



TUGAS AKHIR - KM184801

SIMULASI NUMERIK ALIRAN DARAH PADA ARTERI MANUSIA

RACHMAN GHANI KURNIANSYAH
NRP. 06111640000120

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2021



FINAL PROJECT - KM184801

***NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW
IN HUMAN ARTERY***

**RACHMAN GHANI KURNIANSYAH
NRP. 06111640000120**

Supervisors :
Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

DEPARTEMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2021

LEMBAR PENGESAHAN

Simulasi Numerik Aliran Darah Pada Arteri Manusia *Numerical Simulation of Blood Flow in Human Artery*

Tugas Akhir

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat Untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

Rachman Ghani Kurniansyah
NRP: 06111640000120

Menyetujui,

Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.
19611115 198703 1 003



Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS



Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 23 Agustus 2021

SIMULASI NUMERIK ALIRAN DARAH PADA ARTERI MANUSIA

Nama Mahasiswa : Rachman Ghani Kurniansyah
NRP : 06111640000120
Departemen : Matematika FSAD-ITS
Dosen Pembimbing : Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

Abstrak

Model matematika dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena atau permasalahan mengenai aliran darah. Untuk mencari solusi dari model aliran darah, dapat menggunakan pendekatan secara numeris. Metode numeris yang dapat digunakan antara lain metode beda hingga, metode elemen hingga, dan metode volume hingga. Karena aliran darah berdimensi 3, maka metode yang cocok digunakan adalah metode volume hingga. Aliran darah termasuk ke dalam fluida, salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan fluida dalam numerik adalah metode fluks Lax-Friedrichs. Metode Lax Friedrich merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan mengimplementasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang hiperbolik. Pada Tugas Akhir ini, akan dilakukan simulasi dari solusi numerik model aliran darah berdimensi satu pada arteri manusia dengan menggunakan metode volume hingga fluks Lax-Friedrichs. Untuk simulasi, diberikan gelombang sinus tunggal dengan periode waktu kecil sebagai input implisit pada batas kiri. Simulasi ini berhasil mendeteksi posisi denyut nadi yang merambat untuk seluruh periode waktu.

Kata Kunci: *Aliran darah, Metode Volume Hingga, Lax-Friedrichs*

NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW IN HUMAN ARTERY

Name : Rachman Ghani Kurniansyah
NRP : 06111640000120
Departement : Matematika FSAD-ITS
Supervisor : Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

Abstract

Mathematical models can be used to explain phenomena or problems regarding blood flow. To find solutions from the blood flow model, can use a numerical approach. Numerical methods that can be used include finite difference methods, finite element methods, and finite volume methods. Because blood flow is three dimension, a suitable method is the finite volume method. Blood flow is included in the fluid, one of the methods for solving fluid problems in numerical is the Lax-Friedrichs flux method. Lax Friedrich method is one of the numerical approach methods by implementing finite difference methods that can be used in solving hyperbolic wave equations. In this Final Project, a numerical solution of a one-dimensional blood flow model in a human artery will be simulated using the finite volume method Lax-Friedrichs flux. For the simulation, given a single sine wave with a small time period as an impluse input on the left boundary. The finite volume method is successful in simulating how the pulse propagates in the artery. It detects the positions of the pulse for the whole time period.

Keywords: *Blood flow, Finite Volume Method, Lax-Friedrichs*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Simulasi Numerik Aliran Darah pada Arteri Manusia” yang merupakan salah satu prasyarat akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terimakasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak, Ibu, Kakak, Adik dan seluruh keluarga penulis yang tidak hentinya memberi dukungan secara moril dan materil untuk kesuksesan penulis.
2. Subchan, Ph.D. selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS dan Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku Sekretaris Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga selesainya tugas akhir ini.
3. Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini hingga dapat selesai dengan baik.
4. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc, Drs. Bandung Arry S., M.I.Komp, dan Drs. Kamiran, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan saran kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini.
5. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Soleha, S.Si, M.Si selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga selesainya tugas akhir.
6. Seluruh Bapak dan Ibu dosen Departement Matematika ITS atas ilmu dan motivasi yang diberikan kepada penulis selama perkuliahan.

7. Seluruh Staf Departement Matematika ITS yang telah memberikan pelayanan terbaik kepada penulis selama perkuliahan hingga selesai.
8. Sahabat penulis, Ardi, Zuhair, Rifan, Dimas dan Chandra yang telah memberi semangat, dukungan, dan memberikan doa-doa terbaik untuk penulis.
9. Teman-teman Matematika ITS 2016 “LEMNISCATE” yang telah memberikan banyak cerita selama perkuliahan dan banyak pihak yang tidak dapat ditulis satu persatu oleh penulis yang telah membantu selama penulisan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Ahir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 13 Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	iii
Abstrak	iv
<i>Abstract</i>	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
BAB I	1
PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Batasan Masalah.....	3
1.4. Tujuan.....	3
1.5. Manfaat.....	3
1.6. Sistematika Penulisan Tugas Akhir.....	3
BAB II.....	5
TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Aliran Darah.....	6
2.3 Model Aliran Darah.....	7
2.4 Metode Volume Hingga	8
2.5 Metode Lax-Friedrichs	10
BAB III.....	13
METODOLOGI PENELITIAN	13

3.1	Studi Literatur.....	13
3.2	Penurunan Model Aliran Darah.....	13
3.3	Mendapatkan Solusi Numerik Model Aliran Darah... 13	
3.4	Perhitungan Numerik Model Aliran Darah dengan Perangkat Lunak.....	13
3.5	Penarikan Kesimpulan dan Penulisan Tugas Akhir....	13
BAB IV.....		15
ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....		15
4.1	Penurunan Model Aliran Darah.....	15
4.2	Metode Volume Hingga	19
4.3	Kondisi Batas.....	25
4.4	Simulasi Program	288
4.5	Kestabilan dan Konvergensi Numerik.....	311
BAB V.....		377
PENUTUP		377
5.1	Kesimpulan.....	377
5.2	Saran.....	377
.DAFTAR PUSTAKA.....		399
LAMPIRAN		433
BIODATA PENULIS.....		511

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Arteri pada Manusia.....	7
Gambar 2.2 Grid 3 Dimensi.....	9
Gambar 2.3 Grid 2 Dimensi.....	9
Gambar 2.4 Grid 1 Dimensi.....	10
Gambar 4.1 Ilustrasi Arteri pada Manusia.....	15
Gambar 4.2 <i>Control Volume</i> yang digunakan untuk Pembagian Grid pada Kekekalan Massa.....	16
Gambar 4.3 <i>Control Volume</i> yang digunakan untuk Pembagian Grid pada Kekekalan Momentum.....	18
Gambar 4.4 Diskritisasi Domain Ruang.....	20
Gambar 4.5 Ilustrasi Simulasi Numeris pada Arteri Manusia.....	26
Gambar 4.6 Grafik luas penampang pada arteri terhadap t (waktu).....	28
Gambar 4.7 Grafik luas penampang pada arteri terhadap z (ruang).....	29
Gambar 4.8 Grafik tekanan darah pada arteri terhadap t (waktu).....	30
Gambar 4.9 Grafik tekanan darah pada arteri terhadap z (ruang).....	31
Gambar 4.10 Tekanan Darah saat $t = 0.01$ pada Simulasi dengan Banyak Iterasi Berbeda.....	36

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Nilai Koefisien dari Simulasi Numerik	26
---	----

BAB I

PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang dalam penulisan tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat dari penulisan Tugas Akhir.

1.1. Latar Belakang

Penerapan Matematika semakin berkembang dalam berbagai bidang. Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang Matematika yang mampu mendeskripsikan suatu permasalahan real ke dalam bentuk sistem persamaan matematika atau yang disebut juga sebagai model matematika. Pemodelan matematika dapat digunakan dalam berbagai bidang, seperti sains, teknologi, bisnis, dan manajemen. Contoh model matematika dalam bidang sains yaitu model aliran darah.

Darah adalah salah satu komponen dalam tubuh manusia yang memiliki peranan sangat penting. Salah satu peranan penting darah adalah mengangkut oksigen dan nutrisi ke seluruh jaringan dalam tubuh. Dalam kasus khusus, aliran darah dapat terhambat karena adanya penyumbatan atau penyempitan rongga arteri. Ini adalah kondisi berbahaya yang harus diatasi. Dalam hal ini, perawatan medis dapat mempengaruhi pola aliran darah. Aliran darah dalam arteri manusia dapat direpresentasikan dalam model matematika. Dalam Tugas Akhir ini akan dibahas cara memodelkan aliran darah, menyelesaikan dan mensimulasikan model aliran darah [1].

Model matematika dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena atau permasalahan mengenai aliran darah. Untuk mencari solusi dari model aliran darah, dapat menggunakan pendekatan secara numeris, karena jika menyelesaikan secara analitis model berbentuk persamaan parsial, sehingga sangat sulit untuk diselesaikan. Metode numerik yang dapat digunakan antara lain metode beda hingga, metode elemen hingga, dan metode volume hingga.

Metode beda hingga unggul dalam kemudahan komputasi namun tidak dalam fleksibilitas geometri domain. Untuk geometri domain yang kompleks, penerapan metode beda hingga dirasa kurang baik karena grid perhitungan pada umumnya berbentuk kotak teratur. Metode elemen hingga memiliki keunggulan untuk geometri domain yang kompleks karena grid perhitungan tidak hanya terbatas pada bentuk kotak. Namun metode ini memerlukan memori perhitungan yang besar. Metode volume hingga memiliki keunggulan untuk geometri domain yang kompleks dan juga perhitungan yang relatif sederhana [2]. Karena aliran darah berdimensi 3, maka metode yang cocok digunakan adalah metode volume hingga. Metode volume hingga cocok digunakan untuk mencari solusi numeris dari model dalam bentuk persamaan differensial parsial, dimana model seperti itu dapat menghasilkan solusi diskontinu meskipun nilai awalnya kontinu. Metode volume hingga berkaitan erat dengan metode beda hingga. Serta metode volume hingga dapat dipandang langsung sebagai pendekatan dari metode beda hingga terhadap persamaan differensial [3].

Selain itu, aliran darah juga termasuk kedalam fluida, salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan fluida dalam numerik adalah metode fluks Lax-Friedrichs. Metode Lax Friedrich merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan mengemplementasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang hiperbolik [4]. Prosedur dalam metode Lax Friedrich ini untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial mengimplementasikan metode beda tengah dan metode beda maju. Metode beda tengah untuk turunan ruangnya dan metode beda maju untuk turunan waktunya. Hal ini terjadi karena metode Lax Friedrich ini merupakan bentuk metode perkembangan dari metode Forward Time Centered Space (FTCS) yang dalam penyelesaian terhadap persamaan differensial parsial terkadang tidak mencapai kestabilan [4].

Berasarkan yang telah dijabarkan diatas, penulis mencoba untuk melakukan simulasi dari solusi numerik model aliran darah berdimensi satu pada arteri manusia dengan menggunakan metode volume hingga Lax-Friedrichs.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka didapat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis model aliran darah pada arteri manusia?
2. Bagaimana solusi numerik dari model aliran darah pada arteri manusia menggunakan metode volume hingga?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini memiliki batasan masalah sebagai berikut:

1. Kecepatan aliran darah dianggap konstan.
2. Model aliran darah yang digunakan satu dimensi.
3. Elastisitas dianggap konstan dan tekanan aliran darah dari luar dianggap nol.

1.4 Tujuan

Berdasarkan uraian pada identifikasi masalah maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui analisa dari model aliran darah pada arteri manusia.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model aliran darah pada arteri manusia menggunakan metode volume hingga.

1.5 Manfaat

Penelitian Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah mengetahui hasil simulasi numerik aliran darah pada arteri manusia menggunakan metode volume hingga.

1.6 Sistematika Penulisan Tugas Akhir

Sistematika penulisan dalam laporan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

- 1 BAB I : PENDAHULUAN

- Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tugas Akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan Tugas Akhir.
- 2 **BAB II : TINJAUAN PUSTAKA**
Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu, aliran darah, model aliran darah, metode volume hingga, dan metode Lax-Friedrichs.
- 3 **BAB III : METODOLOGI PENELITIAN**
Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir
- 4 **BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN**
Bab ini menjelaskan tentang analisis dan pembahasan model aliran darah menggunakan metode volume hingga dengan definisi fluks Lax-Friedrichs, setelah itu disimulasikan menggunakan software *MATLAB*.
- 5 **BAB V : PENUTUP**
Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya, serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai teori-teori yang berkaitan dengan penelitian tugas akhir ini. Teori-teori yang dibahas antara lain yaitu mengenai penelitian terdahulu, aliran darah, model aliran darah, metode volume hingga, dan metode Lax-Friedrichs.

2.1 Penelitian Terdahulu

Delestre et al. [5] meneliti tentang simulasi aliran darah di arteri manusia dengan model satu dimensi. Berkat perkembangan terbaru dalam analisis sistem hiperbolik hukum konservasi, mereka melakukan pola volume terbatas yang sederhana. Mereka fokus pada sifat konservasi dari pola tersebut, yang dari penelitian sebelumnya tidak dipertimbangkan. Untuk menekankan perlunya pola tersebut, mereka menjelaskan bagaimana pola numerik yang terlalu sederhana dapat menyebabkan aliran tiruan ketika bentuk statis dasar jari-jari berubah. Sebaliknya, pola yang diusulkan adalah 'seimbang': pola ini mempertahankan keseimbangan $Q = 0$. Kemudian contoh solusi analitik atau linierisasi dengan dan tanpa pengurangan redaman dijelaskan untuk memvalidasi perhitungan. Pengaruh perubahan mendadak dari jari-jari dasar ditekankan dalam kasus aneurisme.

Selanjutnya Luca Formaggia et al. [6] menyelidiki tentang model aliran darah satu dimensi di arteri manusia. Secara khusus mereka mempertimbangkan kasus ketika variasi mendadak dari karakteristik mekanik arteri disebabkan oleh adanya prostesis vaskular. Derivasi model dan skema numerik yang dipilih untuk solusi terperinci. Hasil eksperimen numerik menunjukkan keefektifan model untuk masalah yang dihadapi.

Selanjutnya Budiawan et al. [7] meneliti tentang model aliran darah satu dimensi di arteri manusia. Model tersebut adalah sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik non-linier yang dapat menghasilkan solusi kontinu. Mereka menggunakan metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk menyelesaikan model tersebut. Khususnya, mereka menyelidiki bagaimana denyut nadi merambat di arteri manusia. Untuk simulasi, mereka memberikan

gelombang sinus tunggal dengan periode waktu kecil sebagai input implisit pada batas kiri. Metode volume hingga berhasil berhasil mensimulasikan posisi denyut nadi untuk seluruh periode waktu. Pada simulasi numerik, kestabilan system tidak dijabarkan lebih lanjut. Dinyatakan bahwa, jika nilai Δt memenuhi syarat *Courant-Friedrichs Lewy* (CFL)'s, maka metode yang digunakan dikatakan stabil. Namun tidak ada penjelasan perhitungan syarat angka CFL yang digunakan. Dalam penelitian tersebut tidak ada kesimpulan mengenai kestabilan sistem.

2.2 Aliran Darah

Darah adalah suatu jaringan tubuh yang terdapat di dalam pembuluh darah. Darah berwarna merah yang bersifat tidak tetap bergantung pada banyaknya oksigen dan karbon dioksida di dalamnya. Kekentalan/viskositas darah lebih kental dari air yaitu BJ 1,041 – 1,067 dan pH 7,37 – 7,45. Pada tubuh orang dewasa terdapat darah kira-kira sebanyak 1/13 dari berat badan atau kira-kira 4 – 5 liter. Keadaan jumlah darah masing-masing orang tidak sama. Hal tersebut bergantung pada umur, pekerjaan, keadaan jantung, atau pembuluh darah. Fungsi darah bermacam-macam, diantaranya sebagai alat pengangkut, yaitu mengangkut oksigen dari paru-paru lalu diedarkan ke seluruh tubuh dan mengangkut karbon dioksida dari seluruh tubuh melalui paru-paru [1].

Sistem peredaran darah dibagi menjadi dua, yaitu peredaran darah kecil dan peredaran darah besar. Peredaran darah kecil merupakan darah yang sedikit oksigen keluar dari ventrikel kanan menuju ke arteri pulmonalis lalu ke paru-paru. Sedangkan peredaran darah besar merupakan darah yang kaya oksigen keluar dari ventrikel kiri menuju ke seluruh tubuh melalui arteri. Kecepatan aliran darah bergantung pada ukuran dari aorta dengan tekanan atrium kanan. Aliran menjadi bergerak karena perubahan tekanan yang terdapat di dalam peredaran darah besar [8].

Darah dapat mengalir di dalam arteri dalam bentuk laminar, artinya kecepatan aliran di bagian tengah dan bagian tepi yang dekat dengan permukaan bagian dalam dinding arteri adalah sama. Aliran bersifat sejajar yang konsentris ke arah yang sama. Dalam

bentuk ini, darah mengalir dalam kecepatan tetap melalui pembuluh darah yang panjang dan licin. Jika terdapat suatu aliran darah di dalam arteri mengarah ke segala jurusan aliran disebut aliran turbulen. Keadaan ini terjadi ketika pembuluh darah mengalami sumbatan, permukaan kasar, dan arteri bercabang [9].

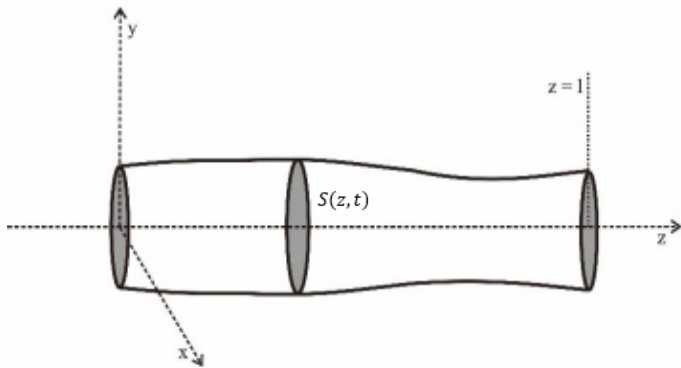
2.3 Model Aliran Darah

Pada bagian ini menggambarkan masalah aliran darah di arteri manusia yang ingin diselesaikan. Tabung silinder dianggap lurus dengan penampang lingkaran dan koordinat z adalah sumbu silinder (Gambar 2.1). Model aliran darah satu dimensi untuk arteri manusia sebagai berikut [7]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0, \quad (2.2)$$

Untuk $z \in (0,1)$ dan $t > 0$, dimana A , Q , dan p adalah luas penampang arteri S , fluks volume, dan tekanan darah rata-rata pada S . Selain itu α adalah fungsi kecepatan di setiap penampang arteri yang nilainya dianggap konstan, ρ adalah massa jenis darah, K_R adalah koefisien yang berkaitan dengan kekentalan darah, z adalah variable ruang, dan t adalah variable waktu.



Gambar 2.1 Ilustrasi Arteri pada Manusia

Pada model ini, ada tiga variabel dependen (A , Q , dan p) dan dua persamaan. Untuk memiliki dua persamaan dengan dua *unknowns*, Tugas Akhir ini mendefinisikan hubungan tekanan darah dengan area penampang arteri sebagai berikut :

$$p = p_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2.3)$$

Dimana p_{ext} merupakan tekanan luar aliran darah dan A_0 merupakan luas penampang arteri saat $t = 0$. Pada Tugas Akhir ini, p_{ext} diasumsikan 0 dan A_0 diasumsikan konstan. Selanjutnya, β merupakan parameter yang berkaitan dengan sifat elastis dinding arteri yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\beta(z) = \frac{4\sqrt{\pi}hE(z)}{3A_0} \quad (2.4)$$

Dimana $E(z)$ merupakan modulus Young dan h merupakan ketebalan dinding arteri.

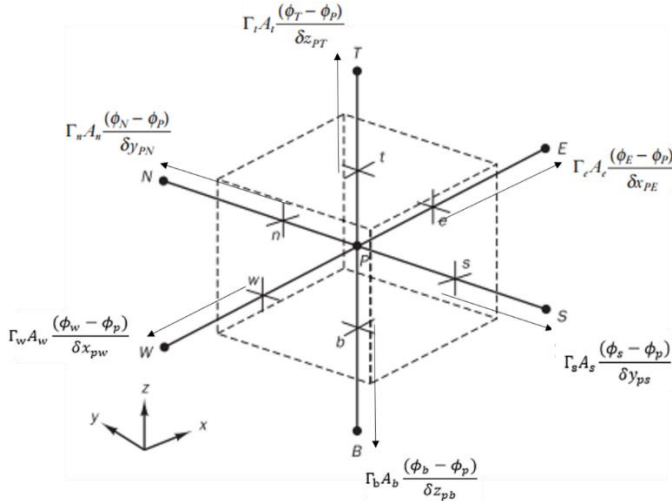
2.4 Metode Volume Hingga

Metode volume hingga mula-mula dikembangkan dari formulasi *special finite difference*. Metode volume hingga menggunakan bentuk integral dari persamaan umum untuk dilakukan diskretisasi persamaan. Solusi dibagi ke dalam sejumlah *control volume* yang berhingga, dan persamaan umum yang telah didiskretisasi diaplikasikan pada tiap *control volume*. Titik pusat tiap *control volume* merupakan nodal komputasi pada variable yang dihitung [10].

Untuk kasus tiga dimensi sebuah *cell* dan nodal yang bersebelahan digambarkan pada Gambar 2.2. Sebuah *cell* berisi titik nodal P yang akan diidentifikasi dan memiliki 6 nodal yang bersebelahan yang diidentifikasi sebagai *west*, *east*, *south*, *north*, *bottom* dan *top* (W , E , S , N , B , T). Notasi w , e , s , n , b , dan t digunakan untuk mengacu pada permukaan *control volume* sebelah barat, timur, selatan, utara, bawah dan atas. [11].

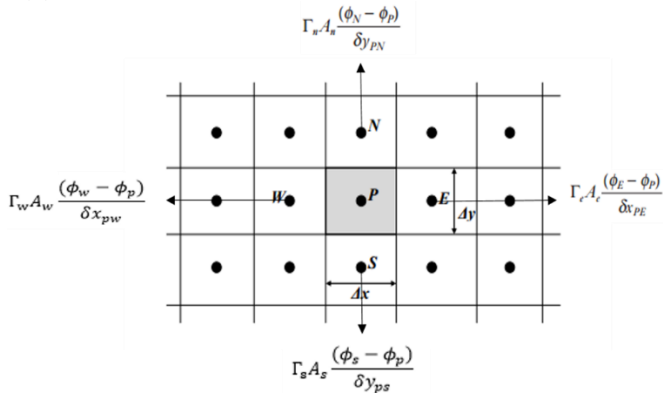
Pada Gambar 2.2 [11] digambarkan gaya fluks beserta arahnya. Γ merupakan koefisien difusi, A merupakan luas penampang *control volume*, ϕ merupakan gaya fluks dari nodal,

dan δ merupakan jarak antara nodal P dengan nodal yang bersebelahan.



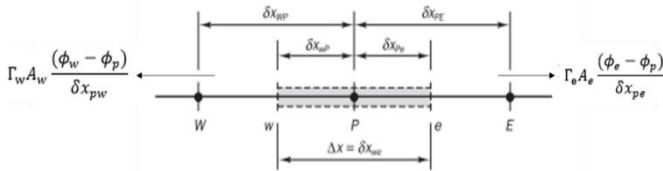
Gambar 2.2 Grid 3 Dimensi

Untuk kasus dua dimensi, *control volume* yang digunakan untuk pembagian grid seperti ditunjukkan pada Gambar 2.3 [10]. Dalam nodal yang bersebelahan dengan titik nodal P diidentifikasi sebagai timur (E), barat (W), utara (N) dan selatan (S) [11].



Gambar 2.3 Grid 2 Dimensi

Untuk kasus satu dimensi dapat digambarkan seperti Gambar 2.4 [11] merepresentasikan titik nodal P didekatnya di sebelah barat dan timur diidentifikasi dengan barat (W) dan timur (E). Titik permukaan control volume di sisi barat ditunjuk dengan w dan di sisi timur dengan e . Jarak antara nodal W dan P , dan antara P dan E diidentifikasi dengan δx_{WP} dan δx_{PE} . Sedangkan jarak antara titik permukaan *control volume* w dengan titik nodal P , dan antara titik nodal P dengan titik permukaan *control volume* e dinotasikan dengan δx_{wP} dan δx_{Pe} . Panjang *control volume* adalah δx_{we} [11].



Gambar 2.4 Grid 1 Dimensi

2.5 Metode Lax-Friedrichs

Metode Lax Friedrich merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan mengemplementasikan metode beda hingga yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang hiperbolik [4]. Metode Lax Friedrich sangat sederhana berlandaskan dengan cara mengganti semua bentuk suku yang berbentuk u_j^n yang diakibatkan oleh turunan pada waktu dengan rerata ruangnya terhadap persamaan solusi terahir yang terapresiasi dalam bentuk u_j^{n+1} [3]. Kuantitas u_j^{n+1} dapat diketahui setelah diperoleh informasi nilai di titik $j - 1$ dan $j + 1$ pada saat n . Bentuk persamaan dari dalam rata-rata ruangnya pada saat satu langkah yaitu sebagai berikut:

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \quad (2.5)$$

Sedangkan persamaan konservatif non linier Lax-Friedrichs yaitu sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)] = 0 \quad (2.6)$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (2.7)$$

Dengan Δx dan Δt merupakan diskritisasi ruang dan waktu. Dan F_{j+1}^n merupakan fluks yang dapat didefinisikan dalam berbagai cara, untuk definisi fluks Lax-Friedrichs sebagai berikut [3]:

$$F_{j+1}^n = \frac{1}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (2.8)$$

2.6 Kestabilan

Suatu permasalahan persamaan differensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam metode volume hingga. Ketidakstabilan metode volume hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak [19].

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan adalah stabilitas *von Neumann*. Dengan menerapkan analisis kestabilan *von Neumann* terhadap metode volume hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = p^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan. Dimana $i = \sqrt{-1}$, n merupakan waktu, j merupakan vektor, dan a adalah angka gelombang. Syarat perlu dan cukup kestabilan *von Neumann* adalah modulus dari faktor amplifikasi harus kurang dari atau sama dengan 1, atau dapat ditulis :

$$|\rho| \leq 1$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dilakukan pembahasan tentang metode penelitian yang digunakan dalam Tugas Akhir agar proses pengerjaan dapat terstruktur dengan baik.

3.1 Studi Literatur

Pada bagian ini dilakukan studi literatur terhadap hal-hal yang berkaitan dalam penelitian, diantaranya mengenai model aliran darah, metode volume hingga, fluks Lax-Friedrichs, dan lain sebagainya. Pembelajaran lebih mendalam mengenai hal-hal tersebut dapat diperoleh baik melalui buku-buku literatur, jurnal, maupun artikel dari internet.

3.2 Penurunan Model Aliran Darah

Setelah mempelajari dan memahami referensi yang ada, pada tahap ini akan dilakukan penurunan model aliran darah menggunakan persamaan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum.

3.3 Mendapatkan Solusi Numerik Model Aliran Darah

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik menggunakan metode volume hingga dengan definisi fluks Lax-Friedrichs. Metode ini digunakan untuk penyelesaian numerik dari model aliran darah yang sudah ditentukan

3.4 Perhitungan Numerik Model Aliran Darah dengan Perangkat Lunak

Pada tahap ini akan dilakukan implementasi dari solusi numerik model aliran darah menggunakan metode volume hingga dengan program MATLAB yang selanjutnya di input dengan menggunakan data yang diambil.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Penulisan Tugas Akhir

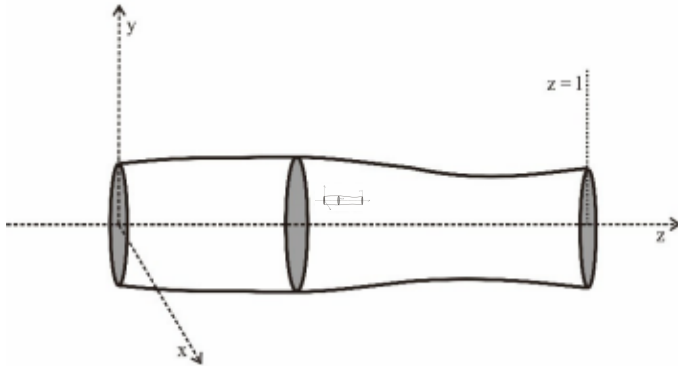
Pada tahap yang terakhir, akan dilakukan penarikan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan sebelumnya, selanjutnya akan dilakukan penulisan Tugas Akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai penurunan model aliran darah, metode volume hingga, kondisi batas, dan simulasi.

4.1 Penurunan Model Aliran Darah

Pada Tugas Akhir ini mengilustrasikan bentuk arteri manusia pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Ilustrasi Arteri pada Manusia

Selanjutnya diasumsikan bentuk arteri manusia adalah silindris dengan bentuk setiap penampang melintangnya adalah lingkaran dan koordinat z sejajar dengan silinder. $S(z, t)$ merupakan penampang melintang arteri untuk sebarang z (ruang) dan t (waktu), pada setiap S didefinisikan:

$$A(z, t) = \int_s d\sigma$$

$$u(z, t) = \frac{1}{A} \int_s \hat{u} d\sigma$$

$$p(z, t) = \frac{1}{A} \int_s \hat{p} d\sigma$$

Dengan A adalah luas penampang arteri S , u adalah kecepatan aliran darah rata-rata pada S , p adalah tekanan darah rata-rata pada S , \hat{u} adalah kecepatan aliran darah di titik z , \hat{p} adalah tekanan darah di titik z . Kemudian didefinisikan fluks volume $Q(z, t) = A(z, t)u(z, t)$. Asumsikan bahwa darah merupakan fluida yg tidak termampatkan sehingga kekentalan dan massa jenis darah konstan. Sifat struktural arteri seperti panjang arteri, tebal dinding arteri, dan lain-lain dianggap konstan.

1. Hukum Kekekalan Massa

Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa massa tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan [12], sehingga laju perubahan massa dalam volume kontrol ditambah netto fluks massa yang keluar dari kontrol sama dengan nol. Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\rho \frac{dV}{dt} + \rho Q(l, t) - \rho Q(0, t) = 0 \tag{4.1}$$

Dengan definisi volume sebagai berikut:

$$V(t) = \int_0^l A(z, t) dz \tag{4.2}$$

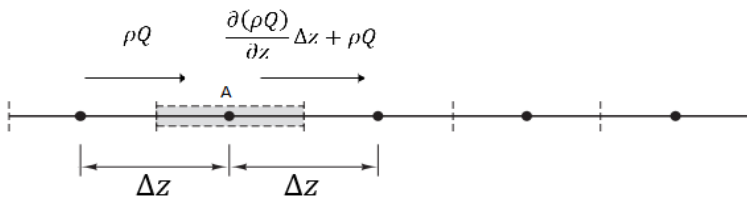
Diketahui bahwa:

$$Q(l, t) - Q(0, t) = \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial z} dz \tag{4.3}$$

Lalu substitusi Persamaan (4.2) dan (4.3) ke Persamaan (4.1), maka didapat:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_0^l A(z, t) dz + \rho \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0 \tag{4.4}$$

Selanjutnya untuk *control volume* yang digunakan untuk pembagian grid pada kekekalan massa dapat diperhatikan Gambar 4.2 sebagai berikut



Gambar 4.2 *Control Volume* yang digunakan untuk Pembagian Grid pada Kekekalan Massa

Karena l konstan, maka Persamaan (4.4) dapat ditulis menjadi:

$$\rho \int_0^l \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (4.5)$$

Karena persamaan tersebut dipenuhi untuk sebarang l , maka Persamaan (4.5) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

2. Hukum Kekekalan Momentum

Hukum Newton yang kedua menyatakan bahwa perubahan momentum dari suatu sistem sama dengan total gaya yang bekerja [12]. Diasumsikan tidak ada fluks yang melalui dinding arteri, sehingga laju perubahan momentum dalam volume kontrol ditambah netto fluks momentum yang keluar dari volume kontrol sama dengan total gaya yang bekerja dalam volume kontrol. Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q(z, t) dz + \alpha \rho Q(l, t) u(l, t) - \alpha \rho Q(0, t) u(0, t) = F \quad (4.7)$$

Dengan $\rho Q(z, t)$ adalah momentum, dan α adalah faktor koreksi fluks momentum. Kemudian total gaya F didefinisikan sebagai berikut [13]

$$F = p(0, t)A(0, t) - p(l, t)A(l, t) + \int_0^l p \frac{\partial A}{\partial z} dz + \int_0^l f dz \quad (4.8)$$

Dengan f adalah gaya gesek darah dengan permukaan dalam dinding arteri per satuan panjang. Kemudian substitusi Persamaan (4.7) dan (4.8), maka didapat:

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q(z, t) dz + \alpha \rho Q(l, t) u(l, t) - \alpha \rho Q(0, t) u(0, t) = p(0, t)A(0, t) - p(l, t)A(l, t) + \int_0^l p \frac{\partial A}{\partial z} dz + \int_0^l f dz \quad (4.9)$$

Diketahui bahwa:

$$\alpha \rho Q(l, t) u(l, t) - \alpha \rho Q(0, t) u(0, t) = \int_0^l \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} dz \quad (4.10)$$

dan

$$p(0, t)A(0, t) - p(l, t)A(l, t) = - \int_0^l \frac{\partial(pA)}{\partial z} dz \quad (4.11)$$

Substitusi Persamaan (4.10) dan (4.11) ke Persamaan (4.9), maka akan didapat:

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \rho Q(z, t) dz + \int_0^l \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} dz = - \int_0^l \frac{\partial(pA)}{\partial z} dz + \int_0^l p \frac{\partial A}{\partial z} dz + \int_0^l f dz \quad (4.12)$$

Karena ρ dan l bernilai konstan tak nol, maka Persamaan (4.12) dapat ditulis menjadi:

$$\int_0^l \left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} \right) dz = \int_0^l \left(- \frac{\partial(pA)}{\partial z} + p \frac{\partial A}{\partial z} + f \right) dz \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) dipenuhi untuk sebarang konstan l , sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} = - \frac{\partial(pA)}{\partial z} + p \frac{\partial A}{\partial z} + f \quad (4.14)$$

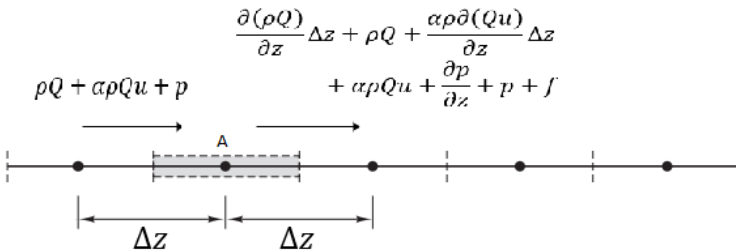
Kita tahu bahwa:

$$- \frac{\partial(pA)}{\partial z} = -p \frac{\partial A}{\partial z} - A \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.15)$$

Substitusi Persamaan (4.15) ke Persamaan (4.14), maka akan didapat:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} \right) &= -p \frac{\partial A}{\partial z} - A \frac{\partial p}{\partial z} + p \frac{\partial A}{\partial z} + f \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} &= - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{f}{\rho} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Selanjutnya untuk *control volume* yang digunakan untuk pembagian grid pada kekekalan momentum dapat diperhatikan Gambar 4.3 sebagai berikut



Gambar 4.3 *Control Volume* yang digunakan untuk Pembagian Grid pada Kekekalan Momentum

Selanjutnya didefinisikan gaya gesek darah dengan permukaan dalam dinding arteri [16], $f = \frac{K_R u A}{l}$, dengan K_R adalah viskositas

atau kekentalan darah. Sehingga Persamaan (4.16) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho Q u)}{\partial z} = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{K_R u A}{\rho} \quad (4.17)$$

Karena $Q(z, t) = A(z, t)u(z, t)$, maka Persamaan (4.17) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0 \quad (4.18)$$

Berdasarkan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum di atas, didapatkan model aliran darah satu dimensi pada arteri manusia sebagai berikut:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0 \quad (4.20)$$

4.2 Metode Volume Hingga

Mencari solusi secara analitis dari suatu model tidak selalu mudah, maka dari itu dapat dilakukan secara pendekatan atau biasa disebut solusi numeris. Dalam Tugas Akhir ini, metode yang digunakan adalah metode volume hingga. Metode ini cocok digunakan untuk mencari solusi numeris dari model dalam bentuk persamaan diferensial parsial dikarenakan model ini dapat menghasilkan solusi diskontinu meskipun nilai awalnya kontinu. Pada sub bab ini akan dicari solusi dari model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2) menggunakan metode volume hingga dengan definisi fluks Lax-Friedrichs.

Berikut model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} &= 0 \end{aligned}$$

Disini A , Q , dan p merupakan luas penampang arteri S , fluks volume, dan tekanan darah. Selain itu α adalah fungsi kecepatan di setiap penampang arteri yang nilainya dianggap konstan, ρ adalah massa jenis darah, z adalah variable ruang, dan t adalah variable waktu. Model tersebut terdiri dari dua persamaan

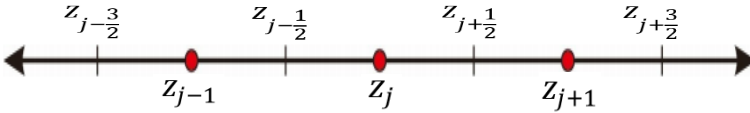
dengan tiga variable bergantung yaitu A , Q , dan p . Untuk mendapatkan dua persamaan dengan dua variable bergantung, maka didefinisikan suatu relasi yang menghubungkan tekanan darah dengan luas penampang arteri [6].

$$p = p_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (4.21)$$

Dengan p_{ext} adalah tekanan eksternal dan A_0 adalah luas penampang arteri saat $t = 0$. Pada Tugas Akhir ini diasumsikan p_{ext} bernilai nol dan A_0 konstan. Kemudian β adalah parameter yang berhubungan dengan sifat elastisitas dinding arteri yang didefinisikan sebagai berikut

$$\beta(z) = \frac{4\sqrt{\pi}h_0E(z)}{3A_0} \quad (4.22)$$

Dimana $E(z)$ adalah modulus Young dan h_0 adalah tebal dinding arteri. Selanjutnya untuk mencari solusi numeris model aliran darah ini, dapat diperhatikan diskritisasi domain ruang pada Gambar 4.2. Diskritisasi adalah proses yang digunakan untuk mendapatkan suatu penyelesaian pendekatan dari persamaan differensial dengan cara membagi keseluruhan objek menjadi bagian-bagian kecil [15].



Gambar 4.4 Diskritisasi Domain Ruang

Diskritisasi domain waktu $t^n = n\Delta t$ untuk sebarang bilangan bulat tak negative j dan n , dengan

$$z_j = j\Delta z,$$

$$\Delta z = z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}} = z_j - z_{j-1}$$

Lalu dari dari Persamaan (4.21) didiferensial didapat:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\beta\sqrt{A} - \beta\sqrt{A_0})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d\beta}{dz} A^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

Lalu kedua ruas dikali dengan $\frac{A}{\rho}$ sehingga didapat:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{\rho} \frac{\beta}{2} A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{\rho} + \frac{A^{\frac{1}{2}} \beta}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Karena β merupakan fungsi terhadap z dan A merupakan variabel yang bergantung pada z dan t , maka Persamaan (4.24) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} A^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \left(\frac{1}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{\beta}{2} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \frac{1}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \frac{1}{3} A^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \frac{A^{\frac{1}{2}}}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{3\rho} \left(\frac{d\beta}{dz} A^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \beta A^{\frac{1}{2}} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \left(\frac{d\beta}{dz} \frac{A}{\rho} \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{3\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} \beta A^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned}\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dz} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{\rho} + \frac{A^{\frac{1}{2}} \beta}{\rho} \frac{\partial A}{2 \partial z} - \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} A_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\quad (4.26)$$

Substitusi Persamaan (4.26) ke model aliran darah pada Persamaan (2.2), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} \right) + K_R \frac{Q}{A} = 0$$

Nilai α dianggap konstan sehingga dapat ditulis:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) = -K_R \frac{Q}{A} + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(A_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.27)$$

Sehingga model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2) dapat ditulis ulang menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right) &= -K_R \frac{Q}{A} + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(A_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\quad (4.28)$$

Model aliran darah tersebut dapat ditulis dalam hukum kesetimbangan sebagai berikut

$$\bar{v}_t + \bar{f}(\bar{v})_z = \bar{s}(\bar{v}) \quad (4.29)$$

Dimana kuantitas, fungsi fluks, dan suku sumbernya berturut-turut adalah

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \bar{f}(\bar{v}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + \frac{\beta A^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \end{bmatrix}, \bar{s}(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_R \frac{Q}{A} + \frac{A d\beta}{\rho dz} \left(A_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} A^{\frac{1}{2}} \right) \end{bmatrix}$$

Asumsikan $\bar{V}_j^n \approx \bar{v}(z_j, t^n)$, $\bar{f}(\bar{V}_j^n) \approx \bar{f}(\bar{v}(z_j, t^n))$ dan $\bar{S}_j^n \approx \bar{s}(\bar{v}(z_j, t^n))$. Sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\bar{V}_j^n &= \begin{bmatrix} A_j^n \\ Q_j^n \end{bmatrix} \\ \bar{f}(\bar{V}_j^n) &= \begin{bmatrix} Q_j^n \\ \frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n} + \frac{\beta (A_j^n)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\bar{S}_j^n = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -K_R \frac{Q_j^n}{A_j^n} + \frac{A_j^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(A_0^2 - \frac{2}{3} (A_j^n)^{\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right]$$

Hukum kesetimbangan (4.29) merupakan bentuk umum dari hukum kekekalan dengan suku sumber tak nol, sehingga solusi numerisnya sebagai berikut:

Dari Persamaan (4.29) didapat:

$$\bar{V}_j^n + \bar{F}_j^n = \bar{S}_j^n$$

$$\Delta t \bar{V}_j^n + \Delta t \bar{F}_j^n = \Delta t \bar{S}_j^n$$

$$\bar{V}_j^{n+1} - \bar{V}_j^n = -\Delta t \bar{F}_j^n + \Delta t \bar{S}_j^n$$

$$\bar{V}_j^{n+1} = \bar{V}_j^n - \Delta t \frac{\Delta z}{\Delta z} \bar{F}_j^n + \Delta t \bar{S}_j^n$$

$$\bar{V}_j^{n+1} = \bar{V}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t \bar{S}_j^n \quad (4.30)$$

Persamaan (4.30) merupakan solusi numeris metode volume hingga. Dengan menggunakan definisi fluks Lax-Friedrichs didapat:

$$\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(\bar{v}_{j+1}^n) + f(\bar{v}_j^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n) \quad (4.31)$$

Dan

$$\bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{f(\bar{v}_i^n) + f(\bar{v}_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (\bar{v}_j^n - \bar{v}_{j-1}^n) \quad (4.32)$$

Lalu skema numeris model aliran darah pada Persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$A_j^{n+1} = A_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.33)$$

Dengan menggunakan definisi fluks Lax-Friedrichs:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(A_{j+1}^n) + f(A_j^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (A_{j+1}^n - A_j^n)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{Q_{j+1}^n + Q_j^n}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (A_{j+1}^n - A_j^n) \quad (4.34)$$

dan

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{f(A_j^n) + f(A_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (A_j^n - A_{j-1}^n)$$

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{Q_j^n + Q_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (A_j^n - A_{j-1}^n) \quad (4.35)$$

Lalu skema numeris model aliran darah pada Persamaan (4.28) sebagai berikut:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t \left(-K_R \frac{Q_j^n}{A_j^n} + \frac{A_j^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(A_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} (A_j^n)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (4.36)$$

Dengan menggunakan definisi fluks Lax-Friedrichs:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(Q_{j+1}^n) + f(Q_j^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[\frac{(Q_{j+1}^n)^2}{A_{j+1}^n} + \frac{\beta (A_{j+1}^n)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} + \frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n} + \frac{\beta (A_j^n)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right] - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (4.37)$$

dan

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{f(Q_j^n) + f(Q_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (Q_j^n - Q_{j-1}^n)$$

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left[\frac{(Q_j^n)^2}{A_j^n} + \frac{\beta (A_j^n)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} + \frac{(Q_{j-1}^n)^2}{A_{j-1}^n} + \frac{\beta (A_{j-1}^n)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right] - \frac{\Delta z}{2\Delta t} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (4.38)$$

Selanjutnya, perhatikan fungsi fluks model aliran darah pada Persamaan (4.29). Matriks jacobian fungsi fluks tersebut adalah

$$H = \frac{\partial \bar{f}(\bar{v})}{\partial(\bar{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial A} & \frac{\partial Q}{\partial Q} \\ \frac{\partial \left(\frac{Q^2 + \beta A^{\frac{3}{2}}}{A + \frac{\beta A^2}{3\rho}} \right)}{\partial A} & \frac{\partial \left(\frac{Q^2 + \beta A^{\frac{3}{2}}}{A + \frac{\beta A^2}{3\rho}} \right)}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{\partial \bar{f}(\bar{v})}{\partial(\bar{v})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta A^{\frac{1}{2}}}{2\rho} & \frac{2Q}{A} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Nilai eigen dari matriks H dapat dicari melalui persamaan karateristik $\det(H - \lambda I) = 0$

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta A^{\frac{1}{2}}}{2\rho} & \frac{2Q}{A} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = \left(\frac{2Q}{A} - \lambda \right) (-\lambda) - \left(\frac{\beta A^{\frac{1}{2}}}{2\rho} - \frac{Q^2}{A^2} \right)$$

$$\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{2Q}{A} \lambda - \left(\frac{\beta A^{\frac{1}{2}}}{2\rho} - \frac{Q^2}{A^2} \right) = 0$$

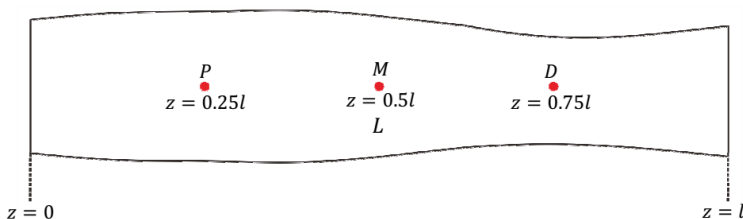
Sehingga didapat $\lambda_{1,2} = \frac{Q}{A} \pm \sqrt{\frac{\beta A^{\frac{1}{2}}}{2\rho}}$

Karena Q, A, β , dan ρ bernilai positif, maka didapatkan dua nilai eigen real yang berbeda. Karena $B^2 - AC$ dari persamaan karateristik $\det(H - \lambda I) = 0$ memiliki nilai > 0 , maka model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik [14][17][18].

4.3 Kondisi Batas

Skema numeris yang didapat dari metode volume hingga akan disimulasikan dengan software *MATLAB*. Dalam simulasi

ini, nilai $l = 15$ dan $t \in [0, 0.035]$. Modulus Young E diasumsikan konstan, sehingga mengakibatkan parameter β bernilai konstan. Maka nilai dari $\frac{d\beta}{dz}$ adalah nol. Selanjutnya diambil nilai $\Delta z = 0.005$ dan $\Delta t = 0.002\Delta z$. Berikut adalah ilustrasi simulasi numeris pada arteri manusia.



Gambar 4.5 Ilustrasi Simulasi Numeris pada Arteri Manusia

Simulasi ini menggunakan tiga titik pengamatan yaitu titik P , M , dan D untuk mengamati variasi tekanan, dimana titik P , M , dan D merupakan titik proksimal, medium, dan distal. Lokasi titik-titik ini ditunjukkan seperti Gambar 4.5. Titik P merupakan titik terdekat dari jantung, sedangkan titik D merupakan titik terjauh dari jantung. Tabel 4.1 menunjukkan nilai dari koefisien-koefisien yang digunakan dalam simulasi ini [6]

Tabel 4.1 Nilai Koefisien dari Simulasi Numerik

Koefisien	Nilai
Massa jenis darah, ρ	$1g/cm^3$
Modulus Young, E	$3 \times 10^6 \text{ dyne}/cm^2$
Ketebalan dinding arteri, h	0.05 cm
Luas penampang awal, A_0	$\pi 0.5^2 \text{ cm}^2$
Kekentalan darah, K_R	$10^{-8} \text{ dyne s}/cm^2$

Kemudian diberikan nilai awal dan nilai batas untuk masing-masing variable A , Q , dan p . Nilai awalnya adalah $A(z, 0) = A_0$, $Q(z, 0) = 0$, dan $p(z, 0) = 0$ untuk setiap $z \in (0, 15)$. Sedangkan untuk batas kiri model aliran darah, diberikan denyut masukan dalam bentuk gelombang sinus tunggal dengan periode yang kecil sebagai berikut

$$p(0, t) = 10^3 \sin\left(\frac{\pi t}{0.0025}\right) \quad (4.40)$$

Untuk batas kiri A dan Q model aliran darah, perhatikan variabel karakteristik W_1 dan W_2 berikut

$$W_2 = \frac{Q}{A} - 2\sqrt{\frac{2\beta}{\rho}} A^{\frac{1}{4}} \quad (4.41)$$

$$W_1 = W_2 + 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left(\sqrt{p + \beta\sqrt{A_0}} \right) \quad (4.42)$$

Sehingga didapat:

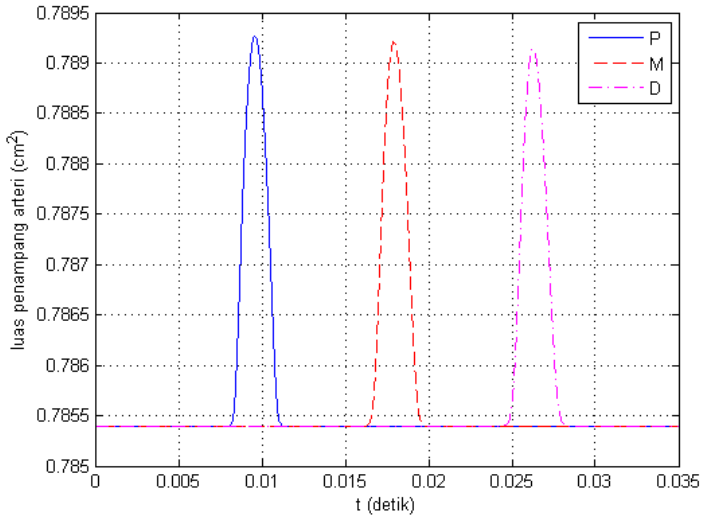
$$A = \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2 \frac{(W_1 - W_2)^4}{4^5} \quad (4.43)$$

$$Q = A \frac{W_1 + W_2}{2} \quad (4.44)$$

Pada batas kanan, setiap nilai A , Q , dan p sama dengan nilai dari persekitaran terdekat dalam domain.

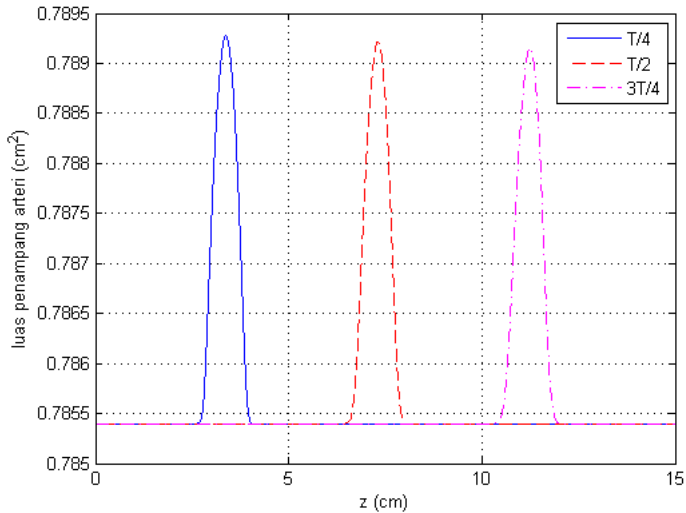
4.4 Simulasi Program

Berikut adalah hasil simulasi solusi numerik model aliran darah



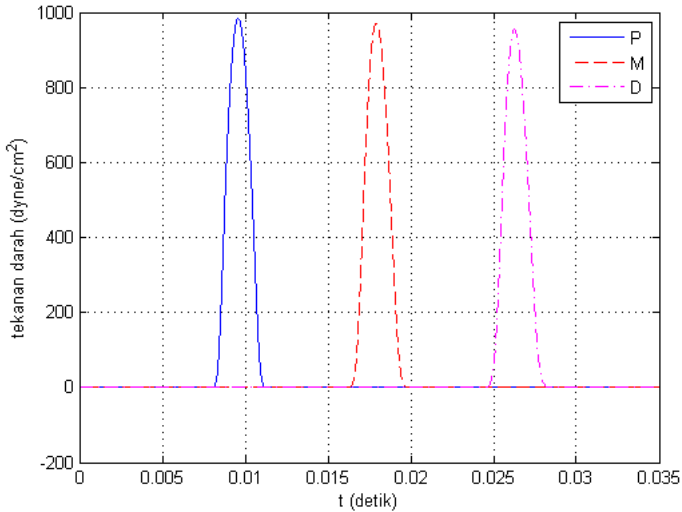
Gambar 4.6 Grafik luas penampang pada arteri terhadap t (waktu)

Pada Gambar 4.6 terlihat bahwa luas penampang arteri pada titik P (proksimal) atau pada waktu ke $T/4$ merupakan yang paling besar diantara titik M (medium) atau pada waktu ke $T/2$ dan D (distal) atau pada waktu ke $3/4T$. Hal ini disebabkan karena semakin besar t (waktu) atau semakin lama darah mengalir menjauhi jantung, maka akan semakin mengecil luas penampang arteri yang dilewati darah tersebut.



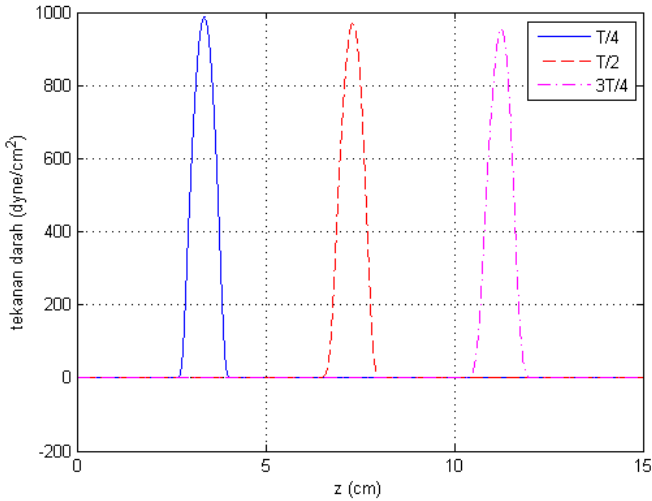
Gambar 4.7 Grafik luas penampang pada arteri terhadap z (ruang)

Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa luas penampang arteri pada waktu ke $T/4$ atau titik P (proksimal) merupakan yang paling besar diantara waktu ke $T/2$ atau M (medium) dan waktu ke $3/4T$ atau pada titik D (distal). Hal ini disebabkan karena semakin besar z (jarak) atau semakin jauh darah mengalir menjauhi jantung, maka akan semakin mengecil luas penampang arteri yang dilewati darah tersebut.



Gambar 4.8 Grafik tekanan darah pada arteri terhadap t (waktu)

Pada Gambar 4.8 terlihat bahwa tekanan darah pada titik P (proksimal) atau pada waktu ke $T/4$ merupakan yang paling besar diantara titik M (medium) atau pada waktu ke $T/2$ dan D (distal) atau pada waktu ke $3/4T$. Hal ini disebabkan karena semakin besar t (waktu) atau semakin lama darah mengalir menjauhi jantung, maka akan semakin mengecil tekanan darah tersebut.



Gambar 4.9 Grafik tekanan darah pada arteri terhadap z (ruang)

Pada Gambar 4.9 terlihat bahwa tekanan darah pada waktu ke $T/4$ atau titik P (proksimal) merupakan yang paling besar diantara waktu ke $T/2$ atau M (medium) dan waktu ke $3/4T$ atau pada titik D (distal). Hal ini disebabkan karena semakin besar z (jarak) atau semakin jauh darah mengalir menjauhi jantung, maka akan semakin mengecil tekanan darah tersebut.

4.5 Kestabilan dan Konvergensi Numerik

Analisis kestabilan perlu dilakukan untuk mengetahui penggunaan metode volume hingga dengan definisi Lax-Friedrichs stabil atau tidak. Maka akan dilakukan uji kestabilan menggunakan analisa stabilitas *von Neumann*, dengan cara mensubstitusi $A_j^n = p^n e^{iaj}$ dan $Q_i^n = q^n e^{iaj}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Sebelumnya substitusi Persamaan (4.34) dan Persamaan (4.35) ke Persamaan (4.33), sehingga didapat

$$A_j^{n+1} = A^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(Q_{1+\frac{1}{2}}^n - Q_{1-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.45)$$

dan substitusi Persamaan (4.37) dan Persamaan (4.38) ke Persamaan (4.36), sehingga didapat

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{\left(Q_{j+\frac{1}{2}}^n \right)^2}{A_{j+\frac{1}{2}}^n} - \frac{\left(Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2}{A_{j-\frac{1}{2}}^n} + \frac{\beta \left(A_{j+\frac{1}{2}}^n \right)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} - \frac{\beta \left(A_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right] + \Delta t \left[-K_R \frac{Q_j^n}{A_j^n} + \frac{A_j^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{A_j^n} \right) \right] \quad (4.46)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.45) dengan $A_j^n = p^n e^{iaj}$ dan $Q_j^n = q^n e^{iaj}$; $i = \sqrt{-1}$, sehingga didapat

$$p^{n+1} e^{iaj} = p^n e^{iaj} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(q^n e^{ia(j+\frac{1}{2})} - q^n e^{ia(j-\frac{1}{2})} \right) p^n$$

$$p^{n+1} e^{iaj} = p^n e^{iaj} - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(e^{ia(j+\frac{1}{2})} - e^{ia(j-\frac{1}{2})} \right) q^n \quad (4.47)$$

Lalu untuk menyederhanakan, Persamaan (4.47) dibagi dengan e^{iaj} , sehingga didapat

$$p^{n+1} = p^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}} \right) q^n \quad (4.48)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, Persamaan (4.48) dapat ditulis sebagai berikut

$$p^{n+1} = p^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\cos \left(\frac{a}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} \right) - \cos \left(\frac{a}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n$$

$$p^{n+1} = p^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \quad (4.49)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (4.46) dengan $A_i^n = p^n e^{iaj}$ dan $Q_i^n = q^n e^{iaj}$ dengan $i = \sqrt{-1}$, sehingga didapat

$$\begin{aligned}
q^{n+1}e^{iaj} = q^n e^{iaj} - \frac{\Delta t}{\Delta z} & \left[\frac{\left(q^n e^{ia(j+\frac{1}{2})}\right)^2}{p^n e^{ia(j+\frac{1}{2})}} - \frac{\left(q^n e^{ia(j-\frac{1}{2})}\right)^2}{p^n e^{ia(j-\frac{1}{2})}} + \right. \\
& \left. \frac{\beta \left(p^n e^{ia(j+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} - \frac{\beta \left(p^n e^{ia(j-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\rho} \right] + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n e^{iaj}}{p^n e^{iaj}} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2}{3} \sqrt{p^n e^{iaj}} \right) \right] \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Lalu untuk menyederhanakan, Persamaan (4.50) dibagi dengan e^{iaj} , sehingga didapat

$$\begin{aligned}
q^{n+1} = q^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} & \left[\frac{q^{2n} e^{\frac{ia}{2}}}{p^n} - \frac{q^{2n} e^{-\frac{ia}{2}}}{p^n} + \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} e^{\frac{3ia}{4}}}{3\rho} - \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} e^{-\frac{3ia}{4}}}{3\rho} \right] \\
& + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n}{p^n} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{p^n} \right) \right] \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, sehingga Persamaan (4.51) menjadi

$$\begin{aligned}
q^{n+1} = q^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} & \left[\frac{q^{2n} \left(\cos \left(\frac{a}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{p^n} \right. \\
& - \frac{q^{2n} \left(\cos \left(\frac{a}{2} \right) - i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{p^n} \\
& + \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} \left(\cos \left(\frac{3a}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3a}{4} \right) \right)}{3\rho} \\
& \left. - \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} \left(\cos \left(\frac{3a}{4} \right) - i \sin \left(\frac{3a}{4} \right) \right)}{3\rho} \right] \\
& + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n}{p^n} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{p^n} \right) \right] \\
q^{n+1} = q^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} & \left[\frac{q^{2n} (2i \sin \left(\frac{a}{2} \right))}{p^n} + \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} (2i \sin \left(\frac{3a}{4} \right))}{3\rho} \right] \\
& + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n}{p^n} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{p^n} \right) \right] \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.49) dan Persamaan (4.52), maka diperoleh

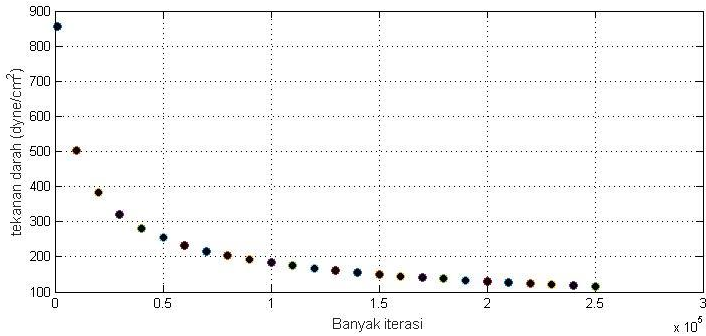
$$\begin{aligned}
p^{n+1} &= p^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \\
q^{n+1} &= q^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{q^{2n} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{p^n} + \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} \left(2i \sin \left(\frac{3a}{4} \right) \right)}{3\rho} \right] \\
& + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n}{p^n} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{p^n} \right) \right]
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \\ & \left[q^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\frac{q^{2n} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right)}{p^n} + \frac{\beta p^{\frac{3}{2}n} \left(2i \sin \left(\frac{3a}{4} \right) \right)}{3\rho} \right] + \Delta t \left[-K_R \frac{q^n}{p^n} + \frac{p^n}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3} \sqrt{p^n} \right) \right] \right] \\ & \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan C suatu matriks ukuran 2×2 . Berdasarkan kriteria kestabilan *von Neumann*, jika norm nilai eigen dari matriks amplifikasi C kurang dari atau sama dengan 1, maka model pada persamaan (4.33) dan persamaan (4.36) adalah stabil. Namun dalam Tugas Akhir ini matriks C belum ditentukan. Pangkat dari faktor amplifikasi p dan q yang tidak sama dan lebih dari satu sehingga dekomposisi menjadi matriks amplifikasi C tidak dimungkinkan. Pembahasan lebih lanjut mengenai kestabilan *von Neumann* pada model aliran darah untuk persamaan (4.33) dan persamaan (4.36) dapat dilakukan pada penelitian lanjutan.

Lalu selanjutnya akan dilakukan pengecekan kekonvergenan. Pada bagian ini akan dilakukan simulasi tekanan darah terhadap waktu dengan banyak iterasi yang berbeda, yaitu dari 3500 iterasi, sampai 250000 iterasi. Dengan cara merubah Δt pada setiap simulasinya. Δt simulasi pertama adalah $0.002\Delta z$ dan untuk simulasi selanjutnya, Δt yang dipakai $1/10\Delta t$ dari simulasi sebelumnya. Dilakukan sebanyak 26 simulasi dengan Δt yang berbeda, sehingga mengakibatkan banyak iterasi juga berbeda. Dicek di salah satu titik $t \in [0, 0.035]$, yaitu pada saat $t = 0.01$ dan nilai dari setiap tekanannya diplot, sehingga didapat Gambar 4.10 sebagai berikut



Gambar 4.10 Tekanan Darah saat $t = 0.01$ pada Simulasi dengan Banyak Iterasi Berbeda

Dari Gambar 4.10 terlihat bahwa hasil simulasi tekanan darah terhadap waktu dengan banyak iterasi yang berbeda adalah konvergen. Dan penulis melakukan simulasi sebanyak 26 simulasi dan sampai 250000 iterasi dikarenakan keterbatasan memori computer.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya, serta diberikan beberapa saran sehingga dapat digunakan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Dalam Tugas Akhir ini, telah dilakukan analisa terhadap model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2). Dari analisa yang dilakukan, diketahui model aliran darah tersebut berasal dari hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum.

Kemudian telah didapatkan solusi numeris dari model aliran darah pada Persamaan (2.1) dan (2.2) dengan menggunakan metode volume hingga dan definisi fluks Lax-Friedrichs. Skema numeris dari model aliran darah tersebut disimulasikan dan diamati. Sehingga dapat disimpulkan dari simulasi yang dilakukan yaitu luas penampang arteri dan tekanan darah berbanding terbalik dengan t (waktu) dan z (ruang). Semakin besar t (waktu) atau semakin lama darah mengalir keluar dari jantung dan semakin besar z (ruang) atau semakin jauh darah yang mengalir keluar dari jantung, maka tekanan darah yang mengalir akan semakin mengecil, sehingga mengakibatkan luas penampang arteri yang dilewati oleh aliran darah tersebut semakin mengecil pula. Hal itu juga mengakibatkan bahwa tekanan darah berbanding lurus terhadap luas penampang arteri. Semakin besar tekanan darah, maka akan menyebabkan dinding arteri yang elastis semakin melebar, sehingga luas penampang arteri juga semakin besar.

Selain itu, amplitudo tekanan darah mengecil seiring membesarnya nilai t dan z . Hal ini disebabkan oleh disipasi metode numeris. Semakin kecil nilai Δt dan Δz , maka pengecilan amplitudo akan semakin berkurang selama solusinya kontinyu.

5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini, model aliran darah terbatas pada satu dimensi, penulis berharap pada penelitian berikutnya, ruang dimensi yang digunakan pada model aliran darah lebih tinggi. Dan

juga untuk menentukan kestabilan *von Neumann*, penulis belum menentukan matriks amplifikasi C dikarenakan pangkat dari faktor amplifikasi p dan q tidak sama dan lebih dari satu. Diharapkan pada penelitian selanjutnya, matriks amplifikasi C dapat ditentukan. Selanjutnya dalam Tugas Akhir ini, penulis hanya menampilkan grafik pada simulasi model aliran darah pada arteri manusia, akan lebih baik apabila dapat menampilkan juga visualisasi dari model aliran darah pada arteri manusia.

.DAFTAR PUSTAKA

- [1] Safitri, Novi. (2018). Analisis Numerik Aliran Darah pada Katup Aorta Akibat Aortic Stenosis Menggunakan Metode Elemen Hingga untuk Mengasah Kemampuan TCK. Tugas Akhir Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Universitas Jember:Jember.
- [2] Giinting, B. M., & Riyanto, B. A. (2013). Penerapan dan Pengembangan Metod Volume Hingga untuk Pemodelan Propagasi Aliran Banjir Akibat Keruntuhan Bendungan Sebagai Salah Satu Upaya Dalam Mengatasi Bencana Studi Kasus Situ Gintung. *Research Report-Engineering Science*, 2.
- [3] LeVeque, R. J. (2002). Finite volume methods for hyperbolic problems. (Vol. 31). Cambridge university press.
- [4] Halik, M. (2014). Metode Lax Friedrich dalam menyelesaikan persamaan gelombang tali. Skripsi Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang.
- [5] Delestre, O., Lagre, P. Y. (2013). A wellbalancedfinite volume scheme for blood flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(2), 177-205.
- [6] Formaggia, L., Nobile, F., & Quarteroni, A. (2002). A one dimensional model for blood flow: application to vascular prosthesis. In *Mathematical modeling and numerical simulation in continuum mechanics* (pp. 137-153). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [7] Budiawan, I. W., Mungkasi, S. (2017). Finite volume numerical solution to a blood flow problem in human artery.

In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 795, No.1, p. 012042). IOP Publishing.

- [8] Syaifuddin. (2006). *Anatomi Fisiologi untuk Mahasiswa Keperawatan*. Jakarta: Buku Kedokteran EGC.
- [9] Guyton dan Hall. (1997). *Buku Ajar Fisiologi Kedokteran*. Jakarta: EGC.
- [10] Ferziger, J.H., dan Peric, M.,2002. *Computational Method for Fluid Dynamic*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [11] Versteeg, H.K., dan Malakasera, W.,1995. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: Finite Volume Method*. Longman Scientific and Technical, England.
- [12] Sari, I.P. (2016). *Penyelesaian Persamaan Gelombang Air Dangkal dengan Beberapa Metode Numeris*. Skripsi Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.
- [13] Sherwin, S.J., Franke, V., Peiro, J. & Parker, K. (2003). One-Dimensional Modelling of a Vascular Network in Space-Time Variables. *Journal of Engineering Mathematics*, 47: 217-250.
- [14] Rosdiani, Filsiana, N.A. (2016). *Simulasi Numerik dari Permasalahan Aliran Darah pada Pembuluh Darah Arteri Stenosis*. Tugas Akhir Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institut Teknologi Sepuluh Nipember. Surabaya.
- [15] Hakam, Amirul. (2015). *Simulasi Numerik Aliran Fluida di Sekitar Dua Silinder Sirkuler Side by Side*. Tugas Akhir Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Institut Teknologi Sepuluh Nipember. Surabaya.

- [16] Irawati, Lili. (2010). Viskositas Darah dan Aspek Medisnya. Padang. Majalah Kedokteran Andalas
- [17] Widodo, B. (2012). Pemodelan Matematika. *ITSpress, Surabaya*.
- [18] Anggriani, Indira. (2014). Studi Tentang Aliran Tak Tunak Fluida Sisko Arteri Stenosis. Fakultas Sains dan Matematika Universitas Kristen Satya Wacana. Salatiga.
- [19] Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

A. *Source Code Simulasi Program*

```
%% Diketahui:
tf=0.035; %nilai t akhir
L=15; %panjang arteri
dz=0.005; %lebar sel
dt=0.002*dz; %langkah waktu
z=0:dz:L; %diskritisasi ruang
t=0:dt:tf; %diskritisasi waktu
nz=length(z); %banyaknya elemen dalam ruang
diskrit
nt=length(t); %banyaknya elemen dalam waktu
diskrit
A=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan A
(luas penampang arteri)
p=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan p
(tekanan darah)
Q=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan Q
(kecepatan aliran darah)

%nilai koefisien
E0=3*10^6; %modulus Young
rho=1; %massa jenis darah (gr/cm^3)
A0=pi*0.5^2; %luas penampang arteri dgn R0 0.5
cm
h=0.05; %ketebalan dinding arteri
Kr=1/10^8; %kekentalan darah (dyne s/cm^2)
beta=(4*sqrt(pi)*h*E0)/(3*A0); %parameter yg
berhubungan dgn sifat elastisitas dinding arteri

%nilai awal
Q(1,:)=0;
A(1,:)=pi*0.5^2;
p(1,:)=beta*(sqrt(A(1,:))-sqrt(A0));

%nilai batas
for k=1:nt %nilai batas berupa gelombang sinus
tunggal dgn periode yg kecil
```

```

    if t(k) <= 0.0025
        p(k,1) = 10^3 * sin(pi * t(k) / 0.0025);
    else
        p(k,1) = 0;
    end
end

%% perhitungan nilai A dan Q
for n = 2:nt
    for i = 2:nz-1
        Fkaa = 0.5 * (Q(n-1, i+1) + Q(n-1, i)) -
            (dz / (2*dt)) * (A(n-1, i+1) - A(n-1, i));
        Fkia = 0.5 * (Q(n-1, i) + Q(n-1, i-1)) -
            (dz / (2*dt)) * (A(n-1, i) - A(n-1, i-1));
        A(n, i) = A(n-1, i) - (dt/dz) * (Fkaa - Fkia);
        Fkaq = 0.5 * (Q(n-1, i+1)^2 / A(n-1, i+1) + (beta / (3*rho)) * A(n-1, i+1)^1.5 + Q(n-1, i)^2 / A(n-1, i) + (beta / (3*rho)) * A(n-1, i)^1.5) -
            (dz / (2*dt)) * (Q(n-1, i+1) - Q(n-1, i));
        Fkiq = 0.5 * (Q(n-1, i)^2 / A(n-1, i) + (beta / (3*rho)) * A(n-1, i)^1.5 + Q(n-1, i-1)^2 / A(n-1, i-1) + (beta / (3*rho)) * A(n-1, i-1)^1.5) -
            (dz / (2*dt)) * (Q(n-1, i) - Q(n-1, i-1));
        Q(n, i) = Q(n-1, i) - (dt/dz) * (Fkaq - Fkiq) + (dt) * (-
            Kr * (Q(n-1, i) / A(n-1, i)));
        p(n, i) = beta * (sqrt(A(n, i)) - sqrt(A0));
    end
    %syarat batas
        W2 = (Q(1, nz) / A(1, nz)) -
            2 * sqrt(2 * beta / rho) * A(1, nz)^0.25;
    W1 = W2 + 4 * sqrt(2 / rho) * sqrt(p(n, 1) + beta * sqrt(A0));
    %batas kiri
        A(n, 1) = (rho / beta) ^ 2 * (W1 - W2) ^ 4 / (4 ^ 5);
        Q(n, 1) = 0.5 * A(n, 1) * (W1 + W2);
    %batas kanan
        A(n, nz) = A(n, nz-1);
        Q(n, nz) = Q(n, nz-1);
        p(n, nz) = p(n, nz-1);
end

```

```

%% plot A terhadap waktu
figure
for q=1:3
    indeks1=ceil(q*0.25*nz); %plot grafik A
    untuk z={0.251, 0.51, 0.751}
        if q==1
            plot(z,A(indeks1,:), 'b')
        elseif q==2
            plot(z,A(indeks1,:), 'r--')
        else
            plot(z,A(indeks1,:), 'm-.')
        end

        legend('P', 'M', 'D')
        xlabel('t (detik)')
        ylabel('luas penampang arteri (cm^2)')
        grid on
        hold on
        pause (1)
end

%% plot A terhadap ruang
figure
for r=1:3
    indeks2=ceil(r*0.25*nt); %plot grafik A
    untuk t={0.25tf, 0.5tf, 0.75tf}

        if r==1
            plot(z,A(indeks2,:), 'b')
        elseif r==2
            plot(z,A(indeks2,:), 'r--')
        else
            plot(z,A(indeks2,:), 'm-.')
        end

        legend('T/4', 'T/2', '3T/4')
        xlabel('z (cm)')
        ylabel('luas penampang arteri (cm^2)')
        grid on
        hold on
        pause(1)
end

%% plot grafik p terhadap waktu

```

```

figure
for j=1:3
    indeks3=ceil(j*0.25*nz); %plot grafik p
untuk z={0.25l, 0.5l, 0.75l}
    if j==1
        plot(t,p(:,indeks3),'b')
    elseif j==2
        plot(t,p(:,indeks3),'r--')
    else
        plot(t,p(:,indeks3),'m-.')
    end
    legend('P','M','D')
    xlabel('t (detik)')
    ylabel('tekanan darah (dyne/cm^2)')
    grid on
    hold on
    pause(1)
end
%% plot grafik p terhadap ruang
figure
for m=1:3
    indeks4=ceil(m*0.25*nt); %plot grafik p
untuk t={0.25tf, 0.5tf, 0.75tf}
    if m==1
        plot(z,p(indeks4:),'b')
    elseif m==2
        plot(z,p(indeks4:),'r--')
    else
        plot(z,p(indeks4:),'m-.')
    end
    legend('T/4','T/2','3T/4')
    xlabel('z (cm)')
    ylabel('tekanan darah (dyne/cm^2)')
    grid on
    hold on
    pause(1)
end

```

B. *Source Code Simulasi Konvergensi Numerik*

```
[M, N] = size([3500:1000:35000])
figure
for kasus = 0: 900
kasus
%% Diketahui:
tf=0.01; %nilai t akhir
L=15; %panjang arteri
dz=0.005; %lebar sel
if kasus == 0
    dt=(1.0000e-05);
else
    dt=(1.0000e-05)/(10*kasus);
end%langkah waktu
z=0:dz:L; %diskritisasi ruang
t=0:dt:tf; %diskritisasi waktu
% if(kasus == 0)
%     fokus = find(t==0.0080);
% end
nz=length(z); %banyaknya elemen dalam ruang
diskrit
nt=length(t); %banyaknya elemen dalam waktu
diskrit
A=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan A
(luas penampang arteri)
p=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan p
(tekanan darah)
Q=zeros(nt,nz); %penyimpanan hasil perhitungan Q
(kecepatan aliran darah)

%nilai koefisien
E0=3*10^6; %modulus Young
rho=1; %massa jenis darah (gr/cm^3)
A0=pi*0.5^2; %luas penampang arteri dgn R0 0.5
cm
h=0.05; %ketebalan dinding arteri
Kr=1/10^8; %kekentalan darah (dyne s/cm^2)
beta=(4*sqrt(pi)*h*E0)/(3*A0); %parameter yg
berhubungan dgn sifat elastisitas dinding arteri
```

```

%nilai awal
Q(1,:)=0;
A(1,:)=pi*0.5^2;
p(1,:)=beta*(sqrt(A(1,:))-sqrt(A0));

%nilai batas
for k=1:nt %nilai batas berupa gelombang sinus
tunggal dgn periode yg kecil
    if t(k)<=0.0025
        p(k,1)=10^3*sin(pi*t(k)/0.0025);
    else
        p(k,1)=0;
    end
end

%% perhitungan nilai A dan Q
for n=2:nt
    for i=2:nz-1
        Fkaa=0.5*(Q(n-1,i+1)+Q(n-1,i))-
(dz/(2*dt))*(A(n-1,i+1)-A(n-1,i));
        Fkia=0.5*(Q(n-1,i)+Q(n-1,i-1))-
(dz/(2*dt))*(A(n-1,i)-A(n-1,i-1));
        A(n,i)=A(n-1,i)-(dt/dz)*(Fkaa-Fkia);
        Fkaq=0.5*(Q(n-1,i+1)^2/A(n-
1,i+1)+(beta/(3*rho))*A(n-1,i+1)^1.5+Q(n-
1,i)^2/A(n-1,i)+(beta/(3*rho))*A(n-1,i)^1.5)-
(dz/(2*dt))*(Q(n-1,i+1)-Q(n-1,i));
        Fkiq=0.5*(Q(n-1,i)^2/A(n-
1,i)+(beta/(3*rho))*A(n-1,i)^1.5+Q(n-1,i-
1)^2/A(n-1,i-1)+(beta/(3*rho))*A(n-1,i-1)^1.5)-
(dz/(2*dt))*(Q(n-1,i)-Q(n-1,i-1));
        Q(n,i)=Q(n-1,i)-(dt/dz)*(Fkaq-Fkiq)+(dt)*(-
Kr*(Q(n-1,i)/A(n-1,i)));
        p(n,i)=beta*(sqrt(A(n,i))-sqrt(A0));
    end
%syarat batas
        W2=(Q(1,nz)/A(1,nz))-
2*sqrt(2*beta/rho)*A(1,nz)^0.25;

W1=W2+4*sqrt(2/rho)*sqrt(p(n,1)+beta*sqrt(A0));
%batas kiri

```



```

    A(n,1)=(rho/beta)^2*(W1-W2)^4/(4^5);
    Q(n,1)=0.5*A(n,1)*(W1+W2);
%batas kanan
    A(n,nz)=A(n,nz-1);
    Q(n,nz)=Q(n,nz-1);
    p(n,nz)=p(n,nz-1);

end

j=1;
indeks3=ceil(j*0.25*nz); %plot grafik p untuk
z={0.251, 0.51, 0.751}
a = p(:,indeks3);
[M,N] = size(p(:,indeks3));
plot(M,a(nt),'o','MarkerFaceColor','k')
    legend('P')
    xlabel('t (detik)')
    ylabel('tekanan darah (dyne/cm^2)')
    grid on
    hold on
    pause(1)

end

```


BIODATA PENULIS



Rachman Ghani Kurniansyah dilahirkan di Surabaya pada hari Jumat tanggal 30 Oktober 1998 dengan selamat. Anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Syaiful Ulum dan Soelistija Sri Pamilih. Penulis menempuh pendidikan mulai dari tahun 2004 – 2005 di SD Muhammadiyah 18, tahun 2005 – 2010 di SDIT Al –

Uswah, tahun 2010 – 2013 di SMPIT Al – Uswah, tahun 2013 – 2016 di SMAN 5 Surabaya. Dari tahun 2016 sampai saat ini, penulis sedang menempuh pendidikan S1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). Di Departemen Matematika ITS, penulis mengambil rumpun minat Matematika Terapan yang terdiri atas Pemodelan Matematika dan Riset Operasi dan Pengolahan Data. Apabila ingin memberikan kritik dan saran mengenai Tugas Akhir ini, dapat menghubungi melalui *e-mail* email.ghani5@gmail.com. Terimakasih dan semoga bermanfaat.