



TUGAS AKHIR - KM184801

**ANALISIS KESTABILAN DAN SIMULASI NUMERIK
PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19 ANTAR KOTA
SURABAYA DAN GRESIK**

**YONATAN ASADI DJAYA
0611164000068**

Dosen Pembimbing
Drs. Kamiran, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2021



TUGAS AKHIR - KM184801

**ANALISIS KESTABILAN DAN SIMULASI
NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19
ANTAR KOTA SURABAYA DAN GRESIK**

**YONATAN ASADI DJAYA
NRP 06111640000068**

**Dosen Pembimbing
Drs. Kamiran, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2021**



FINAL PROJECT - KM184801

**STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL
SIMULATION COVID-19 DISEASE BETWEEN
SURABAYA AND GRESIK CITY**

YONATAN ASADI DJAYA
NRP 06111640000068

Supervisor
Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTEMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2021

LEMBAR PENGESAHAN

**Analisis Kestabilan dan Simulasi Numerik Penyebaran Penyakit
Covid-19 Antar Kota Surabaya dan Gresik**

***Stability Analysis and Numerical Simulation Covid-19 Disease
Between Surabaya and Gresik City***

Tugas Akhir

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat Untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

YONATAN ASADI DJAYA
NRP: 0611164000068

Menyetujui,

Drs. Kamiran, M.Si
19630623 198903 1 001



Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS



Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 22 Agustus 2021

**ANALISIS KESTABILAN DAN SIMULASI NUMERIK
PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19 ANTAR KOTA
SURABAYA DAN GRESIK**

Nama : Yonatan Asadi Djaya
NRP : 0611164000068
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Drs. Kamiran, M.Si

ABSTRAK

Covid-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh Coronavirus. Kasus Covid-19 di Indonesia pertama kali diumumkan pada Maret 2020. Penularan virus Covid-19 terjadi ketika penderita melakukan kontak fisik dengan orang lain dalam jarak kurang dari satu meter. Penelitian ini membahas penyebaran Covid-19 antara kota Surabaya dan Gresik. Model matematika penyebaran penyakit yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered*. Tujuan dari penelitian ini yaitu membahas kestabilan dari model matematika penyebaran penyakit Covid-19, dimana analisis kestabilan yang dilakukan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Kemudian dilakukan penghitungan solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, serta dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan MATLAB. Hasilnya, dalam model matematika penyebaran Covid-19 yang digunakan, terdapat kestabilan dengan syarat tertentu dan dengan simulasi numerik didapat bahwa semakin kecil faktor perpindahan individu antar kota Surabaya dan Gresik, maka penyebaran penyakit Covid-19 akan semakin tidak bergantung antara satu kota dengan yang lain.

Kata Kunci : Model Covid-19, Antar Kota, Kestabilan, Routh-Hurwitz, Runge-Kutta.

***STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL SIMULATION
COVID-19 DISEASE BETWEEN SURABAYA AND GRESIK
CITY***

Name : Yonatan Asadi Djaya
NRP : 0611164000068
Departement : Mathematics
Supervisor : Drs. Kamiran, M.Si

ABSTRACT

Covid-19 is an infectious disease caused by the Coronavirus. The first case of Covid-19 in Indonesia was announced in March 2020. Transmission of the Covid-19 virus occurs when sufferers make physical contact with other people within a distance of less than one meter. This study discusses the spread of Covid-19 between the cities of Surabaya and Gresik. The mathematical model of the spread of disease used in this study consists of Susceptible, Infected, and Recovered. The purpose of this study is to discuss the stability of the mathematical distribution model of the Covid-19 disease, where the stability analysis is carried out using the Routh-Hurwitz stability. Then numerical calculations were carried out using the Runge-Kutta method of order 4, and numerical simulations were carried out using MATLAB. As a result, in the mathematical model of the spread of Covid-19 used, there is stability under certain conditions and with numerical simulations it is obtained that the smaller the individual displacement factor between the cities of Surabaya and Gresik, the spread of Covid-19 disease will be less between one another.

Keywords :Covid-19 Model, Between Cities, Stability, Routh-Hurwitz, Runge-Kutta .

KATA PENGANTAR

Salam sejahtera.

Segala puji syukur bagi Tuhan Yesus Kristus yang telah memberikan berkat, tuntunan, perlindungan, dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

**“ANALISIS KESTABILAN DAN SIMULASI NUMERIK
PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19 ANTAR KOTA
SURABAYA DAN GRESIK”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis hingga terselesainya Tugas Akhir ini :

1. Bapak Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya yang telah mendukung penulis menyelesaikan kuliahnya.
2. Bapak Drs. Kamiran, M.Si selaku dosen pembimbing 1 atas segala arahan, dukungan, dan motivasinya kepada penulis, sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc, bapak Prof. Dr. Chairul Imron, MI.Komp., dan ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si selaku dosen penguji atas segala saran dan masukannya kepada penulis selama pengerjaan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT, selaku dosen wali yang telah memberikan nasihat, arahan, dan motivasi selama penulis menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.

5. Orang tua penulis (Agus Handoko Djaja dan Hany Triani), kakak dan adik penulis yang selalu mendoakan dan mendukung penulis selama menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
6. Partner Tugas Akhir penulis yaitu Rochman Dwito Pramono yang telah mendengarkan keluh kesah penulis dan mendukung penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Sahabat penulis yaitu Sandy Editya Prakosa, Edwina Simanungkalit, dan Dita Dwi Lestari yang selalu menemani, mendengarkan keluh kesah penulis dan selalu mendukung penulis selama menjalani perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
8. Semua pihak yang tidak bisa ditulis satu persatu, terima kasih sudah memberikan motivasi dan dukungan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat diharapkan oleh penulis. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 22 Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	Error! Bookmark not defined.
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Studi Penelitian Terdahulu	5
2.2 Covid-19	6
2.3 Model SIR	6
2.4 Sistem Persamaan Diferensial	8
2.5 Titik Setimbang	9
2.6 Pelinieran	10
2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	10
2.8 Metode Runge Kutta Orde 4	12
BAB III METODE PENELITIAN	13
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	15

4.1	Deskripsi Model Penyebaran Penyakit	15
4.2	Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit	20
4.2.1	Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit Kota Surabaya	21
4.2.2	Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit Kota Gresik	22
4.3	Mencari Titik Setimbang Epidemik.....	23
4.3.1	Mencari Titik Setimbang Epidemik Kota Surabaya	23
4.3.2	Mencari Titik Setimbang Epidemik Kota Gresik	25
4.4	Pelinieran	28
4.5	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Bebas Penyakit.	36
4.6	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Epidemik	45
4.7	Solusi Numerik Dengan Metode Runge-Kutta Orde 4	54
4.8	Simulasi Numerik.....	58
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	70
5.1.	Kesimpulan.....	70
5.2.	Saran	71
DAFTAR	PUSTAKA	72
LAMPIRAN	75

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram Model SIR.....	7
4.1	Diagram Kompartemen SIR Model Dinamik Penyebaran Penyakit Covid-19 Antar Kota Surabaya dan Gresik.....	20
4.2	Grafik simulasi numerik penyebaran individu <i>Susceptible</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_1 = 0,001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu <i>Susceptible</i> pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)	62
4.3	Grafik penyebaran individu <i>Infected</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_2 = 0,0001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu <i>Infected</i> pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)	63
4.4	Grafik penyebaran individu <i>Recovered</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_3 = 0,001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu <i>Recovered</i> pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)	65
4.5	Grafik penyebaran individu <i>Susceptible</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_1 = 0,005$	67
4.6	Grafik penyebaran individu <i>Infected</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_2 = 0,0005$	68
4.7	Grafik penyebaran individu <i>Recovered</i> pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_3 = 0,005$	69

DAFTAR TABEL

4.1 Asumsi parameter.....	58
4.2 Daftar nilai parameter	60

DAFTAR SIMBOL

- N_1 : jumlah total populasi di kota Surabaya
 N_2 : jumlah total populasi di kota Gresik
 $S_1(t)$: individu rentan terhadap penyakit di kota Surabaya
(*Susceptible*)
 $I_1(t)$: individu yang terinfeksi penyakit di kota Surabaya
(*Infected*)
 $R_1(t)$: individu yang sembuh dari penyakit di kota Surabaya
(*Recovered*)
 $S_2(t)$: individu rentan terhadap penyakit di kota Gresik
(*Susceptible*)
 $I_2(t)$: individu yang terinfeksi penyakit di kota Gresik
(*Infected*)
 $R_2(t)$: individu yang sembuh dari penyakit di kota Gresik
(*Recovered*)
 α_1 : laju penularan dari individu terinfeksi ke individu rentan
di kota Surabaya
 α_2 : laju penularan dari individu terinfeksi ke individu rentan
di kota Gresik
 γ_1 : laju kesembuhan di kota Surabaya
 γ_2 : laju kesembuhan di kota Gresik
 μ_{11} : laju kematian alami individu *Susceptible* di kota
Surabaya
 μ_{12} : laju kematian karena Covid-19 di kota Surabaya
 μ_{13} : laju kematian alami individu *Recovered* di kota
Surabaya
 μ_{21} : laju kematian alami individu *Susceptible* di kota Gresik
 μ_{22} : laju kematian karena Covid-19 di kota Gresik
 μ_{23} : laju kematian alami individu *Recovered* di kota Gresik

- x_1 : laju perpindahan individu *Susceptible* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya
- x_2 : laju perpindahan individu *Infected* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya
- x_3 : laju perpindahan individu *Recovered* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya
- p_1 : laju kelahiran di kota Surabaya
- p_2 : laju kelahiran di kota Gresik

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai hal-hal yang menjadi latar belakang dari permasalahan pada Tugas Akhir ini. Kemudian, dijabarkan dalam rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat yang bisa diambil dari penyusunan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Covid-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh Coronavirus. Penyakit ini pertama kali ditemukan di Wuhan, China pada Desember 2019. Gejala Covid-19 sendiri terbagi menjadi dua macam, yaitu gejala ringan dan berat. Gejala ringan yaitu hidung beringsus, sakit kepala, batuk, sakit tenggorokan, demam, dan merasa tidak enak badan. Sedangkan gejala berat dari penyakit ini yaitu infeksi pada pernafasan, khususnya pada paru-paru. Penularan penyakit Covid-19 dapat melalui berbagai cara, antara lain melalui air liur, bersin, batuk, atau menghela nafas.

Pencegahan penyakit Covid-19 ini sendiri sudah dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya yaitu Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM). Kota Surabaya sendiri sudah melaksanakan PPKM selama beberapa waktu, namun selama PPKM berlangsung, masih banyak masyarakat yang bepergian ke luar kota baik sebelum PPKM berlangsung maupun selama PPKM berlangsung, sehingga menyebabkan daerah yang sebelumnya sudah sedikit kasus Covid-19 kembali meningkat, dan ini akan mempersulit medis untuk melakukan penanganan karena kasus yang semula sudah menurun bisa-bisa kembali naik.

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan di atas adalah merumuskan permasalahan di atas ke

dalam bentuk model matematika. Sebelumnya telah dilakukan penelitian mengenai penyebaran penyakit Covid-19, yaitu dari Faiçal Ndaïrou, Iván Area, Juan J. Nieto, dan Delfim F. M. Torres yang berjudul *Mathematical Modeling Of COVID-19 Transmission Dynamics With A Case Study Of Wuhan*[10]. Penelitian ini membahas tentang pembentukan model matematika untuk penyebaran Covid-19 dan melakukan simulasi numerik, dengan data untuk simulasi numerik diambil dari studi kasus di Wuhan, China. Dari penelitian tersebut, didapat kesimpulan adanya sebuah model matematika baru yang diusulkan untuk penyebaran penyakit Covid-19, yang sudah dilakukan simulasi numerik dan hasilnya mendekati data real di kota Wuhan, China. Maka dalam penelitian ini membahas mengenai analisis kestabilan dan simulasi numerik model penyebaran penyakit Covid-19 antar dua kota. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model SIR yang telah direkonstruksi sesuai dengan kondisi penyebaran Covid-19 saat ini. Model ini mengasumsikan terdapat dua kota yang dijadikan objek penelitian, yaitu kota Surabaya dan Gresik, sehingga perpindahan individu yang diteliti adalah perpindahan individu dari Surabaya ke Gresik dan sebaliknya. Dari model tersebut dicari titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang epidemik untuk masing-masing kompartemen, serta analisis kestabilan model epidemik di masing-masing titik setimbang dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Selanjutnya dilakukan penyelesaian secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4, kemudian dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *MATLAB*. Dari hasil simulasi didapatkan suatu grafik penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan dari latar belakang diatas, didapatkan rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini, adalah:

1. Bagaimana merekonstruksi model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik.
2. Bagaimana analisis kestabilan pada model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik.
3. Bagaimana implementasi hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik menggunakan aplikasi *MATLAB*.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah:

1. Data jumlah penderita penyakit Covid-19 yang diambil adalah data dari kota Surabaya dan kota Gresik.
2. Data jumlah penderita penyakit Covid-19 yang diambil berentang waktu 100 hari.
3. Data jumlah penderita penyakit Covid-19 diambil dari situs resmi Covid-19.
4. Kematian alami pada subpopulasi *Susceptible* dan *Recovered* kota Surabaya dan kematian alami pada subpopulasi *Susceptible* dan *Recovered* kota Gresik dianggap bernilai sama.
5. Diasumsikan individu *Susceptible* yang berpindah dari kota Surabaya, tetap menjadi individu *Susceptible* di kota Gresik, begitu pula sebaliknya.

6. Diasumsikan individu *Infected* yang berpindah dari kota Surabaya, tetap menjadi individu *Infected* di kota Gresik, begitu pula sebaliknya.
7. Diasumsikan individu *Recovered* yang berpindah dari kota Surabaya, tetap menjadi individu *Recovered* di kota Gresik, begitu pula sebaliknya.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian Tugas Akhir ini adalah:

1. Merekonstruksi model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik.
2. Menganalisis kestabilan pada model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik.
3. Dapat mengimplementasikan hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan Gresik menggunakan aplikasi *MATLAB*.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Dapat mengetahui model matematika yang digunakan dalam penelitian penyebaran penyakit Covid-19.
2. Dapat mengetahui penerapan teori-teori Matematika dalam permasalahan nyata.
3. Sebagai referensi untuk mengetahui simulasi penyebaran penyakit.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang teori dasar sebagai pendukung dalam Tugas Akhir ini, yaitu penelitian terdahulu, penyakit Covid-19, model penyebaran penyakit, sistem persamaan diferensial, titik setimbang, pelinieran, Kriteria Routh-Hurwitz, dan Metode Runge Kutta orde 4.

2.1 Studi Penelitian Terdahulu

Terdapat beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, antara lain penelitian dari Suwardi Annas, Muh. Isbar Pratama, Muh. Rifandi, Wahidah Sanusi, dan Syafruddin Side yang berjudul “*Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model For Pandemic COVID-19 Spread In Indonesia*”. Penelitian ini membahas tentang konstruksi model SEIR untuk Covid-19, kemudian dilakukan analisis kestabilan dan simulasi numerik, dengan data untuk simulasi numerik tersebut diambil dari data penyebaran Covid-19 di Indonesia. Dari penelitian tersebut, didapat kesimpulan jika tidak ada vaksin, Indonesia akan termasuk wilayah yang menjadi endemik Covid-19. Kemudian, terdapat sebuah prediksi penyebaran Covid-19 di Indonesia, dalam simulasi tersebut juga ditunjukkan vaksin dapat mempercepat penyembuhan dan isolasi maksimum dapat menghambat penyebaran Covid-19, sehingga hasil-hasil tersebut dapat digunakan sebagai referensi untuk pencegahan awal penyebaran Covid-19 di Indonesia[4]. Selain itu, terdapat penelitian dari Faiçal Ndairou, Iván Area, Juan J. Nieto, dan Delfim F. M. Torres yang berjudul *Mathematical Modeling Of COVID-19 Transmission Dynamics With A Case Study Of Wuhan*. Penelitian ini membahas tentang pembentukan model

matematika untuk penyebaran Covid-19 dan melakukan simulasi numerik, dengan data untuk simulasi numerik diambil dari studi kasus di Wuhan, China. Dari penelitian tersebut, didapat kesimpulan adanya sebuah model matematika baru yang diusulkan untuk penyebaran penyakit Covid-19, yang sudah dilakukan simulasi numerik dan hasilnya mendekati data real di kota Wuhan, China[11].

2.2 Covid-19

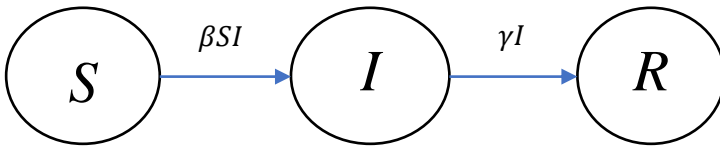
Covid-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh coronavirus. Virus dan penyakit ini tidak diketahui sebelum wabahnya bermula di Wuhan, China pada Desember 2019. Covid-19 sekarang berstatus pandemi global yang memengaruhi banyak negara. Orang dapat terkena Covid-19 dari orang lain yang terkena virus. Penyakit ini menyebar dari orang ke orang lewat *droplet* dari hidung atau mulut, yang terjadi ketika orang yang terinfeksi Covid-19 batuk, bersin, atau berbicara.

Gejala Covid-19 yang paling umum adalah demam, batuk kering, dan kelelahan. Gejala lain yang kurang umum dan dapat mempengaruhi beberapa pasien termasuk sakit dan nyeri, hidung tersumbat, sakit kepala, konjungtivitis, sakit tenggorokan, diare, kehilangan rasa atau bau atau ruam pada kulit atau perubahan warna pada jari tangan atau kaki. Orang tua, dan mereka yang memiliki masalah medis seperti tekanan darah tinggi, masalah jantung dan paru-paru, diabetes, atau kanker, berisiko lebih tinggi terkena penyakit serius. Jika memungkinkan, disarankan untuk menghubungi penyedia atau fasilitas perawatan kesehatan terlebih dahulu, sehingga pasien dapat diarahkan ke klinik yang tepat.

2.3 Model SIR

Model SIR diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan A.G. McKendrick pada tahun 1927. Pada model epidemi ini, populasi

diasumsikan terbagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu populasi rentan terinfeksi S (*Susceptible*), populasi terinfeksi I (*Infected*) dan populasi yang telah sembuh dari terinfeksi R (*Recovered*). Model SIR dapat digambarkan melalui kompartemen sebagai berikut[11] :



Gambar 2.1 Diagram Model SIR

Model SIR Kermack-McKendrick pada Gambar 2.1 dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \quad (2.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \quad (2.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (2.3)$$

dengan:

t : Waktu,

β, γ : Parameter-parameter positif, yaitu berturut-turut merupakan laju penularan suatu penyakit melalui kontak dan laju kesembuhan dari infeksi penyakit,

$S(t)$: Jumlah individu yang rentan terhadap penyakit pada waktu t ,

$I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi pada waktu t ,

- $R(t)$: Jumlah individu yang sembuh dari infeksi pada waktu t ,
- $N(t)$: Total populasi yang diamati, yaitu $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan beberapa persamaan diferensial. Secara matematis, sistem persamaan diferensial dapat ditulis sebagai berikut[9] :

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (2.4)$$

Dengan

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel tak bebas dan t adalah variabel bebas.

Penyelesaian sistem persamaan diferensial dapat dicari secara analitik atau secara numerik. Jika penyelesaian sulit atau tidak mungkin dilakukan secara analitik maupun numerik, maka dapat dilakukan analisis kualitatif dengan cara mengecek kestabilan titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dari sistem tersebut.

2.4.1 Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

Sistem persamaan diferensial non linier orde pertama mempunyai bentuk umum sebagai berikut[8] :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (2.7)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (2.8)$$

x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat dari persamaan umum tersebut. Suatu persamaan diferensial dikatakan non linier jika memenuhi salah satu dari syarat-syarat berikut[2] :

1. Memuat variabel tak bebas dan/atau turunannya yang berpangkat selain satu.
2. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
3. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.5 Titik Setimbang

Titik setimbang adalah titik dimana sistem persamaan diferensial berada dalam kondisi setimbang. Titik setimbang didapat dengan cara mengubah ruas kanan pada persamaan diferensial menjadi sama dengan nol, kemudian dicari titik yang memenuhi kondisi tersebut.

Dalam kasus penyebaran penyakit ini, terdapat dua macam titik setimbang, yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang epidemik. Titik setimbang bebas penyakit adalah titik dimana model epidemik setimbang dengan tidak adanya penyebaran penyakit menular, sedangkan titik setimbang epidemik adalah titik ketika model epidemik setimbang dengan adanya penyebaran penyakit[2].

2.6 Pelinieran

Pelinieran merupakan proses mengubah sistem persamaan diferensial non-linier menjadi sistem linier. Pelinieran ini bertujuan untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik setimbang sistem tersebut. Untuk mencari hasil pelinieran dari sistem persamaan diferensial tak linier digunakan matriks *Jacobian*. Misal diberikan sistem persamaan diferensial non linier $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in E \subseteq R^n, f: E \rightarrow R^n$, f merupakan fungsi non linier dan kontinu. Misal $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ adalah titik setimbang dari sistem, diperoleh matriks *Jacobian* dari f di titik \bar{x} [7] :

$$Jf(\bar{x}) = \left. \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right|_{x=\bar{x}} \quad (2.9)$$

2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut[5]:

1. Persamaan polinom orde ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (2.10)$$

Dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata dan $a_n \neq 0$.

2. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka tidak bisa dicari kriteria

kestabilannya dengan metode ini, karena ada satu akar atau akar-akar imajiner (sistem tak stabil). Kondisi perlu untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.

3. Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti ini.

S^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...	a_{n-1}
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...	a_n
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_n
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...	c_n
\vdots	\vdots	\vdots				
S^0						

Dimana b_i, c_i, \dots didefinisikan sebagai berikut.

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1} \tag{2.11}$$

4. Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh*.

5. Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel *Routh* bertanda positif.

2.8 Metode Runge Kutta Orde 4

Metode Runge Kutta merupakan metode untuk melakukan penyelesaian sistem persamaan diferensial dengan pendekatan iterasi numerik. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi (x, y) pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode persamaan diferensial biasa yang paling populer karena banyak dipakai dalam praktek. Metode Runge Kutta yang umum digunakan untuk mengintegrasikan persamaan diferensial, yaitu berbentuk[6]:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.12)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_r, y_r) \quad (2.13)$$

$$k_2 = f(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{h}{2} k_1) \quad (2.14)$$

$$k_3 = f(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{h}{2} k_2) \quad (2.15)$$

$$k_4 = f(x_r + h, y_r + h k_3) \quad (2.16)$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah yang dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir. Langkah-langkah yang dilakukan meliputi : studi literatur, rekonstruksi model penyebaran penyakit, analisis titik setimbang dan kestabilan, selanjutnya melakukan penyelesaian secara numerik dan simulasi, melakukan penarikan kesimpulan dan saran, dan terakhir melakukan penyusunan laporan Tugas Akhir.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan pemahaman teori dengan mencari referensi-referensi yang menunjang dalam melakukan penyelesaian masalah melalui jurnal, buku, Tugas Akhir, *paper*, dan artikel-artikel yang terkait.

2. Rekonstruksi Model Penyebaran Penyakit Covid-19

Pada tahap ini dilakukan pembentukan model matematika dari penyebaran penyakit Covid-19. Dalam pembentukan model matematika ini, disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat membentuk suatu diagram kompartemen dengan subpopulasi *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovery*.

3. Analisis Titik Setimbang dan Kestabilan

Pada tahap ini akan dicari titik setimbang dengan substitusi persamaan diferensial pada model. Selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan pada titik-titik setimbang.

4. Melakukan Penyelesaian Secara Numerik dan Simulasi

Pada tahap ini akan ditentukan penyelesaian numerik dari model penyebaran penyakit Covid-19 dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4, kemudian melakukan simulasi dengan menggunakan MATLAB.

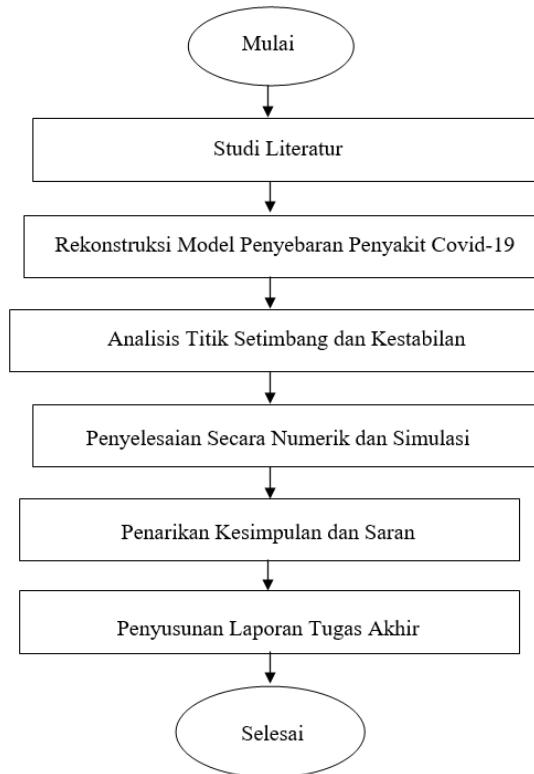
5. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini akan dilakukan penarikan kesimpulan terhadap penelitian yang dilakukan, dan akan dilakukan pemberian saran untuk pengembangan penelitian berikutnya.

6. Penyusunan Laporan Tugas Akhir

Setelah mendapat penyelesaian dan kesimpulan dari permasalahan di Tugas Akhir ini, kemudian akan dilakukan penyusunan laporan tugas akhir.

Diagram Alir Penelitian



BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas deskripsi model dan analisis sistem model matematika penyebaran penyakit Covid-19 di kota Surabaya dan Gresik. Model matematika yang digunakan adalah model SIR, yaitu model yang menggunakan tiga kompartemen. Lalu akan dicari analisis kestabilan dari titik-titik setimbang pada model tersebut, kemudian dilakukan penyelesaian numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan dilakukan simulasi numerik dengan MATLAB.

4.1 Deskripsi Model Penyebaran Penyakit

Model penyebaran penyakit yang dibahas memiliki asumsi-asumsi sebagai berikut :

1. N_1 : jumlah populasi manusia di kota Surabaya yang dalam penelitian ini dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu :
 - a. *Susceptible* ($S_1(t)$) : individu yang rentan terhadap penyakit Covid-19 di kota Surabaya pada usia 15 tahun ke atas.
 - b. *Infected* ($I_1(t)$) : individu yang terinfeksi (positif) penyakit Covid-19 di kota Surabaya.
 - c. *Recovered* ($R_1(t)$) : individu yang sembuh dari penyakit Covid-19 di kota Surabaya.
2. N_2 : jumlah populasi manusia di kota Gresik yang dalam penelitian ini dibagi menjadi 3 kelompok, yaitu :
 - a. *Susceptible* ($S_2(t)$) : individu yang rentan terhadap penyakit Covid-19 di kota Gresik pada usia 15 tahun ke atas.
 - b. *Infected* ($I_2(t)$) : individu yang terinfeksi (positif) penyakit Covid-19 di kota Gresik.

c. *Recovered* ($R_2(t)$) : individu yang sembuh dari penyakit Covid-19 di kota Gresik.

3. Parameter-parameter yang ada pada model dinamik ini yaitu :

α_1 : laju penularan dari individu terinfeksi ke individu rentan di kota Surabaya.

α_2 : laju penularan dari individu terinfeksi ke individu rentan di kota Gresik.

γ_1 : laju kesembuhan di kota Surabaya.

γ_2 : laju kesembuhan di kota Gresik

μ_{11} : laju kematian alami individu *Susceptible* di kota Surabaya.

μ_{12} : laju kematian karena Covid-19 di kota Surabaya.

μ_{13} : laju kematian alami individu *Recovered* di kota Surabaya.

μ_{21} : laju kematian alami individu *Susceptible* di kota Gresik.

μ_{22} : laju kematian karena Covid-19 di kota Gresik.

μ_{23} : laju kematian alami individu *Recovered* di kota Gresik.

x_1 : laju perpindahan individu *Susceptible* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya.

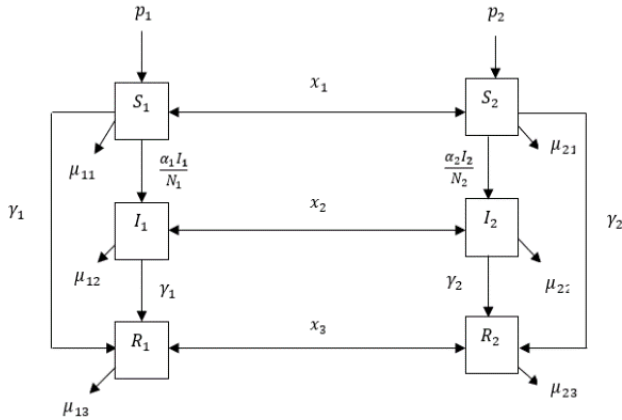
x_2 : laju perpindahan individu *Infected* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya.

x_3 : laju perpindahan individu *Recovered* dari kota Surabaya ke kota Gresik dan sebaliknya.

p_1 : laju kelahiran di kota Surabaya.

p_2 : laju kelahiran di kota Gresik.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, maka disusun sebuah diagram kompartemen model dinamik penyebaran penyakit Covid-19 sebagai berikut :



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen SIR Model Dinamik Penyebaran Penyakit Covid-19 Antar Kota Surabaya dan Gresik

Jumlah individu *Susceptible* di kota Surabaya mengalami kenaikan ketika terdapat kelahiran di kota Surabaya, selain itu perpindahan individu *Susceptible* dari kota Gresik ke kota Surabaya juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *susceptible* di kota Surabaya. Individu *Susceptible* di kota Surabaya mengalami penurunan jumlah ketika terdapat individu yang positif Covid-19 (menjadi *Infected*). Selain itu, adanya individu yang sembuh dari gejala Covid-19 (menjadi *Recovered*), adanya individu *Susceptible* yang mengalami kematian, dan adanya individu *Susceptible* di kota Surabaya yang berpindah ke kota Gresik juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Susceptible* di kota Surabaya.

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1$$

Jumlah individu *Infected* di kota Surabaya mengalami kenaikan ketika terdapat individu *Susceptible* yang menjadi positif Covid-19. Selain itu perpindahan individu *Infected* dari kota Gresik ke kota Surabaya juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *Infected* di kota Surabaya. Individu *Infected* di kota Surabaya mengalami penurunan jumlah ketika terdapat individu yang sembuh dari Covid-19 (menjadi *Recovered*). Selain itu, adanya individu yang mengalami kematian karena Covid-19 dan adanya individu *Infected* di kota Surabaya yang berpindah ke kota Gresik juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Infected* di kota Surabaya.

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 + x_2 I_2 - x_2 I_1$$

Jumlah individu *Recovered* di kota Surabaya mengalami kenaikan ketika individu *Susceptible* dan *Infected* di kota Surabaya mengalami kesembuhan. Selain itu perpindahan individu *Recovered* dari kota Gresik ke kota Surabaya juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *Recovered* di kota Surabaya. Individu *Recovered* di kota Surabaya mengalami penurunan jumlah ketika terdapat individu *Recovered* yang mengalami kematian. Selain itu, adanya individu *Recovered* di kota Surabaya yang berpindah ke kota Gresik juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Recovered* di kota Surabaya.

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1$$

Jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik mengalami kenaikan ketika terdapat kelahiran di kota Gresik, selain itu perpindahan individu *Susceptible* dari kota Surabaya ke kota Gresik juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik. Individu *Susceptible* di kota Gresik mengalami

penurunan jumlah ketika terdapat individu yang positif Covid-19 (menjadi *Infected*). Selain itu, adanya individu yang sembuh dari gejala Covid-19 (menjadi *Recovered*) dan adanya individu *Susceptible* di kota Gresik yang berpindah ke kota Surabaya juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik.

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2$$

Jumlah individu *Infected* di kota Gresik mengalami kenaikan ketika terdapat individu *Susceptible* yang menjadi positif Covid-19. Selain itu perpindahan individu *Infected* dari kota Surabaya ke kota Gresik juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *Infected* di kota Gresik. Individu *Infected* di kota Gresik mengalami penurunan jumlah ketika terdapat individu yang sembuh dari Covid-19 (menjadi *Recovered*). Selain itu, adanya individu yang mengalami kematian karena Covid-19 dan adanya individu *Infected* di kota Gresik yang berpindah ke kota Surabaya juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Infected* di kota Gresik.

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 + x_2 I_1 - x_2 I_2$$

Jumlah individu *Recovered* di kota Gresik mengalami kenaikan ketika individu *Susceptible* dan *Infected* di kota Gresik mengalami kesembuhan. Selain itu perpindahan individu *Recovered* dari kota Surabaya ke kota Gresik juga mengakibatkan kenaikan jumlah individu *Recovered* di kota Surabaya. Individu *Recovered* di kota Gresik mengalami penurunan jumlah ketika terdapat individu *Recovered* yang mengalami kematian. Selain itu, adanya individu *Recovered* di kota Gresik yang berpindah ke

kota Surabaya juga mengakibatkan penurunan jumlah individu *Recovered* di kota Gresik.

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1 \quad (4.1)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 + x_2 I_2 - x_2 I_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1 \quad (4.3)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2 \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 + x_2 I_1 - x_2 I_2 \quad (4.5)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2 \quad (4.6)$$

$$N_1 = S_1 + I_1 + R_1 \quad (4.7)$$

$$N_2 = S_2 + I_2 + R_2 \quad (4.8)$$

Dengan syarat awal $S_1 > 0, I_1 > 0, R_1 > 0, S_2 > 0, I_2 > 0$, dan $R_2 > 0$.

4.2 Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit

Titik setimbang bebas penyakit adalah titik setimbang dimana model setimbang dengan tidak ada penyebaran penyakit menular. Dengan kata lain, titik setimbang ini tercapai ketika $I = 0$. Untuk mencari titik setimbang ini, ruas kanan dari persamaan diferensial dibuat menjadi sama dengan nol. Sehingga, dapat ditulis

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 + x_2 I_2 - x_2 I_1 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 + x_2 I_1 - x_2 I_2 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2 = 0$$

Karena $I_1 = I_2 = 0$, maka persamaan diferensial menjadi

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2 = 0$$

4.2.1 Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit Kota Surabaya

Titik setimbang bebas penyakit kota Surabaya ($S_2 = I_2 = R_2 = 0$), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = x_3 R_1 = 0$$

karena $I_1 = 0$, maka tidak ada orang yang terinfeksi di kota 1, sehingga tidak ada individu yang sembuh di kota 1 ($R_1 = 0$), sehingga didapat

$$p_1 N_1 - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + p_2 N_2 = 0$$

$$\gamma_1 S_1 = 0$$

$$S_1 = \frac{p_1 N_1}{\mu_{11}}$$

4.2.2 Mencari Titik Setimbang Bebas Penyakit Kota Gresik

Titik setimbang bebas penyakit kota Gresik, berarti ($S_1 = I_1 = R_1 = 0$), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dS_1}{dt} = x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = x_3 R_2 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2 = 0$$

karena $I_2 = 0$, maka tidak ada orang yang terinfeksi di kota 2, sehingga tidak ada individu yang sembuh di kota 2 ($R_2 = 0$), sehingga bisa didapat

$$p_2 N_2 - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_1 = 0$$

$$\gamma_2 S_2 = 0$$

$$S_2 = \frac{p_2 N_2}{\mu_{21}}$$

Dengan demikian, dapat ditemukan titik setimbang bebas penyakitnya adalah

$$E^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{p_1 N_1}{\mu_{11}}, 0, 0, \frac{p_2 N_2}{\mu_{21}}, 0, 0 \right). \quad (4.9)$$

4.3 Mencari Titik Setimbang Epidemik

Titik setimbang epidemik adalah titik ketika model epidemik setimbang dengan adanya penyebaran penyakit. Akan dicari titik setimbang epidemik untuk kota Surabaya dan titik setimbang epidemik untuk kota Gresik, sehingga nantinya didapat titik setimbang epidemik $E^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$

4.3.1 Mencari Titik Setimbang Epidemik Kota Surabaya

Titik setimbang epidemik kota Surabaya, berarti $(S_1 \neq 0; I_1 \neq 0; R_1 \neq 0)$ dan $(S_2 = I_2 = R_2 = 0)$, sehingga dapat ditulis

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 - x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 - x_2 I_1 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 - x_3 R_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = x_1 S_1 = 0$$

$$\frac{dI_2}{dt} = x_2 I_1 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = x_3 R_1 = 0$$

Mencari nilai S_1^* ,

Dari $\frac{dI_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dI_2}{dt} = 0$, didapat

$$\frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 = 0$$

$$\left(\frac{\alpha_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} - \gamma_1\right) I_1 = 0$$

$$\frac{\alpha_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} - \gamma_1 = 0$$

$$S_1 = \frac{(\mu_{12} + \gamma_1) N_1}{\alpha_1}$$

$$\text{Maka, } S_1^* = \frac{(\mu_{12} + \gamma_1) N_1}{\alpha_1}$$

Mencari nilai I_1^* ,

Dari $\frac{dS_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dS_2}{dt} = 0$, didapat

$$p_1 N_1 - \left(\frac{\alpha_1 I_1}{N_1} - \mu_{11} - \gamma_1\right) S_1 = 0$$

$$p_1 N_1 - \left(\frac{\alpha_1 I_1}{N_1} - \mu_{11} - \gamma_1\right) \left(\frac{(\mu_{12} + \gamma_1) N_1}{\alpha_1}\right) = 0$$

$$p_1 N_1 - I_1 (\mu_{12} + \gamma_1) + \frac{(\mu_{12} + \gamma_1) N_1 \mu_{11}}{\alpha_1} + \frac{(\mu_{12} + \gamma_1) N_1 \gamma_1}{\alpha_1} = 0$$

$$p_1 N_1 + \frac{N_1 (\mu_{12} + \gamma_1) (\mu_{11} + \gamma_1)}{\alpha_1} = I_1 (\mu_{12} + \gamma_1)$$

$$I_1 = \frac{N_1\{p_1\alpha_1+(\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)}$$

$$\text{Maka, } I_1^* = \frac{N_1\{p_1\alpha_1+(\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)}$$

Mencari nilai R_1^* ,

Dari $\frac{dR_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dR_2}{dt} = 0$, didapat

$$\gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 = 0$$

$$\gamma_1 \left(\frac{(\mu_{12}+\gamma_1)N_1}{\alpha_1} + \frac{N_1\{p_1\alpha_1+(\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)} \right) - \mu_{13} R_1 = 0$$

$$\gamma_1 \left(\frac{(\mu_{12}+\gamma_1)N_1}{\alpha_1} + \frac{N_1\{p_1\alpha_1+(\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)} \right) = \mu_{13} R_1$$

$$R_1 = \frac{\gamma_1 N_1\{(\mu_{12}+\gamma_1)^2 + p_1\alpha_1 + (\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)\mu_{13}}$$

$$\text{Maka, } R_1^* = \frac{\gamma_1 N_1\{(\mu_{12}+\gamma_1)^2 + p_1\alpha_1 + (\mu_{11}+\gamma_1)(\mu_{12}+\gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12}+\gamma_1)\mu_{13}}$$

4.3.2 Mencari Titik Setimbang Epidemik Kota Gresik

Titik setimbang epidemik kota Gresik, berarti ($S_2 \neq 0; I_2 \neq 0; R_2 \neq 0$) dan ($S_1 = I_1 = R_1 = 0$), sehingga dapat ditulis

$$\frac{dS_1}{dt} = x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} = x_2 I_2 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dt} = x_3 R_2 = 0$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 - x_1 S_2 = 0$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 - x_2 I_2 = 0$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 - x_3 R_2 = 0$$

Mencari nilai S_2^* ,

Dari $\frac{dI_1}{dt}$ dan $\frac{dI_2}{dt}$, didapat

$$\frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 = 0$$

$$\left(\frac{\alpha_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} - \gamma_2 \right) I_2 = 0$$

$$\frac{\alpha_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} - \gamma_2 = 0$$

$$\frac{\alpha_2 S_2}{N_2} = \mu_{22} + \gamma_2$$

$$S_2 = \frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2}{\alpha_2}$$

$$\text{Maka, } S_2^* = \frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2}{\alpha_2}$$

Mencari nilai I_2^* ,

Dari $\frac{dS_1}{dt}$ dan $\frac{dS_2}{dt}$, didapat

$$p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 = 0$$

$$p_2 N_2 - \left(\frac{\alpha_2 I_2}{N_2} - \mu_{21} - \gamma_2 \right) S_2 = 0$$

$$p_2 N_2 - \left(\frac{\alpha_2 I_2}{N_2} - \mu_{21} - \gamma_2 \right) \frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2}{\alpha_2} = 0$$

$$p_2 N_2 - I_2 (\mu_{22} + \gamma_2) + \frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2 \mu_{21}}{\alpha_2} + \frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2 \gamma_2}{\alpha_2} = 0$$

$$p_2 N_2 + \frac{N_2 (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})}{\alpha_2} = I_2 (\mu_{22} + \gamma_2)$$

$$I_2 = \frac{N_2 \{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)}$$

$$\text{Maka, } I_2^* = \frac{N_2 \{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)}$$

Mencari nilai R_2^* ,

Dari $\frac{dR_1}{dt}$ dan $\frac{dR_2}{dt}$, didapat

$$\gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 = 0$$

$$\gamma_2 \left(\frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2}{\alpha_2} + \frac{N_2 \{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)} \right) - \mu_{23} R_2 = 0$$

$$\gamma_2 \left(\frac{(\mu_{22} + \gamma_2) N_2}{\alpha_2} + \frac{N_2 \{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)} \right) = \mu_{23} R_2$$

$$\gamma_2 \left(\frac{N_2 \{(\mu_{22} + \gamma_2)^2 + p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)} \right) = \mu_{23} R_2$$

$$R_2 = \frac{\gamma_2 N_2 \{(\mu_{22} + \gamma_2)^2 + p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\mu_{23} \alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)}$$

$$\text{Maka, } R_2^* = \frac{\gamma_2 N_2 \{(\mu_{22} + \gamma_2)^2 + p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2) (\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\mu_{23} \alpha_2 (\mu_{22} + \gamma_2)}$$

Dengan demikian, didapat titik setimbang endemik $E^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ (4.10) dengan

$$\begin{aligned}
S_1^* &= \frac{(\mu_{12} + \gamma_1)N_1}{\alpha_1} \\
I_1^* &= \frac{N_1\{p_1\alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12} + \gamma_1)} \\
R_1^* &= \frac{\gamma_1 N_1\{(\mu_{12} + \gamma_1)^2 + p_1\alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_1)\}}{\alpha_1(\mu_{12} + \gamma_1)\mu_{13}} \\
S_2^* &= \frac{(\mu_{22} + \gamma_2)N_2}{\alpha_2} \\
I_2^* &= \frac{N_2\{p_2\alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\alpha_2(\mu_{22} + \gamma_2)} \\
R_2^* &= \frac{\gamma_2 N_2\{(\mu_{22} + \gamma_2)^2 + p_2\alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})\}}{\mu_{23}\alpha_2(\mu_{22} + \gamma_2)}
\end{aligned}$$

4.4 Pelinieran

Pelinieran merupakan proses mengubah sistem persamaan diferensial non-linier menjadi sistem linier. Karena model penyebaran penyakit Covid-19 dalam penelitian ini merupakan model yang tak linier, maka perlu dilinierkan terlebih dahulu. Untuk melakukan pelinieran, akan didefinisikan

$$f_1(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1$$

$$f_2(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 + x_2 I_2 - x_2 I_1$$

$$f_3(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1$$

$$f_4(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2$$

$$f_5(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 + x_2 I_1 - x_2 I_2$$

$$f_6(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) = \frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2$$

Dengan titik setimbang $(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0)$ maka

$$f_1(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

$$f_2(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

$$f_3(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

$$f_4(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

$$f_5(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

$$f_6(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$$

Deret Taylor dari sistem di sekitar titik setimbang

$(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = 0$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} = & f_1(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} = & f_2(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} = & f_3(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_2}{dt} = & f_4(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} = & f_5(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{dt} = & f_6(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) + (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial S_1} + \\ & (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial S_2} + (I_2 - \\ & I_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial R_2} + \dots \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, maka hasil linierisasi dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} = & (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_1}{\partial R_1} + \\ & (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_1}{\partial R_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} = & (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_2}{\partial R_1} + \\ & (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_2}{\partial R_2} \end{aligned}$$

$$\frac{dR_1}{dt} = (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_3}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_3}{\partial R_2}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_4}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_4}{\partial R_2}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_5}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_5}{\partial R_2}$$

$$\frac{dR_2}{dt} = (S_1 - S_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial S_1} + (I_1 - I_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial I_1} + (R_1 - R_1^0) \frac{\partial f_6}{\partial R_1} + (S_2 - S_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial S_2} + (I_2 - I_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial I_2} + (R_2 - R_2^0) \frac{\partial f_6}{\partial R_2}$$

Misalkan

$$S_1 - S_1^0 = s_1 \rightarrow \frac{dS_1}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$$

$$I_1 - I_1^0 = i_1 \rightarrow \frac{dI_1}{dt} = \frac{di_1}{dt}$$

$$R_1 - R_1^0 = r_1 \rightarrow \frac{dR_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt}$$

$$S_2 - S_2^0 = s_2 \rightarrow \frac{dS_2}{dt} = \frac{ds_2}{dt}$$

$$I_2 - I_2^0 = i_2 \rightarrow \frac{dI_2}{dt} = \frac{di_2}{dt}$$

$$R_2 - R_2^0 = r_2 \rightarrow \frac{dR_2}{dt} = \frac{dr_2}{dt}$$

Dengan menggunakan permisalan di atas, maka diperoleh hasil linierisasi sebagai berikut :

$$\frac{ds_1}{dt} = s_1 \frac{\partial f_1}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_1}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_1}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_1}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_1}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_1}{\partial R_2}$$

$$\frac{di_1}{dt} = s_1 \frac{\partial f_2}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_2}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_2}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_2}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_2}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_2}{\partial R_2}$$

$$\frac{dr_1}{dt} = s_1 \frac{\partial f_3}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_3}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_3}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_3}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_3}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_3}{\partial R_2}$$

$$\frac{ds_2}{dt} = s_1 \frac{\partial f_4}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_4}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_4}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_4}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_4}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_4}{\partial R_2}$$

$$\frac{di_2}{dt} = s_1 \frac{\partial f_5}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_5}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_5}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_5}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_5}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_5}{\partial R_2}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = s_1 \frac{\partial f_6}{\partial S_1} + i_1 \frac{\partial f_6}{\partial I_1} + r_1 \frac{\partial f_6}{\partial R_1} + s_2 \frac{\partial f_6}{\partial S_2} + i_2 \frac{\partial f_6}{\partial I_2} + r_2 \frac{\partial f_6}{\partial R_2}$$

Hasil linierisasi di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{dr_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} & \frac{\partial f_1}{\partial I_1} & \frac{\partial f_1}{\partial R_1} & \frac{\partial f_1}{\partial S_2} & \frac{\partial f_1}{\partial I_2} & \frac{\partial f_1}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_1} & \frac{\partial f_2}{\partial I_1} & \frac{\partial f_2}{\partial R_1} & \frac{\partial f_2}{\partial S_2} & \frac{\partial f_2}{\partial I_2} & \frac{\partial f_2}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_1} & \frac{\partial f_3}{\partial I_1} & \frac{\partial f_3}{\partial R_1} & \frac{\partial f_3}{\partial S_2} & \frac{\partial f_3}{\partial I_2} & \frac{\partial f_3}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_1} & \frac{\partial f_4}{\partial I_1} & \frac{\partial f_4}{\partial R_1} & \frac{\partial f_4}{\partial S_2} & \frac{\partial f_4}{\partial I_2} & \frac{\partial f_4}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_1} & \frac{\partial f_5}{\partial I_1} & \frac{\partial f_5}{\partial R_1} & \frac{\partial f_5}{\partial S_2} & \frac{\partial f_5}{\partial I_2} & \frac{\partial f_5}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_1} & \frac{\partial f_6}{\partial I_1} & \frac{\partial f_6}{\partial R_1} & \frac{\partial f_6}{\partial S_2} & \frac{\partial f_6}{\partial I_2} & \frac{\partial f_6}{\partial R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ i_1 \\ r_1 \\ s_2 \\ i_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Ekuivalen dengan

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x} = [s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2]$$

Dimana $A = J|_{x_0}$. Matriks Jacobian dari matriks tersebut adalah :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} & \frac{\partial f_1}{\partial I_1} & \frac{\partial f_1}{\partial R_1} & \frac{\partial f_1}{\partial S_2} & \frac{\partial f_1}{\partial I_2} & \frac{\partial f_1}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_1} & \frac{\partial f_2}{\partial I_1} & \frac{\partial f_2}{\partial R_1} & \frac{\partial f_2}{\partial S_2} & \frac{\partial f_2}{\partial I_2} & \frac{\partial f_2}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_1} & \frac{\partial f_3}{\partial I_1} & \frac{\partial f_3}{\partial R_1} & \frac{\partial f_3}{\partial S_2} & \frac{\partial f_3}{\partial I_2} & \frac{\partial f_3}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_1} & \frac{\partial f_4}{\partial I_1} & \frac{\partial f_4}{\partial R_1} & \frac{\partial f_4}{\partial S_2} & \frac{\partial f_4}{\partial I_2} & \frac{\partial f_4}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_1} & \frac{\partial f_5}{\partial I_1} & \frac{\partial f_5}{\partial R_1} & \frac{\partial f_5}{\partial S_2} & \frac{\partial f_5}{\partial I_2} & \frac{\partial f_5}{\partial R_2} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_1} & \frac{\partial f_6}{\partial I_1} & \frac{\partial f_6}{\partial R_1} & \frac{\partial f_6}{\partial S_2} & \frac{\partial f_6}{\partial I_2} & \frac{\partial f_6}{\partial R_2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dicari matriks Jacobian dari model penyebaran penyakit Covid-19 dengan mendefinisikannya sebagai berikut :

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_1} = -\frac{\alpha_1 I_1}{N_1} - \mu_{11} - \gamma_1 - x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_1} = -\frac{\alpha_1 S_1}{N_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial R_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_2} = x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial R_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_1} = \frac{\alpha_1 I_1}{N_1}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_1} = \frac{\alpha_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} - \gamma_1 - x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial R_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_2} = x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial R_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_1} = \gamma_1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_1} = \gamma_1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial R_1} = -\mu_{13} - x_3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial R_2} = x_3$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_1} = x_1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial R_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_2} = -\frac{\alpha_2 I_2}{N_2} - \mu_{21} - \gamma_2 - x_1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial I_2} = -\frac{\alpha_2 S_2}{N_2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial R_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial S_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial I_1} = x_2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial R_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial S_2} = \frac{\alpha_2 I_2}{N_2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial I_2} = \frac{\alpha_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} - \gamma_2 - x_2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial R_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial S_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial I_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial R_1} = x_3$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial S_2} = \gamma_2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial I_2} = \gamma_2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial R_2} = -\mu_{23} - x_3$$

Sehingga, dari hasil di atas, ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 I_1}{N_1} - \mu_{11} - \gamma_1 - x_1 & -\frac{\alpha_1 S_1}{N_1} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 I_1}{N_1} & \frac{\alpha_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} - \gamma_1 - x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & -\mu_{13} - x_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2 I_2}{N_2} - \mu_{21} - \gamma_2 - x_1 & -\frac{\alpha_2 S_2}{N_2} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \frac{\alpha_2 I_2}{N_2} & \frac{\alpha_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} - \gamma_2 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & -\mu_{23} - x_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.5 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Bebas Penyakit

Sebelumnya, telah diketahui titik setimbang bebas penyakit dari model penyebaran penyakit Covid-19 dalam penelitian ini adalah $E^0(S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = (\frac{p_1 N_1}{\mu_{11}}, 0, 0, \frac{p_2 N_2}{\mu_{21}}, 0, 0)$. Titik ini kemudian disubstitusi ke dalam matriks pelinieran yang sudah didapat, menjadi

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\mu_{11} - \gamma_1 - x_1 & -\frac{p_1 \alpha_1}{\mu_{11}} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_1 \alpha_1}{\mu_{11}} - \mu_{12} - \gamma_1 - x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & -\mu_{13} - x_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & -\mu_{21} - \gamma_2 - x_1 & -\frac{p_2 \alpha_2}{\mu_{21}} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & \frac{p_2 \alpha_2}{\mu_{21}} - \mu_{22} - \gamma_2 - x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & -\mu_{23} - x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$z_1 = -\mu_{11} - \gamma_1 - x_1$$

$$z_2 = \frac{p_1 \alpha_1}{\mu_{11}} - \mu_{12} - \gamma_1 - x_2$$

$$z_3 = -\mu_{13} - x_3$$

$$z_4 = -\mu_{21} - \gamma_2 - x_1$$

$$z_5 = \frac{p_2 \alpha_2}{\mu_{21}} - \mu_{22} - \gamma_2 - x_2$$

$$z_6 = -\mu_{23} - x_3$$

Maka matriks $J(E^0)$ dapat diubah menjadi

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} z_1 & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & z_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & z_4 & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & z_6 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari persamaan karakteristik (PK) dari matriks di atas dengan menggunakan $|J(E^0) - \lambda I| = 0$, sehingga didapat

$$\begin{vmatrix} z_1 - \frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & z_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & z_4 - \frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & z_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & z_6 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & z_3 - \lambda & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & z_4 - \lambda - \frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & z_5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & z_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk mempermudah penghitungan, akan dilakukan ekspansi kofaktor terhadap kolom ketiga, sehingga didapat

$$\begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & z_3 - \lambda & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & z_5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & z_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(z_3 - \lambda) \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_2 & z_6 - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$x_3 \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(z_3 - \lambda)(z_6 - \lambda) \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$x_3^2 \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\{\lambda^2 - (z_3 + z_6)\lambda + (z_3z_6 - x_3^2)\} \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk determinan matriks

$$\begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix}, \text{ didapat}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (z_1 - \lambda) \begin{vmatrix} z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (z_1 - \lambda)(z_4 - \lambda) \begin{vmatrix} z_2 - \lambda & x_2 \\ x_2 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} - x_1^2 \begin{vmatrix} z_2 - \lambda & x_2 \\ x_2 & z_5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{(z_1 - \lambda)(z_4 - \lambda) - x_1^2\} \begin{vmatrix} z_2 - \lambda & x_2 \\ x_2 & z_5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{\lambda^2 - (z_1 + z_4)\lambda + (z_1z_4 - x_1^2)\} \{\lambda^2 - (z_2 + z_5)\lambda + (z_2z_5 - x_2^2)\}$$

Dengan demikian, didapat

$$\{\lambda^2 - (z_3 + z_6)\lambda + (z_3z_6 - x_3^2)\} \begin{vmatrix} z_1 - \lambda & -\frac{p_1\alpha_1}{\mu_{11}} & x_1 & 0 \\ 0 & z_2 - \lambda & 0 & x_2 \\ x_1 & 0 & z_4 - \lambda & -\frac{p_2\alpha_2}{\mu_{21}} \\ 0 & x_2 & 0 & z_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\{\lambda^2 - (z_3 + z_6)\lambda + (z_3z_6 - x_3^2)\}\{\lambda^2 - (z_1 + z_4)\lambda + (z_1z_4 - x_1^2)\}\{\lambda^2 - (z_2 + z_5)\lambda + (z_2z_5 - x_2^2)\} = 0$$

$$\{\lambda^4 - [(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)]\lambda^3 + [(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)]\lambda^2 - [(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)]\lambda + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2)\}\{\lambda^2 - (z_2 + z_5)\lambda + (z_2z_5 - x_2^2)\} = 0$$

$$\lambda^6 - [(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)]\lambda^5 + [(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)]\lambda^4 - [(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)]\lambda^3 + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2)\lambda^2 - (z_2 + z_5)\lambda^5 + (z_2 + z_5)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)]\lambda^4 - (z_2 + z_5)[(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)]\lambda^3 + (z_2 + z_5)[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)]\lambda^2 - (z_2 + z_5)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2)\lambda + (z_2z_5 - x_2^2)\lambda^4 - (z_2z_5 - x_2^2)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)]\lambda^3 + (z_2z_5 - x_2^2)[(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)]\lambda^2 - (z_2z_5 - x_2^2)[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)]\lambda + (z_2z_5 - x_2^2)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) = 0$$

$$\lambda^6 + \{-[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)] - (z_2 + z_5)\}\lambda^5 + \{(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)\} + (z_2 + z_5)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)] + (z_2z_5 - x_2^2)\}\lambda^4 + \{-[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)] - (z_2 + z_5)[(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)] - (z_2z_5 - x_2^2)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)]\}\lambda^3 + \{(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_2 + z_5)[(z_3 + z_6)(z_1z_4 -$$

$$\begin{aligned}
& x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)] + (z_2z_5 - x_2^2)[(z_1z_4 - \\
& x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)]\lambda^2 + \\
& \{- (z_2 + z_5)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) - (z_2z_5 - \\
& x_2^2)[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)]\}\lambda + \\
& \{(z_2z_5 - x_2^2)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2)\} = 0
\end{aligned}$$

Agar lebih sederhana, persamaan di atas dapat dibentuk menjadi :

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

Dengan

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = -(z_1 + z_4) - (z_3 + z_6) - (z_2 + z_5) > 0$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & [(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)] + \\
& (z_2 + z_5)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)] + (z_2z_5 - x_2^2) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & -[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)] - \\
& (z_2 + z_5)[(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + \\
& (z_3z_6 - x_3^2)] - (z_2z_5 - x_2^2)[(z_1 + z_4) + (z_3 + z_6)] > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & (z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_2 + z_5)[(z_3 + \\
& z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)] + (z_2z_5 - \\
& x_2^2)[(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3 + z_6)(z_1 + z_4) + (z_3z_6 - x_3^2)] > \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 = & -(z_2 + z_5)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) - (z_2z_5 - \\
& x_2^2)[(z_3 + z_6)(z_1z_4 - x_1^2) + (z_3z_6 - x_3^2)(z_1 + z_4)] > 0
\end{aligned}$$

$$a_6 = (z_2z_5 - x_2^2)(z_3z_6 - x_3^2)(z_1z_4 - x_1^2) > 0$$

Sebelum membentuk tabel Routh-Hurwitz, akan dilihat apakah semua koefisien dari persamaan karakteristik sudah

positif atau belum, karena syarat perlu untuk analisa kestabilan dengan Routh-Hurwitz adalah semua koefisien pada persamaan karakteristik positif. Hasil uji koefisien persamaan karakteristik dapat dilihat di **Lampiran 3**.

Kemudian, akan dibentuk suatu tabel Routh-Hurwitz untuk mengecek kestabilan dari Persamaan Karakteristik yang sudah ada, sehingga didapat :

λ^6	a_0	a_2	a_4	a_6	0
λ^5	a_1	a_3	a_5	0	0
λ^4	b_1	b_2	b_3	0	0
λ^3	c_1	c_2	0	0	0
λ^2	d_1	d_2	0	0	0
λ^1	e_1	0	0	0	0
λ^0	f_1	0	0	0	0

Dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 \cdot 0}{a_1} = \frac{a_1 a_6}{a_1} = a_6$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} a_3 - a_1 a_4 + a_5}{b_1} = \frac{(a_1 a_2 - a_3) a_3 - (a_1 a_4 - a_5) a_1}{a_1 a_2 - a_3}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} = \frac{\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} a_5 - a_1 a_6}{b_1} = \frac{(a_1 a_2 - a_3) a_5 - a_1^2 a_6}{a_1 a_2 - a_3}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{c_1 b_3}{c_1} = b_3$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}$$

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 \cdot 0}{e_1} = \frac{e_1 d_2}{e_1} = d_2$$

Syarat agar persamaan diferensial stabil adalah semua variabel pada kolom pertama bertanda positif. Dengan demikian, maka nilai dari a_0 , a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , e_1 , dan f_1 harus bertanda positif.

b_1 bernilai positif jika $a_1 a_2 - a_3 > 0$, yang berarti $a_1 a_2 > a_3$.

b_2 bernilai positif jika $a_1 a_4 - a_5 > 0$, yang berarti $a_1 a_4 > a_5$.

b_3 bernilai positif jika $a_1 a_6 > 0$.

Diasumsikan nilai $b_1, b_2 > 0$, maka c_1 bernilai positif jika $b_1 a_3 - a_1 b_2 > 0$.

$b_1 a_3 - a_1 b_2 > 0$, maka

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} a_3 - a_1 a_4 + a_5 > 0$$

$$\frac{(a_1 a_2 - a_3) a_3 - (a_1 a_4 - a_5) a_1}{a_1} > 0$$

Karena $a_1 > 0$, maka

$$(a_1 a_2 - a_3) a_3 - (a_1 a_4 - a_5) a_1 > 0$$

$$(a_1 a_2 - a_3) a_3 > (a_1 a_4 - a_5) a_1$$

Diasumsikan nilai $b_1, b_3 > 0$, maka c_2 bernilai positif jika $b_1 a_5 - a_1 b_3 > 0$.

$b_1 a_5 - a_1 b_3 > 0$, maka

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} a_5 - a_1 a_6 > 0$$

$$\frac{(a_1 a_2 - a_3) a_5 - a_1^2 a_6}{a_1} > 0$$

Karena $a_1 > 0$, maka

$$(a_1 a_2 - a_3) a_5 - a_1^2 a_6 > 0$$

$$(a_1 a_2 - a_3) a_5 > a_1^2 a_6$$

d_1 bernilai positif jika $c_1 b_2 - b_1 c_2 > 0$.

$c_1 b_2 - b_1 c_2 > 0$, maka

$$\left\{ \frac{(a_1 a_2 - a_3) a_3 - (a_1 a_4 - a_5) a_1}{a_1 a_2 - a_3} \right\} \left\{ \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \right\} - \left\{ \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right\} \left\{ \frac{(a_1 a_2 - a_3) a_5 - a_1^2 a_6}{a_1 a_2 - a_3} \right\} > 0$$

Karena $(a_1 a_2 - a_3) a_1 > 0$, maka

$$\{(a_1 a_2 - a_3) a_3 - (a_1 a_4 - a_5) a_1\} (a_1 a_4 - a_5) - (a_1 a_2 - a_3) \{(a_1 a_2 - a_3) a_5 - a_1^2 a_6\} > 0$$

d_2 bernilai positif jika $c_1 b_3 > 0$.

e_1 bernilai positif jika $d_1 c_2 - c_1 d_2 > 0$.

f_1 bernilai positif jika $e_1 d_2 > 0$.

Dengan demikian, sistem stabil di titik setimbang bebas penyakit jika $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 > 0$.

Setelah dilakukan analisis kestabilan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, didapat bahwa sistem stabil di titik setimbang bebas penyakit karena semua nilai pada kolom pertama tabel Routh bernilai positif. Untuk hasil analisis kestabilan dapat dilihat pada **Lampiran 1**.

4.6 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Epidemik

Sebelumnya, telah diketahui titik setimbang epidemik dari model penyebaran penyakit Covid-19 dalam penelitian ini adalah $E^*(S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*)$, dimana $S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*$ seperti yang tertera di persamaan (4.11). Titik ini kemudian disubstitusi ke dalam matriks pelinieran yang sudah didapat, menjadi

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} \frac{p_1 \alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_2)}{(\mu_{12} + \gamma_2)} - \mu_{11} - \gamma_1 - x_1 & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ \frac{p_1 \alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_2)}{(\mu_{12} + \gamma_2)} & -x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & -\mu_{13} - x_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & -\frac{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})}{(\mu_{22} + \gamma_2)} - \mu_{21} - \gamma_2 - x_1 & -(\mu_{22} + \gamma_2) & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \frac{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})}{(\mu_{22} + \gamma_2)} & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & -\mu_{23} - x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$a_1 = -\frac{p_1 \alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_2)}{(\mu_{12} + \gamma_2)} - \mu_{11} - \gamma_1 - x_1$$

$$a_2 = -x_2$$

$$a_3 = -\mu_{13} - x_3$$

$$a_4 = -\frac{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})}{(\mu_{22} + \gamma_2)} - \mu_{21} - \gamma_2 - x_1$$

$$a_5 = \frac{p_1 \alpha_1 + (\mu_{11} + \gamma_1)(\mu_{12} + \gamma_1)}{(\mu_{12} + \gamma_1)}$$

$$a_6 = -\mu_{23} - x_3$$

$$a_7 = \frac{p_2 \alpha_2 + (\mu_{22} + \gamma_2)(\gamma_2 + \mu_{21})}{(\mu_{22} + \gamma_2)}$$

maka persamaan Jacobian di atas dapat diubah menjadi :

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} a_1 & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & a_3 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 & -(\mu_{22} + \gamma_2) & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & a_6 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari persamaan karakteristik (PK) dari matriks Jacobian tersebut, menggunakan $|J(E^*) - \lambda I| = 0$, sehingga didapat :

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & a_3 - \lambda & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & a_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & a_3 - \lambda & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & a_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk mempermudah penghitungan, maka akan dilakukan ekspansi kofaktor terhadap kolom keenam, sehingga didapat

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & a_3 - \lambda & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 & a_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-x_3 \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 - \lambda \\ 0 & 0 & x_3 & \gamma_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} +$$

$$(a_6 - \lambda) \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & 0 & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & 0 & -a_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & a_3 - \lambda & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & 0 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-x_3^2 \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} + (a_6 - \lambda)(a_3 - \lambda) \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\{-x_3^2 + (a_6 - \lambda)(a_3 - \lambda)\} \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\{\lambda^2 - (a_3 + a_6)\lambda + (a_3a_6 - x_3^2)\} \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Untuk determinan matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_5 - \lambda \end{bmatrix}, \text{ didapat}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} \\ = (a_1 - \lambda) \begin{vmatrix} a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} - \\ a_5 \begin{vmatrix} -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 - \lambda)(-\lambda^3 + (2a_2 + a_4)\lambda^2 - (2a_2a_4 + a_7)\lambda + a_2a_7) - \\
&a_5(-(\mu_{12} + \gamma_1)\lambda^2 + (\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1)\lambda - \\
&\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \\
&\gamma_1)\}) + x_1(-x_1\lambda^2 + 2a_2x_1\lambda - a_2a_7) \\
&= (\lambda^4 - \{a_1 + (2a_2 + a_4)\}\lambda^3 + \{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + \\
&a_7)\}\lambda^2 - \{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7\}\lambda + a_1a_2a_7) - \\
&(-a_5(\mu_{12} + \gamma_1)\lambda^2 + a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1)\lambda - \\
&a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \\
&\gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\}) + (-x_1^2\lambda^2 + 2a_2x_1^2\lambda - a_2a_7x_1) \\
&= (\lambda^4 - \{a_1 + (2a_2 + a_4)\}\lambda^3 + \{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + \\
&a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\}\lambda^2 - \{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - \\
&a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\}\lambda + a_1a_2a_7 + \\
&a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \\
&\gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - a_2a_7x_1)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, maka didapat

$$\{ \lambda^2 - (a_3 + a_6)\lambda + (a_3a_6 - x_3^2) \} \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -(\mu_{12} + \gamma_1) & x_1 & 0 \\ a_5 & a_2 - \lambda & 0 & -a_2 \\ x_1 & 0 & a_4 - \lambda & -(\mu_{22} + \gamma_2) \\ 0 & -a_2 & a_7 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\lambda^6 + [-\{a_1 + (2a_2 + a_4)\} - (a_3 + a_6)]\lambda^5 + [\{(2a_2 + a_4)a_1 + \\
&(2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\} + (a_3 + a_6)\{a_1 + \\
&(2a_2 + a_4)\} + (a_3a_6 - x_3^2)]\lambda^4 + [-\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - \\
&a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\} - (a_3 + \\
&a_6)\{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\} - \\
&(a_3a_6 - x_3^2)\{a_1 + (2a_2 + a_4)\}]\lambda^3 + [(a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \\
&\gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - \\
&a_2a_7x_1) + (a_3 + a_6)\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - a_5(\mu_{12}a_4 + \\
&a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\} + (a_3a_6 - x_3^2)\{(2a_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_4)a_1 + (2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\}}{\lambda^2} + \\
& [-(a_3 + a_6)(a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - \\
& x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - a_2a_7x_1) - (a_3a_6 - \\
& x_3^2)\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + \\
& a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\}]\lambda + [(a_3a_6 - x_3^2)(a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \\
& \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - \\
& a_2a_7x_1)] = 0
\end{aligned}$$

Agar lebih mudah, persamaan diatas diubah ke dalam bentuk

$$A_0\lambda^6 + A_1\lambda^5 + A_2\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_4\lambda^2 + A_5\lambda + A_6 = 0$$

Dengan

$$A_0 = 1 > 0$$

$$A_1 = -\{a_1 + (2a_2 + a_4)\} - (a_3 + a_6)$$

$$A_2 = \{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\} + (a_3 + a_6)\{a_1 + (2a_2 + a_4)\} + (a_3a_6 - x_3^2)$$

$$A_3 = -\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\} - (a_3 + a_6)\{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\} - (a_3a_6 - x_3^2)\{a_1 + (2a_2 + a_4)\}$$

$$A_4 = (a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - a_2a_7x_1) + (a_3 + a_6)\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\} + (a_3a_6 - x_3^2)\{(2a_2 + a_4)a_1 + (2a_2a_4 + a_7) + a_5(\mu_{12} + \gamma_1) - x_1^2\}$$

$$A_5 = -(a_3 + a_6)(a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - a_2a_7x_1) - (a_3a_6 - x_3^2)\{(2a_2a_4 + a_7)a_1 + a_2a_7 - a_5(\mu_{12}a_4 + a_2\mu_{12} + \gamma_1a_4 + a_2\gamma_1) + 2a_2x_1^2\}$$

$$A_6 = (a_3a_6 - x_3^2)(a_1a_2a_7 + a_5\{\mu_{12}a_2a_4 + \gamma_1a_2a_4 - x_1a_2\mu_{22} - x_1a_2\gamma_2 + a_7(\mu_{22} + \gamma_2)(\mu_{12} + \gamma_1)\} - a_2a_7x_1)$$

Sebelum membentuk tabel Routh-Hurwitz, akan dilihat apakah semua koefisien dari persamaan karakteristik sudah positif atau belum, karena syarat perlu untuk analisa kestabilan dengan Routh-Hurwitz adalah semua koefisien pada persamaan karakteristik positif. Hasil uji koefisien persamaan karakteristik dapat dilihat di **Lampiran 4**.

Kemudian, akan dibentuk suatu tabel Routh-Hurwitz untuk mengecek kestabilan dari Persamaan Karakteristik yang sudah ada, sehingga didapat :

λ^6	A_0	A_2	A_4	A_6
λ^5	A_1	A_3	A_5	
λ^4	b_1	b_2	b_3	
λ^3	c_1	c_2		
λ^2	d_1	d_2		
λ^1	e_1			
λ^0	f_1			

dengan

$$b_1 = \frac{A_1A_2 - A_0A_3}{A_1} = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1} \quad b_2 = \frac{A_1A_4 - A_0A_5}{A_1} = \frac{A_1A_4 - A_5}{A_1}$$

$$b_3 = \frac{A_1A_6 - A_0 \cdot 0}{A_1} = \frac{A_1A_6}{A_1} = A_6$$

$$c_1 = \frac{b_1 A_3 - A_1 b_2}{b_1} = \frac{\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} A_3 - A_1 A_4 + A_5}{b_1} = \frac{(A_1 A_2 - A_3) A_3 - (A_1 A_4 - A_5) A_1}{A_1 A_2 - A_3},$$

$$c_2 = \frac{b_1 A_5 - A_1 b_3}{b_1} = \frac{\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} A_5 - A_1 A_6}{b_1} = \frac{(A_1 A_2 - A_3) A_5 - A_1^2 A_6}{A_1 A_2 - A_3}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 \cdot 0}{c_1} = \frac{c_1 b_3}{c_1} = b_3$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}$$

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 \cdot 0}{e_1} = \frac{e_1 d_2}{e_1} = d_2$$

Syarat agar persamaan diferensial stabil adalah semua variabel pada kolom pertama bertanda positif. Dengan demikian, maka nilai dari $A_0, A_1, b_1, c_1, d_1, e_1$, dan f_1 harus bertanda positif.

b_1 bernilai positif jika $A_1 A_2 - A_3 > 0$, yang berarti $A_1 A_2 > A_3$.

b_2 bernilai positif jika $A_1 A_4 - A_5 > 0$, yang berarti $A_1 A_4 > A_5$.

b_3 bernilai positif jika $A_1 A_6 > 0$.

Diasumsikan nilai $b_1, b_2 > 0$, maka c_1 bernilai positif jika $b_1 A_3 - A_1 b_2 > 0$.

$b_1 A_3 - A_1 b_2 > 0$, maka

$$\frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} A_3 - A_1 A_4 + A_5 > 0$$

$$\frac{(A_1 A_2 - A_3) A_3 - (A_1 A_4 - A_5) A_1}{A_1} > 0$$

Karena $A_1 > 0$, maka

$$(A_1A_2 - A_3)A_3 - (A_1A_4 - A_5)A_1 > 0$$

$$(A_1A_2 - A_3)A_3 > (A_1A_4 - A_5)A_1$$

Diasumsikan nilai $b_1, b_3 > 0$, maka c_2 bernilai positif jika $b_1A_5 - A_1b_3 > 0$.

$b_1A_5 - A_1b_3 > 0$, maka

$$\frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}A_5 - A_1A_6 > 0$$

$$\frac{(A_1A_2 - A_3)A_5 - A_1^2A_6}{A_1} > 0$$

Karena $A_1 > 0$, maka

$$(A_1A_2 - A_3)A_5 - A_1^2A_6 > 0$$

$$(A_1A_2 - A_3)A_5 > A_1^2A_6$$

d_1 bernilai positif jika $c_1b_2 - b_1c_2 > 0$.

$c_1b_2 - b_1c_2 > 0$, maka

$$\left\{ \frac{(A_1A_2 - A_3)A_3 - (A_1A_4 - A_5)A_1}{A_1A_2 - A_3} \right\} \left\{ \frac{A_1A_4 - A_5}{A_1} \right\} - \left\{ \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1} \right\} \left\{ \frac{(A_1A_2 - A_3)A_5 - A_1^2A_6}{A_1A_2 - A_3} \right\} > 0$$

Karena $(A_1A_2 - A_3)A_1 > 0$, maka

$$\{(A_1A_2 - A_3)A_3 - (A_1A_4 - A_5)A_1\}(A_1A_4 - A_5) - (A_1A_2 - A_3)\{(A_1A_2 - A_3)A_5 - A_1^2A_6\} > 0$$

d_2 bernilai positif jika $c_1b_3 > 0$.

e_1 bernilai positif jika $d_1c_2 - c_1d_2 > 0$.

f_1 bernilai positif jika $e_1 d_2 > 0$.

Dengan demikian, sistem stabil di titik setimbang epidemik jika $A_0, A_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 > 0$.

Setelah dilakukan analisis kestabilan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, didapat bahwa sistem tidak stabil di titik setimbang epidemik karena tidak semua nilai pada kolom pertama tabel Routh bernilai positif. Untuk hasil analisis kestabilan dapat dilihat pada **Lampiran 1**.

4.7 Solusi Numerik Dengan Metode Runge-Kutta Orde 4

Persamaan yang diperoleh akan dilakukan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde empat. Metode Runge Kutta orde empat adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini mempunyai jeda selisih waktu yaitu h , h adalah langkah waktu (*step size*).

Persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{ds_1}{dt} = -\left(\frac{\alpha_1 I_1}{N_1} + \mu_{11} + \gamma_1 + x_1\right) s_1 - \frac{\alpha_1 S_1 i_1}{N_1} + x_1 s_2 = f_1(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 s_1}{N_1} + \left(\frac{\alpha_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} - \gamma_1 - x_2\right) i_1 + x_2 i_2 = f_2(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \gamma_1 s_1 + \gamma_1 i_1 - (\mu_{13} + x_3) r_1 + x_3 r_2 = f_3(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

$$\frac{ds_2}{dt} = -\left(\frac{\alpha_2 I_2}{N_2} + \mu_{21} + \gamma_2 + x_1\right) s_2 - \frac{\alpha_2 i_2 S_2}{N_2} + x_1 s_1 = f_4(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} + \left(\frac{\alpha_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} - \gamma_2 - x_2 \right) i_2 + x_2 i_1 = f_5(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \gamma_2 s_2 + \gamma_2 i_2 - (\mu_{23} + x_3) r_2 + x_3 r_1 = f_6(s_1, i_1, r_1, s_2, i_2, r_2)$$

Berikut langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan metode Runge-Kutta:

a. Langkah 1

Inisialisasi nilai awal untuk interval waktu $t = [t_0, t_f]$ dengan dimisalkan nilainya $t_0 = 0$ dan $t_f = 100$.

b. Langkah 2

Memasukan nilai awal $s_1(0) = s_{1(0)}$; $s_2(0) = s_{2(0)}$; $i_1(0) = i_{1(0)}$; $i_2(0) = i_{2(0)}$; $r_1(0) = r_{1(0)}$; $r_2(0) = r_{2(0)}$ untuk menyelesaikan persamaan secara *forward sweep*. Berikut rumus Runge Kutta orde empat untuk persamaan diferensial :

$$s_1(t+h) = s_1(t) + \frac{h}{6} (k_{1,s_1} + 2k_{2,s_1} + 2k_{3,s_1} + k_{4,s_1})$$

$$i_1(t+h) = i_1(t) + \frac{h}{6} (k_{1,i_1} + 2k_{2,i_1} + 2k_{3,i_1} + k_{4,i_1})$$

$$r_1(t+h) = r_1(t) + \frac{h}{6} (k_{1,r_1} + 2k_{2,r_1} + 2k_{3,r_1} + k_{4,r_1})$$

$$s_2(t+h) = s_2(t) + \frac{h}{6} (k_{1,s_2} + 2k_{2,s_2} + 2k_{3,s_2} + k_{4,s_2})$$

$$i_2(t+h) = i_2(t) + \frac{h}{6} (k_{1,i_2} + 2k_{2,i_2} + 2k_{3,i_2} + k_{4,i_2})$$

$$r_2(t+h) = r_2(t) + \frac{h}{6} (k_{1,r_2} + 2k_{2,r_2} + 2k_{3,r_2} + k_{4,r_2})$$

dengan

k_1 :

$$k_{1,s_1} = f_1(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

$$k_{1,i_1} = f_2(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

$$k_{1,r_1} = f_3(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

$$k_{1,s_2} = f_4(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

$$k_{1,i_2} = f_5(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

$$k_{1,r_2} = f_6(s_1(t), i_1(t), r_1(t), s_2(t), i_2(t), r_2(t))$$

k_2 :

$$k_{2,s_1} = f_1\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

$$k_{2,i_1} = f_2\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

$$k_{2,r_1} = f_3\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

$$k_{2,s_2} = f_4\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

$$k_{2,i_2} = f_5\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

$$k_{2,r_2} = f_6\left(s_1(t) + \frac{k_{1,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{1,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{1,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{1,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{1,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{1,r_2}}{2}\right)$$

k_3 :

$$k_{3,s_1} = f_1 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

$$k_{3,i_1} = f_2 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

$$k_{3,r_1} = f_3 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

$$k_{3,s_2} = f_4 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

$$k_{3,i_2} = f_5 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

$$k_{3,r_2} = f_6 \left(s_1(t) + \frac{k_{2,s_1}}{2}, i_1(t) + \frac{k_{2,i_1}}{2}, r_1(t) + \frac{k_{2,r_1}}{2}, s_2(t) + \frac{k_{2,s_2}}{2}, i_2(t) + \frac{k_{2,i_2}}{2}, r_2(t) + \frac{k_{2,r_2}}{2} \right)$$

k_4 :

$$k_{4,s_1} = f_1(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

$$k_{4,i_1} = f_2(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

$$k_{4,r_1} = f_3(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

$$k_{4,s_2} = f_4(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

$$k_{4,i_2} = f_5(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

$$k_{4,r_2} = f_6(s_1(t) + k_{3,s_1}, i_1(t) + k_{3,i_1}, r_1(t) + k_{3,r_1}, s_2(t) + k_{3,s_2}, i_2(t) + k_{3,i_2}, r_2(t) + k_{3,r_2})$$

4.8 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan aplikasi MATLAB. Nilai-nilai dari parameter-parameter yang digunakan didapat melalui asumsi-asumsi sebagai berikut :

Tabel 4.1 Asumsi parameter

Parameter	Asumsi
α_1	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa individu <i>Susceptible</i> terinfeksi Covid-19 setelah melakukan kontak sebanyak 500 kali dengan individu <i>Infected</i>
α_2	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa individu <i>Susceptible</i> terinfeksi Covid-19 setelah melakukan kontak sebanyak 700 kali dengan individu <i>Infected</i>
γ_1	$\frac{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{\text{data sembuh dari penyakit Covid 19 Surabaya}} \right)}{100}$

γ_2	$\frac{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{\text{data sembuh dari penyakit Covid 19 Gresik}} \right)}{100}$
μ_{11}	$\frac{100}{\text{Angka Harapan Hidup kota Surabaya 2020}}$
μ_{12}	$\frac{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{\text{data kematian karena Covid 19 Surabaya}} \right)}{100}$
μ_{13}	$\frac{100}{\text{Angka Harapan Hidup kota Surabaya 2020}}$
μ_{21}	$\frac{100}{\text{Angka Harapan Hidup kota Gresik 2020}}$
μ_{22}	$\frac{\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{\text{data kematian karena Covid 19 Gresik}} \right)}{100}$
μ_{23}	$\frac{100}{\text{Angka Harapan Hidup kota Gresik 2020}}$
x_1	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa individu <i>Susceptible</i> yang berpindah dari kota Surabaya ke kota Gresik atau sebaliknya sebanyak 0,1% dari jumlah individu <i>Susceptible</i> di kota Surabaya dan kota Gresik.
x_2	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa individu <i>Infected</i> yang berpindah dari kota Surabaya ke

	kota Gresik atau sebaliknya sebanyak 0,01% dari jumlah individu <i>Infected</i> di kota Surabaya dan kota Gresik.
x_3	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa individu <i>Recovered</i> yang berpindah dari kota Surabaya ke kota Gresik atau sebaliknya sebanyak 0,1% dari jumlah individu <i>Recovered</i> di kota Surabaya dan kota Gresik.
p_1	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa laju kelahiran di kota Surabaya sebesar 100 hari per 207.881 jumlah kelahiran.
p_2	Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa laju kelahiran di kota Gresik sebesar 100 hari per 102.753 jumlah kelahiran.

Dari asumsi-asumsi yang ada di Tabel 4.1, didapat parameter-parameter yang digunakan memiliki nilai-nilai sebagai berikut :

Tabel 4.2 Daftar nilai parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
α_1	0,005	μ_{22}	0,002842
α_2	0,007	μ_{23}	0,013749
γ_1	0,0000451764625608329	x_1	0,001
γ_2	0,0000194062	x_2	0,0001
μ_{11}	0,013498	x_3	0,001
μ_{12}	0,000732039	p_1	0,0007156

μ_{13}	0,013498	p_2	0,0007746
μ_{21}	0,013749		

Simulasi numerik ini menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan pemberian nilai awal sebagai berikut :

$$S_1(0) = 2.294.792$$

$$I_1(0) = 22.365$$

$$R_1(0) = 20.836$$

$$S_2(0) = 1.012.537$$

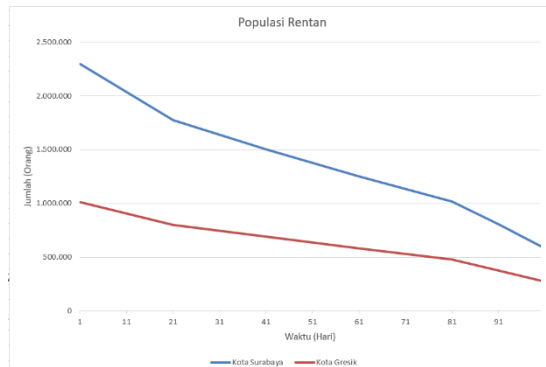
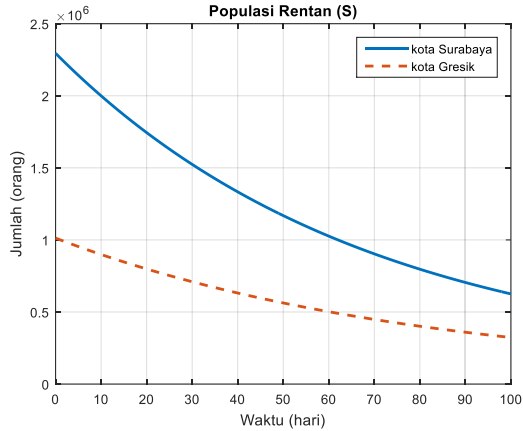
$$I_2(0) = 5.320$$

$$R_2(0) = 4.898$$

Dengan waktu 100 hari.

a. Simulasi (a)

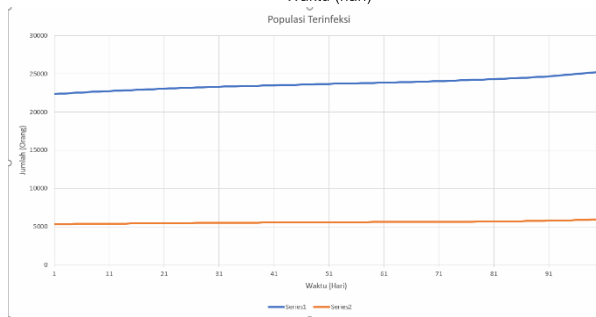
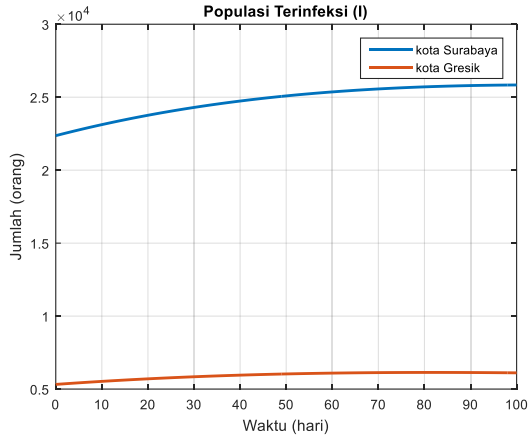
Pada simulasi ini ditampilkan penyebaran individu *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* antara kota Surabaya dan Gresik, dengan faktor perpindahan yaitu $x_1 = 0,001$, $x_2 = 0,0001$ dan $x_3 = 0,001$. Hasil simulasinya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.2 Grafik simulasi numerik penyebaran individu *Susceptible* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_1 = 0,001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu *Susceptible* pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)

Dari Gambar 4.2, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Susceptible* di Surabaya sebesar 2.294.792 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Susceptible* di Surabaya sebesar 625.396 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 1.012.537 jiwa, dan di

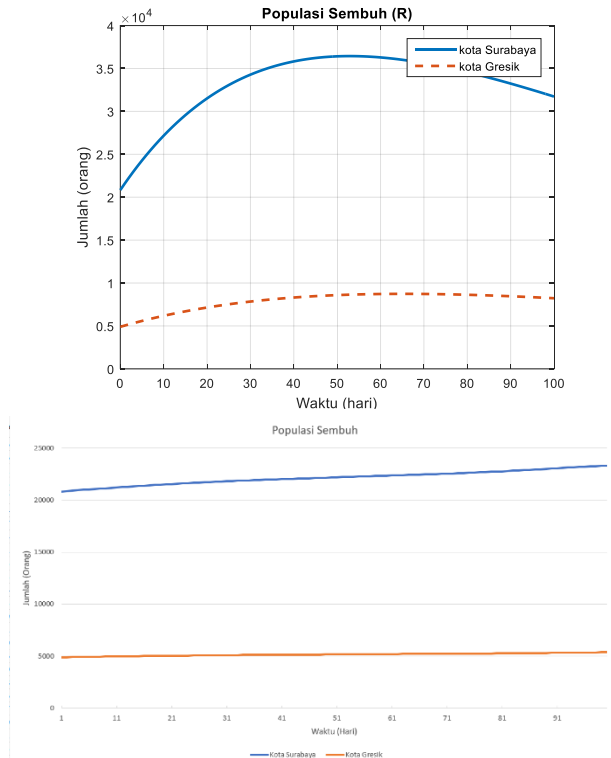
hari ke-100 jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik sebesar 323.144 jiwa. Selain itu, dapat diamati bahwa peningkatan jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik memiliki selisih yang cukup jauh dengan peningkatan jumlah individu *Susceptible* di kota Surabaya. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik dan kota Surabaya mengalami pengaruh yang tidak begitu besar satu dengan yang lain.



Gambar 4.3 Grafik simulasi numerik penyebaran individu *Infected* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_2 = 0,0001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu *Infected* pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)

Dari Gambar 4.3, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Infected* di Surabaya sebesar 22.365 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Infected* di Surabaya sebesar 25.838 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Infected* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 5.320 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Infected* di kota Gresik sebesar 6.112 jiwa.

Selain itu, dapat diamati bahwa peningkatan jumlah individu *Infected* di kota Gresik memiliki selisih yang cukup jauh dengan peningkatan jumlah individu *Infected* di kota Surabaya. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan jumlah individu *Infected* di kota Gresik dan kota Surabaya mengalami pengaruh yang tidak begitu besar satu dengan yang lain.



Gambar 4.4 Grafik simulasi penyebaran individu *Recovered* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_3 = 0,001$ (gambar atas) dan grafik data asli individu *Infected* pada kota Surabaya dan Gresik (gambar bawah)

Dari Gambar 4.4, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Recovered* di Surabaya sebesar 20.836 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Recovered* di Surabaya sebesar 31.729 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Recovered* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 4.898 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Recovered* di kota Gresik sebesar 8.226 jiwa.

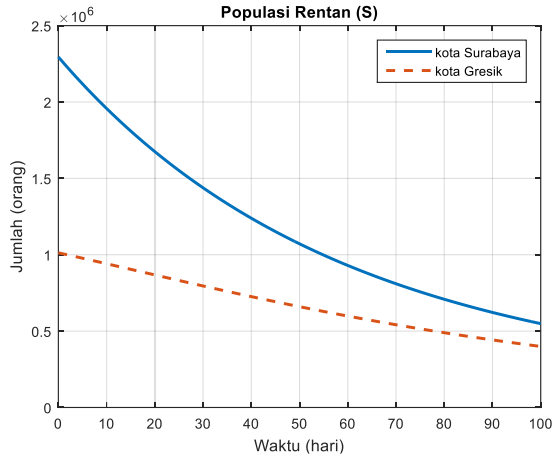
Dari Gambar 4.4, dapat diamati bahwa peningkatan jumlah individu *Recovered* di kota Gresik memiliki selisih yang cukup jauh dengan peningkatan jumlah individu *Recovered* di kota Surabaya. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan jumlah individu *Recovered* di kota Gresik dan kota Surabaya mengalami pengaruh yang tidak begitu besar satu dengan yang lain.

Sebagai perbandingan, akan ditampilkan simulasi penyebaran individu *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* antara kota Surabaya dan Gresik dengan faktor perpindahan $x_1 = 0,005$, $x_2 = 0,0005$ dan $x_3 = 0,005$.

b. Simulasi (b)

Pada simulasi ini ditampilkan penyebaran individu *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* antara kota Surabaya dan Gresik dengan faktor perpindahan $x_1 = 0,005$, $x_2 = 0,0005$ dan $x_3 = 0,005$

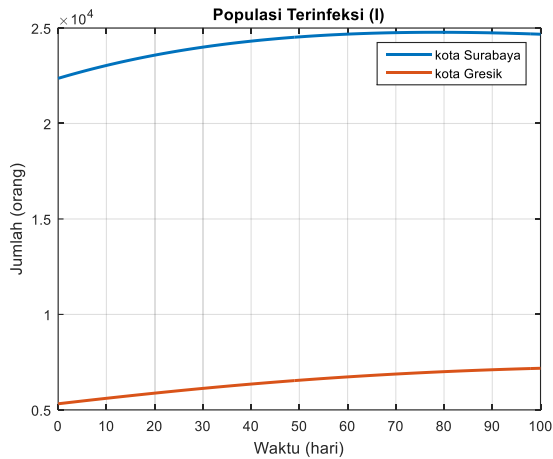
Hasil simulasinya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.5 Grafik penyebaran simulasi numerik individu *Susceptible* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_1 = 0,005$

Dari Gambar 4.5, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Susceptible* di Surabaya sebesar 2.294.792 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Susceptible* di Surabaya sebesar 548.978 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 1.012.537 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Susceptible* di kota Gresik sebesar 399.589 jiwa.

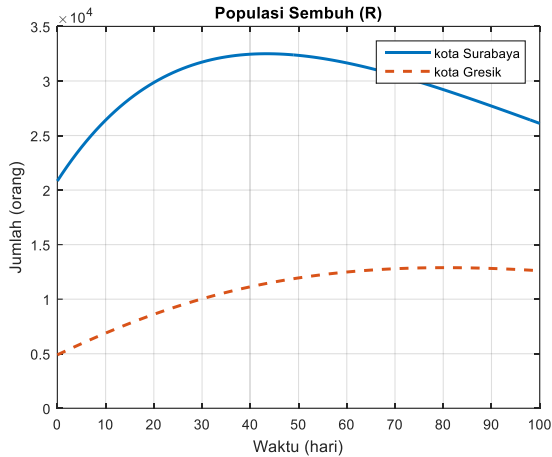
Dari Gambar 4.5, dapat dilihat bahwa grafik penyebaran individu *Susceptible* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling mendekati satu dengan yang lain dibandingkan dengan Gambar 4.2. Dengan kata lain, peningkatan jumlah individu *Susceptible* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling memengaruhi satu dengan yang lain.



Gambar 4.6 Grafik simulasi numerik penyebaran individu *Infected* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_2 = 0,0005$

Dari Gambar 4.6, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Infected* di Surabaya sebesar 22.365 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Infected* di Surabaya sebesar 24.676 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Infected* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 5.320 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Infected* di kota Gresik sebesar 7.180 jiwa.

Dari Gambar 4.6, dapat dilihat bahwa grafik penyebaran individu *Infected* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling mendekati satu dengan yang lain dibandingkan dengan Gambar 4.3. Dengan kata lain, peningkatan jumlah individu *Infected* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling memengaruhi satu dengan yang lain.



Gambar 4.7 Grafik simulasi numerik penyebaran individu *Recovered* pada kota Surabaya dan Gresik dengan $x_3 = 0,005$

Dari Gambar 4.7, dapat diamati bahwa pada hari pertama, jumlah individu *Recovered* di Surabaya sebesar 20.836 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Recovered* di Surabaya sebesar 26.112 jiwa. Sedangkan untuk jumlah individu *Recovered* di kota Gresik pada hari pertama sebesar 4.898 jiwa, dan di hari ke-100 jumlah individu *Recovered* di kota Gresik sebesar 12.607 jiwa.

Dari Gambar 4.7, dapat dilihat bahwa grafik penyebaran individu *Recovered* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling mendekati satu dengan yang lain dibandingkan dengan Gambar 4.4. Dengan kata lain, peningkatan jumlah individu *Recovered* pada kota Surabaya dan kota Gresik lebih saling memengaruhi satu dengan yang lain.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan serta saran dari penulis agar penelitian dapat dikembangkan lebih baik.

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan hasil penelitian pada bab sebelumnya, didapat beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Konstruksi model penyebaran penyakit Covid-19 antar kota Surabaya dan kota Gresik adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS_1}{dt} = p_1 N_1 - \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{11} S_1 - \gamma_1 S_1 + x_1 S_2 - x_1 S_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 I_1 S_1}{N_1} - \mu_{12} I_1 - \gamma_1 I_1 + x_2 I_2 - x_2 I_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma_1 S_1 + \gamma_1 I_1 - \mu_{13} R_1 + x_3 R_2 - x_3 R_1$$

$$\frac{dS_2}{dt} = p_2 N_2 - \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{21} S_2 - \gamma_2 S_2 + x_1 S_1 - x_1 S_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 I_2 S_2}{N_2} - \mu_{22} I_2 - \gamma_2 I_2 + x_2 I_1 - x_2 I_2$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \gamma_2 S_2 + \gamma_2 I_2 - \mu_{23} R_2 + x_3 R_1 - x_3 R_2$$

2. Dari kontruksi model diatas, dengan memasukkan data penelitian, didapat analisis kestabilan pada titik setimbang bebas penyakit dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz stabil karena tidak ada perubahan tanda pada kolom pertama pada tabel Routh-Hurwitz. Sedangkan untuk analisis kestabilan pada titik setimbang

epidemic, dengan memasukkan data penelitian dan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, didapat hasil bahwa model tidak stabil pada titik setimbang epidemic, karena ada perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz. Dengan demikian, penyebaran penyakit Covid-19 akan mengalami kenaikan atau penurunan.

3. Simulasi model penyebaran penyakit Covid-19 antar kota menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4 menghasilkan grafik penyebaran penyakit Covid-19 untuk variabel *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered*. Dengan faktor perpindahan yang lebih kecil, menghasilkan penyebaran penyakit yang tidak saling bergantung antara satu kota dengan yang lain.

5.2. Saran

Saran dari penulis untuk penelitian berikutnya yaitu :

1. Untuk dapat melakukan rekonstruksi model penyebaran penyakit Covid-19 yang nantinya lebih sesuai dengan perubahan situasi dan kondisi berikutnya.
2. Untuk dapat menggunakan cakupan wilayah yang berbeda dengan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Rajagopal, Karthikeyan, Hasanzadeh, Navid, Parastesh, Fatemeh, Hamarash, Ibrahim Ismael, Jafari, Sajad, Hussain, Iqtadar. (2020). “*A Fractional-Order Model For The Novel Coronavirus (COVID-19) Outbreak*”. Departement of Biomedical Engineering, University of Technology, Tehran, Iran.
- [2] Puspitasari, Anita. (2019). “Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Tuberkulosis (TB) Dengan Terapi dan Vaksinasi Menggunakan Metode Runge Kutta”. Skripsi. Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [3] Subiono. (2016). Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Versi 2.2.1. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [4] Annas, Suwardi, Pratama, M. Isbar, Rifandi, M., Sanusi, Wahidah, Side. (2020). “*Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model For Pandemic COVID-19 Spread In Indonesia*”. Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Natural Science, Universitas Negeri Makassar, Parang Tambung, South Sulawesi 90244 Indonesia. Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science, Universitas Negeri Makassar, Parang Tambung, South Sulawesi 90244 Indonesia
- [5] Wulandari, Unik Novita. (2013). “Analisis Model Epidemik MSEIR Pada Penyebaran Penyakit Difteri”. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

- [6] AS, M. Khadi Aqsa. (2017). “Model Matematika Pada Replikasi Virus Hepatitis C Dalam *Vesicular Membran Structure* (2VMS) Dengan Sistem Persamaan Diferensial (Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde-4)”. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin, Makassar. Ortigueira, Manuel Duarte; Trujillo, Juan J (2011). “*Generalized Grunwald-Letnikov Fractional Derivative and Its Laplace and Fourier Transforms*”. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. Vol. 6. Juli 2011.
- [7] Mubaroroh, Fitrotin. (2019). “Pemodelan Matematika Dinamika Pertumbuhan Nyamuk Dan Analisis Kestabilannya”. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Bandar Lampung.
- [8] Nahdawayah, Saidah Ajilatun. (2020). “Analisa Kestabilan Global dan Kontrol Optimal Model Penyakit Campak”. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.
- [9] Mujiyanti. (2019). “Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit *Middle East Respiratory Syndrome Corona Virus* (MERS-CoV) Dengan Penggunaan Masker Kesehatan dan Vaksinasi”. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Syarif Hidayatullah, Jakarta.
- [10] Ndaïrou, Faiçal, Area, Iván, Nieto, Juan J., Torres, Delfim F. M. (2020). “*Mathematical Modeling Of COVID-19 Transmission Dynamics With A Case Study Of Wuhan*”. Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA), Department of Mathematics, University of Aveiro, Portugal. Departamento de Matemática Aplicada II, E. E. Aeronáutica e do Espazo,

Campus de Ourense, Universidade de Vigo, Spain. Instituto de Matematicas, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela 15782, Spain.

- [11] Yulida, Yuni, Karim, Muhammad Ahsar. (2020). *“Pemodelan Matematika Penyebaran Covid-19 Di Provinsi Kalimantan Selatan”*. Program Studi Matematika. FMIPA. Universitas Lambung Mangkurat.

LAMPIRAN

Lampiran 1.

Source Code untuk perhitungan analisis kestabilan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

```
%analisa kestabilan Titik Setimbang bebas
penyakit
    %variabel matriks Jacobian
z1 = -miu11-gamma1-x1;
z2 = (p1*alpha1)/miu11-miu12-gamma1-x2;
z3 = -miu13-x3;
z4 = -miu21-gamma2-x1;
z5 = (p2*alpha2)/miu21-miu22-gamma2-x2;
z6 = -miu23-x3;
    %matriks Jacobian
Jacobian_Bebas_Penyakit = [z1 -(p1*alpha1)/miu11
0 x1 0 0;0 z2 0 0 x2 0;gamma1 gamma1 z3 0 0
x3;x1 0 0 z4 -(p2*alpha2)/miu21 0;0 x2 0 0 z5
0;0 0 x3 gamma2 gamma2 z6];
format long
Jacobian_Bebas_Penyakit

%Persamaan Karakteristik analisa kestabilan titik
setimbang bebas penyakit
a0 = 1;
a1 = -z1-z2-z3-z4-z5-z6;
a2 = ((z1*z4-x1^2)+(z3+z6)*(z1+z4)+(z3*z6-
x3^2))+(z2+z5)*(z1+z3+z4+z6)+(z2*z5-x2^2);
a3 = -((z3+z6)*(z1*z4-x1^2)+(z3*z6-
x3^2)*(z1+z4))-(z2+z5)*((z1*z4-x1^2)+(z3*z6-
x3^2)*(z1+z4)+(z3*z6-x3^2))-(z2*z5-
x2^2)*(z1+z3+z4+z6);
a4 = (z3*z6-x3^2)*(z1*z4-
x1^2)+(z2+z5)*((z3+z6)*(z1*z4-x1^2)+(z3*z6-
x3^2)*(z1+z4))+(z2*z5-x2^2)*((z1*z4-
x1^2)+(z3+z6)*(z1+z4)+(z3*z6-x3^2));
```

```

a5 = -(z2+z5)*(z3*z6-x3^2)*(z1*z4-x1^2)-(z2*z5-
x2^2)*(z3+z6)*(z1*z4-x1^2)+(z3*z6-
x3^2)*(z1+z4);
a6 = (z2*z5-x2^2)*(z3*z6-x3^2)*(z1*z4-x1^2);

```

```

%tabel routh-hurwitz Persamaan Karakteristik
bebas penyakit

```

```

b1 = (a1*a2-a3)/a1;
b2 = (a1*a4-a5)/a1;
b3 = a6;
c1 = (b1*a3-a1*b2)/b1;
c2 = (b1*a5-a1*b3)/b1;
d1 = (c1*b2-b1*c2)/c1;
d2 = b3;
e1 = (d1*c2-c1*d2)/d1;
f1 = d2;
fprintf('Tabel Routh-Hurwitz Analisa Kestabilan
Titik Setimbang Bebas Penyakit : \n');
RH_BEBASPENYAKIT = [a0 a2 a4 a6;a1 a3 a5 0;b1 b2
b3 0;c1 c2 0 0;d1 d2 0 0;e1 0 0 0;f1 0 0 0]

```

Hasil dari simulasi perhitungan menggunakan MATLAB.

```

Tabel Routh-Hurwitz Analisa Kestabilan Titik Setimbang Bebas Penyakit :
RH_BEBASPENYAKIT =

```

1.000000000000000	0.001507082935025	0.000000092410141	0.0000000000000091
0.062448353207911	0.000014398704240	0.000000000181247	0
0.001276513136136	0.000000089507794	0.0000000000000091	0
0.000010019889647	0.000000000176811	0	0
0.000000066982392	0.0000000000000091	0	0
0.000000000163249	0	0	0
0.0000000000000091	0	0	0

```

%analisa kestabilan Titik Setimbang epidemik
%variabel matriks Jacobian

```

```

w1 = -
(p1*alpha1+(miu11+gamma1)*(miu12+gamma1))/(miu12
+gamma1)-miu11-gamma1-x1;

```



```

w2 = -x2;
w3 = -miu13-x3;
w4 = -
(p2*alpha2+(miu22+gamma2)*(gamma2+miu21))/(miu22
+gamma2)-miu21-gamma2-x1;
w5 =
(p1*alpha1+(miu11+gamma1)*(miu12+gamma1))/(miu12
+gamma1);
w6 = -miu23-x3;
w7 =
(p2*alpha2+(miu22+gamma2)*(gamma2+miu21))/(miu22
+gamma2);
    %matriks Jacobian Titik Setimbang Epidemik
Jacobian_Epidemik = [w1 -(miu12+gamma1) 0 x1 0
0;w5 w2 0 0 -w2 0;gamma1 gamma1 w3 0 0 x3;x1 0 0
w4 -(miu22+gamma2) 0;0 -w2 0 w7 w2 0;0 0 x3
gamma2 gamma2 w6];
format long
Jacobian_Endemik

%PK Titik setimbang epidemik
A0 = 1;
A1 = -(w1+2*w2+w4)-w3-w6;
A2 = ((2*w2+w4)*w1+2*w2*w4+w5*(miu12+gamma1)-
x1^2)+(w3+w6)*(w1+2*w2+w4);
A3 = -((2*w2*w4+w7)*w1-
w5*(miu12*w4+w2*miu12+gamma1*w4+w2*gamma1)+2*w2*
x1^2)-
(w3+w6)*((2*w2+w4)*w1+(2*w2*w4+w7)+w5*(miu12+gam
ma1)-x1^2)-(w3*w6-x3^2)*(w1+2*w2+w4);
A4 = (w1*w2*w7+w5*(miu12*w2*w4+gamma1*w2*w4-
x1*w2*miu22-
x1*w2*gamma2+w7*(miu22+gamma2)*(miu12+gamma1))-
w2*w7*x1)+(w3+w6)*((2*w2*w4+w7)*w1+w2*w7-
w5*(miu12*w4+w2*miu12+gamma1*w4+w2*gamma1)+2*w2*
x1^2)+(w3*w6-
x3^2)*((2*w2+w4)*w1+(2*w2*w4+w7)+w5*(miu12+gamma
1)+2*w2*x1^2);

```

```

A5 = -(w3+w6) * (w1*w2*w7+w5*(miu12*w2*w4-
x1*w2*miu22-
x1*w2*gamma2+w7*(miu22+gamma2)*(miu12+gamma1))-
w2*w7*x1)-(w3*w6-x3^2)*( (2*w2*w4+w7)*w1+w2*w7-
w5*(miu12*w4+w2*miu12+gamma1*w4+w2*gamma1)+2*w2*
x1^2);
A6 = (w3*w6-
x3^2)* (w1*w2*w7+w5*(miu12*w2*w4+gamma1*w2*w4-
x1*w2*miu22-
x1*w2*gamma2+w7*(miu22+gamma2)*(miu12+gamma1))-
w2*w7*x1);

```

```

%tabel routh hurwitz analisa kestabilan epidemik
B1 = (A1*A2-A3)/A1;
B2 = (A1*A4-A5)/A1;
B3 = A6;
C1 = (B1*A3-A1*B2)/B1;
C2 = (B1*A5-A1*B3)/B1;
D1 = (C1*B2-B1*C2)/C1;
D2 = B3;
E1 = (D1*C2-C1*D2)/D1;
F1 = D2;
fprintf('tabel Routh-Hurwitz Analisa Kestabilan
Titik Setimbang Epidemik : \n');
RH_EPIDEMIK = [A0 A2 A4 A6;A1 A3 A5 0;B1 B2 B3
0;C1 C2 0 0;D1 D2 0 0;E1 0 0 0;F1 0 0 0]

```

Hasil dari simulasi perhitungan menggunakan MATLAB.

```

tabel Routh-Hurwitz Analisa Kestabilan Titik Setimbang Epidemik :
RH_EPIDEMIK =
    1.000000000000000    0.004262055222133    0.000030429552737    0.000000000117303
    0.112643952365234    0.001336844654664    0.000000223319435         0
   -0.007605822516476    0.000028447027885    0.000000000117303         0
    0.001758151574072    0.000000225056715         0         0
    0.000029420630761    0.000000000117303         0         0
    0.000000218046805         0         0         0
    0.000000000117303         0         0         0

```

Lampiran 2.

Source Code simulasi dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

a. Source code metode Runge-Kutta orde 4

```
function dydt=runge_kutta(t,y,p1, p2, alpha1,
alpha2, gamma1, gamma2, miu11, miu12, miu13,
miu21, miu22, miu23, x1, x2, x3, N1,N2)

y1=p1*N1-(alpha1*y(2)*y(1))/N1-miu11*y(1)-
gamma1*y(1)+x1*y(4)-x1*y(1);
y2=(alpha1*y(2)*y(1))/N1-miu12*y(2)-
gamma1*y(2)+x2*y(5)-x2*y(2);
y3=gamma1*y(1)+gamma1*y(2)-
miu13*y(3)+x3*y(6)-x3*y(3);
y4=p2*N2-(alpha2*y(5)*y(4))/N2-miu21*y(4)-
gamma2*y(4)+x1*y(1)-x1*y(4);
y5=(alpha2*y(5)*y(4))/N2-miu22*y(5)-
gamma2*y(5)+x2*y(2)-x2*y(5);
y6=gamma2*y(4)+gamma2*y(5)-
miu23*y(6)+x3*y(3)-x3*y(6);
end
```

b. Source code simulasi

```
figure(1)
plot(y1(1,:),y1(2,:),y1(1,:),y1(5,:), '--
','LineWidth',2);
title('Populasi Rentan (S)');
legend('kota Surabaya','kota Gresik');
grid;
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Jumlah (orang)');
hold on
```

```

figure(2)
plot(y1(1,:),y1(3,:),'-', y1(1,:),y1(6,:),'-
','LineWidth',2);
title('Populasi Terinfeksi (I)');
legend('kota Surabaya','kota Gresik');
grid;
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Jumlah (orang)');
hold on

```

```

figure(3)
plot(y1(1,:),y1(4,:), y1(1,:),y1(7,:), '--
','LineWidth',2);
title('Populasi Sembuh (R)');
legend('kota Surabaya','kota Gresik');
grid;
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Jumlah (orang)');
hold on

```

Lampiran 3

Uji koefisien persamaan karakteristik Analisa kestabilan titik setimbang bebas penyakit :

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

Dilakukan uji koefisien persamaan karakteristik dengan menggunakan MATLAB untuk mengetahui apakah koefisien persamaan karakteristik sudah positif semua sebagai syarat perlu sebelum masuk ke tabel Routh :

$$\text{Nilai } a_0 = 1$$

$$\text{Nilai } a_1 = 0.071435176881816$$

$$\text{Nilai } a_2 = 0.002051676784631$$

$$\text{Nilai } a_3 = 1.880270709146696 \times 10^{-05}$$

$$\text{Nilai } a_4 = 2.243445198314793 \times 10^{-07}$$

$$\text{Nilai } a_5 = 7.626874577133893 \times 10^{-10}$$

$$\text{Nilai } a_6 = 6.499030252954295 \times 10^{-13}$$

Karena semua nilai koefisien pada persamaan karakteristik sudah positif, maka bisa dilanjutkan untuk membuat tabel Routh untuk mengecek kestabilan dari persamaan karakteristik.

Lampiran 4

Uji koefisien persamaan karakteristik Analisa kestabilan titik setimbang epidemik :

$$A_0\lambda^6 + A_1\lambda^5 + A_2\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_4\lambda^2 + A_5\lambda + A_6 = 0$$

Dengan

Dilakukan uji koefisien persamaan karakteristik dengan menggunakan MATLAB untuk mengetahui apakah koefisien persamaan karakteristik sudah positif semua sebagai syarat perlu sebelum masuk ke tabel Routh :

$$\text{Nilai } A_0 = 1$$

$$\text{Nilai } A_1 = 0.107993082569172$$

$$\text{Nilai } A_2 = 0.004180205883878$$

$$\text{Nilai } A_3 = 0.001181302628018$$

$$\text{Nilai } A_4 = 2.782449745126417 \times 10^{-05}$$

$$\text{Nilai } A_5 = 2.435322219616843 \times 10^{-07}$$

$$\text{Nilai } A_6 = 6.736171327651869 \times 10^{-10}$$

Karena semua nilai koefisien pada persamaan karakteristik sudah positif, maka bisa dilanjutkan untuk membuat tabel Routh untuk mengecek kestabilan dari persamaan karakteristik.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Yonatan Asadi Djaya, lahir di Bekasi, pada tanggal 5 April 1998. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Kristen Kalam Kudus Yogyakarta, SD Kristen Kalam Kudus Yogyakarta (2004-2009), SD Santo Carolus Surabaya (2009-2010), SMP Kristen Petra 5 Surabaya, dan SMA Kristen Petra 5 Surabaya. Saat ini, penulis sedang menempuh pendidikan Sarjana (S1) di Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Selama kuliah penulis tergabung dalam Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Paduan Suara Mahasiswa (PSM) ITS. Penulis juga pernah mengikuti kegiatan perlombaan Satya Dharma Gita Choir Festival (SDGCF) 2017. Penulis juga aktif dalam mengikuti kepanitiaan *event*, diantaranya Olimpiade Matematika ITS (OMITS) sebagai *staff Equipment, Permission, and Logistics (EPL)* tahun 2017, dan *staff Food Utility* tahun 2018. Selain itu, penulis juga aktif dalam kegiatan pelatihan kemahasiswaan, diantaranya Latihan Ketrampilan Manajemen Mahasiswa Pra-Tingkat Dasar (LKMM Pra-TD), pelatihan PKM GT, *Mathematics Heroes School*, Latihan Ketrampilan Mahasiswa Wirausaha Tingkat Dasar (LKMW TD), dan lain sebagainya. Dalam penulisan Tugas Akhir ini tentu tidak terlepas dari kekurangan-kekurangan yang ada, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran mengenai penulisan Tugas Akhir ini yang dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke yoyoasadi@gmail.com.