_{H_s}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_{V_r} \frac{I_{H_s}}{N_H} & -\delta_V & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\delta_V
 \end{pmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(I_1^s)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan cara Operasi Baris Elementer. Sehingga didapatkan matriks Jacobian yang baru

$$J = \begin{pmatrix}
 a & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}}{N_H} & b & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c & 0 \\
 0 & \gamma_s & \gamma_r & d \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0 \\
 0 & \lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H} & 0
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{V_s} \frac{I_{Hr}}{N_H} & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

dengan

$$a = -\delta_H + \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s} \left((\delta_H + \gamma_s) - \frac{\alpha \gamma_s}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H \left(-(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{V_s} \lambda_{H_s} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_s} I_{H_s} + \delta_V N_H)} \right)}$$

$$b = -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2} - \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})}$$

$$c = -(\delta_H + \gamma_r) + \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2}$$

$$d = -(\delta_H + \alpha)$$

$$e = -(\eta + \delta_L + \epsilon_L)$$

$$f = -\frac{\lambda_{V_r} I_{H_s}}{N_H} - \delta_V$$

$$g = -\delta_V$$

$$h = -\delta_V$$

selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J(I_1^s)| = 0$$

sehingga

$$\begin{pmatrix}
 \lambda - a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} & \lambda - b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda - c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \gamma_s & \gamma_r & \lambda - d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda - e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda - f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_{Vs} \frac{I_{Hr}}{N_H} & \lambda - g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f)(\lambda - g)(\lambda - h) = 0$$

sehingga dari matriks Jacobian tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^s &= -\delta_H + \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s} \left((\delta_H + \gamma_s) - \frac{\alpha \gamma_s}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H \left(-(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{V_s} \lambda_{H_s} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_s} I_{H_s} + \delta_V N_H)} \right)} \\
 &= -\delta_H + \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s} \left(\frac{(\delta_H^2 + \delta_H (\gamma_s + \alpha))}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H (\delta_H + \gamma_s) \left(-1 + \frac{\lambda_{V_s} \lambda_{H_s} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_s} I_{H_s} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_s)} \right)} \\
 &= -\delta_H + \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s} \left(\frac{(\delta_H^2 + \delta_H (\gamma_s + \alpha))}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H (\delta_H + \gamma_s) (-1 + \mathfrak{R}_{0_1}^s)}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\mathfrak{R}_{0_1}^s = \frac{\lambda_{V_s} \lambda_{H_s} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{V_s} I_{H_s} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_s)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_1}^s < 1$, maka bagian real dari λ_1^s akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned}
 \lambda_2^s &= -(\delta_H + \gamma_s) + \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2} - \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})} \\
 &= \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})) + \lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})} \right) \\
 &\quad \left(\frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s}))}{\delta_V N_H^2 ((\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})) + \lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H)} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})) + \lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})} \right) (\mathfrak{R}_{0_2}^s - 1)
 \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\mathfrak{R}_{0_2}^s = \frac{(\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s}))}{((\delta_H + \gamma_s)(\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{V_s} I_{H_s})) + \lambda_{H_s} \lambda_{V_s}^2 S_V S_H)} \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_2}^s < 1$, maka bagian real dari λ_2^s akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned} \lambda_3^s &= -(\delta_H + \gamma_r) + \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2} \\ &= (\delta_H + \gamma_r) \left(\frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)} - 1 \right) \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\mathfrak{R}_{0_3}^s = \frac{\lambda_{H_s} \lambda_{V_s} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)}$$

Jika $\mathfrak{R}_{0_3}^s < 1$, maka bagian real dari λ_3^s akan bernilai negatif.

$$\begin{aligned} \lambda_4^s &= -(\delta_H + \alpha) < 0 \\ \lambda_5^s &= -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) < 0 \\ \lambda_6^s &= -\frac{\lambda_{V_r} I_{H_r}}{N_H} - \delta_V < 0 \\ \lambda_7^s &= -\delta_V < 0 \\ \lambda_8^s &= -\delta_V < 0 \end{aligned}$$

Karena nilai eigen ($\lambda_1^s, \lambda_2^s, \lambda_3^s, \lambda_4^s, \lambda_5^s, \lambda_6^s, \lambda_7^s, \text{ dan } \lambda_8^s$) bernilai negatif pada bagian realnya maka titik setimbang $I_1^s = (S_H^s, I_{H_s}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{V_s}^s, 0)$ stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0^s < 1$ dan tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0^s > 1$.

4.5 Formulasi Kendali Optimal

Secara umum, formulasi kendali optimal terdiri dari model matematika sistem dinamik, fungsi objektif, dan kondisi batas yang harus dipenuhi. Diberikan suatu sistem dinamik dari penyebaran penyakit malaria sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} = & \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} \\ & - \delta_H S_H + \alpha R_H \end{aligned}$$

$$\frac{dI_{H_s}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{H_s}$$

$$\frac{dI_{H_r}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{H_r}$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\gamma_s + \mu_s u_1) I_{H_s} + (\gamma_r + \mu_r u_1) I_{H_r} - (\delta_H + \alpha) R_H$$

$$\frac{dL_V}{dt} = \Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_V}{dt} = & \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V \\ & - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) S_V \end{aligned}$$

$$\frac{dI_{V_s}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{V_s}$$

$$\frac{dI_{V_r}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - (\epsilon_V u_2 + \delta_V) I_{V_r}$$

dengan keadaan awal:

$$S_H(t_0) = S_H(0)$$

$$I_{H_s}(t_0) = I_{H_s}(0)$$

$$I_{H_r}(t_0) = I_{H_r}(0)$$

$$R_H(t_0) = R_H(0)$$

$$L_V(t_0) = L_V(0)$$

$$S_V(t_0) = S_V(0)$$

$$I_{V_s}(t_0) = I_{V_s}(0)$$

$$I_{V_r}(t_0) = I_{V_r}(0)$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang ditentukan (*fixed*) sedangkan variabel pengendali diberikan oleh persamaan berikut:

$$0 \leq u_1(t) \leq 1, t \in [0, t_f]$$

$$0 \leq u_2(t) \leq 1, t \in [0, t_f]$$

Permasalahan ini bertujuan untuk mendapatkan pengendali optimal yang dapat mengurangi tingkat penyebaran penyakit malaria yang dapat dinyatakan ke dalam fungsi objektif sebagai berikut:

$$I = \int_0^{t_f} \left(I_{H_s} + I_{H_r} + I_{V_s} + I_{V_r} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + \frac{c_2 u_2^2}{2} \right) dt$$

dengan:

c_1 : konstanta pembobotan pengobatan kepada masyarakat

c_2 : konstanta pembobotan insektisida atau *fogging*

4.6 Penyelesaian Kendali Optimal

Dalam penyelesaian kendali optimal, terdapat beberapa langkah yang harus kerjakan.

1. Menentukan fungsi Hamiltonian

Dengan memperhatikan formulasi kendali optimal, diperoleh fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = I_{H_s} + I_{H_r} + I_{V_s} + I_{V_r} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + \frac{c_2 u_2^2}{2} + \sum_{i=1}^8 \sigma_i g_i \quad (4.21)$$

dimana g_i adalah nilai ruas kanan dari persamaan *state* pada Persamaan (2.4), dan $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, 8$ adalah variabel *adjoint* yang memenuhi persamaan *co-state*.

2. Menentukan persamaan *co-state*.

Dengan memperhatikan Persamaan (4.21) dapat ditentukan persamaan *co-state*

$$\dot{\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_1(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S_H(t)} \\ &= -\left(\left(-(1-u_1p_1) \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s}}{N_H} - (1-u_1p_2) \frac{\lambda_{H_r} I_{V_r}}{N_H} - \delta_H \right) \sigma_1 \right. \\ &\quad \left. + \left((1-u_1p_1) \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s}}{N_H} \right) \sigma_2 + \left((1-u_1p_2) \frac{\lambda_{H_r} I_{V_r}}{N_H} \right) \sigma_3 \right) \\ &= (1-u_1p_1) \frac{\lambda_{H_s} I_{V_s}}{N_H} (\sigma_1 - \sigma_2) + \delta_H \sigma_1 \\ &\quad + (1-u_1p_2) \frac{\lambda_{H_r} I_{V_r}}{N_H} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4.22) \end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_{H_s}(t)} \\ &= -(1 - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1)) \sigma_2 + (\gamma_s + \mu_s u_1) \sigma_4 \\ &\quad + \left(-(1-u_1p_1) \frac{\lambda_{V_s} S_V}{N_H} \right) \sigma_6 + \left((1-u_1p_1) \frac{\lambda_{V_s} S_V}{N_H} \right) \sigma_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \delta_H \sigma_2 + (\gamma_s + \mu_s u_1)(\sigma_2 - \sigma_4) \\
&\quad + (1 - u_1 p_1) \frac{\lambda_{V_s} S_V}{N_H} (\sigma_6 - \sigma_7) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_3(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_3(t) &= - \frac{\partial H}{\partial I_{Hr}(t)} \\
&= -1 + \delta_H \sigma_3 + (\gamma_r + \mu_r u_1)(\sigma_3 - \sigma_4) \\
&\quad + (1 - u_1 p_2) \frac{\lambda_{V_r} S_V}{N_H} (\sigma_6 - \sigma_8) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_4(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_4(t) &= - \frac{\partial H}{\partial R_H(t)} \\
&= -(\alpha \sigma_1 - (\delta_H + \alpha) \sigma_4) \\
&= -\alpha \sigma_1 + (\delta_H + \alpha) \sigma_4 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_5(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_5(t) &= - \frac{\partial H}{\partial L_V(t)} \\
&= -(-(\eta + \delta_L + \epsilon_L) \sigma_5 + \eta \sigma_6) \\
&= (\eta + \delta_L + \epsilon_L) \sigma_5 - \eta \sigma_6 \quad (4.26)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_6(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_6(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S_V(t)} \\
&= -\left(\left(-(1-u_1p_1) \frac{\lambda_{Vs}I_{Hs}}{N_H} - (1-u_1p_2) \frac{\lambda_{Vr}I_{Hr}}{N_H} \right) \sigma_6 \right. \\
&\quad \left. -(\epsilon_V u_2 + \delta_V) \sigma_6 + \left((1-u_1p_1) \frac{\lambda_{Vs}I_{Hs}}{N_H} \right) \sigma_7 \right. \\
&\quad \left. + \left((1-u_1p_2) \frac{\lambda_{Vr}I_{Hr}}{N_H} \right) \sigma_8 \right) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_7(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_7(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_{Vs}(t)} \\
&= -\left(1 + \left(-(1-u_1p_1) \frac{\lambda_{Hs}S_H}{N_H} \right) \sigma_1 - (\epsilon_v u_2 + \delta_V) \sigma_7 \right. \\
&\quad \left. + \left((1-u_1p_1) \frac{\lambda_{Hs}S_H}{N_H} \right) \sigma_2 \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

- Persamaan untuk $\dot{\sigma}_8(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_8(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_{Vr}(t)} \\
&= -\left(1 + \left(-(1-u_1p_2) \frac{\lambda_{Hr}S_H}{N_H} \right) \sigma_1 - (\epsilon_v u_2 + \delta_V) \sigma_8 \right. \\
&\quad \left. + \left((1-u_1p_2) \frac{\lambda_{Hr}S_H}{N_H} \right) \sigma_3 \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

3. Menentukan kondisi stasioner

Kondisi stasioner dapat ditentukan dengan menurunkan Persamaan (4.21) terhadap variabel kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0$$

- Kendali $u_1(t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial u_1(t)} &= 0 \\
 c_1 u_1 + \frac{p_1 \lambda_{H_s} I_{V_s} S_H}{N_H} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{p_2 \lambda_{H_r} I_{V_r} S_H}{N_H} (\sigma_1 - \sigma_3) \\
 &+ \frac{p_1 \lambda_{V_s} I_{H_s} S_V}{N_H} (\sigma_6 - \sigma_7) + \frac{p_2 \lambda_{V_r} I_{H_s} S_V}{N_H} (\sigma_6 - \sigma_8) \\
 &+ \frac{\mu_s I_{H_s} N_H}{N_H} (\sigma_4 - \sigma_2) + \frac{\mu_r I_{H_r} N_H}{N_H} (\sigma_4 - \sigma_3) = 0 \\
 u_1^* &= \frac{p_1 \lambda_{H_s} I_{V_s} S_H}{N_H} (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{p_2 \lambda_{H_r} I_{V_r} S_H}{c_1 N_H} (\sigma_3 - \sigma_1) \\
 &+ \frac{p_1 \lambda_{V_s} I_{H_s} S_V}{c_1 N_H} (\sigma_7 - \sigma_6) + \frac{p_2 \lambda_{V_r} I_{H_s} S_V}{c_1 N_H} (\sigma_8 - \sigma_6) \\
 &+ \frac{\mu_s I_{H_s} N_H}{c_1 N_H} (\sigma_2 - \sigma_4) + \frac{\mu_r I_{H_r} N_H}{c_1 N_H} (\sigma_3 - \sigma_4)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

- Kendali $u_2(t)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial u_2(t)} &= 0 \\
 c_2 u_2 - \sigma_6 \epsilon_V S_V - \sigma_7 \epsilon_V I_{V_s} - \sigma_8 \epsilon_V I_{V_r} &= 0 \\
 u_2^* &= \frac{\epsilon_V (\sigma_6 S_V + \sigma_7 I_{V_s} + \sigma_8 I_{V_r})}{c_2}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Karena kendali u_t berada pada interval $[0, 1]$, maka kendali optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ yang diperoleh harus berada dalam interval tersebut.

4. Mendapatkan Persamaan Hamiltonian dan Sistem *state* dan *co-state* yang optimal

Tahap selanjutnya dilakukan substitusi Persamaan (4.30) dan (4.31) pada Persamaan (4.21), sehingga didapat persamaan Hamiltonian yang baru yaitu:

$$H^*(x(t), u(t)^*, \lambda(t)) = I_{Hs} + I_{Hr} + I_{Vs} + I_{Vr} + \frac{c_1 u_1^{2*}}{2} + \frac{c_2 u_2^{2*}}{2} + \sum_{i=1}^8 \sigma_i g_i \quad (4.32)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4.30) dan (4.31) pada sistem *state* dan *costate*, maka akan didapatkan sistem *state* dan *costate* yang optimal.

5. Menentukan kondisi transversalitas

Formulasi kendali optimal pada permasalahan ini menggunakan sistem dengan $x(t_f)$ bebas dan t_f ditentukan, sehingga kondisi transversalitasnya adalah:

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^* \right)_{t_f} = 0$$

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f}$$

karena fungsi objektif tidak memiliki bentuk Mayer (S), maka didapat $\sigma_i^*(t_f) = 0$, dengan $i = 1, 2, \dots, 8$.

Sistem *state* dan *costate* yang optimal membentuk suatu sistem persamaan diferensial tak linier. Karena penyelesaian tidak mudah didapatkan secara analitik sehingga permasalahan tersebut diselesaikan secara numerik. Dalam Tugas Akhir ini, digunakan fungsi BVP4C pada Matlab untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial pada *state* dan *costate* melalui simulasi yang dilakukan. BVP4C adalah

fungsi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai batas secara numerik.

4.7 Analisis Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini, diberikan nilai parameter yang digunakan untuk mensimulasikan permasalahan kendali optimal dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria selama 100 hari. Adapun nilai parameter yang digunakan seperti yang terdapat pada tabel berikut ini [1]:

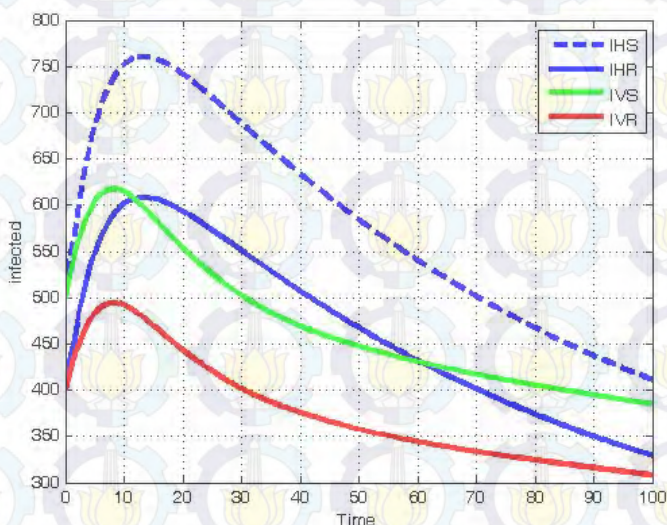
Tabel 4.1 : Input Parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
δ_H	0.00003914	δ_V	0.07142
α	0.0274	λ_{V_r}	0.27
μ_s	0.25	λ_{H_s}	0.3
μ_r	0.048	λ_{H_r}	0.3
Λ	1000	γ_s	0.01
δ_L	0.4	γ_r	0.01
ϵ_L	0.4	p_1	0.3
η	0.07142	p_2	0.6
ϵ_V	0.1	c_1	50
λ_{V_s}	0.27	c_2	20

Dalam simulasi ini, akan diberikan kondisi awal dari tiap tiap populasi $x(0) = (700, 500, 400, 300, 1000, 950, 500, 400)$. Simulasi pertama yang dilakukan adalah ketika pengendali untuk pengobatan ke masyarakat ($u_1(t)$) dan isektisida ($u_2(t)$) bernilai nol. Artinya tidak ada pengendalian terhadap populasi tersebut dalam periode 100 hari. Simulasi kedua adalah dengan adanya pengendali untuk pengobatan ke masyarakat ($u_1(t)$) saja. Simulasi ketiga adalah dengan

adanya pengendali berupa insektisida ($u_2(t)$) saja. Kemudian simulasi yang keempat adalah dengan adanya pengobatan ke masyarakat ($u_1(t)$) dan dilakukan insektisida ($u_2(t)$). Dengan adanya beberapa simulasi akan sangat mudah untuk membandingkan hasil dari simulasi yang satu dengan yang lainnya.

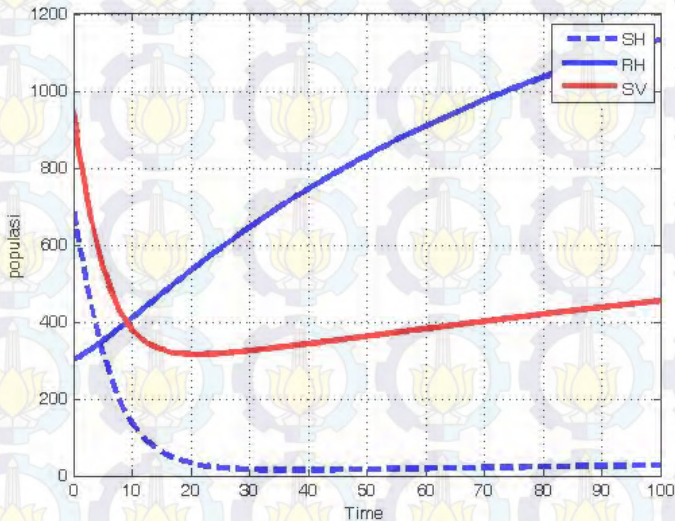
Pada Gambar 4.1 menunjukkan perilaku tingkat



Gambar 4.1 : Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi Tanpa Pengendalian

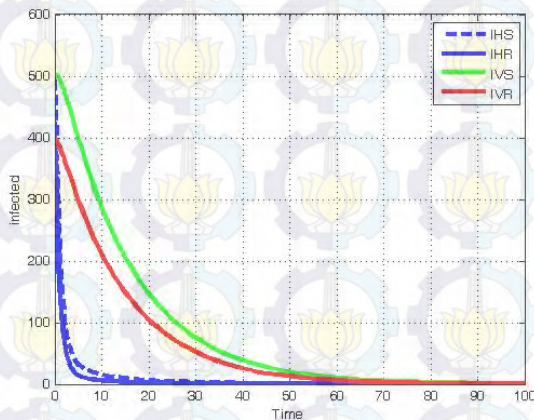
populasi manusia dan malaria tanpa pengendalian selama 100 hari. Dari grafik tersebut terlihat bahwa tingkat populasi manusia dan malaria mengalami penurunan. Jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{Hs}) mengalami kenaikan sampai pada hari ke-14, kemudian mulai mengalami penurunan sampai pada hari ke-100 dengan jumlah populasi

411 orang, dengan kata lain populasi tersebut mengalami jumlah penurunan sebesar 17.8%. Hal serupa terjadi pada populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{Hr}) yang mengalami penurunan populasi sebesar 17.8%, populasi malaria yang sensitif terinfeksi oleh *plasmodium* (I_{Vs}) yang mengalami penurunan jumlah populasi sebesar 22.96%, dan populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh *plasmodium* (I_{Vr}) yang mengalami penurunan populasi sebesar 22.95%. Walaupun demikian penurunan populasi tersebut tidak terlalu drastis. Hal ini disebabkan tidak adanya faktor pengendali atau upaya dalam menangani kasus malaria pada populasi tersebut, sehingga kemungkinan penyakit malaria akan terus mewabah untuk beberapa periode kedepan sangat besar.



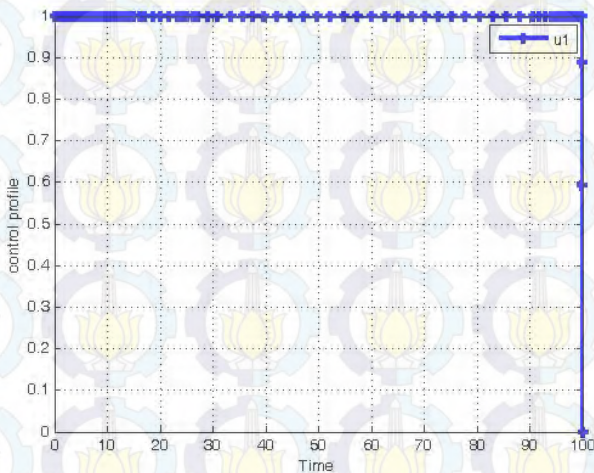
Gambar 4.2 : Jumlah Populasi S_H , R_H dan S_V Tanpa Pengendalian

Pada Gambar 4.2 jumlah populasi manusia yang sembuh dari penyakit malaria (R_H) meningkat, namun kenaikan ini tidak terlalu drastis. Hal ini disebabkan tidak adanya upaya dalam mengurangi penyebaran penyakit malaria sehingga dapat dipastikan jumlah populasi manusia yang mati sangat besar. Hal ini berdampak pada menurunnya jumlah populasi manusia yang rentan terinfeksi malaria (S_H). Penurunan jumlah populasi yang rentan terinfeksi malaria ini disebabkan oleh banyaknya jumlah populasi manusia yang mati sehingga jumlah populasi manusia yang rentan terinfeksi kembali semakin berkurang. Hal yang serupa terjadi pada populasi malaria yang rentan terinfeksi parasit *plasmodium* (S_V) yang semakin menurun. Penurunan jumlah populasi ini terjadi karena jumlah populasi malaria yang terinfeksi (I_{V_s} dan I_{V_r}) di awal periode meningkat sehingga populasi malaria yang rentan terinfeksi menurun drastis.



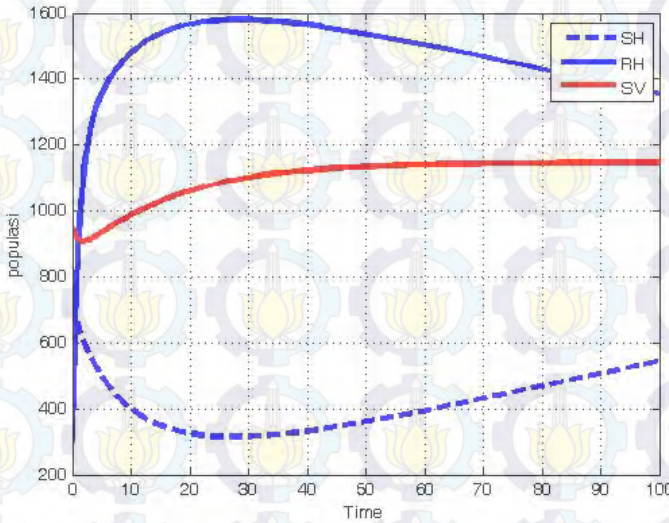
Gambar 4.3 : Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat

Pada Gambar 4.3 menunjukkan bahwa pengaruh pengendalian atau upaya pengobatan ke masyarakat sangat besar. Hal ini ditunjukkan dengan penurunan jumlah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria yang sangat drastis hingga pada hari kelima, dan berlangsung pada hari ke-100. Populasi malaria juga mengalami penurunan yang sangat besar, hal ini menunjukkan bahwa faktor pengendalian yang diterapkan pada populasi manusia sangat berdampak besar kepada populasi malaria. Penurunan jumlah popuasi yang terinfeksi dari masing-masing jenis populasi sebesar 99.99% untuk populasi manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{H_s}), 99.99% untuk populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{H_r}), 99.84512% untuk populasi malaria yang sensitif terinfeksi *plasmodium*, dan 99.9% untuk populasi malaria yang resisten terinfeksi *plasmodium*.



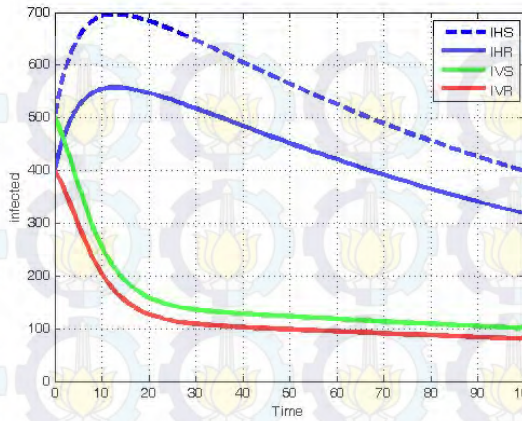
Gambar 4.4 : Grafik Pengendali Pengobatan ke Masyarakat

Pada Gambar 4.4 faktor kendali pengobatan ke masyarakat selalu berada pada angka 1 hingga hari ke-100. Artinya pengobatan ke masyarakat dilakukan secara penuh selama 100 hari.

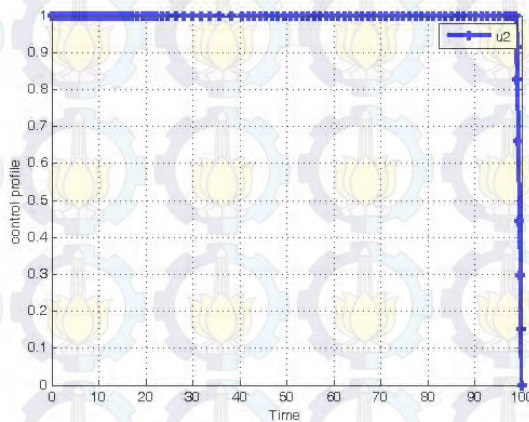


Gambar 4.5 : Jumlah Populasi S_H , R_H dan S_V dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat

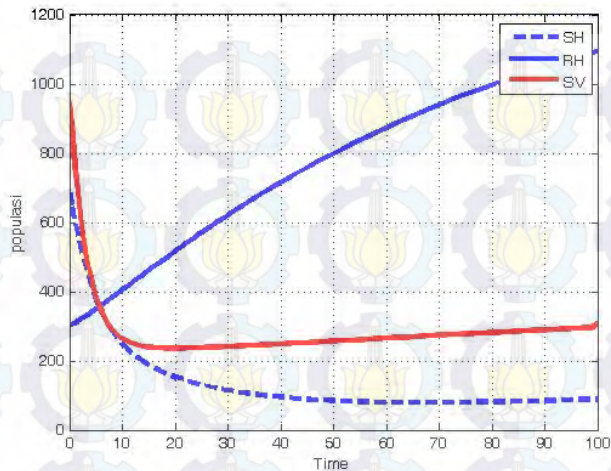
Pada Gambar 4.5 jumlah populasi manusia yang sembuh dari penyakit malaria (R_H) meningkat hingga mencapai angka 1355. Hal ini disebabkan oleh faktor kendali berupa pengobatan ke masyarakat dilakukan secara maksimal selama 100 hari. Namun jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi parasit *plasmodium* juga meningkat. Hal ini tidak menutup kemungkinan bahwa penyebaran penyakit malaria akan terus berlanjut pada periode berikutnya.



Gambar 4.6 : Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang terinfeksi dengan Pengendalian Insektisida



Gambar 4.7 : Grafik Pengendali Insektisida

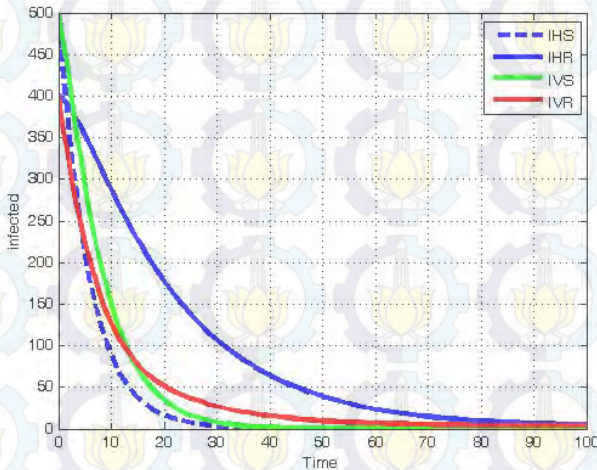


Gambar 4.8 : Jumlah Populasi S_H , R_H dan S_V dengan Pengendalian Insektisida

Upaya memberikan insektisida pada populasi malaria sangat berpengaruh dalam mengurangi penyebaran penyakit malaria. Pada Gambar 4.6 terlihat populasi malaria sensitif yang terinfeksi *plasmodium* (I_{V_s}) mengalami penurunan yang sangat drastis pada hari ke-20, dan berlangsung sampai hari ke-100 dengan jumlah populasi adalah 106.1, atau dapat dikatakan mengalami penurunan populasi sebesar 78.78%. Hal yang serupa terjadi pada populasi malaria resisten yang terinfeksi *plasmodium* (I_{V_r}) mengalami penurunan populasi hingga 78.7875%. Namun pada populasi manusia sempat mengalami kenaikan populasi pada hari pertama hingga hari ke-13, kemudian populasi mengalami penurunan sampai hari ke-100. Kenaikan ini disebabkan adanya sisa wabah endemik yang terjadi pada populasi tersebut. Penurunan jumlah populasi pada populasi manusia yang terinfeksi malaria

sensitif (I_{Hs}) dan populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{Hr}) masing-masing sebesar 20.28% dan 20.3%.

Pada Gambar 4.7 faktor kendali insektisida berada pada angka 1 hingga hari ke-99, kemudian menurun dengan sangat drastis hingga hari ke-100.

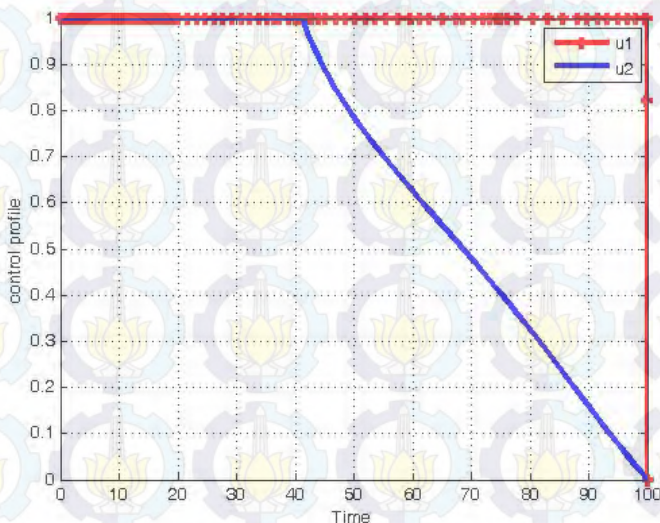


Gambar 4.9 : Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida

Pada Gambar 4.8 jumlah populasi manusia yang sembuh dari penyakit malaria (R_H) meningkat namun tidak terlalu drastis. Hal ini disebabkan karena banyaknya jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria sangat besar, sehingga dapat dipastikan jumlah kematian yang dialami populasi manusia juga sangat besar. Namun, jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi oleh parasit *plasmodium* menurun. Hal ini disebabkan oleh kendali insektisida yang menyebabkan populasi malaria yang terinfeksi dan malaria yang rentan

terinfeksi terus berkurang.

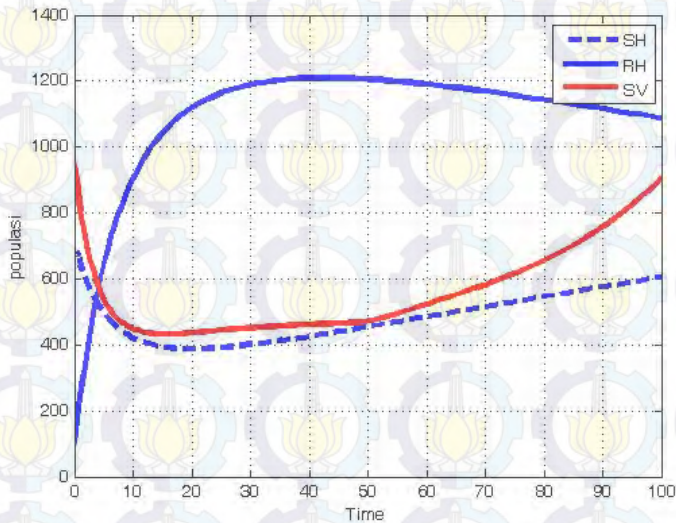
Upaya dalam mengurangi penyebaran penyakit malaria sangat memberikan dampak yang positif. Pada Gambar 4.9 upaya yang dilakukan untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria adalah pengobatan ke masyarakat dan insektisida. Dua upaya yang dilakukan tersebut dapat menurunkan jumlah populasi manusia dan malaria yang terinfeksi mendekati angka nol.



Gambar 4.10 : Grafik Pengendali Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida

Pada Gambar 4.10 faktor kendali pengobatan ke masyarakat selalu berada pada angka 1 hingga hari ke-100. Artinya pengobatan ke masyarakat dilakukan secara penuh selama 100 hari. Hal ini disebabkan masih terdapat sekitar 5 populasi dari manusia yang terinfeksi malaria sensitif

(I_{H_s}) sehingga harus terus dilakukan pengobatan. Penurunan jumlah populasi pada masing-masing jenis populasi sebesar 99.99% untuk populasi manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{H_s}), 98.86775% untuk populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{H_r}), 99.99% untuk populasi malaria yang sensitif terinfeksi oleh *plasmodium* (I_{V_s}), dan 99.184% untuk populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh *plasmodium* (I_{V_r}).



Gambar 4.11 : Jumlah Populasi S_H , R_H dan S_V dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida

Pada Gambar 4.11 jumlah populasi manusia yang sembuh dari penyakit malaria (R_H) tidak sebanyak jumlah populasi manusia yang sembuh ketika diberikan pengendalian pengobatan ke masyarakat, namun jumlah populasi malaria

yang rentan terinfeksi oleh parasit *plasmodium* ketika diberikan pengendalian pengobatan ke masyarakat dan insektisida lebih baik daripada jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi ketika diberikan pengendalian pengobatan ke masyarakat saja. Hal ini disebabkan adanya penurunan jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi dan didukung dengan berkurangnya populasi malaria yang terinfeksi.



BAB V PENUTUP

Pada bab ini dijabarkan beberapa kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan pembahasan penelitian ini. Selain itu, terdapat juga saran yang dapat digunakan sebagai referensi pada penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh pengendalian optimal dalam melakukan upaya pengobatan ke masyarakat sebesar $u_1 = 1$ dan dalam melakukan upaya insektisida pada selang waktu $0 \leq t < 42$ sebesar $u_2 = 1$ dan pada selang $t \geq 42$ mengalami penurunan sampai pada nilai 0 pada periode $t = 100$.
2. Penurunan jumlah populasi manusia dan malaria yang terinfeksi sangat tinggi ketika diberikan pengendalian berupa pengobatan ke masyarakat. Namun adanya kenaikan jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi dapat memungkinkan timbul penyebaran malaria kembali. Oleh sebab itu, dengan diberikan pengendalian pengobatan ke masyarakat dan insektisida dapat mengurangi jumlah populasi yang terinfeksi dan mencegah timbulnya penyebaran malaria.

3. Dengan melakukan upaya pengobatan ke masyarakat dan insektisida dapat meminimumkan jumlah populasi manusia dan nyamuk malaria yang terinfeksi. Didapatkan jumlah manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{H_s}) pada hari ke-100 sebesar 0.001519, jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{H_r}) sebesar 4.529, jumlah populasi malaria yang sensitif terinfeksi parasit *plasmodium* (I_{V_s}) sebesar 0.004326, dan jumlah populasi malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium* sebesar 3.264.

5.2 Saran

Adapun saran dari penelitian ini adalah untuk penelitian selanjutnya dapat membandingkan hasil penyelesaian numerik antara Masalah Nilai Batas dengan Metode Beda Hingga. Selain itu, dapat dianalisis pula penurunan jumlah populasi yang terinfeksi pada periode tertentu dengan menambahkan faktor pengendalian atau upaya yang baru untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria.

LAMPIRAN A

Elemen Matriks Jacobian

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial S_H} &= \frac{\partial}{\partial S_H} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= -\lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}}{N_H} - \lambda_{H_r} \frac{I_{V_r}}{N_H} - \delta_H\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial I_{H_s}} &= \frac{\partial}{\partial I_{H_s}} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial I_{H_r}} &= \frac{\partial}{\partial I_{H_r}} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial R_H} &= \frac{\partial}{\partial R_H} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial L_V} &= \frac{\partial}{\partial L_V} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial S_V} &= \frac{\partial}{\partial S_V} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial I_{V_s}} &= \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H) \\ &= -\lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial I_{Vr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Vr}} (\delta_H N_H - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - \frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_r} I_{V_r} - \delta_H S_H + \alpha R_H)$$

$$= -\lambda_{H_r} \frac{S_H}{N_H}$$

$$\frac{\partial B}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= \lambda_{H_s} \frac{I_{V_s}}{N_H}$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_{H_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_s}} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= -(\delta_H + \gamma_s)$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_{H_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_r}} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_{V_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= \lambda_{H_s} \frac{S_H}{N_H}$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_{V_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_r}} (\frac{S_H}{N_H} \lambda_{H_s} I_{V_s} - (\delta_H + \gamma_s) I_{H_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H}$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_{Hs}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hs}} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_{Hr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hr}} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= -(\delta_H + \gamma_r)$$

$$\frac{\partial C}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} \left(\frac{S_H}{N_H \lambda_{Hr}} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_{Vs}} = \frac{\partial}{\partial I_{Vs}} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_{Vr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Vr}} \left(\frac{S_H}{N_H} \lambda_{Hr} I_{Vr} - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr} \right)$$

$$= \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H}$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_{Hs}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hs}} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= \gamma_s$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_{Hr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hr}} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= \gamma_r$$

$$\frac{\partial D}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= -(\delta_H + \alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_{Vs}} = \frac{\partial}{\partial I_{Vs}} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_{Vr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Vr}} (\gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_{Hs}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hs}} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_{Hr}} = \frac{\partial}{\partial I_{Hr}} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L) L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V)$$

$$= -(\eta + \epsilon_L + \delta_L)$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_{V_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_{V_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_r}} (\Lambda - (\eta + \epsilon_L + \delta_L)L_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_{H_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_s}} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= -\lambda_{V_s} \frac{S_V}{N_H}$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_{H_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_r}} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= -\lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= \eta$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= -\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} - \delta_V$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_{V_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_{V_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_r}} (\eta L_V - \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V S_V)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial I_{H_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_s}} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H}$$

$$\frac{\partial G}{\partial I_{H_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_r}} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= \lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H}$$

$$\frac{\partial G}{\partial I_{V_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= -\delta_V$$

$$\frac{\partial G}{\partial I_{V_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_r}} (\lambda_{V_s} \frac{I_{H_s}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_s})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_H} = \frac{\partial}{\partial S_H} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_{H_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_s}} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_{H_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{H_r}} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= \lambda_{V_r} \frac{S_V}{N_H}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R_H} = \frac{\partial}{\partial R_H} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_V} = \frac{\partial}{\partial L_V} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_V} = \frac{\partial}{\partial S_V} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= \lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H}$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_{V_s}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_s}} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial I_{V_r}} = \frac{\partial}{\partial I_{V_r}} (\lambda_{V_r} \frac{I_{H_r}}{N_H} S_V - \delta_V I_{V_r})$$

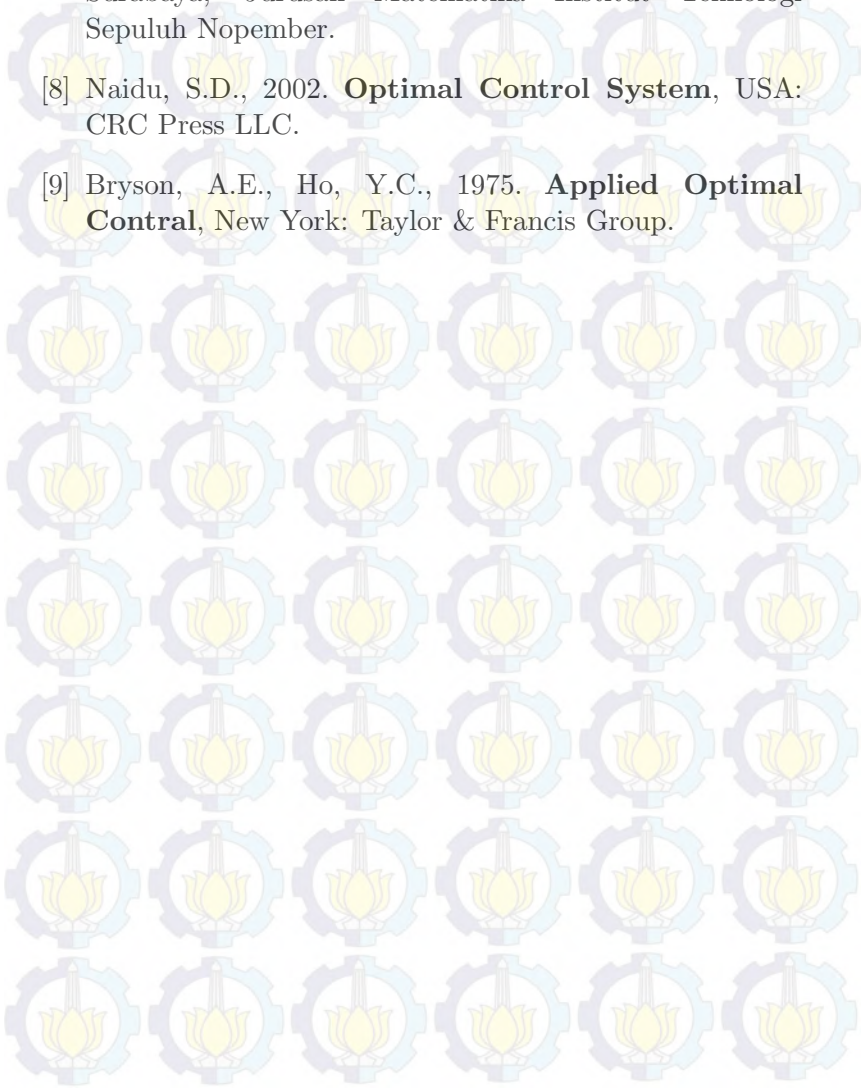
$$= -\delta_V$$



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Fatmawati., Tasman, H., 2015. **An Optimal Control Strategy to Reduce The Spread of Malaria Resistance.** *Mathematical Bioscience.* Vol. 262. Hal. 73-79.
- [2] Notobroto, H.B., Hidajah, A.T., 2009. **Faktor Risiko Penularan Malaria di Daerah Perbatasan.** *J. Penelit. Med. Eksakta.* Vol. 8. No. 2, Hal. 143-151.
- [3] Aneke, S.J., 2002. **Mathematical Modelling of Drug Resistant Malaria Parasites and Vector Populations.** *Mathematical Methods in the Applied Science.* Vol. 25. Hal. 335-346.
- [4] Koella, J.C., Antia, R., 2003. **Epidemiological Models for The Spread of Anti-Malarial Resistance.** *Malaria Journal.* Vol. 2. Article. 3.
- [5] Tasman, H., Soewono, E., Sidartop, K.A., Syafarudin, D., Rogers, W.O., 2009. **A Model for Transmission of Partial Resistance to Anti-Malarial Drugs.** *Mathematical Bioscience.* Vol. 6. No. 3. Hal. 649-661.
- [6] Okosun, K.O., Makinde, O.D., 2011. **Modelling The Impact of Drug Resistance in Malaria Transmission and Its Optimal Control Analysis.** *International Journal of the Physical Sciences.* Vol. 6. Hal. 6479-6487.

- [7] Subiono, 2013. **Sistem Linear dan Kontrol Optimal**, Surabaya, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [8] Naidu, S.D., 2002. **Optimal Control System**, USA: CRC Press LLC.
- [9] Bryson, A.E., Ho, Y.C., 1975. **Applied Optimal Control**, New York: Taylor & Francis Group.



LAMPIRAN B

Biodata Penulis



Penulis bernama Muhammad Reza Giovanni yang lahir di Malang pada 9 Juni 1993. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan suami istri Suprayogi dan Ria Anitha. Penulis menempuh pendidikan formal dari TK Akademika, SD Negeri Sawojajar VII Malang, SMP Negeri 18 Malang, SMA Negeri 5 Malang, hingga ke Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur SNMPTN pada tahun 2011 dan mengambil bidang minat Matematika Terapan. Selama menempuh pendidikan formal, penulis mengikuti beberapa organisasi seperti aktif sebagai staff Badan Dakwah Islam SMA Negeri 5 Malang. Selain itu, penulis juga turut berpartisipasi sebagai panitia dalam Great Event of FMIPA 2.0. Di bidang non akademik, penulis tertarik pada seni musik dan pernah aktif sebagai *drummer* dan pernah menjuarai kompetisi tingkat institut dan regional.

Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Kritik dan saran yang membangun serta informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: m.rezagiovanni@gmail.com