TESIS - KS185411

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL REGRESI LOGISTIK BIVARIAT ORDE DUA DENGAN ITERASI FISHER SCORING DAN BHHH (STUDI KASUS: PEMODELAN IPM DAN IPKM KABUPATEN/KOTA DI JAWA TIMUR)

IGAR CALVERIA AVIANTHOLIB
NRP 06211950015002

Dosen Pembimbing

Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Vita Ratnasari, M.Si

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2021

TESIS – KS185411

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL REGRESI LOGISTIK BIVARIAT ORDE DUA DENGAN ITERASI FISHER SCORING DAN BHHH (STUDI KASUS: PEMODELAN IPM DAN IPKM KABUPATEN/KOTA DI JAWA TIMUR)

IGAR CALVERIA AVIANTHOLIB
NRP. 06211950015002

Dosen Pembimbing

Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Vita Ratnasari, M.Si

Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data Institut
Teknologi Sepuluh Nopember
2021

(Halaman Ini Sengaja Dikosongkan)

THESIS – KS185411

PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESIS TESTING THE SECOND ORDER OF BIVARIATE LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH FISHER SCORING AND BHHH ITERATIONS (CASE STUDY: MODELING OF HUMAN DEVELOPMENT INDEX AND PUBLIC HEALTH DEVELOPMENT INDEX OF DISTRICS/CITIES IN EAST JAVA)

IGAR CALVERIA AVIANTHOLIB

SN. 06211950015002

Supervisors

Dr. Purhadi, M.Sc
Dr. Vita Ratnasari, M.Si

Department of Statistics
Faculty of Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2021

(Halaman Ini Sengaja Dikosongkan)

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Statistika (M.Stat)
Di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Oleh:
IGAR CALVERIA AVIANTHOLIB
NRP. 06211950015002

Tanggal Ujian: 20 Agustus 2021
Periode Wisuda: Oktober 2021

Disetujui Oleh:
Pembimbing:

1. Dr. Purhadi, M.Sc ……………………
   NIP. 19620204 198701 1 001

2. Dr. Vita Ratnasari, M.Si ……………………
   NIP. 19700910 199702 2 001

Penguji:

1. Dr. Bambang W. Otok, M.Si ……………………
   NIP. 19681124 199412 1 001

2. Santi Wulan Purnami, S.Si, M.Si, Ph.D ……………………
   NIP. 19720923 199803 2 001

Kepala Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si
NIP. 19691212 199303 2 002

(Halaman Ini Sengaja Dikosongkan)

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL REGRESI LOGISTIK BIVARIAT ORDE DUA DENGAN ITERASI FISHER SCORING DAN BHHH (STUDI KASUS: PEMODELAN IPM DAN IPKM KABUPATEN/KOTA DI JAWA TIMUR)

Nama	: Igar Calveria Aviantholib
NRP	: 06211950015002
Pembimbing	: Dr. Purhadi, M.Sc
Co-Pembimbing	: Dr. Vita Ratnasari, M.Si

ABSTRAK

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai model regresi logistik biner bivariat, dimana variabel dependen yang digunakan saling berkorelasi dan masing-masing variabel dependen memiliki dua kategorik. Penerapan dari metode regresi logistik biner bivariat akan diterapkan pada pemodelan Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) di Jawa Timur. IPM itu sendiri merupakan suatu indeks yang digunakan untuk mengukur keberhasilan pembangunan manusia di suatu wilayah, sedangkan IPKM merupakan indikator komposit yang menggambarkan kemajuan pembangunan kesehatan. Hasil dari penelitian ini yaitu untuk penaksiran parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Permasalahan yang muncul dalam penaksiran parameter dari model ini yakni MLE tidak dapat menemukan penyelesaian analitis secara implisit, sehingga perlu diterapkan metode iterasi berupa Fisher Scoring dan Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) dan diperoleh model $\hat{\eta}_3 = -347,2447 + 10,8319X_1 + 7,2744X_2 + 0,0018X_3 - 0,0481X_1^2 - 0,0361X_2^2 + 0,0018X_3^2 - 0,1276X_1X_2 + 0,0640X_1X_3 + 0,0424X_2X_3$, dimana η_3 merupakan *joint model* yang melibatkan variabel dependen bivariat. Pengujian hipotesis dalam model regresi logistik bivariat meliputi uji serentak dan parsial yang dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dan uji Wald dan diperoleh kesimpulan bahwa presentase penduduk miskin, Angka Partisipasi Murni (APM) SMP, dan jumlah puskesmas mempengaruhi IPM dan IPKM secara signifikan. Hasil kajian terapan menunjukkan bahwa metode iterasi BHHH lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi Fisher Scoring dengan ketepatan klasifikasi sebesar 86%. Hal ini menunjukkan bahwa ketepatan metode BHHH pada klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2018 lebih tinggi dibandingkan Fisher Scoring.

Kata Kunci : IPM, IPKM Regresi Logistik Bivariat, *Maximum Likelihood*, *Maximum Likelihood Ratio Test*, *Fisher Scoring*, BHHH.

(Halaman Ini Sengaja Dikosongkan)

PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESIS TESTING THE SECOND ORDER OF BIVARIATE LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH FISHER SCORING AND BHHH ITERATION (CASE STUDY: MODELING OF HDI AND PHDI OF DISTRICS/CITIES IN EAST JAVA)

Name	: Igar Calveria Aviantholib
Student Identity Number	: 06211950015002
Supervisor	: Dr. Purhadi, M.Sc
Co-Supervisor	: Dr. Vita Ratnasari, M.Si

ABSTRACT

In this study, a bivariate binary regression model will be discussed, with corellated categorical dependent variables, where each dependent variables has two categories. The application of the bivariate binary logistic regression method will be applied to the modeling of the Human Development Index (HDI) and Public Health Development Index (PHDI) in East Java. The definition of HDI itself is an index used to measure the success of human development in an area, while the PHDI is a composite indicator that describes the progress of health development. The result of this research is for parameter estiomation using *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) method. The problem that arises in the parameter estimation of his model is MLE cannot find an implicit analytical solution, so it is necessary to apply iteration methods in the form of Fisher Scoring and Berndt Hall-Hall-Hausmann (BHHH) and get the model $\hat{\eta}_3 = -347,2447 + 10,8319X_1 + 7,2744X_2 + 0,0018X_3 - 0,0481X_1^2 - 0,0361X_2^2 + 0,0018X_3^2 - 0,1276X_1X_2 + 0,0640X_1X_3 + 0,0424X_2X_3$, where η_3 is a joint model involving a bivariate dependent variable. The hypothesis testing in the bivariate logistic regression model includes simultaneous and partial tests carried out using the *Maximum Likelihood Ratio* (MLRT) and Wald method and concluded head count index, APM, and number health centers are significant effect to HDI and PHDI. The result show that the BHHH iteration is better than the Fisher Scoring iteration method with a classification accuracy 86%. This is shows that the accuracy of the BHHH method in the classification of HDI and PHDI districs/cities in East Java in 2018 is higher than the Fisher Scoring.

Keywords: HDI, PHDI, Bivariate Logistic Regression, *Maximum Likelihood*, *Maximum Likelihood Ratio Test*, *Fisher Scoring*, BHHH.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamiin. Segala puji kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, tauhid serta hidayah-Nya. Shalawat serta Salam juga tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan tesis yang berjudul "Estimasi Parameter dan Pengujian Hipotesis Regresi Logistik Biner Bivariat Orde Dua Dengan Iterasi Fisher Scoring dan BHHH" dengan studi tentang pemodelan Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2019 dengan baik sesuai batas waktu yang telah ditentukan. Tesis ini dapat terselesaikan berkat dukungan, doa, serta semangat yang diberikan oleh berbagai pihak pada penulis. Pada kesempatan kali ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M. Si selaku Kepala Departemen Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data ITS yang senantiasa memberikan saran dan motivasi.
2. Ibu Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D selaku Sekretaris Departemen I (Bidang Akademik, Kemahasiswaan, Penelitian, dan Pengabdian Kepada Masyarakat) dan Ibu Dr. Vita Ratnasari, M.Si selaku Sekretaris Departemen Bidang II (Bidang Sumber Daya Keuangan, Sumber Daya Manusia, dan Sarana Prasarana) yang telah memfasilitasi sarana dan prasarana untuk kegiatan belajar dan mengajar selama studi di ITS.
3. Bapak Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si selaku Kepala Program Studi Pascasarjana Departemen Statistika Fakultas Sains dan Analitika Data ITS yang telah memberikan motivasi dan fasilitas demi kelancaran penyelesaian tesis ini.
4. Bapak Dr. Mashuri, M.T selaku dosen wali yang selalu memberikan saran dan motivasi.
5. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc dan Ibu Dr. Vita Ratnasari, M.Si selaku dosen pembimbing dan Co-pembimbing tesis saya yang dengan sabar dan selalu

memberikan banyak ide, masukan, bimbingan, serta motivasi demi kelancaran dan terselesaikannya masa studi.

6. Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si dan Ibu Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D selaku dosen penguji 1 dan dosen penguji 2 saya yang telah memberikan arahan, kritik, saran, serta masukan yang membangun demi kesempurnaan tesis ini.
7. Seluruh dosen pengajar serta para staff karyawan Departemen Statistika ITS yang telah memberikan ilmu dan pengalaman serta memfasilitasi penulis selama masa studi.
8. Kedua Orangtua tercinta, F.Subagyo dan Oktavianty Puspitasari serta keluarga besar yang telah memberikan banyak dukungan, motivasi, serta doa yang terus mengalir kepada penulis selama ini.
9. Adek tersayang, Kevin Fanky Aviansubagyo, Jevon Mradipta Aviansubayo, Prisha Najmina Putri Satria yang selalu memberikan motivasi dan dukungan serta yang selalu ada disaat saya membutuhkan dan selalu menghibur saya dikala saya lelah akan tesis.
10. Teman-teman BPS dan RPL khususnya Mba Iki, Mba Desi, Mas Radit, dan Mba Dian yang selalu memberi motivasi dan saling membantu selama proses penyelesaian studi di Departemen Statistika ITS.
11. Teman-teman seperjuangan S2 Statistika ITS tahun 2019 terimakasih atas bantuan, kekompakan, dan persahabatan yang diberikan selama ini.
12. Orang-orang terdekat saya, yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu yang telah membantu dalam penulisan tesis ini.

Semoga semua kebaikan yang telah diberikan akan dibalas oleh Allah SWT. Tesis ini masih jauh dari kata sempurna, oleh karena itu kritik dan saran diharapkan dari semua pihak untuk tahap pengembangan selanjutnya. Besar harapan penulis bahwa tesis ini bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Surabaya, 12 Agustus 2021

Penulis

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

Halaman

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pembangunan merupakan suatu proses kegiatan yang dilakukan dalam rangka mengembangkan atau mengadakan perubahan-perubahan ke arah keadaan yang lebih baik untuk mewujudkan kemajuan hidup berbangsa. Pokok pikiran pembangunan tertuju pada cita-cita keadilan sosial, untuk itu pembangunan membutuhkan proses dan tahapan terukur, dimana tahapan tersebut harus dapat menyentuh berbagai bidang, antara lain ekonomi sebagai ukuran kemakmuran materiil, tahap kesejahteraan sosial serta tahap keadilan sosial, serta sumberdaya manusia yang memadai. Konseptualisasi pembangunan merupakan proses perbaikan yang berkesinambungan pada suatu masyarakat menuju kehidupan yang lebih baik atau lebih sejahtera, sehingga terdapat beberapa cara untuk menentukan tingkat kesejahteraan pada suatu negara. Kesehatan merupakan salah satu modal manusia (*human capital*) yang sangat diperlukan dalam menunjang pembangunan ekonomi. Hal ini di karenakan kesehatan merupakan prasyarat bagi peningkatan produktivitas. Tjiptoherijanto (1993) mengatakan bahwa kesehatan dapat mempengaruhi pertumbuhan ekonomi melalui beberapa cara, seperti perbaikan kesehatan seseorang akan menyebabkan pertambahan dalam partisipasi tenaga kerja, perbaikan kesehatan dapat pula membawa perbaikan dalam tingkat pendidikan yang kemudian menyumbang terhadap pertumbuhan ekonomi, ataupun perbaikan kesehatan menyebabkan bertambahnya penduduk yang akan membawa tingkat partisipasi kerja. Oleh karena itu, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan (Balitbangkes) Kementrian Kesehatan menyusun Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM). IPKM merupakan kumpulan indikator kesehatan yang dapat dengan mudah dan langsung diukur untuk menggambarkan masalah kesehatan.

Selain itu, indikator keberhasilan pembangunan yaitu *Physical Quality of Life* (PQLI) dan *Indeks Pembangunan Manusia* (IPM). *The United Nations Development Programme* (UNDP) telah membuat indikator pembangunan lain sebagai tambahan untuk beberapa indikator yang telah ada. Ide dasar yang melandasi dibuatnya indeks tersebut adalah pentingnya memperhatikan kualitas sumber daya manusia. Menurut UNDP, pembangunan hendaknya ditujukan kepada pengembangan sumber daya manusia. Dalam pemahaman ini, pembangunan dapat diartikan sebagai sebuah proses yang bertujuan mengembangkan pilihan-pilihan yang dapat dilakukan oleh manusia. Hal ini didasari oleh asumsi bahwa peningkatan kualitas sumber daya manusia akan diikuti oleh terbukanya berbagai pilihan dan peluang menentukan jalan hidup manusia secara bebas.

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan pengukuran perbandingan dari harapan hidup, pendidikan, dan standar hidup untuk semua negara. IPM digunakan sebagai indikator untuk menilai aspek kualitas dari pembangunan dan untuk mengklasifikasikan sebuah negara termasuk negara maju, negara berkembang, atau negara terbelakang dan juga untuk mengukur pengaruh dari kebijakan ekonomi terhadap kualitas hidup.

Adapun beberapa faktor yang mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat adalah Angka Partisipasi Murni (APM), status daerah, presentase penduduk miskin, pertumbuhan ekonomi, presentase penduduk berpendidikan minimal SMP, rasio dokter per 1000 penduduk, jumlah puskesmas, dan lain sebagainya. Dalam penelitian ini, variabel Indeks Pembangunan Manusia (IPM) dan Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) disebut dengan variabel respon, sedangkan variabel yang mempengaruhi kedua indeks tersebut disebut dengan variabel prediktor.

Berdasarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Fibriyani, Latra, dan Purhadi (2015) faktor-faktor yang mempengaruhi IPM dan IPKM adalah presentase penduduk miskin dan rasio dokter per 100.000 penduduk. Sedangkan menurut Fathurahman, Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari (2016) dalam penelitiannya menyebutkan faktor yang mempengaruhi IPKM adalah presentase penduduk yang tamat perguruan tinggi dan presentase penduduk miskin. Selain itu, menurut penelitian Octavanny, Budiantara, dan Ratnasari (2017) menyebutkan faktor yang berpengaruh terhadap IPKM adalah angka kematian bayi, kepadatan penduduk, presentase rumah tangga berperilaku hidup bersih dan sehat.

Analisis regresi merupakan suatu metode analisis statistika yang digunakan untuk menggambarkan model hubungan keterkaitan antara dua variabel atau lebih. Dalam model keterkaitan tersebut variabel yang digunakan dikelompokkan menjadi dua, yaitu variabel respons dan variabel prediktor. Secara umum, analisis regresi dikelompokkan menjadi empat, yaitu Regresi Parametrik, Regresi Logistik, Regresi Non Parametrik, dan Regresi Semi Parametrik. Dalam penelitian ini, yang akan digunakan adalah regresi logistik.

Regresi logistik merupakan model regresi yang sering digunakan untuk pemodelan hubungan antara variabel dependen kualitatif (kategorik) dan satu atau lebih variabel independen. Model regresi logistik dapat juga digunakan untuk klasifikasi dan prediksi variabel dependen. Pemodelan dengan regresi logistik bergantung pada kategori dan banyaknya kategori pada variabel dependen. Model regresi logistik yang mempunyai variabel dependen dua kategori disebut model regresi logistik dikotomus (biner) atau sering disebut model regresi logistik. Regresi logistik biner dengan menggunakan satu variabel respon dapat dikembangkan menjadi model regresi logistik biner dengan dua variabel respon yang disebut dengan regresi logistik bivariat (BLR) Hosmer, Lemeshow, dan Sturdivant, 2013).

Penelitian ini difokuskan untuk pengembangan model regresi logistik biner bivariat. Untuk mengembangkan model tersebut, dibutuhkan kajian tentang regresi logistik biner yang memiliki dua kategori dalam variabel dependennya. Regresi logistik bivariat merupakan regresi logistik yang mempunyai dua variabel dependen dan antar variabel dependen saling berkorelasi. Selain itu, pada penelitian ini digunakan regresi logistik bivariat orde satu dan orde dua untuk variabel independennya. Pada orde satu, variabel independen berderajat satu sedangkan pada orde dua, variabel independen dipangkatkan meningkat hingga menjadi bentuk kuadrat atau disebut dengan berderajat n. Pada penelitian ini akan dilakukan kajian lanjutan untuk pengembangan model regresi logistik biner bivariat orde satu dengan menggunakan orde dua guna untuk mengetahui perbandingan regresi logistik biner bivariat antara orde satu dan orde dua.

Penelitian yang mengkaji mengenai regresi logistik bivariat antara lain penulis McDonald (1993) yang membahas mengenai beberapa metode yang digunakan untuk mendapatkan parameter pada model regresi logistik biner bivariat dengan tiga jenis antara lain, Independence Estimation Equation (IEE), Generalized Estimation Equation (GEE), dan Maximum Likelihood Estimation (MLE). Purhadi dan Fathurahman (2021) membahas mengenai model logit dengan respon biner bivariat dimana pada penaksiran parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio* dengan iterasi Berndt Hall-Hall-Hausman (BHHH). Penelitian yang dilakukan oleh Schworer dan Hovey (2004) menjelaskan bahwa algoritma *Fisher Scoring* lebih baik daripada algoritma Newton Raphson karena algoritma *Fisher Scoring* tetap konvergen ketika algoritma Newton Raphson tidak konvergen. Pada penelitian ini, untuk mendapatkan penaksiran parameter digunakan metode MLE dengan proses iterasi menggunakan metode numerik berupa iterasi Fisher Scoring dan Berndt Hall-Hall-Hausmann (BHHH).

Iterasi Fisher Scoring merupakan salah satu bentuk pengembangan dari metode Newton Raphson dengan mengganti matriks hessian menjadi matriks informasi fisher, kelebihan dari iterasi Fisher Scoring yaitu lebih dijamin konvergensinya. Sedangkan iterasi BHHH merupakan modifikasi dari metode Fisher Scoring dimana dalam metode BHHH ditambahkan aturan bilangan banyak, kelebihan dari iterasi BHHH yaitu untuk matriks Hessian hanya menggunakan turunan pertama. Pada penelitian sebelumnya hanya menggunakan satu jenis iterasi numerik, sehingga pada penelitian ini akan digunakan iterasi BHHH dan Fisher Scoring karena untuk mengetahui perbedaan dari dua iterasi tersebut yang mana kedua iterasi tersebut merupakan pengembangan dari metode Newton Raphson dan apabila metode Newton Raphson tidak konvergen, iterasi BHHH dan Fisher Scoring tetap konvergen.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan sebelumya, maka dalam penelitian kali ini, peneliti akan melakukan kajian terhadap analisis regresi logistik biner bivariat untuk memodelkan indeks pembangunan manusia dan indeks pembangunan kesehatan masyarakat di Jawa Timur.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk penaksir parameter dengan menggunakan iterasi Fisher Scoring dan BHHH dan statistik uji pada pengujian hipotesis model regresi logistik bivariat orde dua?
2. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur?
3. Bagaimana bentuk perbandingan Fisher Scoring dan BHHH pada model regresi logistik bivariat orde dua?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan bentuk penaksir parameter dengan menggunakan iterasi Fisher Scoring dan BHHH dan statistik uji pada pengujian hipotesis model regresi logistik bivariat orde dua.
2. Mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur dengan model regresi logistik bivariat orde satu dan orde dua.
3. Mendapatkan hasil perbandingan iterasi Fisher Scoring dan BHHH pada model regresi logistik bivariat orde dua.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat menambah wawasan keilmuan kepada penulis mengenai regresi logistik bivariat.
2. Dapat menambah kajian literatur sosial dalam memprediksi faktor-faktor yang mempengaruhi keberhasilan pembangunan di Provinsi Jawa Timur melalui data IPM dan IPKM dengan menggunakan regresi logistik bivariat.
3. Dapat memberikan alternatif metode analisis data bagi BPS dan Kemenkes, khususnya untuk data yang sesuai dengan regresi logistik bivariat.

1.5 Batasan Permasalahan

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Banyaknya variabel dependen pada model regresi logistik bivariat dalam penelitian ini dibatasi hanya untuk dua variabel dependen yang saling berkorelasi dan masing-masing variabel dependen mempunyai dua kategori.
2. Banyaknya kategori yang digunakan pada model regresi logistik bivariat dalam penelitian ini dibatasi hanya untuk dua kategori.
3. Penentuan penaksiran parameter menggunakan metode Maximum Likelihood Estimator (MLE) dengan proses iterasi menggunakan metode Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) dan Fisher Scoring.
4. Menggunakan 38 Kab/Kota di Jawa Timur.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini menyajikan tinjauan pustaka yang berkaitan dengan model *Bivariate Logistic Regression* (BLR) yang meliputi distribusi multinomial, regresi logistik biner, penaksir parameter *maximum likelihood* menggunakan metode iterasi Berndt Hall-Hall-Hausman (BHHH) dan Fisher Scoring, serta menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) untuk menentukan statistik uji pada pengujian hipotesis. Pada akhir bab ini disajikan tinjauan pustaka yang berkaitan dengan penerapan model BLR yaitu Indeks Pembangunan Manusia, IPKM, dan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap IPM dan IPKM.

2.1 Distribusi Multinomial

Distribusi multinomial merupakan distribusi diskrit multivariat yang dikembangkan dari distribusi binomial (Johnson, Kotz, dan Balakrishnan, 1997). Misalkan variabel random Y mempunyai C kategori, maka $Y_{gh}=1$ jika percobaan ke-g mempunyai hasil kategori ke-h dan $Y_{gh}=0$ untuk yang lainnya, dengan $h=1,2,...,C$ dan $g=1,2,...,m$. Vektor variabel random $\boldsymbol{y}_g=\begin{bmatrix} y_{g1} & y_{g2} & \dots & y_{gC-1}\end{bmatrix}^T$ menyatakan percobaan multinomial dengan. $\sum_{h=1}^{C} y_{gh}=1$. Misalkan $y_h=\sum_{g=1}^{m} y_{gh}$ menyatakan jumlah percobaan pada kategori ke-h, maka vektor variabel random $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{C-1}\end{bmatrix}^T$ akan mempunyai distribusi multinomial.

Misalkan $\pi_h=P\left(y_{gh}=1\right)$ menyatakan probabilitas hasil kategori ke-h untuk tiap-tiap percobaan. Distribusi probabilitas multinomial adalah:

$$P\left(Y_1=y_1, Y_2=y_2, ..., Y_{C-1}=y_{C-1}; m, \pi\right)=\begin{pmatrix} m \\ y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_{C-1}\end{pmatrix}\pi_1^{y_1}\pi_2^{y_2}\dots\pi_{C-1}^{y_{C-1}}\pi_C^{y_C} \tag{2.1}$$

dimana $\pi_C = 1-\pi_1-\pi_2-\cdots-\pi_{C-1}, y_C = m-y_1-y_2-\cdots-y_{C-1}, y_h = 0,1,2,\cdots,m$

$\sum_{h=1}^{C} y_h = m,$ dan $\pi = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_{C-1}\end{bmatrix}^T$.

$E(Y_h) = m\pi_h,\ Var(Y_h) = m\pi_h(1-\pi_h),\ Cov(Y_h, Y_{h^*}) = -m\pi_h\pi_{h^*},$ untuk $h \neq h^*$.

Untuk $m = 1$, maka persamaan (2.1) menjadi:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \cdots, Y_{C-1} = y_{C-1}; 1, \pi) = \pi_1^{y_1}\pi_2^{y_2}\cdots\pi_{C-1}^{y_{C-1}}\pi_C^{y_C}$$

dimana $y_1, y_2, \cdots, y_{C-1}$ bernilai 0 atau 1.

Untuk $c = 4$, maka persamaan (2.1) menjadi:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, Y_3 = y_3; 1, \pi) = \pi_1^{y_1}\pi_2^{y_2}\cdots\pi_4^{y_4}$$

dimana y_1, y_2, y_3 bernilai 0 atau 1 dan $y_4 = 1-y_1-y_2-y_3$.

$E(Y_h) = \pi_h,\ Var(Y_h) = \pi_h(1-\pi_h),\ Cov(Y_h, Y_{h^*}) = -\pi_h\pi_{h^*},$ untuk $h \neq h^*$.

2.2 Tabel Kontingensi

Tabel kontingensi atau yang sering disebut tabulasi silang (*cross tabulaion*) merupakan tabel yang berisi data jumlah, frekuensi, atau beberapa klasifikasi (kategori). Dalam penelitian ini akan digunakan tabel kontingensi berukuran 2×2. Tabel kontingensi 2×2 merupakan klasifikasi objek pengamatan berdasar dua variabel dan masing-masing variabel diklasifikasikan menjadi dua kelompok. Tabel 2.1 merupakan penyajian n objek yang diklasifikasikan menurut variabel baris (Faktor A) dan variabel kolom (Faktor B). Dalam tabel kontingensi, istilah variabel seringkali digantikan dengan istilah faktor. Hal ini dikarenakan variabel yang dimaksud bersifat nominal sehingga dapat disebut sebagai faktor.

Tabel 2.1 Tabel Kontingensi Faktor A dan Faktor B

Faktor A	Variabel Kolom (Faktor B)		Total
	B_1	B_2	
A_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1+} = n_{11} + n_{12}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2+} = n_{21} + n_{22}$
Total	$n_{+1} = n_{11} + n_{21}$	$n_{+2} = n_{12} + n_{22}$	n

Diasumsikan bahwa masing-masing objek memiliki salah satu sifat/klasifikasi A dan salah satu sifat B. Nilai pada masing-masing sel merepresentasikan distribusi bersama yaitu berdistribusi multinomial dengan empat kategori. Nilai pada kolom terakhir dan baris terakhir merepresentasikan distribusi marginal yang berdistribusi binomial. Struktur distribusi multinomial dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Struktur Parameter π

Faktor A	Variabel Kolom (Faktor B)		Total
	B_1	B_2	
A_1	π_{11}	π_{12}	$\pi_{1+} = \pi_{11} + \pi_{12}$
A_2	π_{21}	π_{22}	$\pi_{2+} = \pi_{21} + \pi_{22}$
Total	$\pi_{+1} = \pi_{11} + \pi_{21}$	$\pi_{+2} = \pi_{12} + \pi_{22}$	1

Uji Independendensi

Tabel kontingensi 2×2 merupakan struktur paling elemental yang mengarah ke ide-ide asosiasi yang dimulai dari masalah perbandingan dua parameter binomial. Untuk mengetahui asosiasi antar kategori dilakukan uji kebebasan menggunakan statistik uji χ^2. Berdasarkan tabel kontingensi dua dimensi, maka hipotesis yang melandasi pengujian asosiasi adalah:

H_0 : tidak ada asosiasi antar kategori

H_1 : kedua kategori berasosiasi

Dengan statistik uji sebagai berikut:

$$Q_{hitung} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}, \quad \text{dimana } m_{ij} = \frac{n_{i+}\, n_{+j}}{n_{++}}.$$

Berdasarkan pada statistik uji tersebut, dikatakan tolak H_0 jika $Q_{hitung} > \chi^2_{(1,\alpha)}$

Odds Ratio

Odds ratio (ψ) merupakan ukuran keterikatan yang menunjukkan bahwa terdapat ketergantungan dua variabel. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh persamaan odds ratio, sebagai berikut:

$$\psi = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}\pi_{12}}$$

dengan nilai $\psi \geq 0$, apabila dua variabel saling bebas maka $\psi = 1$.

2.3 Regresi Logistik Biner

Regresi logistik biner merupakan suatu metode analisis data yang digunakan untuk mencari hubungan antara variabel dependen yang bersifat biner/dikotomus atau apabila variabel dependen memiliki dua kategori bernilai 0 atau 1. Apabila variabel dependen menghasilkan dua kategori, maka variabel dependen tersebut mengikuti distribusi Bernoulli. Fungsi probabilitas distribusi Bernoulli, yaitu:

$$f(y) = \pi^{y}(1-\pi)^{1-y};\ y = 0,1$$

Jika $y = 0$, maka $f(y) = 1 - \pi$ dan jika $y = 1$, maka $f(y) = \pi$

Pada model regresi logistik tujuan menganalisa respon biner untuk memperoleh hubungan antara variabel independen dengan π yang merupakan probabilitas kejadian yang diakibatkan oleh $X_1, X_2, \cdots, X_k$. Oleh karena itu, model yang digunakan dalam regresi logistik ini nilai fungsinya berkisar antara 0 dan 1 yang diperoleh dengan menggunakan fungsi logistik. Dengan $q(\boldsymbol{x})$ bernilai 0 dan 1 berturut-turut untuk nilai x mendekati $-\infty$ dan ∞. Bentuk persamaan model regresi logistik biner dengan k variabel dependen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k)}{1 + \exp(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k)}$$

Model tersebut ditransformasi dengan transformasi logit, sehingga diperoleh fungsi logit yang linier dalam parameter-parameternya. Model transformasi logit yaitu sebagai berikut:

$$g(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\pi(\boldsymbol{x})}{1-\pi(\boldsymbol{x})}\right) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$$

Diberikan sampel random $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ berdistribusi Bernoulli dengan parameter π, maka model regresi logistik dapat dinyatakan seperti persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \textit{logit}[\pi(\boldsymbol{x}_i)] &= \ln\left[\frac{\pi(\boldsymbol{x}_i)}{1-\pi(\boldsymbol{x}_i)}\right] \\ &= \theta_0 + \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \cdots + \theta_k x_{ki} \qquad (2.2) \\ &= \theta^T \boldsymbol{x}_i \end{aligned}$$

dimana,

$\boldsymbol{x}_i^T = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \cdots \quad x_{ki}]$ adalah vektor variabel independen

$\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_0 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_k]$ adalah vektor parameter,

$\pi(\boldsymbol{x}_i)$ adalah probabilitas variabel dependen yang mempunyai kategori bernilai 1 untuk pengamatan ke-i dan bergantung pada variabel independen pada pengamatan ke-i. Probabilitas $\pi(\boldsymbol{x}_i)$ dinyatakan seperti persamaan berikut:

$$\pi(\boldsymbol{x}_i) = \frac{exp(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x}_i)}{1 - exp(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{x}_i)} \qquad (2.3)$$

2.3.1 Penaksiran Parameter

Penaksiran parameter dalam regresi logistik dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood*. Metode tersebut mengestimasi parameter $\boldsymbol{\theta}$ dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood dan mensyaratkan bahwa data harus mengikuti suatu distribusi tertentu. Pada regresi logistik, setiap pengamatan mengikuti distribusi bernoulli sehingga dapat ditentukan fungsi likelihoodnya. Berdasarkan fungsi probabilitas dari distribusi Bernoulli dapat diperoleh fungsi likelihood yang dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \pi(\boldsymbol{x}_i)^{y_i}(1-\pi(\boldsymbol{x}_i))^{1-y_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (\exp(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}_i))^{y_i}\ (1 + \exp(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}_i))^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Selanjutnya fungsi likelihood tersebut lebih mudah dimaksimumkan dalam bentuk $\log L(\boldsymbol{\theta})$ dan dinyatakan dengan $l(\boldsymbol{\theta})$.

$$
\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= \ln L(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}_i - ln(1 + exp(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{x}_i)))
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Penaksir parameter dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi likelihood pada persamaan (2.4). Memaksimumkan fungsi likelihood dilakukan dengan cara menentukan turunan parsial pertama fungsi log-likelihood terhadap $\boldsymbol{\theta}$ kemudian disamakan dengan nol, seperti berikut:

$$
\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta^T} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \pi(\boldsymbol{x}_i) = 0 \tag{2.6}
$$

dimana $\pi(\boldsymbol{x}_i)$ seperti pada persamaan (2.3).

Berdasarkan pada persamaan (2.5) diperoleh sistem persamaan yang implisit, dimana hal tersebut menunjukkan bahwa penaksir parameter model regresi logistik yang diperoleh dengan metode *Maksimum Likelihood Estimator* tidak dapat menghasilkan penyelesaian secara analitik. Untuk mendapatkan penaksir parameter digunakan pendekatan secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Raphson, sebagai berikut:

$$\hat{\theta}^{(t+1)} = \hat{\theta}^{(t)} - \left(\boldsymbol{H}\left(\hat{\theta}^{(t)}\right)\right)^{-1} . \boldsymbol{g}\left(\hat{\theta}^{(t)}\right) \tag{2.7}$$

dengan $\boldsymbol{\theta}^{(t)}$ merupakan penaksir ML parameter model regresi logistik pada iterasi ke-t,

$\boldsymbol{g}\left(\hat{\theta}^{(t)}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$, merupakan vektor gradien, dengan turunan (2.8) parsial pertama fungsi log-likelihood terhadap masing-masing parameter.

$$\boldsymbol{H} = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^T \partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_0 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_0} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_0} & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_k^2} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

merupakan matriks Hessian berukuran $(k+1) \times (k+1)$, dengan turunan parsial kedua dari fungsi log-likelihood terhadap masing-masing kombinasi parameter dari model, yaitu:

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^T \partial \theta} = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \pi(\boldsymbol{x}_i)\left(1 - \pi(\boldsymbol{x}_i)\right) \tag{2.10}$$

Penaksir parameter diperoleh ketika iterasi telah mencapai kondisi konvergen, dimana $\left\|\hat{\theta}^{(t+1)} - \hat{\theta}^{(t)}\right\| \leq \varepsilon$, dimana ε merupakan bilangan riil positif yang sangat kecil.

2.3.2 Pengujian Hipotesis

Setelah parameter hasil estimasi diperoleh, maka selanjutnya dilakukan pengujian hipotesis parameter model regresi logistik yang meliputi pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Uji serentak digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen secara serentak atau untuk mengetahui paling tidak terdapat satu variabel dependen yang mempengaruhi variabel independen. Sedangkan untuk uji parsial yaitu merupakan pengujian yang digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh dari masing-masing variabel independen terhadap variabel dependen.

Hipotesis yang digunakan untuk pengujian serentak, adalah sebagai berikut:

$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k = 0$

H_1 : Paling tidak terdapat satu $\theta_j \neq 0; j = 1,2, \ldots, k$

Untuk mendapatkan statistik uji untuk pengujian serentak, dapat digunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) yang diawali dengan menentukan himpunan parameter dibawah H_0 yaitu $\omega = \{\theta_0\}$, dimana fungsi likelihoodnya adalah

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\exp(\theta_0))^{y_i} (1 + \exp(\theta_0))^{-1}$$

Dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter model dibawah H_0 dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\hat{\omega}) = maks\ L(\omega)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (exp(\hat{\theta}_0))^{y_i} (1 + exp(\hat{\theta}_0))^{-1} \quad (2.11)$$

Memaksimum fungsi likelihood pada persamaan (2.10) ekuivalen dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood.

$$l(\hat{\omega}) = maks \ln L(\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \hat{\theta}_0 - \sum_{i=1}^{n} ln\,(1 + exp(\hat{\theta}_0)) \quad (2.12)$$

dimana $\hat{\theta}_0$ merupakan penaksir ML parameter θ_0 yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.6).

Selanjutnya menentukan himpunan parameter dibawah populasi yaitu $\Omega = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter dibawah populasi dinyatakan seperti berikut:

(2.13)

$$L(\hat{\Omega}) = maks\ L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \left(exp\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_i} \left(1 + exp\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{x}_i\right)\right)^{-1}$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah penaksir ML parameter $\boldsymbol{\theta}$ yang diperoleh dengan metode iterasi Newton-Raphson pada persamaan (2.7).

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.11) dan peramaan (2.13), maka diperoleh statistik uji:

$$G^2 = -2ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = 2(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})) \tag{2.14}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\left[y_i\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{x}_i - ln\left(1 + exp\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{x}_i\right)\right)\right] - \left[y_i\hat{\theta}_0 - ln\left(1 + exp\left(\hat{\theta}_0\right)\right)\right]\right)$$

Statistik uji G^2 pada persamaan (2.13) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebasnya adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter model dibawah H_0 dari pengujian hipotesis pada uji serentak untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $G^2 > \chi^2_{(k;\alpha)}$

Kemudian akan dilakukan uji parsial dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \theta_j = 0,$

$H_1 : \theta_j \neq 0, j = 1,2,\dots,k$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis pada uji parsial adalah statistik Wald, seperti berikut:

$$Z = \frac{\hat{\theta}_j}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\theta}_j\right)}} \underset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

dimana $\widehat{Var}(\hat{\theta}_j)$ diperoleh dari elemen diagonal ke $(j+1)$ dari matriks varians kovarians $Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, dimana $Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [I(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = -[H(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$.

$I(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dan $H(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah berturut-turut menyatakan matriks Informasi Fisher dan matriks Hessian. Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada uji parsial untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $|Z| > Z_{\alpha/2}$.

2.4 Algoritma *Fisher Scoring*

Algoritma scoring atau biasa dikenal dengan *Fisher Scoring* ditemukan oleh Ronald Fisher yang merupakan sebuah bentuk dari metode *Newton* yang digunakan dalam statistik untuk menyelesaikan persamaan maksimum *likelihood*.

Algoritma *Fisher Scoring* mirip dengan algoritma *Newton Raphson*, perbedaannya adalah *Fisher Scoring* menggunakan matriks informasi. Matriks informasi tersebut adalah negatif dari nilai ekspektasi dari matriks turunan kedua fungsi yang akan dimaksimumkan sedangkan algoritma *Newton Raphson* menggunakan matriks turunan kedua dari fungsi yang akan dimaksimumkan (Ehlers, 2002). Adapun rumus perulangan *Fisher Scoring* adalah sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} + I(\boldsymbol{\theta}^{(r)})^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^{(r)}) \qquad (2.15)$$

dengan $I^{(r)}$ adalah matriks informasi yang merupakan negatif dari nilai ekspektasi dari matriks turunan kedua fungsi *loglikelihood*, yaitu $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^T \partial\theta}\right]$ dan $g(\boldsymbol{\theta})$ adalah turunan pertama dari fungsi *loglikelihood*. Berdasarkan matriks Hessian pada persamaan (2.9), sehingga matriks informasi dinyatakan sebagai berikut:

$$I = -E\left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^T \partial\theta}\right] = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_0^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_0 \partial\theta_1}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_0 \partial\theta_k}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_1 \partial\theta_0}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_1^2}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_1 \partial\theta_k}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_k \partial\theta_0}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_k \partial\theta_1}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta_k^2}\right) \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Informasi maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode Fisher Scoring untuk mendapatkan penaksir ML parameter model BLR. Proses iterasi menggunakan persamaan (2.17).

(2.17)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} + \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}^{(r)})^{-1} \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}), \text{ untuk } r = 0,1,2, \dots$$

Dimana $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}$ adalah MLE parameter model BLR pada iterasi ke-r dan $r + 1$, $\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)})$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-r, dan $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}^{(r)})^{-1}$ merupakan invers dari matriks informasi. Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

Algoritma *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH)

Metode *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH) merupakan modifikasi dari metode *Fisher Scoring*. Namun dalam iterasi BHHH ditambahkan dengan aturan bilangan banyak (*the law of large number*). Bagian yang dimodifikasi adalah I dari metode *Fisher Scoring* menjadi bentuk sebagai berikut:

$$\boldsymbol{H}(\theta) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial l_i(\theta)}{\partial \theta} \right]^T \frac{\partial l_i(\theta)}{\partial \theta^T} \right] \quad (2.18)$$

Menurut Greene (2008), matriks Hessian $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta})$ merupakan matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\theta})$ terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor parameter $\boldsymbol{\theta}$. Selain itu, terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks Hessian, yaitu:

$$E\left(\boldsymbol{g}(\theta)\right) = 0$$

$$\mathit{Var}\left(\boldsymbol{g}(\theta)\right) = E\left(\boldsymbol{g}(\theta)\, \boldsymbol{g}^T(\theta)\right) \quad (2.19)$$

Selanjutnya, matriks Hessian mempunyai hubungan dengan matriks informasi, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta})$. (2.20)

Matriks informasi pada persamaan (2.18) disebut juga dengan matriks informasi fisher (Pawitan, 2001).

Sementara itu, Hogg, McKean, dan Craig (2013) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks informasi, yaitu

(2.21)

$Var(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})) = n\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$

Berdasarkan persamaan (2.19) hingga (2.21), diperoleh matriks Hessian $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta})$, sebagai berikut:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{n}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{\theta})]. \tag{2.22}$$

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH untuk mendapatkan penaksir ML parameter model BLR. Proses iterasi menggunakan persamaan (2.23).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}^{(r)})^{-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}), \text{ untuk } r = 0,1,2,... \tag{2.23}$$

Dimana $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}$ adalah MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r* dan $r+1$, $\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)})$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*, dan $\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)})^{-1}$ adalah invers dari matriks Hessian untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*. Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

2.5 Model Regresi Logistik Bivariat Orde Satu

Model regresi logistik bivariat merupakan salah satu dari keluarga model logit multivariat yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara dua respon biner yang berkorelasi dengan satu atau lebih variabel prediktor. Misalkan Y_1 dan Y_2 merupakan dua respon biner bivariat dan $\boldsymbol{y} = [Y_{11} \quad Y_{10} \quad Y_{01}]^T$ merupakan vektor dari respon.

Tabel 2.3 Probabilitas dari pengamatan Y_1 dan Y_2

	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 0$
$Y_1 = 1$	Y_{11}	Y_{10}
$Y_1 = 0$	Y_{01}	Y_{00}

Berdasarkan pada Tabel 2.3 terdapat variabel random Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}, dan Y_{00}. Dengan nilai Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}, dan Y_{00} berada diantara 0 dan 1, serta $Y_{11} + Y_{10} + Y_{01} + Y_{00} = 1$ dan $Y_{00} = 1 - Y_{11} - Y_{10} - Y_{01}$. Probabilitas dari pengamatan untuk variabel Y_1 dan Y_2 pada Tabel 2.3 disajikan pada Tabel 2.4 berikut:

Tabel 2.4 Probabilitas dari pengamatan Y_1 dan Y_2

	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 0$	Total
$Y_1 = 1$	π_{11}	π_{10}	π_1
$Y_1 = 0$	π_{01}	π_{00}	$1 - \pi_1$
Total	π_2	$1 - \pi_2$	1

Berdasarkan Fathurahman, Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari (2020) serta pada Tabel 2.4 terdapat variabel random Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}, dan Y_{00}. Oleh karena $\pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} + \pi_{00} = 1$ dan $\pi_{00} = 1 - \pi_{11} - \pi_{10} - \pi_{01}$, maka variabel random Y_{11}, Y_{10}, Y_{01}, dan Y_{00} berdistribusi multinomial dengan probabilitasnya masing-masing $\pi_{11}, \pi_{10}, \pi_{01}$, dan π_{00}. Misalkan $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{10} & Y_{01} \end{bmatrix}^T$, maka $\boldsymbol{y} \sim M(1; \pi_{11}, \pi_{10}, \pi_{01})$. Berdasarkan persamaan (2.2), fungsi probabilitas $\boldsymbol{y}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$P\left(Y_{11} = y_{11}, Y_{10} = y_{10}, Y_{01} = y_{01}\right) = \prod_{g=0}^{1} \prod_{h=0}^{1} \pi_{gh}^{y_{gh}},\ 0 < \pi_{gh} < 1 \tag{2.24}$$

dimana $y_{gh} = 0,1;\ g, h = 0,1;\ y_{00} = 1 - y_{11} - y_{10} - y_{01};$ dan $\pi_{00} = 1 - \pi_{11} - \pi_{10} - \pi_{01}$.

g dan h merupakan nilai dari respon. y_{gh} merupakan nilai dari Y_{gh} yang mempresentasikan elemen dari vektor respon. $\pi_{gh} = P(Y_1 = g, Y_2 = h)$ dimana masing-masing merupakan probabilitas marginal dari Y_1 dan Y_2.

Misalkan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_k \end{bmatrix}^T$ merupakan vektor berdimensi $(k + 1)$. Sehingga model regresi logistik biner bivariat diberikan sebagai berikut:

$$\varphi_1(x) = \textbf{\textit{logit}}(\pi_1(x))$$

$$= \ln\left(\frac{\pi_1(x)}{1-\pi_1(x)}\right)$$

$$= \theta_{01} + \theta_{11}X_1 + \theta_{21}X_2 + \ldots + \theta_{k1}X_k$$

$$= \boldsymbol{x}^T\theta_1$$

$$\varphi_2(x) = \textbf{\textit{logit}}(\pi_2(x))$$

$$= \ln\left(\frac{\pi_2(x)}{1-\pi_2(x)}\right)$$

$$= \theta_{02} + \theta_{12}X_1 + \theta_{22}X_2 + \ldots + \theta_{k2}X_k$$

$$= \boldsymbol{x}^T\theta_2$$

$$\varphi_3(x) = \textbf{\textit{ln}}(\psi(x))$$

$$= \ln\left(\frac{\pi_{11}(x)\pi_{00}(x)}{\pi_{10}(x)\pi_{01}(x)}\right)$$

$$= \theta_{03} + \theta_{13}X_1 + \theta_{23}X_2 + \ldots + \theta_{k3}X_k$$

$$= \boldsymbol{x}^T\theta_3$$

dimana $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$, $\boldsymbol{\theta}_3$ merupakan parameter vektor, $\pi_1(\boldsymbol{x})$ dan $\pi_2(\boldsymbol{x})$ merupakan probabilitas marginal variabel respon, dan $\psi(\boldsymbol{x})$ merupakan odds ratio dari variabel respon yang menunjukkan bahwa variabel respon saling berkorelasi. Parameter model BLR dinotasikan dengan vektor $\boldsymbol{\theta}$, yaitu:

$\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{01} \quad \theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \cdots \quad \theta_{k1}]^T$ adalah vektor kolom berukuran $k \times 1$;

$\boldsymbol{\theta}_2 = [\theta_{02} \quad \theta_{12} \quad \theta_{22} \quad \cdots \quad \theta_{k2}]^T$ adalah vektor kolom berukuran $k \times 1$; (2.26)

$\boldsymbol{\theta}_3 = [\theta_{03} \quad \theta_{13} \quad \theta_{23} \quad \cdots \quad \theta_{k3}]^T$ adalah vektor kolom berukuran $k \times 1$.

Probabilitas marjinal dari variabel respon didefinisikan sebagai berikut:

(2.27)

$$P(Y_1 = 1 | \boldsymbol{x}) = \pi_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(\boldsymbol{x}^T\theta_1)}{1+\exp(\boldsymbol{x}^T\theta_1)}$$

$$P(Y_2 = 1 | \boldsymbol{x}) = \pi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(\boldsymbol{x}^T\theta_2)}{1+\exp(\boldsymbol{x}^T\theta_2)}$$

Berdasarkan Palmgren (1989), diperoleh probabilitas bersama sebagai berikut:

Probabilitas bersama dari $\pi_{11}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\left(a - \sqrt{a^2 + b}\right)}{2(\psi - 1)}, \psi \neq 1 \\ \pi_1\pi_2, \psi = 1 \end{cases}$ (2.28)

dimana $a = 1 + (\pi_1 + \pi_2)(\psi - 1)$ dan $b = -4\psi(\psi - 1)\pi_1\pi_2$. Jika $\psi(x) = 1$, maka Y_1 dan Y_2 saling bebas.

Berdasarkan pada Tabel 2.5 dan persamaan (2.28), probabilitas dari $\pi_{10}(\boldsymbol{x}), \pi_{01}(\boldsymbol{x})$, dan $\pi_{00}(\boldsymbol{x})$ pada persamaan (2.25) adalah sebagai berikut:

$\pi_{10}(\boldsymbol{x}) = \pi_1(\boldsymbol{x}) - \pi_{11}(\boldsymbol{x})$,

$\pi_{01}(\boldsymbol{x}) = \pi_2(\boldsymbol{x}) - \pi_{11}(\boldsymbol{x})$

$\pi_{00}(\boldsymbol{x}) = 1 - \pi_{11}(\boldsymbol{x}) - \pi_{10}(\boldsymbol{x}) - \pi_{01}(\boldsymbol{x}) = 1 - \pi_1(\boldsymbol{x}) - \pi_2(\boldsymbol{x}) + \pi_{11}(\boldsymbol{x})$

2.5.1 Penaksiran Parameter

Penaksiran parameter dalam regresi logistik biner bivariat dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood*. Berdasarkan metode MLE, penduga dari $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah nilai $\boldsymbol{\theta}$, dimana $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^T\ \boldsymbol{\theta}_2^T\ \boldsymbol{\theta}_3^T]^T$ adalah vektor kolom berukuran $3k \times 1$. Kemudian memaksimumkan fungsi *likelihood* dan fungsi *loglikelihood*. Estimator *Maximum Likelihood* dapat diperoleh dengan menentukan turunan parsial pertama dari fungsi *loglikelihood*, lalu di samakan dengan nol.

Berdasarkan pada persamaan (2.25), persamaan *likelihood* mengandung persamaan interdependensi, yang memiliki bentuk tidak eksplisit. Oleh karena itu, penaksir ML parameter model BLR tidak diperoleh secara analitik tetapi didekati dengan akar persamaan *likelihood*, yang diperoleh melalui proses iterasi menggunakan BHHH dan *Fisher Scoring*.

Misalkan $\boldsymbol{y}_i = [y_{11i} \quad y_{10i} \quad y_{01i}]^T,\ i = 1,2, \ldots, n$ merupakan sampel vektor random yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial, dengan fungsi distribusi probabilitas bersama didefinisikan sebagai:

$$f\left(\boldsymbol{y}_i|\theta\right) = P\left(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}\right)$$

$$= \left(\pi_{11}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{11i}}\left(\pi_{10}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{10i}}\left(\pi_{01}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{01i}}\left(\pi_{00}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{00i}} \qquad (2.29)$$

Berdasarkan pada persamaan (2.27), fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f\left(\boldsymbol{y}_i|\theta\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}\right) \qquad (2.30)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\pi_{11}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{11i}}\left(\pi_{10}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{10i}}\left(\pi_{01}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{01i}}\left(\pi_{00}\left(\boldsymbol{x}_i\right)\right)^{y_{00i}}$$

Dimana vektor $\boldsymbol{\theta}$ seperti pada persamaan (2.24).

Misalkan $\pi_{gh}^{y_{gh}}(\boldsymbol{x}_i) = \pi_{ghi}^{y_{ghi}}$ untuk $g, h = 0,1;\ i = 1,2, \ldots, n,$ maka fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\pi_{11}^{y_{11i}}\pi_{10}^{y_{10i}}\pi_{01}^{y_{01i}}\pi_{00}^{y_{00i}}\right) \qquad (2.31)$$

Selanjutnya fungsi likelihood tersebut lebih mudah dimaksimumkan dalam bentuk $\ln L(\boldsymbol{\theta})$ dan dinyatakan dengan $l(\boldsymbol{\theta})$.

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_{11i}\ln\pi_{11i} + y_{10i}\ln\pi_{10i} + y_{01i}\ln\pi_{01i} + y_{00i}\ln\pi_{00i}) \qquad (2.32)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_{11i}\ln\pi_{11i} + y_{10i}\ln\pi_{10i} + y_{01i}\ln\pi_{01i} + (1 - y_{11i} - y_{10i} - y_{01i})\ln\pi_{00i})$$

Fungsi log-likelihood pada persamaan (2.32) merupakan fungsi dari vektor $\boldsymbol{\theta}$ yang berdimensi $3(k+1)$. Berdasarkan definisi (Greene, 2008), vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (2.32) adalah:

$$g(\theta)=\begin{bmatrix}\left[\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_1^T}\right]^T & \left[\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_2^T}\right]^T & \left[\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_3^T}\right]^T\end{bmatrix}^T \tag{2.33}$$

dimana vektor $\boldsymbol{\theta}$ seperti pada persamaan (2.24).

Berdasarkan model BLR pada persamaan (2.25), misalkan $\varphi_1=\varphi_1(\boldsymbol{x})$, $\varphi_2=\varphi_2(\boldsymbol{x})$, dan $\varphi_3=\varphi_3(\boldsymbol{x})$ sehingga terbentuk $\varphi=[\varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \varphi_3]^T$ dan $\pi=[\pi_{11}\ \ \pi_{10}\ \ \pi_{01}\ \ \pi_{00}]^T$. Selanjutnya menentukan turunan vektor φ terhadap π, yaitu $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\pi}$. Karena vektor π mempunyai empat elemen, sedangkan vektor φ hanya mempunyai tiga elemen, maka untuk mendapatkan $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\pi}$ yang simetris misalkan $\varphi_0=\ln\pi_{++}$, dengan $\pi_{++}=\pi_{11}+\pi_{10}+\pi_{01}+\pi_{00}$. Sehingga diperoleh $\varphi=[\varphi_0\ \ \varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \varphi_3]^T$. Berdasarkan pada Purhadi dan Fathurahman (2021), berikut merupakan matriks yang elemen-elemennya adalah turunan vektor φ terhadap π yang dimisalkan dengan $\boldsymbol{D}_1$.

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\pi_{11}} & \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\pi_{10}} & \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\pi_{01}} & \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\pi_{00}}\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\pi_{11}} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\pi_{10}} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\pi_{01}} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\pi_{00}}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\pi_{11}} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\pi_{10}} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\pi_{01}} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\pi_{00}}\\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\pi_{11}} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\pi_{10}} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\pi_{01}} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial\pi_{00}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \dfrac{1}{\pi_1} & \dfrac{1}{\pi_1} & -\dfrac{1}{1-\pi_1} & -\dfrac{1}{1-\pi_1}\\ \dfrac{1}{\pi_2} & -\dfrac{1}{1-\pi_2} & \dfrac{1}{\pi_2} & -\dfrac{1}{1-\pi_2}\\ \dfrac{1}{\pi_{11}} & -\dfrac{1}{\pi_{10}} & -\dfrac{1}{\pi_{01}} & \dfrac{1}{\pi_{00}}\end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Berdasarkan persamaan (2.32) diperoleh invers dari matriks $\boldsymbol{D}_1$ seperti persamaan berikut:

$$D_1^{-1}=\begin{bmatrix} \pi_{11} & \dfrac{\pi_{11}\pi_{01}}{\pi_1\Delta_1} & \dfrac{\pi_{11}\pi_{10}}{\pi_1\Delta_1} & \Delta \\ \pi_{10} & \dfrac{\pi_{10}\pi_{00}}{(1-\pi_2)\Delta_1} & -\dfrac{\pi_{11}\pi_{10}}{\pi_1\Delta_1} & -\Delta \\ \pi_{01} & -\dfrac{\pi_{11}\pi_{01}}{\pi_2\Delta_1} & \dfrac{\pi_{01}\pi_{00}}{(1-\pi_1)\Delta_1} & -\Delta \\ \pi_{00} & -\dfrac{\pi_{10}\pi_{00}}{(1-\pi_2)\Delta_1} & -\dfrac{\pi_{01}\pi_{00}}{(1-\pi_1)\Delta_1} & \Delta \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

dimana

$$\Delta_1=\frac{\pi_{11}\pi_{10}\pi_{01}\pi_{00}}{\pi_1\left(1-\pi_1\right)\pi_2\left(1-\pi_2\right)\Delta} \quad \text{dan } \Delta=\left(\frac{1}{\pi_{11}}+\frac{1}{\pi_{10}}+\frac{1}{\pi_{01}}+\frac{1}{\pi_{00}}\right)^{-1}$$

Vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (2.32) dapat ditulis menjadi

$$\boldsymbol{g}(\theta)=\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}$$

Berdasarkan persamaan (2.33) sampai dengan (2.35), diperoleh elemen-elemen vektor gradien pada persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_1^T} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}}\frac{\partial\pi_{11i}}{\partial\theta_1^T}+\frac{y_{10i}}{\pi_{10i}}\frac{\partial\pi_{10i}}{\partial\theta_1^T}+\frac{y_{01i}}{\pi_{01i}}\frac{\partial\pi_{01i}}{\partial\theta_1^T}+\frac{y_{00i}}{\pi_{00i}}\frac{\partial\pi_{00i}}{\partial\theta_1^T}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi_{10i}-y_{01i}\pi_{11i}}{\pi_{2i}}+\frac{y_{10i}\pi_{00i}-y_{00i}\pi_{10i}}{1-\pi_{2i}}\right)\boldsymbol{x}_i\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_2^T} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}}\frac{\partial\pi_{11i}}{\partial\theta_2^T}+\frac{y_{10i}}{\pi_{10i}}\frac{\partial\pi_{10i}}{\partial\theta_2^T}+\frac{y_{01i}}{\pi_{01i}}\frac{\partial\pi_{01i}}{\partial\theta_2^T}+\frac{y_{00i}}{\pi_{00i}}\frac{\partial\pi_{00i}}{\partial\theta_2^T}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi_{10i}-y_{10i}\pi_{11i}}{\pi_{1i}}+\frac{y_{01i}\pi_{00i}-y_{00i}\pi_{01i}}{1-\pi_{1i}}\right)\boldsymbol{x}_i\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_3^T} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}}\frac{\partial\pi_{11i}}{\partial\theta_3^T}+\frac{y_{10i}}{\pi_{10i}}\frac{\partial\pi_{10i}}{\partial\theta_3^T}+\frac{y_{01i}}{\pi_{01i}}\frac{\partial\pi_{01i}}{\partial\theta_3^T}+\frac{y_{00i}}{\pi_{00i}}\frac{\partial\pi_{00i}}{\partial\theta_3^T}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Delta_i\left(\frac{y_{11i}}{\pi_{11i}}-\frac{y_{10i}}{\pi_{10i}}-\frac{y_{01i}}{\pi_{01i}}+\frac{y_{10i}}{\pi_{00i}}\right)\boldsymbol{x}_i\end{aligned} \tag{2.38}$$

dimana Δ_i, untuk $i = 1,2,\dots,n$ seperti pada persamaan (2.35).

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian seperti pada persamaan (2.19) hingga (2.21), maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode Fisher Scoring dan BHHH seperti pada persamaan (2.17) dan (2.23).

2.5.2 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis pada model regresi logistik biner bivariat terdiri dari pengujian serentak dan parsial. Uji serentak digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen secara serentak atau untuk mengetahui paling tidak terdapat satu variabel dependen yang mempengaruhi variabel independen. Sedangkan untuk uji parsial yaitu merupakan pengujian yang digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh dari masing-masing variabel independen terhadap variabel dependen.

Hipotesis pengujian serentak, adalah sebagai berikut:

$H_0 : \theta_{1h} = \theta_{2h} = \cdots = \theta_{kh} = 0, h = 1,2,3$

H_1 : Paling tidak terdapat satu $\theta_{gh} \neq 0, g = 1,2,\dots k$; $h = 1,2,3$

Untuk mendapatkan statistik uji untuk pengujian serentak, dapat digunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) yang diawali dengan menentukan himpunan parameter dibawah H_0 yaitu $\omega_1 = \{\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03}\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter model dibawah H_0 dapat ditulis sebagai berikut:

$$L\left(\hat{\omega}_1\right) = maks\ L\left(\omega_1\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\hat{\pi}^*_{11i}\right)^{y_{11i}}\left(\hat{\pi}^*_{10i}\right)^{y_{10i}}\left(\hat{\pi}^*_{01i}\right)^{y_{01i}}\left(\hat{\pi}^*_{00i}\right)^{y_{00i}}\right) \tag{2.39}$$

dimana $\hat{\omega} = \{\hat{\theta}_{01}, \hat{\theta}_{02}, \hat{\theta}_{03}\}$ diperoleh dengan menggunakan MLE dan iterasi *Fisher Scoring* dan BHHH.

Selanjutnya menentukan himpunan parameter dibawah populasi yaitu $\Omega_1 = \{\theta_{01}, \theta_{11}, \dots, \theta_{k1}, \theta_{02}, \theta_{12}, \dots, \theta_{k2}, \theta_{03}, \theta_{13}, \dots, \theta_{k3}\}$ dan nilai maksimum fungsi likelihood himpunan parameter dibawah populasi dinyatakan sebagai berikut:

$$L\left(\hat{\Omega}_1\right) = maks\ L\left(\Omega_1\right) \tag{2.40}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}} \hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}} \hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}} \hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}} \right)$$

Berdasarkan nilai maksimum pada persamaan (2.39) dan (2.40), maka diperoleh statistik uji:

$$G_1^2 = -2\ln\left[\frac{L\left(\hat{\omega}_1\right)}{L\left(\hat{\Omega}_1\right)}\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_{11i}\ln\hat{\pi}_{11i} + y_{10i}\ln\hat{\pi}_{10i} + y_{01i}\ln\hat{\pi}_{01i} + y_{00i}\ln\hat{\pi}_{00i}\right) \tag{2.41}$$

$$-\left(y_{11i}\ln\hat{\pi}_{11i}^{*} + y_{10i}\ln\hat{\pi}_{10i}^{*} + y_{01i}\ln\hat{\pi}_{01i}^{*} + y_{00i}\ln\hat{\pi}_{00i}^{*}\right)$$

Statistik uji G_1^2 pada persamaan (2.39) secara asimtotik berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebasnya adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter model dibawah H_0 dari pengujian hipotesis pada uji serentak untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $G_1^2 > \chi^2_{(v;\alpha)}$,

dimana $v = n(\Omega_1) - n(\omega_1)$.

Kemudian akan dilakukan uji parsial dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \theta_{gh} = 0,$

$H_1 : \theta_{gh} \neq 0, g = 1,2, \dots k;\ h = 1,2,3$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis pada uji parsial adalah uji Wald, seperti berikut:

$$Z = \frac{\hat{\theta}_{gh}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}\left(\hat{\theta}_{gh}\right)}} \underset{n\to\infty}{\sim} N\left(0,1\right)$$

dimana $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{gh})$ diperoleh dari elemen diagonal ke $(gh + 1)$ dari matriks varians kovarians $Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, dimana $\widehat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [I(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = -[H(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$.

$I(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dan $H(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah berturut-turut menyatakan matriks Informasi Fisher dan matriks Hessian. Daerah penolakan H_0 dari pengujian hipotesis pada uji parsial untuk tingkat signifikansi α adalah tolak H_0 jika nilai $|Z| > Z_{\alpha/2}$.

2.6 Model Regresi Logistik Biner Bivariat Orde Dua

Model regresi logistik biner bivariat diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\eta_1(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{logit}\left(\pi_1^*(x)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_1^*(\boldsymbol{x})}{1-\pi_1^*(\boldsymbol{x})}\right) \\
&= \beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \ldots + \beta_{1k}x_k + \beta_{111}x_1^2 + \beta_{122}x_2^2 + \ldots + \beta_{1kk}x_k^2 + \beta_{112}x_1x_2 + \\
&\quad \beta_{113}x_1x_3 + \ldots + \beta_{11k}x_1x_k + \beta_{123}x_2x_3 + \beta_{124}x_2x_4 + \ldots + \beta_{12k}x_2x_k + \ldots + \beta_{1,k-1,k}x_{k-1}x_k \\
&= \boldsymbol{x}^{*T}\beta_1 \\
\eta_2(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{logit}\left(\pi_2^*(x)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_2^*(\boldsymbol{x})}{1-\pi_2^*(\boldsymbol{x})}\right) \\
&= \beta_{20} + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \ldots + \beta_{2k}x_k + \beta_{211}x_1^2 + \beta_{222}x_2^2 + \ldots + \beta_{2kk}x_k^2 + \beta_{212}x_1x_2 \\
&\quad + \beta_{213}x_1x_3 + \ldots + \beta_{21k}x_1x_k + \beta_{223}x_2x_3 + \beta_{224}x_2x_4 + \ldots + \beta_{22k}x_2x_k + \ldots + \beta_{2,k-1,k}x_{k-1}x_k \\
&= \boldsymbol{x}^{*T}\beta_2
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_3(\boldsymbol{x}) &= \ln\left(\psi(\boldsymbol{x})\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x})\pi_{00}^{*}(\boldsymbol{x})}{\pi_{10}^{*}(\boldsymbol{x})\pi_{01}^{*}(\boldsymbol{x})}\right) \\
&= \beta_{30} + \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \ldots + \beta_{3k}x_k + \beta_{311}x_1^2 + \beta_{322}x_2^2 + \ldots + \beta_{3kk}x_k^2 + \beta_{312}x_1x_2 \\
&\quad + \beta_{313}x_1x_3 + \ldots + \beta_{31k}x_1x_k + \beta_{323}x_2x_3 + \beta_{324}x_2x_4 + \ldots + \beta_{32k}x_2x_k + \ldots + \beta_{3,k-1,k}x_{k-1}x_k \\
&= \boldsymbol{x}^{*T}\beta_3
\end{aligned}
$$

dimana $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ merupakan parameter vektor, $\pi_1^*(\boldsymbol{x})$ dan $\pi_2^*(\boldsymbol{x})$ merupakan probabilitas marginal variabel respon, dan $\psi(\boldsymbol{x})$ merupakan odds ratio dari variabel respon yang menunjukkan bahwa variabel respon saling berkorelasi. Vektor parameter disimbolkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \left[\beta_{10}\ \beta_{11}\ \beta_{12}\ \ldots\ \beta_{1k}\ \beta_{111}\ \beta_{122}\ \ldots\ \beta_{1kk}\ \beta_{112}\ \beta_{113}\ \ldots\ \beta_{11k}\ \beta_{123}\ \beta_{124}\ \ldots\ \beta_{12k}\ \beta_{1,k-1,k}\right]^T \\
\beta_2 &= \left[\beta_{20}\ \beta_{21}\ \beta_{22}\ \ldots\ \beta_{2k}\ \beta_{211}\ \beta_{222}\ \ldots\ \beta_{2kk}\ \beta_{212}\ \beta_{213}\ \ldots\ \beta_{21k}\ \beta_{223}\ \beta_{224}\ \ldots\ \beta_{22k}\ \beta_{2,k-1,k}\right]^T \qquad (2.43) \\
\beta_3 &= \left[\beta_{30}\ \beta_{31}\ \beta_{32}\ \ldots\ \beta_{3k}\ \beta_{311}\ \beta_{322}\ \ldots\ \beta_{3kk}\ \beta_{312}\ \beta_{313}\ \ldots\ \beta_{31k}\ \beta_{323}\ \beta_{324}\ \ldots\ \beta_{32k}\ \beta_{3,k-1,k}\right]^T \\
\boldsymbol{x} &= \left[1\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_k\ X_1^2\ X_2^2\ \ldots\ X_k^2\ X_1X_2\ X_1X_3\ \ldots\ X_1X_k\ X_2X_3\ X_2X_4\ \ldots\ X_2X_k\ \ldots\ X_{k-1}X_k\right]^T
\end{aligned}
$$

Probabilitas marjinal dari variabel respon didefinisikan sebagai berikut:

$$P\left(Y_1 = 1 \middle| \boldsymbol{x}\right) = \pi_1^*(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_1\right)}{1+\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_1\right)}$$

$$P\left(Y_1 = 0 \middle| \boldsymbol{x}\right) = 1-\pi_1^*(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1+\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_1\right)}$$

$$P\left(Y_2 = 1 \middle| \boldsymbol{x}\right) = \pi_2^*(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_2\right)}{1+\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_2\right)}$$

$$P\left(Y_2 = 0 \middle| \boldsymbol{x}\right) = 1-\pi_2^*(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1+\exp\left(\boldsymbol{x}^{*T}\beta_2\right)}$$

Fungsi kepadataan probabilitas bersama dari variabel Y_1 dan Y_2 adalah:

$$P\left(Y_{11i}=y_{11i},Y_{10i}=y_{10i},Y_{01i}=y_{01i}\right)=\left(\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x})\right)^{y_{11}}\left(\pi_{10}^{*}(\boldsymbol{x})\right)^{y_{10}}\left(\pi_{01}^{*}(\boldsymbol{x})\right)^{y_{01}}\left(\pi_{00}^{*}(\boldsymbol{x})\right)^{y_{00}}$$

Berdasarkan Palmgren (1989), diperoleh probabilitas bersama sebagai berikut:

Probabilitas bersama dari $\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\left(a-\sqrt{a^2+b}\right)}{2(\psi-1)}, & \psi\neq 1\\ \pi_1^{*}(\boldsymbol{x})\pi_2^{*}(\boldsymbol{x}), & \psi=1\end{cases}$ (2.44)

dimana $a=1+\left(\pi_1^{*}(\boldsymbol{x})+\pi_2^{*}(\boldsymbol{x})\right)(\psi-1)$ dan $b=-4\psi(\psi-1)\pi_1^{*}(\boldsymbol{x})\pi_2^{*}(\boldsymbol{x})$. Jika $\psi\left(x^{*}\right)=1$, maka Y_1 dan Y_2 saling bebas.

Berdasarkan pada Tabel 2.4 dan persamaan (2.44), probabilitas dari $\pi_{10}^{*}(\boldsymbol{x}),\pi_{01}^{*}(\boldsymbol{x})$, dan $\pi_{00}^{*}(\boldsymbol{x})$ pada persamaan (2.42) adalah sebagai berikut:

$$\pi_{10}^{*}(\boldsymbol{x})=\pi_1^{*}(\boldsymbol{x})-\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x}),$$

$$\pi_{01}^{*}(\boldsymbol{x})=\pi_2^{*}(\boldsymbol{x})-\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x}),$$

$$\pi_{00}^{*}(\boldsymbol{x})=1-\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x})-\pi_{10}^{*}(\boldsymbol{x})-\pi_{01}^{*}(\boldsymbol{x})=1-\pi_1^{*}(\boldsymbol{x})-\pi_2^{*}(\boldsymbol{x})+\pi_{11}^{*}(\boldsymbol{x}).$$

Penaksiran parameter pada regresi logistik biner bivariat orde dua menggunakan metode MLE dan pengujian hipotesis menggunakan metode MLRT.

2.7 Pengujian Multikolinieritas

Multikolinieritas merupakan salah satu pelanggaran terhadap asumsi pada pemodelan regresi yang melibatkan lebih dari satu variabel independen. Jika terdapat korelasi antar variabel independen, maka terdapat multikolinieritas dalam model regresi. Model regresi yang memuat multikolinieritas akan mengakibatkan *standard error* penaksir parameter model regresi menjadi besar. Oleh karena itu, kesimpulan yang diperoleh pada pengujian hipotesis parameter menjadi bias. Multikolinieritas dalam model regresi dapat dideteksi berdasarkan besarnya nilai koefisien korelasi Pearson (Hocking, 2003). Jika nilai koefisien korelasi Pearson antar variabel independen lebih dari 0,95, maka terdapat multikolinieritas. Selain itu, multikolinieritas juga dapat dideteksi berdasarkan nilai kecepatan kenaikan variansi atau *Variance Inflation Factor* (VIF). Suatu model regresi terdapat multikolinieritas jika memiliki nilai VIF lebih dari 10 (Kutner, Neter, dan Nastcheim, 2004).

Nilai VIF untuk variabel independen X_r dapat dihitung menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$VIF_r = \frac{1}{1 - R_r^2} = \frac{JKT_r}{JKS_r}, \tag{2.45}$$

dimana R_r^2 menyatakan koefisien determinasi model regresi dari variabel independen X_r yang diregresikan terhadap $(k - 1)$ variabel independen yang lainnya, yaitu $X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}, X_{r+1}, \ldots, X_k$. Koefisien determinasi pada persamaan (2.26) dihitung dengan menggunakan formula seperti berikut:

$$R_r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{ri} - \hat{X}_{ri})^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_{ri} - \bar{X}_r)^2} = \frac{JKR_r}{JKT_r}$$

dimana:

X_{ri} : nilai pengamatan ke-*i* untuk variabel independen ke-*r*

$\hat{X}_{ri}$: nilai taksiran dari X_{ri} dan $\bar{X}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ri}$

JKR_r : jumlah kuadrat regresi untuk variabel independen ke-*r*

JKS_r : jumlah kuadrat sisaan (*error*) untuk variabel independen ke-*r*

JKT_r : jumlah kuadrat total untuk variabel independen ke-*r* (Rencher, 2000).

2.8 Ketepatan Klasifikasi

Untuk menilai kemampuan prosedur klasifikasi dalam memprediksi keanggotaan kelompok, biasa digunakan tingkat kesalahan klasifikasi yang biasa disebut *apperent error rate*. Bisa juga menggunakan sebaliknya, yaitu *apperent correct classification rate* atau tingkat ketepatan klasifikasi (Rencher, 2002). Misalkan variabel respon Y terdiri dari 2 kategori, maka

$$Apparent\ error\ rate = \frac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2}$$

2.9 Indeks Pembangunan Manusia

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan pengukuran perbandingan dari harapan hidup, pendidikan, dan standar hidup untuk semua negara. IPM diperkenalkan oleh *United Nations Development Programme* (UNDP) pada tahun 1990 dan dipublikasikan secara berkala dalam laporan tahunan *Human Development Report* (HDR). Beberapa manfaat dari IPM antara lain, IPM merupakan indikator penting untuk mengukur keberhasilan dalam upaya membangun kualitas hidup manusia, dapat menentukan peringkat atau level pembangunan suatu wilayah atau negara, serta bagi Indonesia, IPM merupakan data strategis karena selain sebagai ukuran kinerja Pemerintah, IPM juga digunakan sebagai salah satu alokator penentuan Dana Alokasi Umum (DAU).

Nilai IPM dapat dijadikan acuan keberhasilan pembangunan manusia di suatu wilayah. Untuk melihat capaian IPM antar wilayah dapat dilihat melalui pengelompokan IPM ke dalam beberapa kategori, yaitu:

Tabel 2.5 Pengelompokan IPM

Nilai IPM	**Kategori**
IPM < 60	IPM Rendah
60≤IPM<70	IPM Sedang
70≤IPM<80	IPM Tinggi
IPM≥ 80	IPM Sangat Tinggi

Dengan menggunakan rata-rata geometrik dalam menyusun IPM dapat diartikan bahwa capaian satu dimensi tidak dapat ditutupi oleh capaian pada dimensi lain. Artinya, untuk mewujudkan pembangunan manusia yang baik, ketiga dimensi harus memperoleh perhatian yang sama besar karena sama pentingnya. Setiap komponen IPM distandardisasi dengan nilai minimum dan maksimum sebelum digunakan untuk menghitung IPM. Rumus yang digunakan sebagai berikut:

i. Dimensi Kesehatan

$$I_{kesehatan} = \frac{AHH - AHH_{min}}{AHH_{maks} - AHH_{min}}$$

ii. Dimensi Pendidikan

$$I_{HLS} = \frac{HLS - HLS_{min}}{HLS_{maks} - HLS_{min}}$$

$$I_{RLS} = \frac{RLS - RLS_{min}}{RLS_{maks} - RLS_{min}}$$

$$I_{pendidikan} = \frac{I_{HLS} + I_{RLS}}{2}$$

iii. Dimensi Pengeluaran

$$I_{pengeluaran} = \frac{\ln(pengeluaran) - \ln(pengeluaran_{min})}{\ln(pengeluaran_{maks}) - \ln(pengeluaran_{min})}$$

Sedangkan rumus untuk menghitung IPM yaitu menggunakan rata-rata geometrik dari indeks kesehatan, pendidikan, dan pengeluaran, seperti berikut:

$$IPM = \sqrt[3]{IS \times IP \times IL} \times 100$$

dimana:

IPM : Indeks Pembangunan Manusia,

IS : Indeks Kesehatan,

IP : Indeks Pendidikan,

IL : Indeks Standar Hidup Layak

IHLS : Indeks Harapan Lama Sekolah

IRLS : Indeks Rata-rata Lama Sekolah

2.10 Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat

Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) merupakan indikator komposit yang menggambarkan kemajuan pembangunan kesehatan, dirumuskan dari data kesehatan berbasis komunitas yaitu Riset Kesehatan dasar (Riskesdas), Survei Ekonomi Nasional (Susenas), dan Survei Potensi Desa (Podes). IPKM pertama kali dikembangkan oleh Balitbangkes pada tahun 2010 dengan menggunakan data survei tahun 2007 dan 2008 yang disebut dengan IPKM 2007 (Kementrian Kesehatan, 2010).

Tujuan dari pengembangan dan penyusunan IPKM adalah untuk memperkaya informasi indikator kesehatan yang dapat menggambarkan keberhasilan pembangunan kesehatan masyarakat sebagai salah satu alat monitor keberhasilan pembangunan kesehatan masyarakat melalui penentuan peringkat provinsi dan kabupaten/kota. IPKM dapat dimanfaatkan sebagai pembuatan dasar perencanaan program pembangunan kesehatan di kabupaten/kota, penyusunan bahan advokasi pemerintah pusat ke pemerintah provinsi maupun kabupaten/kota, agar terpacu memperbaiki peringkat dengan melakukan prioritas program kesehatan beserta sumber dayanya, serta salah satu kriteria dan pertimbangan penentuan alokasi dana bantuan kesehatan dari pusat ke provinsi atau kabupaten/kota, dan dari provinsi ke kabupaten/kota.

Rumus untuk menghitung IPKM yaitu menggunakan tujuh nilai sub indeks atau indeks kelompok indikator mengunakan formula seperti berikut:

$$\text{IPKM} = \frac{SI_{(1)} + SI_{(2)} + \ldots + SI_{(7)}}{7}$$

dengan SI merupakan sub indeks.

2.11 Presentase penduduk miskin

Kemiskinan merupakan kondisi ketiadaan kepemilikian dan rendahnya pendapatan, atau secara lebih rinci menggambarkan suatu kondisi tidak dapat terpenuhinya kebutuhan dasar manusia, yaitu pangan, papan, dan sandang. Beberapa definisi menggambarkan kondisi ketiadaan tersebut. Salah satunya adalah definisi kemiskinan yang digunakan BPS, yang menjelaskan kemiskinan sebagai ketidakmampuan individu dalam memenuhi kebutuhan dasar minimal untuk hidup layak (BPS dan Depsos, 2005). Adapun formula untuk presentase penduduk miskin adalah sebagai berikut:

$$P_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{z - y_i}{z}\right]^\alpha$$

dimana

α : 0

z : garis kemiskinan

y_i : rata-rata pengeluaran per kapita sebulan penduduk yang berada dibawah garis kemiskinan $(i = 1, 2, 3, \ldots, q)$, $y_i < z$

n : jumlah penduduk

2.12 Angka Partisipasi Murni SMP

Angka Partisipasi Murni (APM) merupakan proporsi anak sekolah pada suatu kelompok usia tertentu yang bersekolah pada jenjang yang sesuai dengan kelompok usianya, terhadap seluruh anak pada kelompok usia tersebut. Angka Partisipasi Murni (APM SMP) merupakan rasio jumlah penduduk yang berusia 13-15 tahun dan masih bersekolah pada jenjang SMA dengan jumlah penduduk usia 13-15 tahun. Jenjang SMP yang dimaksud di sini adalah penduduk yang masih berada pada pendidikan formal setingkat SMP/MTS atau sederajat, termasuk di dalamnya penduduk yang sedang menempuh pendidikan melalui program paket C. Adapun persamaan untuk menghitung Angka Partisipasi Murni SMP dapat dilihat pada persamaan di bawah ini:

$$APM\ SMP = \frac{Jumlah\ murid\ SMA\ sederajat\ usia\ 13-15\ tahun}{Jumlah\ penduduk\ usia\ 13-15\ tahun} \times 100$$

dimana:

APM : angka partisipasi murni

2.13 Jumlah Puskesmas

Jumlah puskesmas merupakan banyaknya puskesmas sebagai fasilitas kesehatan di setiap kabupaten/kota.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai tahapan penelitian yang terdiri dari tahapan kajian teori dan terapan. Tahapan kajian teori meliputi tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter model BLR. Tahapan pada kajian terapan meliputi pemodelan BLR, sumber data, variabel penelitian, dan tahapan analisis data. Kajian terapan penelitian ini adalah penerapan model BLR pada pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

3.1 Tahapan Penelitian Kajian Teori

Pada sub bab ini membahas tahapan kajian teori model BLR yang meliputi tahapan penaksiran parameter, tahapan pengujian hipotesis, dan kajian teori model BLR.

3.1.1 Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model BLR

Tahapan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis parameter regresi model BLR adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model BLR Orde Dua

   Dalam penelitian ini, model BLR Orde Dua dibentuk dari distribusi multinomial yang telah dikembangkan. Model BLR dinyatakan seperti pada persamaan (2.42).

2. Penaksiran parameter model BLR Orde Dua menggunakan metode MLE dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

   a. Membuat fungsi likelihood

$$L\left(\beta \mid \boldsymbol{y}\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(\boldsymbol{y}_i \mid \beta\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\pi^*_{11i}\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10i}\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01i}\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00i}\right)^{y_{00i}}$$

dimana Q seperti pada persamaan (2.41). Fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\pi^*_{11i}\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10i}\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01i}\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00i}\right)^{y_{00i}} \right)$$

b. Memaksimumkan fungsi likelihood

$$l(\beta) = \ln L(\beta)$$

$$= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\left(\pi^*_{11i}\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10i}\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01i}\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00i}\right)^{y_{00i}} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\pi^*_{11i}\right)^{y_{11i}} + \ln\left(\pi^*_{10i}\right)^{y_{10i}} + \ln\left(\pi^*_{01i}\right)^{y_{01i}} + \ln\left(\pi^*_{00i}\right)^{y_{00i}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{11i} \ln \pi^*_{11i}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right) + y_{10i} \ln \pi^*_{10i} + y_{01i} \ln \pi^*_{01i} + y_{00i} \ln \pi^*_{00i} \right)$$

dimana:

$$\pi^*_{11i} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{1i} - \sqrt{a_{1i}^2 + b_{1i}}\right)}{2\left(\psi_i - 1\right)}, \psi_i \neq 1 \\ \pi^*_{1i}\pi^*_{2i}, \psi_i = 1 \end{cases}$$

$$a_{1i} = 1 + \left(\pi^*_{1i} + \pi^*_{2i}\right)\left(\psi_i - 1\right)$$

$$b = -4\psi_i\left(\psi_i - 1\right)\pi^*_{1i}\pi^*_{2i}$$

$$\psi_i = \frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{10i}\pi^*_{01i}}$$

$$\pi^*_{10i} = \pi^*_{1i} - \pi^*_{11i}$$

$$\pi^*_{01i} = \pi^*_{2i} - \pi^*_{11i}$$

$$\pi^*_{00i} = 1 - \pi^*_{1i} - \pi^*_{2i} + \pi^*_{11i}$$

c. Menentukan turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood terhadap parameter Q

Berdasarkan definisi (Greene, 2008), vektor gradien dari fungsi log-likelihood adalah:

$$g(\beta) = \left[\left[\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1^T}\right]^T \left[\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2^T}\right]^T \left[\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3^T}\right]^T \right]^T$$

dimana:

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}} \frac{\partial \pi^*_{11i}}{\partial \beta_1^T} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}} \frac{\partial \pi^*_{10i}}{\partial \beta_1^T} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}} \frac{\partial \pi^*_{01i}}{\partial \beta_1^T} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}} \frac{\partial \pi^*_{00i}}{\partial \beta_1^T} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i}\pi^*_{10i} - y_{10i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{2i}} + \frac{y_{10i}\pi^*_{00i} - y_{00i}\pi^*_{10i}}{1-\pi^*_{2i}} \right) \boldsymbol{x}_i$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}} \frac{\partial \pi^*_{11i}}{\partial \beta_2^T} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}} \frac{\partial \pi^*_{10i}}{\partial \beta_2^T} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}} \frac{\partial \pi^*_{01i}}{\partial \beta_2^T} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}} \frac{\partial \pi^*_{00i}}{\partial \beta_2^T} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta_{1i}} \left(\frac{y_{11i}\pi^*_{10i} - y_{10i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{1i}} + \frac{y_{01i}\pi^*_{00i} - y_{00i}\pi^*_{01i}}{1-\pi^*_{1i}} \right) \boldsymbol{x}_i$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3^T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}} \frac{\partial \pi^*_{11i}}{\partial \beta_3^T} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}} \frac{\partial \pi^*_{10i}}{\partial \beta_3^T} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}} \frac{\partial \pi^*_{01i}}{\partial \beta_3^T} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}} \frac{\partial \pi^*_{00i}}{\partial \beta_3^T} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}} - \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}} - \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{00i}} \right) \boldsymbol{x}_i$$

dengan $\Delta_{1i} = \dfrac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{1i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\pi^*_{2i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_i}$ dan $\Delta_i = \left(\dfrac{1}{\pi^*_{11i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{10i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{01i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{00i}} \right)^{-1}$

d. Menentukan penaksir *Maximum Likelihood* parameter model BLR dengan metode BHHH dan *Fisher Scoring*

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian seperti pada persamaan (2.17) hingga (2.21), maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode Fisher Scoring untuk mendapatkan penaksir ML parameter model BLR. Proses iterasi menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_{fs}^{(r+1)} = \hat{\beta}_{fs}^{(r)} + \boldsymbol{I}\left(\hat{\beta}_{fs}^{(r)}\right)^{-1} \boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}_{fs}^{(r)}\right), \text{ untuk } r = 0,1,2,...$$

Sedangkan proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_{bhh}^{(r+1)} = \hat{\beta}_{bhh}^{(r)} - \boldsymbol{H}\left(\hat{\beta}_{bhh}^{(r)}\right)^{-1} \boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}_{bhh}^{(r)}\right), \text{ untuk } r = 0,1,2,...$$

Dimana $\hat{\theta}^{(r)}$ dan $\hat{\theta}^{(r+1)}$ adalah MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r* dan $r + 1$, $\boldsymbol{g}(\hat{\theta}^{(r)})$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*, $\boldsymbol{I}(\theta^{(r)})^{-1}$ merupakan invers dari matriks informasi, dan $\boldsymbol{H}(\theta^{(r)})^{-1}$ adalah invers dari matriks Hessian untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*. Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|\hat{\theta}^{(r+1)} - \hat{\theta}^{(r)}\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

3. Pengujian hipotesis parameter model BLR

Pengujian parameter pada model BLR dapat dilakukan baik secara serentak maupun parsial. Tahapan pengujian hipotesis parameter secara serentak adalah sebagai berikut:

a. Menetapkan rumusan hipotesis

$$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \ldots = \beta_{hk} = \beta_{h11} = \beta_{h22} = \ldots = \beta_{hkk} = \beta_{h12} = \beta_{h13} = \ldots =$$

$$\beta_{h1k} = \beta_{h23} = \beta_{h24} = \ldots = \beta_{h24} = \ldots = \beta_{h2k} = \beta_{h,k-1,k} = 0, h = 1,2,3$$

H_1 : Paling tidak terdapat satu $\beta_{gh} \neq 0$; $g = 1,2, \ldots k, h = 1,2,3$

b. Mendefinisikan himpunan parameter dibawah H_0

$$\omega_2 = \{\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\}$$

c. Menetapkan fungsi likelihood dibawah H_0

$$L(\omega_2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\pi^*_{11i}\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10i}\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01i}\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00i}\right)^{y_{00i}} \right)$$

d. Menentukan fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$l(\omega_2) = \ln L(\omega_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{11i} \ln \pi^*_{11i} + y_{10i} \ln \pi^*_{10i} + y_{01i} \ln \pi^*_{01i} + y_{00i} \ln \pi^*_{00i} \right)$$

e. Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah H_0

$$l(\hat{\omega}_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{11i} \ln \hat{\pi}^*_{11i} + y_{10i} \ln \hat{\pi}^*_{10i} + y_{01i} \ln \hat{\pi}^*_{01i} + y_{00i} \ln \hat{\pi}^*_{00i} \right)$$

dimana:

$$\hat{\pi}^*_{11i} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{2i} - \sqrt{a_{2i}^2 + b_{2i}}\right)}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1 \\ \hat{\pi}^*_{1i} \hat{\pi}^*_{2i}, & \psi_i = 1 \end{cases}$$

dengan $a_{2i} = 1 + \left(\hat{\pi}^*_1 + \hat{\pi}^*_2\right)(\psi_i - 1)$, $b = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}^*_1 \hat{\pi}^*_2$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}^*_{11i} \hat{\pi}^*_{00i}}{\hat{\pi}^*_{10i} \hat{\pi}^*_{01i}}, \quad \hat{\pi}^*_{1i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_{01})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{01})}, \text{ dan } \hat{\pi}^*_{2i} = \frac{\exp(\hat{\beta}_{02})}{1 + \exp(\hat{\beta}_{02})},$$

$\hat{\pi}_{10i} = \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{11i}$, $\hat{\pi}_{01i} = \hat{\pi}_{2i} - \hat{\pi}_{11i}$, dan $\hat{\pi}_{00i} = 1 - \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{2i} + \hat{\pi}^*_{11i}$

f. Mendefinisikan himpunan parameter dibawah populasi

$$\Omega_2 = \{\beta_{1k}, \beta_{1kk}, \beta_{11k}, \beta_{12k} ..., \beta_{1,k-1,k}, \beta_{2k}, \beta_{2kk}, \beta_{21k}, \beta_{22k} ..., \beta_{2,k-1,k},$$

$$\beta_{3k}, \beta_{3kk}, \beta_{31k}, \beta_{32k} ..., \beta_{3,k-1,k}\}$$

g. Menentapkan fungsi likelihood dibawah populasi

$$L(\Omega_2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\pi_{11i}^*\right)^{y_{11i}} \left(\pi_{10i}^*\right)^{y_{10i}} \left(\pi_{01i}^*\right)^{y_{01i}} \left(\pi_{00i}^*\right)^{y_{00i}} \right)$$

h. Mendefinisikan fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$l(\Omega_2) = \ln L(\Omega_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\pi_{11i}^*\right)^{y_{11i}} + \ln\left(\pi_{10i}^*\right)^{y_{10i}} + \ln\left(\pi_{01i}^*\right)^{y_{01i}} + \ln\left(\pi_{00i}^*\right)^{y_{00i}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_{11i} \ln \pi_{11i}^* + y_{10i} \ln \pi_{10i}^* + y_{01i} \ln \pi_{01i}^* + y_{00i} \ln \pi_{00i}^* \right)$$

i. Menentukan maksimum fungsi log-likelihood dibawah populasi

$$l(\hat{\Omega}_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{11i} \ln \hat{\pi}_{11i}^* + y_{10i} \ln \hat{\pi}_{10i}^* + y_{01i} \ln \hat{\pi}_{01i}^* + y_{00i} \ln \hat{\pi}_{00i}^* \right)$$

dimana:

$$\hat{\pi}_{11i}^* = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{3i} - \sqrt{a_{3i}^2 + b_{3i}}\right)}{2(\psi_i - 1)}, & \psi_i \neq 1 \\ \hat{\pi}_{1i}^* \hat{\pi}_{2i}^*, & \psi_i = 1 \end{cases}$$

dengan $a_{3i} = 1 + \left(\hat{\pi}_{1i}^* + \hat{\pi}_{2i}^*\right)(\psi_i - 1)$, $b_{3i} = -4\psi_i(\psi_i - 1)\hat{\pi}_{1i}^*\hat{\pi}_{2i}^*$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i}^* \hat{\pi}_{00i}^*}{\hat{\pi}_{10i}^* \hat{\pi}_{01i}^*},\ \hat{\pi}_{1i}^* = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_1^T x_i^*\right)}{1 + \exp\left(\hat{\beta}_1^T x_i^*\right)},\ \text{dan } \hat{\pi}_{2i}^* = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_2^T x_i^*\right)}{1 + \exp\left(\hat{\beta}_2^T x_i^*\right)},$$

$\hat{\pi}_{10i} = \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{11i}$, $\hat{\pi}_{01i} = \hat{\pi}_{2i} - \hat{\pi}_{11i}$, dan $\hat{\pi}_{00i} = 1 - \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{2i} + \hat{\pi}_{11i}^*$

j. Membuat odds ratio

$$\Lambda_2 = \frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\pi_{11i}^{*}\right)^{y_{11i}}\left(\pi_{10i}^{*}\right)^{y_{10i}}\left(\pi_{01i}^{*}\right)^{y_{01i}}\left(\pi_{00i}^{*}\right)^{y_{00i}}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}}\hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}}\hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}}\hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}}\right)}.$$

Daerah tolak H_0 jika $\Lambda_2 < \Lambda_0$, dimana $\Lambda_2 < \Lambda_0 < 1$, dengan $\alpha = P\left(\Lambda_2 < \Lambda_0 \mid H_0 \text{ benar}\right)$

k. Menentukan statistik uji

$$G_2^2 = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega}_2)}{L(\hat{\Omega}_2)}\right) = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_2\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_2\right)\right]$$

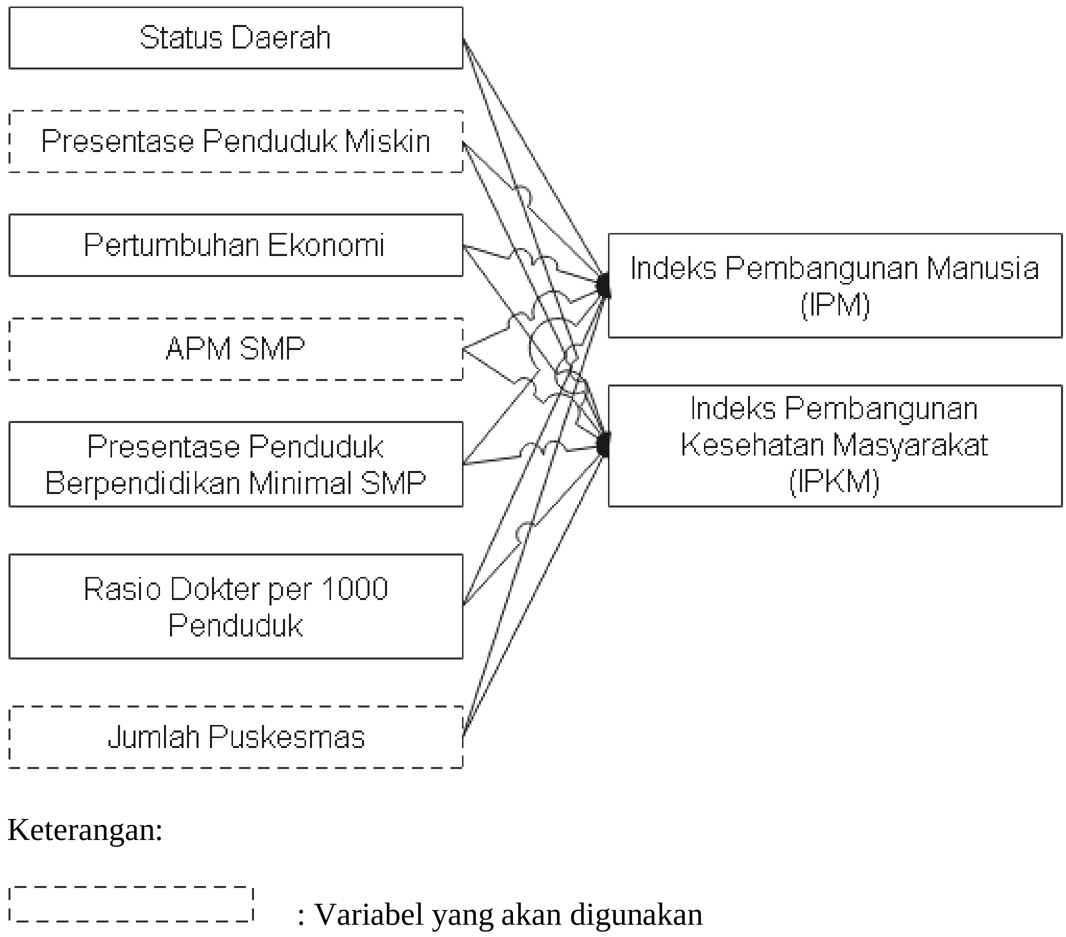
l. Menentukan distribusi G_2^2 dan menentukan daerah penolakan H_0

3.2 Tahapan Penelitian Kajian Terapan

Pada tahapan ini membahas penerapan model MLR pada pemodelan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap IPM dan presentase penduduk miskin kabupaten/kota di Jawa Timur. Berikut ini disajikan tahapan-tahapan pada kajian terapan model BLR.

3.2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data yang telah dipublikasikan oleh BPS Provinsi Jawa Timur dalam website resminya yaitu www.jatim.bps.go.id dan Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan (Balitbangkes) Kementrian Kesehatan. Unit observasi yang digunakan adalah seluruh kabupaten/kota yang ada di Jawa Timur yaitu sebanyak 38 kabupaten/kota. Data kabupaten/kota yang digunakan disajikan pada Lampiran 1. Berikut adalah kerangka konsep yang digunakan dalam penelitian ini:



Gambar 3.1 Kerangka Konsep Penelitian

3.2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah dua buah variabel respon dan tiga buah variabel prediktor.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

Variabel Penelitian	Nama Variabel	Kategori	Dummy
Y_1	Indeks Pembangunan Manusia (IPM)	1. IPM Sedang	0
		2. IPM Tinggi	1
Y_2	Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM)	1. IPKM DBK	0
		2. IPKM B-DBK	1
X_1	Presentase Penduduk Miskin	-	-
X_2	Angka Partisipasi Murni kelompok umur 13-15 tahun	-	-
X_3	Jumlah Puskesmas	-	-

Pengkategorian untuk variabel dependen, mengacu pada Kementrian Kesehatan (2010,2011) dan Badan Pusat Statistik (2019). IPM (Y_1) terdiri dari dua kategori, yaitu $Y_1 = 0$ untuk IPM sedang dan $Y_1 = 1$ untuk IPM tinggi. IPM sedang merupakan kabupaten/kota yang mempunyai nilai IPM termasuk pada interval $60 \leq IPM < 70$ sedangkan IPM tinggi merupakan kabupaten/kota yang mempunyai nilai IPM termasuk pada interval $70 \leq IPM < 80$. IPKM (Y_2) terdiri dari kategori, yaitu $Y_2 = 0$ untuk IPKM Daerah Bermasalah Kesehatan (IPKM DBK) dan $Y_2 = 1$ untuk IPKM Bukan DBK (IPKM B-DBK). IPKM DBK adalah kabupaten/kota yang mempunyai nilai IPKM kurang dari rata-rata IPKM di Jawa Timur, sedangkan IPKM B-DBK adalah kabupaten/kota yang mempunyai IPKM lebih dari atau sama dengan rata-rata IPKM di Jawa Timur.

IPM yang memenuhi interval rendah dikategorikan ke dalam IPM maksimal sedang dan IPM yang memenuhi interval sangat tinggi dikategorikan ke dalam IPM tinggi, oleh karena pada data yang digunakan mayoritas berada pada interval sedang dan tinggi, maka masing-masing variabel respon menggunakan dua kategori karena data IPM di Jawa Timur yang memenuhi berada pada interval tersebut.

Berikut ini merupakan konsep dan definisi variabel operasional yang digunakan.

1. IPM (Y_1) merupakan indikator untuk mengukur keberhasilan dalam upaya membangun kualitas hidup manusia serta dapat menentukan peringkat atau level pembangunan suatu wilayah atau negara.
2. Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat (IPKM) (Y_2) merupakan indikator komposit yang menggambarkan kemajuan pembangunan kesehatan
3. Presentase penduduk miskin (X_1) merupakan jumlah penduduk yang hidup dibawah garis kemiskinan dibagi dengan jumlah penduduk keseluruhan yang ada pada kabupaten/kota kemudian dikalikan 100%.
4. Angka Partisipasi Murni (APM) SMP (X_2) merupakan salah satu tolok ukur yang digunakan MDGs dalam mengukur pencapaian kesetaraan gender dibidang pendidikan. APM mengukur proporsi anak yang sekolah tepat waktu.
5. Jumlah Puskesmas (X_3) merupakan banyaknya puskesmas sebagai fasilitas kesehatan di setiap kabupaten/kota.

3.2.3 Struktur Data

Struktur data yang digunakan dalam penelitian berdasarkan variabel-variabel yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 3.2 Struktur Data Penelitian

Kab/Kota	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3
1	Y_{11}	Y_{21}	X_{11}	X_{21}	X_{31}
2	Y_{12}	Y_{22}	X_{12}	X_{22}	X_{32}
3	Y_{13}	Y_{23}	X_{13}	X_{23}	X_{33}
4	Y_{14}	Y_{24}	X_{14}	X_{24}	X_{34}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Y_{1n}	Y_{2n}	X_{1n}	X_{2n}	X_{3n}

a. Tahapan Penelitian

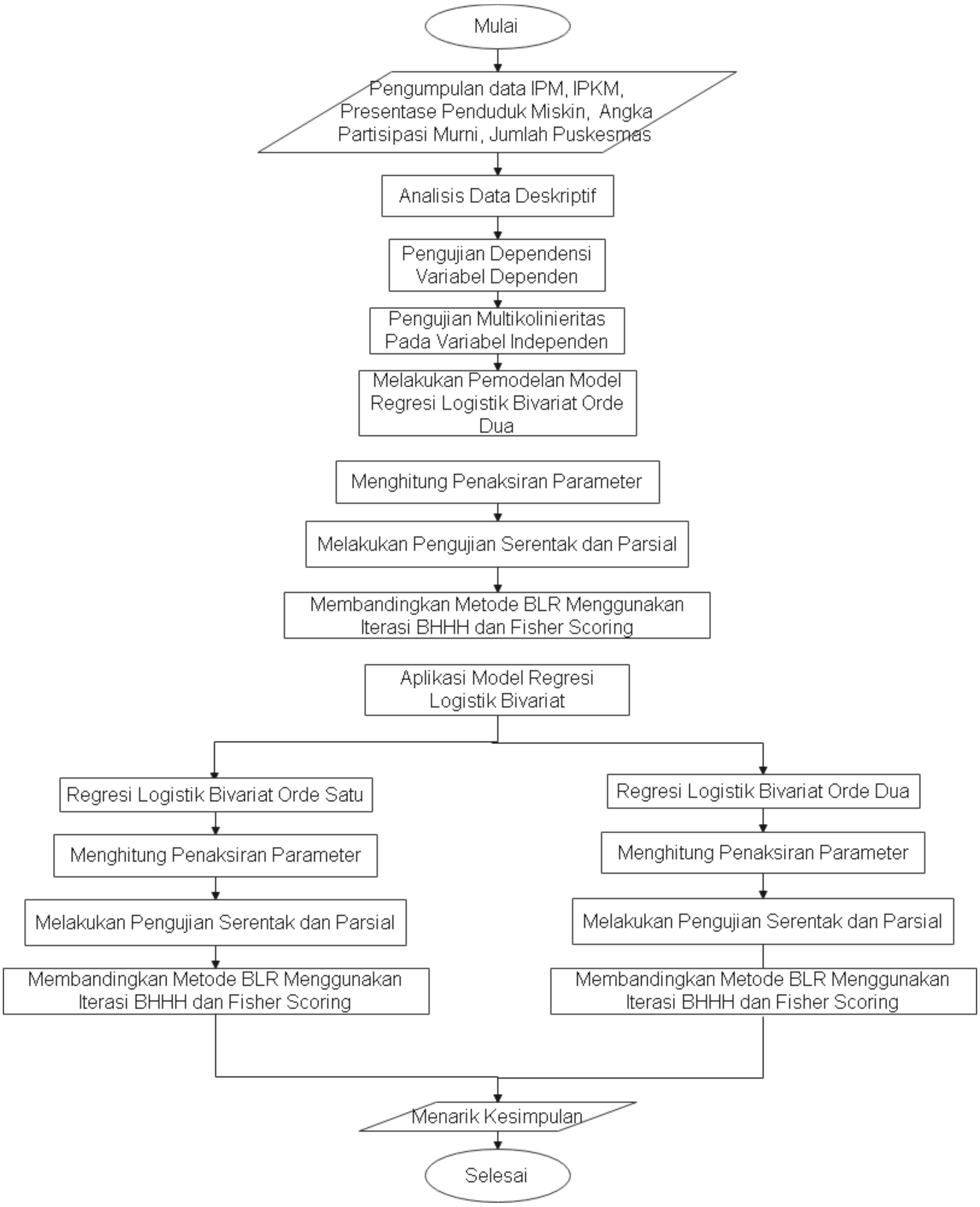
Tahapan penelitian untuk pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur dengan model BLR adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis statistika deskriptif terhadap variabel respon dan variabel prediktor.
2. Melakukan pengujian dependensi antar variabel respon.
3. Melakukan pengujian multikolinieritas pada variabel prediktor.
4. Melakukan pemodelan untuk model BLR orde dua dengan tahapan sebagai berikut:
    a. Menghitung penaksiran parameter dengan metode MLE
    b. Melakukan pengujian serentak terhadap parameter dengan metode MLRT
    c. Melakukan pengujian parsial terhadap masing-masing parameter dengan uji Wald
    d. Melakukan interpretasi terhadap hasil analisis

5. Membandingkan iterasi Fisher Scoring dan BHHH pada model regresi logistik biner bivariat orde dua dengan menggunakan
   a. Nilai dari Standar Error
   b. Prosentase Ketepatan Klasifikasi

3.2.4 Diagram Alir Analisis Data

Secara umum penelitian ini memiliki kerangka kerja sebagai berikut:



Gambar 3.2 Diagram Alir

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai kajian teori untuk model *Bivariate Logistic Regression* (BLR). Kajian teori yang dibahas meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pembahasan diawali dengan menjelaskan tentang metode BLR, dilanjutkan dengan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis. Pengujian hipotesis yang dibahas meliputi pengujian hipotesis parameter secara serentak dan secara parsial.

4.1 Model Regresi Logistik Bivariat Orde Dua

Model regresi logistik bivariat merupakan salah satu dari keluarga model logit multivariat yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara dua respon biner yang berkorelasi dengan satu atau lebih variabel prediktor. Dalam penelitian ini akan dibahas model BLR orde dua untuk dua variabel respon yang saling berkorelasi, dimana masing-masing variabel prediktor mempunyai dua kategori.

Misalkan variabel respon pertama dinotasikan dengan Y_1 dan variabel respon kedua dengan Y_2, maka model BLR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\eta_1(\boldsymbol{x}_i^*) &= \boldsymbol{logit}\left(\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)}{1-\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)}\right) \\
&= \beta_{10}+\beta_{11}x_{1i}+\beta_{12}x_{2i}+\ldots+\beta_{1k}x_{ki}+\beta_{111}x_{1i}^2+\beta_{122}x_{2i}^2+\ldots+\beta_{1kk}x_{ki}^2+\beta_{112}x_{1i}x_{2i}+ \\
&\quad \beta_{113}x_{1i}x_{3i}+\ldots+\beta_{11k}x_{1i}x_{ki}+\beta_{123}x_{2i}x_{3i}+\beta_{124}x_{2i}x_{4i}+\ldots+\beta_{12k}x_{2i}x_{ki}+\ldots+\beta_{1,k-1,k}x_{ki-1}x_{ki} \\
&= \boldsymbol{x}_i^{*T}\boldsymbol{\beta}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_2(\boldsymbol{x}_i^*) &= \textbf{\textit{logit}}\left(\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)}{1-\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)}\right) \\
&= \beta_{20} + \beta_{21}x_{1i} + \beta_{22}x_{2i} + \ldots + \beta_{2k}x_{ki} + \beta_{211}x_{1i}^2 + \beta_{222}x_{2i}^2 + \ldots + \beta_{2kk}x_{ki}^2 + \beta_{212}x_{1i}x_{2i} \\
&\quad + \beta_{213}x_{1i}x_{3i} + \ldots + \beta_{21k}x_{1i}x_{ki} + \beta_{223}x_{2i}x_{3i} + \beta_{224}x_{2i}x_{4i} + \ldots + \beta_{22k}x_{2i}x_{ki} + \ldots + \beta_{2,k-1,k}x_{ki-1}x_{ki} \\
&= \boldsymbol{x}_i^{*T}\beta_2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_3(\boldsymbol{x}_i^*) &= \ln\left(\psi(\boldsymbol{x}_i^*)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\pi_{11}^*(\boldsymbol{x}_i^*)\pi_{00}^*(\boldsymbol{x}_i^*)}{\pi_{10}^*(\boldsymbol{x}_i^*)\pi_{01}^*(\boldsymbol{x}_i^*)}\right) \\
&= \beta_{30} + \beta_{31}x_{1i} + \beta_{32}x_{2i} + \ldots + \beta_{3k}x_{ki} + \beta_{311}x_{1i}^2 + \beta_{322}x_{2i}^2 + \ldots + \beta_{3kk}x_{ki}^2 + \beta_{312}x_{1i}x_{2i} \\
&\quad + \beta_{313}x_{1i}x_{3i} + \ldots + \beta_{31k}x_{1i}x_{ki} + \beta_{323}x_{2i}x_{3i} + \beta_{324}x_{2i}x_{4i} + \ldots + \beta_{32k}x_{2i}x_{ki} + \ldots + \beta_{3,k-1,k}x_{ki-1}x_{ki} \\
&= \boldsymbol{x}_i^{*T}\beta_3
\end{aligned}
$$

dimana Q_1, Q_2, Q_3 merupakan parameter vektor, $\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)$ dan $\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)$ merupakan probabilitas marginal variabel respon, dan $\psi(\boldsymbol{x}_i^*)$ merupakan odds ratio dari variabel respon yang menunjukkan bahwa variabel respon saling berkorelasi. Vektor parameter disimbolkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \begin{bmatrix}\beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} & \beta_{111} & \beta_{122} & \ldots & \beta_{1kk} & \beta_{112} & \beta_{113} & \ldots & \beta_{11k} & \beta_{123} & \beta_{124} & \ldots & \beta_{12k} & \beta_{1k-1,k}\end{bmatrix}^T \\
\beta_2 &= \begin{bmatrix}\beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} & \beta_{211} & \beta_{222} & \ldots & \beta_{2kk} & \beta_{212} & \beta_{213} & \ldots & \beta_{21k} & \beta_{223} & \beta_{224} & \ldots & \beta_{22k} & \beta_{2,k-1,k}\end{bmatrix}^T \\
\beta_3 &= \begin{bmatrix}\beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \ldots & \beta_{3k} & \beta_{311} & \beta_{322} & \ldots & \beta_{3kk} & \beta_{312} & \beta_{313} & \ldots & \beta_{31k} & \beta_{323} & \beta_{324} & \ldots & \beta_{32k} & \beta_{3,k-1,k}\end{bmatrix}^T
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\boldsymbol{x}_i^* = \begin{bmatrix}x_{1i} & x_{2i} & \ldots & x_{ki} & x_{1i}^2 & x_{2i}^2 & \ldots & x_{ki}^2 & x_{1i}x_{2i} & x_{1i}x_{3i} & \ldots & x_{1i}x_{ki} & x_{2i}x_{3i} & x_{2i}x_{4i} & \ldots & x_{2i}x_{ki} & \ldots & x_{ki-1}x_{ki}\end{bmatrix}^T
$$

Probabilitas marjinal dari variabel respon didefinisikan sebagai berikut:

$$P\left(Y_{1i}=1 \mid \boldsymbol{x}_i^*\right)=\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)=\frac{\exp\left(x_i^{*T}\beta_1\right)}{1+\exp\left(x_i^{*T}\beta_1\right)}$$

$$P\left(Y_{1i}=0 \mid \boldsymbol{x}_i^*\right)=1-\pi_1^*(\boldsymbol{x}_i^*)=\frac{1}{1+\exp\left(x_i^{*T}\beta_1\right)}$$

$$P\left(Y_{2i}=1 \mid \boldsymbol{x}_i^*\right)=\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)=\frac{\exp\left(x_i^{*T}\beta_2\right)}{1+\exp\left(x_i^{*T}\beta_2\right)}$$

$$P\left(Y_{2i}=0 \mid \boldsymbol{x}_i^*\right)=1-\pi_2^*(\boldsymbol{x}_i^*)=\frac{1}{1+\exp\left(x_i^{*T}\beta_2\right)}$$

Fungsi kepadataan probabilitas bersama dari variabel Y_{1i} dan Y_{2i} adalah:

$$P\left(Y_{11i}=y_{11i},Y_{10i}=y_{10i},Y_{01i}=y_{01i}\right)=\left(\pi_{11}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right)^{y_{11i}}\left(\pi_{10}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right)^{y_{10i}}\left(\pi_{01}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right)^{y_{01i}}\left(\pi_{00}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right)^{y_{00i}} \quad (4.3)$$

Berdasarkan Palmgren (1989), diperoleh probabilitas bersama sebagai berikut:

Probabilitas bersama dari $\pi_{11}^*(\boldsymbol{x}_i^*)=\begin{cases}\dfrac{\left(a-\sqrt{a^2+b}\right)}{2\psi(\psi-1)}, & \psi\neq 1\\ \pi_1^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\pi_2^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right), & \psi=1\end{cases}$ (4.4)

dimana $a=1+\left(\pi_1^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)+\pi_2^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\right)(\psi-1)$ dan $b=-4\psi(\psi-1)\pi_1^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\pi_2^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)$.

Jika $\psi\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)=1$, maka Y_{1i} dan Y_{2i} saling bebas

Berdasarkan pada Tabel 2.4 dan persamaan (4.4), probabilitas dari $\pi_{10}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right),\pi_{01}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)$, dan $\pi_{00}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)$ pada persamaan (4.1) adalah sebagai berikut:

$$\pi_{10}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)=\pi_1^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)-\pi_{11}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right) \quad (4.5)$$

$$\pi_{01}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)=\pi_2^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)-\pi_{11}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right) \quad (4.6)$$

$$\pi_{00}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)=1-\pi_{11}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)-\pi_{10}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)-\pi_{01}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)=1-\pi_1^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)-\pi_2^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)+\pi_{11}^*\left(\boldsymbol{x}_i^*\right) \quad (4.7)$$

$\pi^*_{gh}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)$ adalah probabilitas bersama dari Y_{1i} dan Y_{2i} yang bergantung terhadap variabel respon pada pengamatan ke-i, dimana Y_{1i} mempunyai kategori bernilai g dan Y_{2i} mempunyai kategori bernilai h, yaitu

$$\pi^*_{gh}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right) = P\left(Y_{1i} = g, Y_{2i} = h \middle| \boldsymbol{x}^*_i\right), \text{untuk } g,h = 0,1 \text{ dan } i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.8}$$

4.1.1 Penaksiran Parameter Model BLR

Model BLR pada persamaan (4.1) mempunyai $3(k+1)$ parameter, yaitu $(k+1)$ parameter regresi yang menunjukkan adanya korelasi antar variabel respon dan $2(k+1)$ parameter regresi yang menunjukkan adanya hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon. Parameter pada model BLR dinotasikan dengan vektor Q, yaitu:

$$\beta = \left[\beta_1^T \quad \beta_2^T \quad \beta_3^T\right]^T \tag{4.9}$$

Merupakan matriks berukuran $1\times\left(k+1\right)$.

dimana

$$\beta_1 = \left[\beta_{10} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \ldots \quad \beta_{1k} \quad \beta_{111} \quad \beta_{122} \quad \ldots \quad \beta_{1kk} \quad \beta_{112} \quad \beta_{113} \quad \ldots \quad \beta_{11k} \quad \beta_{123} \quad \beta_{124} \quad \ldots \quad \beta_{12k} \quad \beta_{1k-1,k}\right]^T$$

$$\beta_2 = \left[\beta_{20} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \ldots \quad \beta_{2k} \quad \beta_{211} \quad \beta_{222} \quad \ldots \quad \beta_{2kk} \quad \beta_{212} \quad \beta_{213} \quad \ldots \quad \beta_{21k} \quad \beta_{223} \quad \beta_{224} \quad \ldots \quad \beta_{22k} \quad \beta_{2,k-1,k}\right]^T$$

$$\beta_3 = \left[\beta_{30} \quad \beta_{31} \quad \beta_{32} \quad \ldots \quad \beta_{3k} \quad \beta_{311} \quad \beta_{322} \quad \ldots \quad \beta_{3kk} \quad \beta_{312} \quad \beta_{313} \quad \ldots \quad \beta_{31k} \quad \beta_{323} \quad \beta_{324} \quad \ldots \quad \beta_{32k} \quad \beta_{3,k-1,k}\right]^T$$

Untuk mendapatkan penaksir parameter model BLR pada persamaan (4.8) akan digunakan metode *MaximumLikelihood Estimator*. Berdasarkan pada metode MLE, penaksir $\hat{Q}$ merupakan nilai vektor Q yang memaksimumkan fungsi likelihood dan juga memaksimumkan fungsi log-likelihood. Penaksir ML dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan likelihood, yaitu sistem persamaan dari semua turunan parsial pertama dari fungsi log-likelihood setelah disamakan dengan nol.

Berdasarkan model BLR pada persamaan (4.1), persamaan likelihood terdiri dari persamaan-persamaan yang saling berkaitan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit. Oleh karena itu, penaksir ML parameter model BLR tidak diperoleh secara analitik tetapi didekati dengan akar persamaan *likelihood*, yang diperoleh melalui proses iterasi menggunakan BHHH dan *Fisher Scoring*. Penentuan penaksir ML parameter model BLR menggunakan metode BHHH membutuhkan vektor gradien dan matriks Hessian model BLR, sedangkan pada metode *Fisher Scoring* membutuhkan matriks informasi.

4.1.2 Penaksir Parameter dengan Iterasi Fisher Scoring

Penaksiran parameter model regresi logistik bivariat yang tidak dapat diperoleh secara analitik, akan didekati dengan akar persamaan *likelihood* yang diperoleh melalui proses iterasi menggunakan Fisher Scoring. Diketahui $\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} Y_{1i} & Y_{2i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{10i} & Y_{01i} \end{bmatrix}^T$, $i = 1, 2, ..., n$ adalah sampel vektor random yang saling independen dan identik berdistribusi multinomial yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{y}_i \sim M\left(1, \pi^*_{11}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right), \pi^*_{10}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right), \pi^*_{01}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right), \pi^*_{00}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)$ dimana $\pi^*_{11}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right), \pi^*_{10}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right), \pi^*_{01}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)$, $\pi^*_{00}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)$ adalah probabilitas dari masing-masing variabel random $Y_{11i}, Y_{10i}, Y_{01i}, \text{dan } Y_{00i}$ yang memuat parameter β. Dengan fungsi distribusi probabilitas bersama didefinisikan sebagai:

$$f\left(\boldsymbol{y}_i \mid \beta\right) = P\left(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}, Y_{00i} = y_{00i}\right).$$

$$= \left(\pi^*_{11}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{00i}} \tag{4.10}$$

Berdasarkan pada persamaan fungsi probabilitas pada persamaan (4.10), selanjutnya membentuk fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L_i\left(\beta\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i \mid \beta\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(Y_{11i} = y_{11i}, Y_{10i} = y_{10i}, Y_{01i} = y_{01i}\right)$$

$$= \left(\pi^*_{11}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{11i}} \left(\pi^*_{10}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{10i}} \left(\pi^*_{01}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{01i}} \left(\pi^*_{00}\left(\boldsymbol{x}^*_i\right)\right)^{y_{00i}}$$

dimana vektor β seperti pada persamaan (4.9).

Misalkan $\left(\pi_{gh}^{*}\left(\boldsymbol{x}_i^{*}\right)\right)^{y_{gh}} = \left(\pi_{ghi}^{*}\right)^{y_{ghi}}$ untuk $g,h = 0,1;\ i = 1,2,...,n,$ maka fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut:

$$L_i\left(\beta\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\pi_{11}^{*}\right)^{y_{11i}}\left(\pi_{10}^{*}\right)^{y_{10i}}\left(\pi_{01}^{*}\right)^{y_{01i}}\left(\pi_{00}^{*}\right)^{y_{00i}} \tag{4.11}$$

Selanjutnya fungsi likelihood tersebut lebih mudah dimaksimumkan dalam bentuk $\ln L_i\left(\beta\right)$ dan dinyatakan dengan $l_i\left(\beta\right)$.

$$\begin{aligned} l_i\left(\beta\right) &= \ln L_i\left(\beta\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_{11i}\ln\pi_{11i}^{*} + y_{10i}\ln\pi_{10i}^{*} + y_{01i}\ln\pi_{01i}^{*} + y_{00i}\ln\pi_{00i}^{*}\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Fungsi log-likelihood pada persamaan (4.11) merupakan fungsi dari vektor β yang berdimensi $3\left(k+1\right)$. Berdasarkan definisi (Greene, 2008), vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (4.11) adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{g}\left(\beta\right) = \left[\left[\frac{\partial l\left(\beta\right)}{\partial\beta_1^T}\right]^T \quad \left[\frac{\partial l\left(\beta\right)}{\partial\beta_2^T}\right]^T \quad \left[\frac{\partial l\left(\beta\right)}{\partial\beta_3^T}\right]^T\right]^T \tag{4.13}$$

dimana vektor β seperti pada persamaan (4.8).

Berdasarkan model BLR pada persamaan (4.1), misalkan $\eta_1 = \eta_1\left(x_i^{*}\right)$, $\eta_2 = \eta_2\left(x_i^{*}\right)$, dan $\eta_3 = \eta_3\left(x_i^{*}\right)$ sehingga berbentuk $\eta = \left[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\right]^T$ dan $\pi^{*} = \left[\pi_{11}^{*} \quad \pi_{10}^{*} \quad \pi_{01}^{*} \quad \pi_{00}^{*}\right]^T$. Selanjutnya menentukan turunan vektor η terhadap π^{*}, yaitu $\frac{\partial\eta}{\partial\pi^{*}}$. Karena vektor π^{*} mempunyai empat elemen, sedangkan vektor η hanya mempunyai tiga elemen, maka untuk mendapatkan $\frac{\partial\eta}{\partial\pi^{*}}$ yang simetris misalkan $\eta_0 = \ln\pi_{++}^{*}$, dengan $\pi_{++}^{*} = \pi_{11}^{*} + \pi_{10}^{*} + \pi_{01}^{*} + \pi_{00}^{*}$. Sehingga diperoleh

$\eta = \begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}^T$. Misalkan $\boldsymbol{D}_1$ adalah matriks yang elemen-elemennya adalah vektor η terhadap π^*, yaitu

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi^*_{11i}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi^*_{10i}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi^*_{01i}} & \frac{\partial \eta_0}{\partial \pi^*_{00i}} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi^*_{11i}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi^*_{10i}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi^*_{01i}} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \pi^*_{00i}} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi^*_{11i}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi^*_{10i}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi^*_{01i}} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \pi^*_{00i}} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi^*_{11i}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi^*_{10i}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi^*_{01i}} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \pi^*_{00i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\pi^*_{1i}} & \frac{1}{\pi^*_{1i}} & -\frac{1}{1-\pi^*_{1i}} & -\frac{1}{1-\pi^*_{1i}} \\ \frac{1}{\pi^*_{2i}} & -\frac{1}{1-\pi^*_{2i}} & \frac{1}{\pi^*_{2i}} & -\frac{1}{1-\pi^*_{2i}} \\ \frac{1}{\pi^*_{11i}} & -\frac{1}{\pi^*_{10i}} & -\frac{1}{\pi^*_{01i}} & \frac{1}{\pi^*_{00i}} \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Berdasarkan persamaan (4.13) diperoleh invers dari matriks $\boldsymbol{D}_1$ seperti persamaan berikut:

$$\boldsymbol{D}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \pi^*_{11i} & \frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{1i}\Delta_{1i}} & \frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}\Delta_{1i}} & \Delta_i \\ \pi^*_{10i} & \frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_{1i}} & -\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}\Delta_{1i}} & -\Delta_i \\ \pi^*_{01i} & -\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{2i}\Delta_{1i}} & \frac{\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\left(1-\pi^*_{1i}\right)\Delta_{1i}} & -\Delta_i \\ \pi^*_{00i} & -\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_{1i}} & -\frac{\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\left(1-\pi^*_{1i}\right)\Delta_{1i}} & \Delta_i \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

dimana $\Delta_{1i} = \frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{1i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\pi^*_{2i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_i}$ dan $\Delta_i = \left(\frac{1}{\pi^*_{11i}} + \frac{1}{\pi^*_{10i}} + \frac{1}{\pi^*_{01i}} + \frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)^{-1}$

Vektor gradien dari fungsi log-likelihood pada persamaan (4.11) dapat ditulis menjadi:

$$\boldsymbol{g}_i(\beta) = \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta}. \tag{4.16}$$

Berdasarkan persamaan (4.12) sampai (4.14), diperoleh elemen-elemen vektor gradien pada persamaan berikut:

$$
\boldsymbol{g}_i(\beta) = \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_1} = \frac{\partial\left(y_{11i}\ln\pi^*_{11i} + y_{10i}\ln\pi^*_{10i} + y_{01i}\ln\pi^*_{01i} + y_{00i}\ln\pi^*_{00i}\right)}{\partial \beta_1}
$$

$$
= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_1} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_1} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_1} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_1}
$$

$$
= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_1} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_1} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_1} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_1}
$$

$$
= \frac{y_{11i}\,\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{11i}\;\pi^*_{2i}\,\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i + \frac{y_{10i}\,\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{10i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i - \frac{y_{01i}\,\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{01i}\;\pi^*_{2i}\,\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i - \frac{y_{10i}\,\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{10i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i
$$

$$
= \frac{1}{\Delta_{1i}}\left(y_{11i}\frac{\pi^*_{01i}}{\pi^*_{2i}} + y_{10i}\frac{\pi^*_{00i}}{1-\pi^*_{2i}} - y_{01i}\frac{\pi^*_{11i}}{\pi^*_{2i}} - y_{00i}\frac{\pi^*_{10i}}{1-\pi^*_{2i}}\right)\boldsymbol{x}_i
$$

$$
= \frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{01i} - y_{01i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{2i}} + \frac{y_{10i}\pi^*_{00i} - y_{00i}\pi^*_{10i}}{1-\pi^*_{2i}}\right)\boldsymbol{x}_i \tag{4.17}
$$

$$
\boldsymbol{g}_i(\beta) = \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_2} = \frac{\partial\left(y_{11i}\ln\pi^*_{11i} + y_{10i}\ln\pi^*_{10i} + y_{01i}\ln\pi^*_{01i} + y_{00i}\ln\pi^*_{00i}\right)}{\partial \beta_2}
$$

$$
= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_2} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_2} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_2} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_2}
$$

$$
= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_2} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_2} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_2} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_2}
$$

$$
= \frac{y_{11i}\,\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{11i}\;\pi^*_{1i}\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i + \frac{y_{10i}\,\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{10i}\;\pi^*_{1i}\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i - \frac{y_{01i}\,\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{01i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i - \frac{y_{00i}\,\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{00i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\Delta_{1i}}\boldsymbol{x}_i
$$

$$
= \frac{1}{\Delta_{1i}}\left(y_{11i}\frac{\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}} + y_{10i}\frac{\pi^*_{11i}}{\pi^*_{1i}} + y_{01i}\frac{\pi^*_{00i}}{1-\pi^*_{1i}} - y_{00i}\frac{\pi^*_{01i}}{1-\pi^*_{1i}}\right)\boldsymbol{x}_i
$$

$$
= \frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{10i} - y_{10i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{1i}} + \frac{y_{01i}\pi^*_{00i} - y_{00i}\pi^*_{01i}}{1-\pi^*_{1i}}\right)\boldsymbol{x}_i \tag{4.18}
$$

$$g_i(\beta) = \frac{\partial l_i(\beta)}{\partial \beta_3} = \frac{\partial\left(y_{11i}\ln\pi^*_{11i} + y_{10i}\ln\pi^*_{10i} + y_{01i}\ln\pi^*_{01i} + y_{00i}\ln\pi^*_{00i}\right)}{\partial \beta_3}$$

$$= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial \pi^*_{11i}}{\partial \beta_3} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial \pi^*_{10i}}{\partial \beta_3} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial \pi^*_{01i}}{\partial \beta_3} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial \pi^*_{00i}}{\partial \beta_3}$$

$$= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial \pi^*_{11i}}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial \beta_3} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial \pi^*_{10i}}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial \beta_3} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial \pi^*_{01i}}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial \beta_3} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial \pi^*_{00i}}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial \beta_3}$$

$$= \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}\left(x_i\right)}\Delta_i \boldsymbol{x}_i - \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\Delta_i \boldsymbol{x}_i - \frac{y_{10i}}{\pi^*_{01i}}\Delta_i \boldsymbol{x}_i + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{00i}}\Delta_i \boldsymbol{x}_i$$

$$= \Delta_{1i}\left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}} - \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}} - \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{00i}}\right)\boldsymbol{x}_i \tag{4.19}$$

dimana $\Delta_{1i} = \dfrac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{1i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\pi^*_{2i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_i}$ dan $\Delta_i = \left(\dfrac{1}{\pi^*_{11i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{10i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{01i}} + \dfrac{1}{\pi^*_{00i}}\right)^{-1}$,

$i = 1, 2, \ldots, n$

Berasarkan pada persamaan (4.17) - (4.19) maka diperoleh turunan kedua fungsi ln-likelihood terhadap parameter β yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta\partial\beta^T} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{y_{11i}}{\pi^{*2}_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta} + \frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial^2\pi^*_{11i}}{\partial\beta\partial\beta^T}\right) + \left(-\frac{y_{10i}}{\pi^{*2}_{10}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial^2\pi^*_{10i}}{\partial\beta\partial\beta^T}\right) +$$

$$\left(-\frac{y_{01i}}{\pi^{*2}_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial^2\pi^*_{01i}}{\partial\beta\partial\beta^T}\right) + \left(-\frac{y_{00i}}{\pi^{*2}_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial^2\pi^*_{00i}}{\partial\beta\partial\beta^T}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta} + \frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta} + \frac{y_{01i}}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta} + \frac{y_{00i}}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta^T}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta}\right)$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi ln-likelihood terhadap β_1

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{11}\partial\beta_{11}}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{11}} + \frac{1}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{11}} + \frac{1}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{11}} + \frac{1}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{11}}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{11}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{11}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{11}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{11}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{01i}}{\pi^{*}_{2i}\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\pi^{*}_{10i}\pi^{*}_{00i}}{(1-\pi^{*}_{2i})\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{01i}}{\pi^{*}_{2i}\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\pi^{*}_{10i}\pi^{*}_{00i}}{(1-\pi^{*}_{2i})\Delta_i}x_1\right)^2\right]$$

$$\vdots$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{k1}\partial\beta_{k1}}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\beta_{k1}} + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\beta_{k1}} + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\beta_{k1}} + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\beta_{k1}}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{01i}}{\pi^{*}_{2i}\Delta_i}x_k\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\pi^{*}_{10i}\pi^{*}_{00i}}{(1-\pi^{*}_{2i})\Delta_i}x_k\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{01i}}{\pi^{*}_{2i}\Delta_i}x_k\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\pi^{*}_{10i}\pi^{*}_{00i}}{(1-\pi^{*}_{2i})\Delta_i}x_k\right)^2\right]$$

Berikut ini merupakan turunan kedua fungsi ln-likelihood terhadap β_2

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{12}\partial\beta_{12}}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\beta_{12}}\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\beta_{12}} + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\beta_{12}}\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\beta_{12}} + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\beta_{12}}\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\beta_{12}} + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\beta_{12}}\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\beta_{12}}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{01i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^{*}_{00i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^{*}_{11i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{10i}}{\pi^{*}_{1i}\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{10i}}\left(\frac{\pi^{*}_{11i}\pi^{*}_{10i}}{(1-\pi^{*}_{1i})\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{01i}}\left(\frac{\pi^{*}_{01i}\pi^{*}_{00i}}{\pi^{*}_{1i}\Delta_i}x_1\right)^2 + \frac{1}{\pi^{*}_{00i}}\left(\frac{\pi^{*}_{01i}\pi^{*}_{00i}}{(1-\pi^{*}_{1i})\Delta_i}x_1\right)^2\right]$$

⋮

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{k2}\partial\beta_{k2}}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{k2}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{k2}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{k2}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{k2}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{k2}}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)^2\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_k\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi^*_{1i})\Delta_i}x_k\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_k\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi_{1i})\Delta_i}x_k\right)^2\right]$$

Sedangkan turunan kedua fungsi ln-likelihood terhadap $\beta_1\beta_2$ adalah sebagai berikut

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{11}\partial\beta_{12}}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{12}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{12}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{12}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{11}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{12}}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{12}}\right)^2\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_1\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{(1-\pi^*_{1i})\Delta_i}x_1\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_1\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi_{1i})\Delta_i}x_1\right)^2\right]$$

⋮

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial\beta_{k1}\partial\beta_{k2}}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{k2}}\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_{k2}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{k1}}\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_{k2}}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)\left(\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{k1}}\right)\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{k2}}\right)\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{01i}}{\pi^*_{2i}\Delta_i}x_k\right)\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_k\right)+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi^*_{2i})\Delta_i}x_k\right)\left(\frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}}{\pi^*_{1i}\Delta_i}x_k\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi^*_{1i})\Delta_i}x_k\right)+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi^*_{2i})\Delta_i}x_k\right)\left(\frac{\pi^*_{10i}\pi^*_{00i}}{(1-\pi^*_{1i})\Delta_i}x_k\right)\right]$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi ln-likelihood terhadap β_3

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{(\partial\beta_3)^2}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{11i}}{\partial\beta_3}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{10i}}{\partial\beta_3}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{01i}}{\partial\beta_3}\right)^2+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\frac{\partial\pi^*_{00i}}{\partial\beta_3}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}\left(\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)\right)^{-2}(1)\right)+\left(\frac{1}{\pi^*_{10i}}\left(\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)\right)^{-2}(1)\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{\pi^*_{01i}}\left(\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)\right)^{-2}(1)\right)+\left(\frac{1}{\pi^*_{00i}}\left(\left(\frac{1}{\pi^*_{11i}}+\frac{1}{\pi^*_{10i}}+\frac{1}{\pi^*_{01i}}+\frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)\right)^{-2}(1)\right)\right]$$

Setelah diperoleh vektor gradien, dan matriks Informasi yaitu ekspektasi dari turunan kedua, maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode Fisher Scoring untuk mendapatkan penaksir ML parameter model BLR. Proses iterasi menggunakan persamaan berikut

$$\hat{\beta}^{(r+1)}_{fs} = \hat{\beta}^{(r)}_{fs} + \boldsymbol{I}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{fs}\right)^{-1}\boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{fs}\right),\ \text{untuk } r = 0,1,2,... \quad (4.20)$$

dimana $\hat{\beta}^{(r)}_{fs}$ dan $\hat{\beta}^{(r+1)}_{fs}$ adalah MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r* dan $r+1$, $\boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{fs}\right)$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*, dan $\boldsymbol{I}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{fs}\right)^{-1}$ adalah invers dari ekspektasi turunan kedua untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-*r*. Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\left\|\hat{\beta}^{(r+1)}_{fs} - \hat{\beta}^{(r)}_{fs}\right\| \le \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

4.1.3 Penaksir Parameter dengan Iterasi BHHH

Metode *Berndt-Hall-Hall-Hausman* (BHHH) merupakan modifikasi dari metode *Fisher Scoring*. Penentuan penaksir ML paramater model BLR menggunakan metode BHHH membutuhkan vektor gradien dan matriks Hessian, dengan vektor gradien seperti pada persamaan (4.16) hingga (4.19). Menurut Greene (2008), matriks Hessian $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})$ merupakan matriks turunan parsial kedua dari fungsi likelihood $L(\boldsymbol{\beta})$ pada persamaan (4.14) terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$. Menurut Greene (2008), terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks Hessian, yaitu:

$$E\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})\right) = 0, \tag{4.21}$$

$$Var\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})\right) = E\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{\beta})\right). \tag{4.22}$$

Selanjutnya, matriks Hessian mempunyai hubungan dengan matriks informasi,

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}). \tag{4.23}$$

Matriks informasi pada persamaan (4.23) disebut juga dengan matriks informasi fisher (Pawitan, 2001).

Sementara itu, Hogg, McKean, dan Craig (2013) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara vektor gradien dan matriks informasi, yaitu

$$Var\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})\right) = n\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}). \tag{4.24}$$

Berdasarkan persamaan (4.22) hingga (4.24), diperoleh matriks Hessian $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})$ seperti berikut:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) = \left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial l_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}\right]^T \frac{\partial l_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}\right]$$

$$= \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{01i} - y_{01i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{2i}} + \frac{y_{10i}\pi^*_{00i} - y_{00i}\pi^*_{10i}}{1-\pi^*_{2i}}\right)\boldsymbol{x}_i + \frac{1}{\Delta_{1i}}\right.\right.$$

$$\left[\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{10i}-y_{10i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{1i}}+\frac{y_{01i}\pi^*_{00i}-y_{00i}\pi^*_{01i}}{1-\pi^*_{1i}}\right)\boldsymbol{x}_i+\Delta_{1i}\left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}-\frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}-\frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}+\frac{y_{10i}}{\pi^*_{00i}}\right)\boldsymbol{x}_i\right]$$

$$\left[\frac{1}{\Delta_{1i}}\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{01i}-y_{01i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{2i}}+\frac{y_{10i}\pi^*_{00i}-y_{00i}\pi^*_{10i}}{1-\pi^*_{2i}}\right)\boldsymbol{x}_i+\frac{1}{\Delta_{1i}}\right.$$

$$\left.\left(\frac{y_{11i}\pi^*_{10i}-y_{10i}\pi^*_{11i}}{\pi^*_{1i}}+\frac{y_{01i}\pi^*_{00i}-y_{00i}\pi^*_{01i}}{1-\pi^*_{1i}}\right)\boldsymbol{x}_i+\Delta_{1i}\left(\frac{y_{11i}}{\pi^*_{11i}}-\frac{y_{10i}}{\pi^*_{10i}}-\frac{y_{01i}}{\pi^*_{01i}}+\frac{y_{10i}}{\pi^*_{00i}}\right)\boldsymbol{x}_i\right]\Bigg\} \quad (4.25)$$

Setelah diperoleh vektor gradien dan matriks Hessian, maka dapat dilakukan proses iterasi numerik menggunakan metode BHHH untuk mendapatkan penaksir ML parameter model BLR. Proses iterasi menggunakan persamaan (4.26)

$$\hat{\beta}^{(r+1)}_{bhh}=\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}-\boldsymbol{H}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}\right)^{-1}\boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}\right),\ \text{untuk } r=0,1,2,\ldots \quad (4.26)$$

dimana $\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}$ dan $\hat{\beta}^{(r+1)}_{bhh}$ adalah MLE parameter model BLR pada iterasi ke-r dan $r+1$, $\boldsymbol{g}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}\right)$ adalah vektor gradien untuk MLE parameter model BLR pada iterasi ke-r, dan $\boldsymbol{H}\left(\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}\right)^{-1}$ merupakan invers dari matriks Hessian. Proses iterasi akan berhenti jika terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\left\|\hat{\beta}^{(r+1)}_{bhh}-\hat{\beta}^{(r)}_{bhh}\right\|\le\varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang sangat kecil.

4.1.4 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis pada model BLR terdiri atas uji serentak dan uji parsial. Uji serentak digunakan untuk menguji signifikansi parameter model BLR secara serentak. Dari hasil uji serentak dapat diketahui bahwa paling tidak terdapat satu variabel independen yang signifikan berpengaruh terhadap variabel dependen. Sedangkan uji parsial digunakan untuk menguji adanya pengaruh yang signifikan dari masing-masing variabel independen terhadap variabel dependen.

Pengujian parameter model BLR secara serentak menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah:

$$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \ldots = \beta_{hk} = \beta_{h11} = \beta_{h22} = \ldots = \beta_{hkk} = \beta_{h12} = \beta_{h13} = \ldots =$$
$$\beta_{h1k} = \beta_{h23} = \beta_{h24} = \ldots = \beta_{h24} = \ldots = \beta_{h2k} = \beta_{h,k-1,k} = 0, h = 1,2,3 \tag{4.27}$$

H_1 :Paling tidak terdapat satu $\beta_{gh} \neq 0;\ g = 1,2, \ldots k, h = 1,2,3$

Metode yang digunakan untuk menentukan statistik uji pada pengujian hipotesis parameter model BLR secara serentak yang diberikan pada persamaan (2.20) adalah metode MLRT. Penentuan statistik uji dengan metode MLRT diawali dengan menentukan himpunan parameter model dibawah H_0, yaitu

$$\omega_2 = \left\{\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}\right\}$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah H_0

$$L(\omega_2) = \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\pi_{11i}^*\right)^{y_{11i}} \left(\pi_{10i}^*\right)^{y_{10i}} \left(\pi_{01i}^*\right)^{y_{01i}} \left(\pi_{00i}^*\right)^{y_{00i}}\right) \tag{4.28}$$

Misalkan $\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} & \hat{\beta}_{02} & \hat{\beta}_{03} \end{bmatrix}^T$ adalah penaksir ML untuk parameter pada H_0 kemudian didapatkan fungsi likelihood dibawah H_0, yaitu:

$$L\left(\hat{\beta}^*\right) = \max_{\beta^* \in \omega_2} L(\omega_2)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\pi_{11i}^*\right)^{y_{11i}} \left(\pi_{10i}^*\right)^{y_{10i}} \left(\pi_{01i}^*\right)^{y_{01i}} \left(\pi_{00i}^*\right)^{y_{00i}}\right) \tag{4.29}$$

Selanjutnya, menentukan fungsi ln-likelihood dibawah H_0, seperti berikut:

$$l(\omega_2) = \ln L(\omega_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(y_{11i} \ln \pi_{11i}^* + y_{10i} \ln \pi_{10i}^* + y_{01i} \ln \pi_{01i}^* + y_{00i} \ln \pi_{00i}^*\right) \tag{4.30}$$

Kemudian menentukan maksimum fungsi ln-likelihood dengan mencari turunan pertama terhadap himpunan di bawah H_0, kemudian disamakan dengan nol, seperti berikut:

$$l\left(\hat{\omega}_2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_{11i}\ln\hat{\pi}^{*}_{11i}+y_{10i}\ln\hat{\pi}^{*}_{10i}+y_{01i}\ln\hat{\pi}^{*}_{01i}+y_{00i}\ln\hat{\pi}^{*}_{00i}\right)$$

$$\frac{\partial l\left(\hat{\omega}_2\right)}{\partial\beta_{01}}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\beta_{01}}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{01}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial\beta_{01}}\right\}$$

$$0=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{01i}}{\hat{\pi}_{2i}\Delta_i}1\right)+\left(\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{00i}}{\left(1-\hat{\pi}_{2i}\right)\Delta_i}1\right)+\left(\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\left(-\frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{01i}}{\hat{\pi}_{2i}\Delta_i}1\right)\right)+\left(\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\left(-\frac{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{00i}}{\left(1-\hat{\pi}_{2i}\right)\Delta_i}1\right)\right)\right\}\tag{4.31}$$

$$\frac{\partial l\left(\hat{\omega}_2\right)}{\partial\beta_{02}}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\beta_{02}}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{02}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial\beta_{02}}\right\}$$

$$0=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{01i}}{\hat{\pi}_{2i}\Delta_i}1\right)+\left(\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{00i}}{\left(1-\hat{\pi}_{2i}\right)\Delta_i}1\right)+\left(\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\left(-\frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{01i}}{\hat{\pi}_{2i}\Delta_i}1\right)\right)+\left(\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\left(-\frac{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{00i}}{\left(1-\hat{\pi}_{2i}\right)\Delta_i}1\right)\right)\right\}\tag{4.32}$$

$$\frac{\partial l\left(\hat{\omega}_2\right)}{\partial\beta_{03}}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\beta_{03}}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{11i}}{\partial\eta_3}\frac{\partial\eta_3}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{10i}}{\partial\eta_3}\frac{\partial\eta_3}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{01i}}{\partial\eta_3}\frac{\partial\eta_3}{\partial\beta_{03}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\frac{\partial\hat{\pi}_{00i}}{\partial\eta_3}\frac{\partial\eta_3}{\partial\beta_{03}}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}\left(\frac{1}{\hat{\pi}_{11i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{10i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{00i}}\right)^{-1}(1)\right)+\left(\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}\left(\frac{1}{\hat{\pi}_{11i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{10i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{00i}}\right)^{-1}(1)\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}\left(\frac{1}{\hat{\pi}_{11i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{10i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{00i}}\right)^{-1}(1)\right)+\left(\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\left(\frac{1}{\hat{\pi}_{11i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{10i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{00i}}\right)^{-1}(1)\right)\right\}$$

$$0=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{y_{11i}}{\hat{\pi}_{11i}}-\frac{y_{10i}}{\hat{\pi}_{10i}}-\frac{y_{01i}}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{y_{00i}}{\hat{\pi}_{00i}}\right)\left(\frac{1}{\hat{\pi}_{11i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{10i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{01i}}+\frac{1}{\hat{\pi}_{00i}}\right)^{-1}\right\}\tag{4.33}$$

dimana:

$$\Delta_{1i} = \frac{\pi^*_{11i}\pi^*_{10i}\pi^*_{01i}\pi^*_{00i}}{\pi^*_{1i}\left(1-\pi^*_{1i}\right)\pi^*_{2i}\left(1-\pi^*_{2i}\right)\Delta_i} \text{dan } \Delta_i = \left(\frac{1}{\pi^*_{11i}} + \frac{1}{\pi^*_{10i}} + \frac{1}{\pi^*_{01i}} + \frac{1}{\pi^*_{00i}}\right)^{-1},\ i = 1, 2, ..., n$$

$$\hat{\pi}^*_{11i} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{2i} - \sqrt{a_{2i}^2 + b_{2i}}\right)}{2\left(\psi_i - 1\right)}, & \psi_i \neq 1 \\ \hat{\pi}^*_{1i}\hat{\pi}^*_{2i}, & \psi_i = 1 \end{cases}$$

dengan $a_{2i} = 1 + \left(\hat{\pi}^*_1 + \hat{\pi}^*_2\right)\left(\psi_i - 1\right),\ b = -4\psi_i\left(\psi_i - 1\right)\hat{\pi}^*_1\hat{\pi}^*_2$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}^*_{11i}\hat{\pi}^*_{00i}}{\hat{\pi}^*_{10i}\hat{\pi}^*_{01i}},\ \hat{\pi}^*_{1i} = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_{01}\right)}{1+\exp\left(\hat{\beta}_{01}\right)},\ \text{dan } \hat{\pi}^*_{2i} = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_{02}\right)}{1+\exp\left(\hat{\beta}_{02}\right)},$$

$$\hat{\pi}^*_{10i} = \hat{\pi}^*_{1i} - \hat{\pi}^*_{11i}$$

$$\hat{\pi}^*_{01i} = \hat{\pi}^*_{2i} - \hat{\pi}^*_{11i}$$

$$\hat{\pi}^*_{00i} = 1 - \hat{\pi}^*_{1i} - \hat{\pi}^*_{2i} + \hat{\pi}^*_{11i}$$

Setelah mendapatkan fungsi maksimum likelihood dibawah H_0 kemudian dilanjutkan dengan menentukan himpunan parameter model dibawah populasi, yaitu

$$\Omega_2 = \{\beta_{1k}, \beta_{1kk}, \beta_{11k}, \beta_{12k} ..., \beta_{1,k-1,k}, \beta_{2k}, \beta_{2kk}, \beta_{21k}, \beta_{22k} ..., \beta_{2,k-1,k},$$
$$\beta_{3k}, \beta_{3kk}, \beta_{31k}, \beta_{32k} ..., \beta_{3,k-1,k}\}$$

Selanjutnya, membentuk fungsi likelihood dibawah populasi

$$L\left(\Omega_2\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\pi_{11i}^{y_{11i}}\pi_{10i}^{y_{10i}}\pi_{01i}^{y_{01i}}\pi_{00i}^{y_{00i}}\right) \tag{4.34}$$

Misalkan $\hat{\beta} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_1^T & \hat{\beta}_2^T & \hat{\beta}_3^T\end{bmatrix}^T$ adalah penaksir ML untuk parameter pada populasi, maka fungsi maksimum likelihood dibawah populasi, yaitu:

$$L\left(\hat{\beta}\right) = \max_{\beta\in\Omega_2} L\left(\Omega_2\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}} \hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}} \hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}} \hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}} \right), \tag{4.35}$$

dimana:

$$\hat{\pi}_{11i}^{*} = \begin{cases} \dfrac{\left(a_{3i} - \sqrt{a_{3i}^2 + b_{3i}}\right)}{2\left(\psi_i - 1\right)}, & \psi_i \neq 1 \\ \hat{\pi}_{1i}^{*} \hat{\pi}_{2i}^{*}, & \psi_i = 1 \end{cases}$$

dengan $a_{3i} = 1 + \left(\hat{\pi}_{1i} + \hat{\pi}_{2i}\right)\left(\psi_i - 1\right)$, $b_{3i} = -4\psi_i\left(\psi_i - 1\right)\hat{\pi}_{1i}\hat{\pi}_{2i}$

$$\psi_i = \frac{\hat{\pi}_{11i}\hat{\pi}_{00i}}{\hat{\pi}_{10i}\hat{\pi}_{01i}},\ \hat{\pi}_{1i}^{*} = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_1^T x_i^*\right)}{1 + \exp\left(\hat{\beta}_1^T x_i^*\right)},\ \text{dan } \hat{\pi}_{2i}^{*} = \frac{\exp\left(\hat{\beta}_2^T x_i^*\right)}{1 + \exp\left(\hat{\beta}_2^T x_i^*\right)},$$

$$\hat{\pi}_{10i} = \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{11i}$$
$$\hat{\pi}_{01i} = \hat{\pi}_{2i} - \hat{\pi}_{11i}$$
$$\hat{\pi}_{00i} = 1 - \hat{\pi}_{1i} - \hat{\pi}_{2i} + \hat{\pi}_{11i}$$

Berdasarkan persamaan (4.29) dan (4.31), didapatkan odds ratio sebagai berikut:

$$\Lambda_2 = \frac{L\left(\hat{\beta}^*\right)}{L\left(\hat{\beta}\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\hat{\pi}_{11i}^{*}\right)^{y_{11i}}\left(\hat{\pi}_{10i}^{*}\right)^{y_{10i}}\left(\hat{\pi}_{01i}^{*}\right)^{y_{01i}}\left(\hat{\pi}_{00i}^{*}\right)^{y_{00i}}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\hat{\pi}_{11i}^{y_{11i}}\hat{\pi}_{10i}^{y_{10i}}\hat{\pi}_{01i}^{y_{01i}}\hat{\pi}_{00i}^{y_{00i}}\right)}. \tag{4.36}$$

Selanjutnya, menentukan statistik uji untuk hipotesis uji serentak pada persamaan (4.27), yaitu

$$G_2^2 = -\ln\Lambda_2 = -\ln\left(\frac{L\left(\hat{\beta}^*\right)}{L\left(\hat{\beta}\right)}\right)^2 = 2\left[\ln L\left(\hat{\beta}\right) - \ln L\left(\hat{\beta}^*\right)\right] \tag{4.37}$$

Dengan sampel besar, statistik G_2^2 dapat didekati dengan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas *df*, dimana *df* adalah selisih dari jumlah parameter dibawah populasi dengan jumlah parameter dibawah H_0. Daerah penolakan H_0 yaitu $G_2^2 > \chi^2_{(\alpha,df)}$.

Jika pada pengujian serentak diperoleh hasil tolak H_0, maka dilakukan pengujian parsial untuk mengetahui pengaruh variabel independen secara individu terhadap variabel dependen. Adapun hipotesis pada uji parsial adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$

$H_1 : \beta_{gh} \neq 0, g = 1,2, \ldots k; h = 1,2,3$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis pada uji parsial adalah uji Wald, seperti berikut:

$$Z = \frac{\hat{\theta}_{gh}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}\left(\hat{\theta}_{gh}\right)}} \underset{n\to\infty}{\sim} N(0,1) \tag{4.38}$$

dimana $\widehat{Var}(\hat{\theta}_{gh})$ diperoleh dari elemen diagonal ke $(gh+1)$ dari matriks varians kovarians $Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, dimana $\widehat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [I(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} = -[H(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$. Daerah penolakan H_0 yaitu $|Z| > Z_{\alpha/2}$

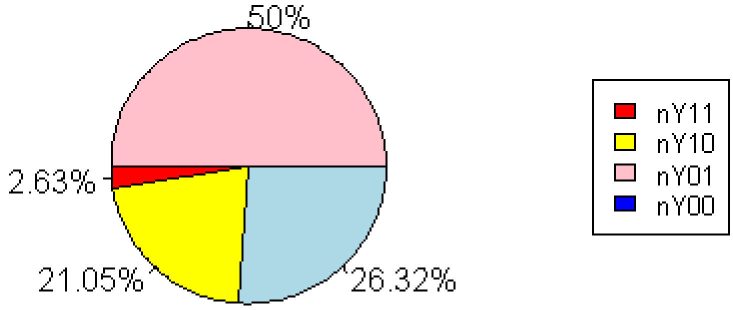
4.2 Deskripsi Data Penelitian

Variabel dalam penelitian ini sebagaimana diuraikan dalam Bab 3 terdiri atas dua variabel dependen, yaitu IPM (Y_1) dan IPKM (Y_2) serta tiga variabel independen yaitu APM SMP (X_1), Presentase Penduduk Miskin (X_2), Jumlah Puskesmas (X_3). Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh hasil deskripsi IPM dan IPKM seperti pada Tabel 4.1

Tabel 4.1 Deskripsi IPM dan IPKM Kabupaten/Kota

Y_1	Y_2		Total
	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 0$	
$Y_1 = 1$	19	1	20
$Y_1 = 0$	8	10	18
Total	27	11	38

Tabel 4.1 merupakan tabel kontingensi berukuran $(2\times\ 2)$ untuk variabel dependen, yaitu IPM dan IPKM. Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa dari 38 kabupaten/kota yang terdapat pada Jawa Timur tahun 2018, terdapat 19 kabupaten/kota yang memiliki IPKM B-DBK dan IPM tinggi. Selanjutnya terdapat 1 kabupaten/kota yang memiliki IPKM B-DBK dan IPM sedang. Kabupaten/Kota yang memiliki IPKM DBK dan IPM tinggi terdapat 8 kabupaten/kota. Sedangkan kabupaten/kota yang memiliki IPKM DBK dan IPM sedang terdapat pada 10 kabupaten/kota. Berdasarkan Tabel 4.1, deskripsi IPM dan IPKM dapat disajikan seperti pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Deskripsi IPM dan IPKM berdasarkan Presentase Kategori

Pada Gambar 4.1 terlihat bahwa banyaknya kabupaten/kota yang memiliki IPM tinggi dan IPKM B-DBK (nY_{11}) sebesar 2,63%. Banyaknya kabupaten/kota yang memiliki IPM sedang dan IPKM DBK (nY_{10})sebesar 21,05%. Banyaknya kabupaten/kota yang memiliki IPM sedang dan IPKM B-DBK (nY_{01}) sebesar 50%. Serta kabupaten/kota yang memiliki IPM sedang dan IPKM DBK (nY_{00}) sebesar 26,32%. Berdasarkan Tabel 4.1 dan Gambar 4.1, terlihat bahwa di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2018 paling banyak memiliki IPKM DBK dan IPM tinggi.

Deskripsi dari variabel independen yaitu presentase penduduk miskin, APM SMP, dan jumlah puskesmas disajikan pada Tabel 6.2 berikut ini

Tabel 4.2 Deskripsi Variabel Independen

Variabel	Minimum	Maksimum	Rata-rata	Standar Deviasi
X_1	3,89	21,21	10,87	4,44
X_2	81,18	100,81	92,56	4,3
X_3	3	63	25	12,96

Berdasarkan tabel 4.2, terlihat bahwa rata-rata presentase pendidik miskin di Jawa Timur tahun 2018 sebesar 10,87% dengan presentase kemiskinan tertinggi berada pada Kabupaten Sampang yakni sebesar 21,21% dan presentase penduduk miskin terendah berada pada Kota Batu sebesar 3,89%. Angka Partisipasi Murni (APM) SMP di Jawa Timur tahun 2018 rata-rata sebesar 92,56 dengan APM SMP tertinggi sebesar 100,81 berada pada Kabupaten Bondowoso dan APM terendah berada pada Kabupaten Probolinggo dengan nilai sebesar 81,18. Sedangkan untuk rata-rata jumlah puskesmas pada kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018 adalah sebanyak 25 puskesmas dengan jumlah puskesmas paling sedikit berjumlah 3 puskesmas yang berada pada Kota Blitar dan puskesmas terbanyak berada pada Kota Surabaya yaitu terdapat 63 puskesmas.

Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai prasyarat analisis data model BLR, yaitu pengujian korelasi antar variabel dependen dan pengujian multikolinieritas terhadap variabel independen. Tujuan dari pengujian korelasi antar variabel dependen yaitu untuk mengetahui adanya korelasi yang signifikan antar variabel dependen, sehingga data layak untuk dianalisis. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh nilai korelasi antar variabel dependen, diberikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai Korelasi Antar Variabel Dependen

Y_1	Y_2		ψ	IK 95% untuk ψ
	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 0$		
$Y_1 = 1$	19	1	23,75	$2{,}5914 \leq \psi \leq 217{,}6691$
$Y_1 = 0$	8	10		

IK = Interval Konfidensi.

Menurut El-Sayed dkk. (2013), untuk mengetahui adanya korelasi antar dua variabel dependen kategorik dapat menggunakan nilai odds rasio(ψ), dimana nilainya lebih dari atau sama dengan nol $(\psi \geq 0)$. Kriteria yang digunakan adalah jika variavel dependen mempunyai nilaiψ > 1, maka terjadi korelasi positif antar variabel dependen. Sebaliknya, berkorelasi negatif jika nilai $\psi < 1$. Jika nilai$\psi = 1$, maka tidak terdapat korelasi antar variabel dependen. Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa nilai odds rasio untuk IPM dan IPKM adalah sebesar 23,75, dengan interval konfidensi 95% sebesar 2,5914 $\leq \psi \leq$ 217, 6691. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat korelasi antara IPM dan IPKM yaitu berkorelasi positif.

Setelah dilakukan pengujian korelasi antar variabel dependen menggunakan odds rasio, hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa terdapat korelasi antar variabel dependen. Oleh karena itu, IPM dan IPKM sebagai variabel dependen dalam penelitian ini, layak digunakan untuk model BLR pada pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

Untuk selanjutnya akan dilakukan pengujian kolinieritas antar variabel independen (multikolinieritas). Untuk mengetahui adanya multkolinieritas digunakan dua kriteria, yaitu nilai koefisien korelasi *Pearson product-moment* antar variabel independen dan nilai *variance inflation factor* (VIF). Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh nilai koefisien korelasi antar variabel independen yang disajikan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Nilai Koefisien Korelasi antar Variabel Independen

Variabel	X_1	X_2	X_3
X_1	1		
X_2	-0,3642	1	
X_3	0,1959	-0,0143	1

*Signifikan pada $\alpha = 0,05$

Berdasarkan Tabel 4.4, terlihat bahwa tidak terdapat nilai koefisian korelasi yag mempunyai nilai lebih dari 0,95. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas pada variabel independen. Selain nilai koefisien korelasi, kriteria lain yang dapat digunakan untuk mengetahui adanya multikolinieritas adalah nilai VIF. Setelah dilakukan perhitungan dengan R pada Lampiran 2, diperoleh nilai VIF untuk masing-masing variabel independen seperti yang diberikan pada Tabel 4.5 berikut ini.

Tabel 4.5 Nilai VIF Variabel Independen

Variabel Independen	Nilai VIF
X_1	1,2034
X_2	1,1574
X_3	1,0439

Berdasarkan pada Tabel 4.5 dapat dilihat bahwa semua variabel independen mempunyai nilai VIF kurang dari 10, sehingga dapat dikatakan bahwa tidak terjadi multikolinieritas pada variabel independen. Berdasarkan nilai koefisien korelasi antar variabel independen dan nilai VIF maka dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas. Oleh karena itu, semua variabel independen pada Tabel 4.5 dapat digunakan untuk model BLR.

4.3 Regresi Logistik Bivariat Orde Satu

Model BLR merupakan model non spasial (model global), sehingga setiap lokasi diasumsikan homogen. Berikut ini akan dibahas mengenai pemodelan regresi logistik bivariat orde satu. Pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur dengan model BLR orde satu, diawali dengan pemilihan variabel independen yang berpengaruh signifikan secara individu terhadap variabel dependen, yaitu dengan cara meregresikan masing-masing variabel independen terhadap variabel dependen. Hal ini bertujuan untuk mengetahui variabel independen mana saja yang secara univariabel berpengaruh signifikan terhadap variabel dependen. Hipotesis yang digunakan adalah:

$$H_0 : \beta_{gh} = 0,$$
$$H_1 : \beta_{gh} \neq 0,\ g = 1, 2, ..., k; h = 1, 2, 3$$

Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald, sebagaimana pada persamaan (4.38) dengan kriteria pengujian tolak H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{\alpha/2}$. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh hasil analisis BLR orde satu secara univariabel pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Hasil BLR Orde Satu Secara Univariat

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-4,97399	11,26659	-0,441
X_1	β_{11}	-0,058736	0,20878	-2,813
X_2	β_{12}	0,13151	0,12349	1,065
X_3	β_{13}	-0,02898	0,04318	-0,671
Intercept	β_{20}	7,68101	9,30812	0,825
X_1	β_{21}	-0,29325	0,11937	-2,457
X_2	β_{22}	-0,04646	0,09510	0,489
X_3	β_{23}	0,03667	0,04451	0,824
Intercept	β_{30}	5,858692	9,891132	0,592
X_1	β_{31}	-0,317408	0,125035	-2,539
X_2	β_{32}	-0,012195	0,099960	-0,122
X_3	β_{33}	0,002701	0,045861	0,059

Tingkat signifikansi α yang digunakan dalam penelitian ini sebesar 0,1, sehingga nilai statistik uji $|Z|$ dibandingkan dengan nilai $Z_{0,05} = 1,6449$ dan tolak H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{0,05}$. Berdasarkan tabel 4.6, terlihat bahwa secara univariabel terdapat beberapa variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap variabel dependen.

4.3.1 Penaksiran Parameter Dengan Iterasi Fisher Scoring

Pada model ini melibatkan semua variabel independen yang diperoleh dari Tabel 4.6. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh hasil BLR orde satu dengan metode numerik Fisher Scoring seperti yang disajikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Hasil BLR Orde Satu Menggunakan Fisher Scoring

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-4,9741	1,5447e-04	-3,2200e+04
X_1	β_{11}	-0,5885	7,5381e-04	-7,8068e+02
X_2	β_{12}	-0,5092	1,4580e-02	-3,4924e+02
X_3	β_{13}	-0,0291	9,7316e-03	-2,9867e+03
Intercept	β_{20}	6,1175	4,6899e-08	1,3043e+08
X_1	β_{21}	-1,8540	5,2658e-07	-3,5208e+06
X_2	β_{22}	0,0507	4,5106e-06	1,1244e+04
X_3	β_{23}	-1,5268	1,3903e-06	-1,0981e+06
Intercept	β_{30}	-4,9740	1,9414e-04	-2,5620e+04
X_1	β_{31}	-0,5874	8,8990e-04	-6,6002e+02
X_2	β_{32}	0,1315	1,8437e-02	7,1331e+02
X_3	β_{33}	-0,5648	3,4820e-03	-1,6221e+02

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Ketepatan Klasifikasi pada penelitian ini menggunakanAPER (Apparent Error Rate) dimana nilai APER ini menunjukkan proporsi observasi yang salah diklasifikasikan oleh fungsi klasifikasi.

$1 - APER = 1 - 0,447368 = 0,552632$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa ketepatan metode iterasi fisher scoring dalam klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota Jawa Timur tahun 2018 sebesar 55% dengan jumlah iterasi sebanyak 1000.

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, dapat diperoleh hasil dari masing-masing probabilitas π_{11},π_{10} ,π_{01},π_{00} bahwa dengan kondisi presentase penduduk miskin, APM SMP, dan jumlah puskesmas yang ada, Kota Surabaya memiliki peluang terbesar yaitu sebesar 0,997634 untuk IPM tinggi dan IPKM B-DBK, peluang terendah dari IPM tinggi dan IPKM B-DBK yaitu sebesar 0,0001 berada pada Kabupaten Probolinggo. Peluang tertinggi IPM tinggi dan IPKM DBK yaitu sebesar 0,003668 berada pada Kota Blitar sedangkan peluang terendah sebesar 0,0001 terdapat pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur. Sedangkan untuk IPKM sedang dan IPKM B-DBK tertinggi memiliki peluang sebesar 0,999404 berada pada Kabupaten Jember dan probabilitas terendah terdapat pada Kota Surabaya yaitu memiliki probabilitas sebesar 0,001189. Untuk IPM rendah dan IPKM DBK, Kabupaten Sampang memiliki probabilitas tertinggi yaitu sebesar 0,021539 dan probabilitas terendah yaitu sebesar 0,0001 terdapat pada beberapa kabupaten/kota yang ada di Jawa Timur.

4.3.2 Pengujian Hipotesis

Pada model BLR bivariat orde satu dilakukan pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \beta_{h3} = 0,\ h = 1, 2, 3,$

$H_1 :$ Paling sedikit terdapat satu $\beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3.$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 3, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 78,7672. Dari tabel distribusi *chi-square* diperoleh nilai $\chi^2_{(0,1;9)}$ sebesar 16,648. Karena G^2 lebih dari nilai $\chi^2_{(0,1;9)}$, maka tolak H_0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, terdapat satu variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui variabel independen yang signifikan terhadap model dengan hipotesis yang diuji adalah:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$
$H_1 :\ \beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3$ dan $h = 1, 2, 3.$

Berdasarkan Tabel 4.7, terlihat bahwa nilai statistik uji $|Z|$ untuk semua taksiran parameter lebih dari $Z_{0,05}$ sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa semua variabel independen berpengaruh secara signifikan terhadap model BLR pada tingkat signifikansi α sebesar 0,1.

4.3.3 Penaksiran Parameter Dengan Iterasi BHHH

Berikut ini merupakan hasil BLR orde satu dengan menggunakan iterasi BHHH dengan perhitungan menggunakan R pada Lampiran 3.

Tabel 4.8 Hasil BLR Bivariat Orde Satu Menggunakan BHHH

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-4,9740	9,2150e-08	-5,3977e+07
X_1	β_{11}	-0,6271	9,3434e-07	-6,7114e+05
X_2	β_{12}	0,1657	8,1077e-06	2,0437e+04
X_3	β_{13}	-0,2169	4,5947e-06	-4,7197e+04
Intercept	β_{20}	7,6812	1,3379e-08	5,7411e+08
X_1	β_{21}	-0,3027	1,5179e-07	-1,9943e+06
X_2	β_{22}	-0,0052	1,1863e-06	-4,3660e+03
X_3	β_{23}	0,1430	6,1852e-07	2,3119e+05
Intercept	β_{30}	-4,9736	1,8548e-11	-2,6814e+11
X_1	β_{31}	-0,5816	1,9739e-10	-2,9463e+09
X_2	β_{32}	0,1685	1,6692e-09	1,0093e+08
X_3	β_{33}	-0,0147	7,1771e-10	-2,0481e+07

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Ketepatan Klasifikasi pada penelitian ini menggunakanAPER (Apparent Error Rate) dimana nilai APER ini menunjukkan proporsi observasi yang salah diklasifikasikan oleh fungsi klasifikasi.

$1-APER=1-0,263158=0,736842$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa ketepatan metode iterasi fisher scoring dalam klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota Jawa Timur tahun 2018 sebesar 73% dengan jumlah iterasi sebanyak 2.

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, dapat diperoleh hasil dari masing-masing probabilitas $\pi_{11},\pi_{10}\ ,\pi_{01},\pi_{00}$ bahwa dengan kondisi presentase penduduk miskin, APM SMP, dan jumlah puskesmas yang ada, untuk IPM tinggi dan IPKM B-DBK semua kabupaten/kota di Jawa Timur memiliki peluang yang sama yaitu sebesar 0,0001. Peluang untuk IPM tinggi dan IPKM DBK juga memiliki nilai yang sama untuk semua kabupaten/kota di Jawa Timur yaitu sebesar 0,0001. Sedangkan untuk IPKM sedang dan IPKM B-DBK tertinggi memiliki peluang sebesar 0,016619 berada pada Kota Surabaya dan probabilitas terendah terdapat pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur yaitu memiliki peluang sebesar 0,0001. Untuk IPM rendah dan IPKM DBK, sebanyak 33 kabupaten/kota di Jawa Timur memiliki probabilitas tertinggi yaitu sebesar 1,0001 dan probabilitas terendah yaitu sebesar 0,983381 terdapat pada Kota Surabaya.

4.3.4 Pengujian Hipotesis

Pada model BLR orde satu dilakukan pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah sebagai berikut:

$H_0:\beta_{h1}=\beta_{h2}=\beta_{h3}=0,\ h=1,2,3,$

$H_1:$ Paling sedikit terdapat satu $\beta_{gh}\neq 0;\ g=1,2,3.$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 3, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 205,0474. Dari tabel distribusi *chi-square* diperoleh nilai $\chi^2_{(0,1;9)}$ sebesar 16,648. Karena G^2 lebih dari nilai $\chi^2_{(0,1;9)}$, maka tolak H_0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, terdapat satu variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui variabel independen yang signifikan terhadap model dengan hipotesis yang diuji adalah:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$
$H_1 : \beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3$ dan $h = 1, 2, 3.$

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa nilai statistik uji $|Z|$ untuk semua taksiran parameter lebih dari $Z_{0,05}$ sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa semua variabel independen berpengaruh secara signifikan terhadap model BLR pada tingkat signifikansi α sebesar 0,1.

Berdasarkan dua metode iterasi tersebut diatas yaitu Fisher Scoring dan BHHH dapat dilihat bahwa metode iterasi yang lebih baik yakni metode iterasi BHHH dengan nilai standard error yang lebih kecil dari standard error Fisher Scoring dan nilai ketepatan klasifikasi sebesar 73%.

4.3.5 Perbandingan Iterasi Fisher Scoring dan BHHH BLR Orde Satu

Berikut ini akan dibahas mengenai perbandingan dari metode Fisher Scoring dan BHHH yang dilihat dari standar error, nilai dari Z_{hitung} dan ketepatan klasifikasinya.

Tabel 4.9 Standar Error dan Z_{hitung} dari Fisher Scoring dan BHHH

Fisher Scoring		BHHH	
Standar Error	Z	Standar Error	Z
1,5447e-04	-3,2200e+04	9,2150e-08	-5,3977e+07
7,5381e-04	-7,8068e+02	9,3434e-07	-6,7114e+05
1,4580e-02	-3,4924e+02	8,1077e-06	2,0437e+04
9,7316e-03	-2,9867e+03	4,5947e-06	-4,7197e+04
4,6899e-08	1,3043e+08	1,3379e-08	5,7411e+08

Tabel 4.9 Lanjutan

5,2658e-07	-3,5208e+06	1,5179e-07	-1,9943e+06
4,5106e-06	1	.06	-4,3660e+03
1,3903e-06	-1,0981e+06	6,1852e-07	2,3119e+05
1,9414e-04	-2,5620e+04	1,8548e-11	-2,6814e+11
8,8990e-04	-6,6002e+02	1,9739e-10	-2,9463e+09
1,8437e-02	7,1331e+02	1,6692e-09	1,0093e+08
3,4820e-03	-1,6221e+02	7,1771e-10	-2,0481e+07

Berdasarkan pada Tabel 9 tersebut diatas, dapat dilihat bahwa nilai standar error dari BHHH lebih kecil dari Fisher Scoring dan nilai dari Z_{hitung} BHHH lebih besar dari dari Fisher Scoring serta nilai ketepatan dari BHHH lebih tinggi dari Fisher Scoring yaitu sebesar 73% yang memiliki arti bahwa ketepatan metode BHHH pada klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2018 lebih tinggi dibandingkan Fisher Scoring, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode iterasi BHHH lebih baik dibandingkan dengan metode Fisher Scoring.

Setelah dilakukan analisis terhadap model BLR multivariabel orde satu, maka didapatkan model BLR orde satu untuk pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018 sebagai berikut:

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\pi_1(\boldsymbol{x})}{1-\pi_1(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= -4{,}9740 - 0{,}6271X_1 + 0{,}1657X_2 - 0{,}2169X_3$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\pi_2(\boldsymbol{x})}{1-\pi_2(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= 7{,}6812 - 0{,}3027X_1 - 0{,}0052X_2 + 0{,}1430X_3$$

$$\varphi_3(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\pi_{11}(\boldsymbol{x})\pi_{00}(\boldsymbol{x})}{\pi_{10}(\boldsymbol{x})\pi_{01}(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= -4,9736 - 0,5816X_1 + 0,1685X_2 - 0,0147X_3$$

Untuk selanjutnya akan dilakukan interpretasi pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2018 dengan BLR. Interpretasi dilakukan hanya untuk model odds rasio karena model tersebut merupakan *joint model* yang melibatkan variabel dependen bivariat. Interpretasi dari model BLR orde satu adalah sebagai berikut:

- Jika presentase penduduk miskin kabupaten/kota di Jawa Timur bertambah sebesar 1%, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika APM SMP kabupaten/kota di Jawa Timur bertambah sebesar 10, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika terdapat penambahan satu unit puskesmas kabupaten/kota di Jawa Timur, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.

4.4 Regresi Logistik Bivariat Orde Dua

Pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur dengan model BLR orde dua, diawali dengan pemilihan variabel independen yang berpengaruh signifikan secara individu terhadap variabel dependen, yaitu dengan cara meregresikan masing-masing variabel independen terhadap variabel dependen. Hal ini bertujuan untuk mengetahui variabel independen mana saja yang secara univariabel berpengaruh signifikan terhadap variabel dependen. Hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$
$H_1 : \beta_{gh} \neq 0, \; g = 1, 2, ..., k; h = 1, 2, 3$

Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald, sebagaimana pada persamaan (4.38) dengan kriteria pengujian tolak H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{\alpha/2}$. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh hasil analisis BLR orde dua secara univariabel pada Tabel 4.10.

Tabel 4.10 Hasil BLR Orde Dua Secara Univariat

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-320,855	385,3	-0,833
X_1	β_{11}	0,427	8,013	0,053
X_2	β_{12}	7,427	8,385	0,886
X_3	β_{13}	-2,438	1,918	-1,271
X_1X_1	β_{111}	0,007	0,068	0,109
X_2X_2	β_{122}	-0,0411	0,045	-0,904
X_3X_3	β_{133}	0,004	0,006	0,676
X_1X_2	β_{112}	-0,0162	0,077	-0,211
X_1X_3	β_{113}	0.013	0,028	0,477
X_2X_3	β_{123}	0.022	0,019	1,141
Intercept	β_{20}	-337.633	330,6	-1,021
X_1	β_{21}	12.147	6,831	1,778
X_2	β_{22}	7.428	6,902	1,076

Tabel 4.10 Lanjutan

X_3	β_{23}	-6.561	3,135	-2,093
X_1X_1	β_{211}	-0.073	0,062	-1,175
X_2X_2	β_{222}	-0.039	0,035	-1,104
X_3X_3	β_{233}	0.0001	0,004	0,041
X_1X_2	β_{212}	-0.1380	0,071	-1,921
X_1X_3	β_{213}	0.076	0,041	1,873
X_2X_3	β_{223}	0.065	0,030	2,157
Intercept	β_{30}	-320.855	329,3	-1,054
X_1	β_{31}	0.427	5,883	1,841
X_2	β_{32}	7.427	6,931	1,049
X_3	β_{33}	-2,438	2,625	-1,723
X_1X_1	β_{311}	0,007	0,054	-0,886
X_2X_2	β_{322}	-0,041	0,036	-1,006
X_3X_3	β_{333}	0,004	0,004	0,375
X_1X_2	β_{312}	-0,016	0,063	-1,994
X_1X_3	β_{313}	0,013	0,033	1,936
X_2X_3	β_{323}	0,022	0,026	1,628

* Signifikan pada $\alpha = 0{,}1$.

Tingkat signifikansi α yang digunakan dalam penelitian ini sebesar 0,1, sehingga nilai statistik uji $|Z|$ dibandingkan dengan nilai $Z_{0,05} = 1,6449$ dan tolak

H_0 jika nilai $|Z|$ lebih dari $Z_{0,05}$. Berdasarkan tabel 4.9, terlihat bahwa secara univariabel terdapat hampir semua variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap variabel dependen.

4.4.1 Penaksiran Parameter Dengan Iterasi Fisher Scoring

Pada model ini melibatkan semua variabel independen yang diperoleh dari Tabel 4.9. Berdasarkan hasil perhitungan dengan R pada Lampiran 3, diperoleh hasil BLR bivariat dengan metode numerik Fisher Scoring seperti yang disajikan pada Tabel 4.11.

Tabel 4.11 Hasil BLR Bivariat Menggunakan Fisher Scoring

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-320,8553	3,0117e-08	-1,0654e+10
X_1	β_{11}	0,4276	5,6002e-08	7,6351e+06
X_2	β_{12}	7,4275	4,6345e-07	1,6027e+07
X_3	β_{13}	-2,4389	5,9402e-08	-4,1057e+07
X_1X_1	β_{111}	0,0075	5,6902e-07	1,3170e+04
X_2X_2	β_{122}	-0,0399	1,9808e-08	-2,0139e+06
X_3X_3	β_{133}	0,0042	2,8782e-07	1,4612e+04
X_1X_2	β_{112}	-0,0162	4,6724e-07	-3,4599e+04
X_1X_3	β_{113}	0,0137	3,2477e-07	4,2128e+04
X_2X_3	β_{123}	0,0226	2,3254e-10	9,7129e+07
Intercept	β_{20}	-337,6334	3,0117e-08	-1,1211e+10

Tabel 4.11 Lanjutan

X_1	β_{21}	12,1478	5,6002e-08	2,1692e+08
X_2	β_{22}	7,4284	4,6345e-07	1,6028e+07
X_3	β_{23}	-6,5615	5,9402e-08	-1,1046e+08
X_1X_1	β_{211}	-0,0739	5,6902e-07	-1,2992e+05
X_2X_2	β_{222}	-0,0403	1,9808e-08	-2,0349e+06
X_3X_3	β_{233}	1,2550e-04	2,8782e-07	436,0161
X_1X_2	β_{212}	-0,1382	4,6724e-07	-2,9576e+05
X_1X_3	β_{213}	-0,1382	3,2477e-07	2,3493e+05
X_2X_3	β_{223}	0,0763	2,3254e-10	2,793e+08
Intercept	β_{30}	-347,2447	0,1054	-3,2943e+03
X_1	β_{31}	10,8319	0,1054	102,7603
X_2	β_{32}	7,2744	0,1054	69,0112
X_3	β_{33}	-4,5231	0,1054	-42,9103
X_1X_1	β_{311}	-0,0481	0,1054	-0,4568
X_2X_2	β_{322}	-0,0361	0,1054	-0,3427
X_3X_3	β_{333}	0,0018	0,1054	0,0168
X_1X_2	β_{312}	-0,1276	0,1054	-1,2105
X_1X_3	β_{313}	0,0640	0,1054	0,6071
X_2X_3	β_{323}	0,0424	0,0073	5,8396

* Signifikan pada $\alpha = 0{,}1$.

Ketepatan Klasifikasi pada penelitian ini menggunakanAPER (Apparent Error Rate) dimana nilai APER ini menunjukkan proporsi observasi yang salah diklasifikasikan oleh fungsi klasifikasi.

$1-APER=1-0,7105=0,2894$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa ketepatan metode iterasi fisher scoring dalam klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota Jawa Timur tahun 2018 sebesar 28% dan jumlah iterasi sebanyak 2.

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, dapat diperoleh hasil dari masing-masing probabilitas $\pi_{11},\pi_{10},\pi_{01},\pi_{00}$ bahwa dengan kondisi presentase penduduk miskin, APM SMP, dan jumlah puskesmas yang ada, Kota Surabaya memiliki peluang terbesar yaitu sebesar 0,997 untuk IPM tinggi dan IPKM B-DBK, peluang terendah dari IPM tinggi dan IPKM B-DBK yaitu sebesar 0,0001 berada pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur. Peluang tertinggi IPM tinggi dan IPKM DBK yaitu sebesar 0,7714 berada pada Kabupaten Probolinggo sedangkan peluang terendah sebesar 0,0001 terdapat pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur. Sedangkan untuk IPKM sedang dan IPKM B-DBK tertinggi memiliki peluang sebesar 0,863 berada pada Kabupaten Tuban dan peluang terendah terdapat pada Kota Surabaya dan Kota Madiun yaitu memiliki probabilitas sebesar 0,0001. Untuk IPM rendah dan IPKM DBK, Kabupaten Sampang memiliki probabilitas tertinggi yaitu sebesar 0,995 dan probabilitas terendah yaitu sebesar 0,0001 terdapat pada beberapa kabupaten/kota yang ada di Jawa Timur.

4.4.2 Pengujian Hipotesis

Pada model BLR bivariat dilakukan pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{h1}=\beta_{h2}=\beta_{h3}=0,\ h=1,2,3,$

$H_1 :$ Paling sedikit terdapat satu $\beta_{gh}\neq 0;\ g=1,2,3.$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 3, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 276,9620. Dari tabel distribusi *chi-square* diperoleh nilai $\chi^2_{(0,1;27)}$ sebesar 36,741. Karena G^2 lebih dari nilai $\chi^2_{(0,1;27)}$, maka tolak H_0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, terdapat satu variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui variabel independen yang signifikan terhadap model dengan hipotesis yang diuji adalah:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$
$H_1 : \beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3$ dan $h = 1, 2, 3.$

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa nilai statistik uji $|Z|$ untuk semua taksiran parameter lebih dari $Z_{0,05}$ sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa semua variabel independen berpengaruh secara signifikan terhadap model BLR pada tingkat signifikansi α sebesar 0,1.

4.4.3 Penaksiran Parameter Dengan Iterasi BHHH

Berikut akan disajikan penaksiran parameter untuk model biner bivariat orde dua dengan menggunakan metode iterasi BHHH, yakni sebagai berikut:

Tabel 4.12 Hasil BLR Bivariat Menggunakan BHHH

Variabel	Parameter	Taksiran	Standar Error	Z
Intercept	β_{10}	-320,8553	6,2103e-19	-5,1665e+20
X_1	β_{11}	0,4276	9,9406e-18	4,3014e+16
X_2	β_{12}	7,4275	6,0121e-17	1,2354e+17
X_3	β_{13}	-2,4389	1,9149e-17	-1,2736+17

Tabel 4.12 Lanjutan

X_1X_1	β_{111}	0,0075	1,5426e-16	4,8582e+13
X_2X_2	β_{122}	-0,042	5,8342e-15	-6,8375e+12
X_3X_3	β_{133}	0,0042	5,5319e-16	7,6026e+12
X_1X_2	β_{112}	-0,0162	9,6476e-16	-1,6756e+13
X_1X_3	β_{113}	0.0137	2,7808e-16	4,9201e+13
X_2X_3	β_{123}	0.0226	1,8443e-15	1,2247e+13
Intercept	β_{20}	-337.6334	2,6280e-15	-1,2842e+17
X_1	β_{21}	12.1478	2,9693e-14	4,0912e+14
X_2	β_{22}	7.4284	2,4801e-13	2,9952e+13
X_3	β_{23}	-6.5615	6,5230e-14	-1,0059e+14
X_1X_1	β_{211}	-0.0739	3,4613e-13	-2,1358e+11
X_2X_2	β_{222}	-0.0403	2,34093e-11	-1,7218e+09
X_3X_3	β_{233}	1,2550e-04	1,6447e-12	7,6302e+07
X_1X_2	β_{212}	-0.1382	2,7939e-12	-4,9462e+10
X_1X_3	β_{213}	0.0763	7,3547e-13	1,0374e+11
X_2X_3	β_{223}	0.0650	6,1472e-12	1,0568e+10
Intercept	β_{30}	-347.2447	1,5628e-22	-2,2219e+24
X_1	β_{31}	10,8319	2,4776e-21	4,3718e+21
X_2	β_{32}	7.2744	1,3459e-20	5,4048e+20

Tabel 4.12 Lanjutan

X_3	β_{33}	-4,5231	5,1737e-21	-8,7425e+20
X_1X_1	β_{311}	-0,0481	3,9552e-20	-1,2173e+18
X_2X_2	β_{322}	-0,0361	1,1601e-18	-3,1135e+16
X_3X_3	β_{333}	0,0018	1,5225e-19	1,1664e+16
X_1X_2	β_{312}	-0,1276	2,1010e-19	-6,0730e+17
X_1X_3	β_{313}	0,0640	8,4207e-20	7,5989e+17
X_2X_3	β_{323}	0,0424	4,4966e-19	9,4383e+16

* Signifikan pada $\alpha = 0,1$.

Ketepatan Klasifikasi pada penelitian ini menggunakanAPER (Apparent Error Rate) dimana nilai APER ini menunjukkan proporsi observasi yang salah diklasifikasikan oleh fungsi klasifikasi.

$$1 - APER = 1 - 0,1315 = 0,8684$$

Dengan demikian dapat dilihat bahwa ketepatan metode iterasi fisher scoring dalam klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota Jawa Timur tahun 2018 sebesar 86% dan jumlah iterasi sebanyak 2.

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2, dapat diperoleh hasil dari masing-masing probabilitas $\pi_{11}, \pi_{10}, \pi_{01}, \pi_{00}$ bahwa dengan kondisi presentase penduduk miskin, APM SMP, dan jumlah puskesmas yang ada, Kabupaten Kediri memiliki peluang terbesar yaitu sebesar 0,845 untuk IPM tinggi dan IPKM B-DBK, peluang terendah dari IPM tinggi dan IPKM B-DBK yaitu sebesar 0,0001 berada pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur. Peluang tertinggi IPM tinggi dan IPKM DBK yaitu sebesar 1,000 berada pada tiga kabupaten/kota di Jawa Timur sedangkan peluang terendah sebesar 0,144 terdapat pada Kabupaten Probolinggo. Sedangkan untuk IPKM sedang dan IPKM B-DBK tertinggi memiliki peluang sebesar 0,004 berada pada Kabupaten Probolinggo dan peluang terendah terdapat pada 37 kabupaten/kota di Jawa Timur yaitu memiliki peluang sebesar 0,0001. Untuk IPM rendah dan IPKM DBK, peluang tertinggi yaitu sebesar 0,837 berada pada Kabupaten Probolinggo dan probabilitas terendah yaitu sebesar 0,0001 terdapat pada beberapa kabupaten/kota di Jawa Timur.

4.4.4 Pengujian Hipotesis

Pada model BLR bivariat dilakukan pengujian parameter secara serentak dan secara parsial. Hipotesis yang digunakan untuk uji serentak adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_{h1} = \beta_{h2} = \beta_{h3} = 0,\ h = 1, 2, 3,$

$H_1 :$ Paling sedikit terdapat satu $\beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3.$

Berdasarkan hasil perhitungan dengan MATLAB pada Lampiran 3, diperoleh nilai statistik uji G^2 sebesar 276,9620. Dari tabel distribusi *chi-square* diperoleh nilai $\chi^2_{(0,1;27)}$ sebesar 36,741. Karena G^2 lebih dari nilai $\chi^2_{(0,1;27)}$, maka tolak H_0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa paling tidak, terdapat satu variabel independen yang berpengaruh signifikan terhadap IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018.

Selanjutnya dilakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui variabel independen yang signifikan terhadap model dengan hipotesis yang diuji adalah:

$H_0 : \beta_{gh} = 0,$
$H_1 :\ \beta_{gh} \neq 0;\ g = 1, 2, 3$ dan $h = 1, 2, 3.$

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa nilai statistik uji $|Z|$ untuk semua taksiran parameter lebih dari $Z_{0,05}$ sehingga tolak H_0 dan dapat disimpulkan bahwa semua variabel independen berpengaruh secara signifikan terhadap model BLR pada tingkat signifikansi α sebesar 0,1.

4.4.5 Perbandingan Iterasi Fisher Scoring dan BHHH BLR Orde Dua

Berikut ini akan dibahas mengenai perbandingan dari metode Fisher Scoring dan BHHH yang dilihat dari standar error, nilai dari Z_{hitung} dan ketepatan klasifikasinya.

Tabel 4.13 Standar Error dan Z_{hitung} dari Fisher Scoring dan BHHH

Fisher Scoring		BHHH	
Standar Error	Z	Standar Error	Z
3,0117e-08	-1,0654e+10	6,2103e-19	-5,1665e+20
5,6002e-08	7,6351e+06	9,9406e-18	4,3014e+16
4,6345e-07	1,6027e+07	6,0121e-17	1,2354e+17
5,9402e-08	-4,1057e+07	1,9149e-17	-1,2736+17
5,6902e-07	1,3170e+04	1,5426e-16	4,8582e+13
1,9808e-08	-2,0139e+06	5,8342e-15	-6,8375e+12
2,8782e-07	1,4612e+04	5,5319e-16	7,6026e+12
4,6724e-07	-3,4599e+04	9,6476e-16	-1,6756e+13
3,2477e-07	4,2128e+04	2,7808e-16	4,9201e+13
2,3254e-10	9,7129e+07	1,8443e-15	1,2247e+13
3,0117e-08	-1,1211e+10	2,6280e-15	-1,2842e+17
5,6002e-08	2,1692e+08	2,9693e-14	4,0912e+14
4,6345e-07	1,6028e+07	2,4801e-13	2,9952e+13
5,9402e-08	-1,1046e+08	6,5230e-14	-1,0059e+14
5,6902e-07	-1,2992e+05	3,4613e-13	-2,1358e+11

Tabel 4.13 Lanjutan

1,9808e-08	-2,0349e+06	2,34093e-11	-1,7218e+09
2,8782e-07	436,0161	1,6447e-12	7,6302e+07
4,6724e-07	-2,9576e+05	2,7939e-12	-4,9462e+10
3,2477e-07	2,3493e+05	7,3547e-13	1,0374e+11
2,3254e-10	2,793e+08	6,1472e-12	1,0568e+10
0,1054	-3,2943e+03	1,5628e-22	-2,2219e+24
0,1054	102,7603	2,4776e-21	4,3718e+21
0,1054	69,0112	1,3459e-20	5,4048e+20
0,1054	-42,9103	5,1737e-21	-8,7425e+20
0,1054	-0,4568	3,9552e-20	-1,2173e+18
0,1054	-0,3427	1,1601e-18	-3,1135e+16
0,1054	0,0168	1,5225e-19	1,1664e+16
0,1054	-1,2105	2,1010e-19	-6,0730e+17
0,1054	0,6071	8,4207e-20	7,5989e+17
0,0073	5,8396	4,4966e-19	9,4383e+16

Berdasarkan pada Tabel 13 tersebut diatas, dapat dilihat bahwa nilai standar error dari BHHH lebih kecil dari Fisher Scoring dan nilai dari Z_{hitung} BHHH lebih besar dari dari Fisher Scoring serta nilai ketepatan dari BHHH lebih tinggi dari Fisher Scoring yaitu sebesar 86% yang memiliki arti bahwa ketepatan metode BHHH pada klasifikasi IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2018 lebih tinggi dibandingkan Fisher Scoring, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode iterasi BHHH lebih baik dibandingkan dengan metode Fisher Scoring.

Setelah dilakukan analisis terhadap model BLR multivariabel orde dua, maka didapatkan model BLR orde dua untuk pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018 sebagai berikut:

$$\hat{\eta}_1(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\hat{\pi}_1(\boldsymbol{x})}{1-\hat{\pi}_1(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= -320{,}8553 + 0{,}4276X_1 + 7{,}4275X_2 - 2{,}4389X_3 + 0{,}0075X_1^2 -$$

$$0{,}042X_2^2 + 0{,}0042X_3^2 - 0{,}0162X_1X_2 + 0{,}0137X_1X_3 + 0{,}0226X_2X_3 \tag{4.39}$$

$$\hat{\eta}_2(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\hat{\pi}_2(\boldsymbol{x})}{1-\hat{\pi}_2(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= -337{,}6334 + 12{,}1478X_1 + 7{,}4284X_2 - 6{,}5615X_3 + 0{,}0075X_1^2 -$$

$$0{,}042X_2^2 + 0{,}0042X_3^2 - 0{,}0162X_1X_2 + 0{,}0763X_1X_3 + 0{,}0650X_2X_3 \tag{4.40}$$

$$\hat{\eta}_3(\boldsymbol{x}) = \ln\left(\frac{\hat{\pi}_{11}(\boldsymbol{x})\hat{\pi}_{00}(\boldsymbol{x})}{\hat{\pi}_{10}(\boldsymbol{x})\hat{\pi}_{01}(\boldsymbol{x})}\right)$$

$$= -347{,}2447 + 10{,}8319X_1 + 7{,}2744X_2 + 0{,}0018X_3 - 0{,}0481X_1^2 -$$

$$0{,}0361X_2^2 + 0{,}0018X_3^2 - 0{,}1276X_1X_2 + 0{,}0640X_1X_3 + 0{,}0424X_2X_3 \tag{4.41}$$

Untuk selanjutnya akan dilakukan interpretasi pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur pada tahun 2018 dengan BLR. Interpretasi dilakukan hanya untuk model BLR pada persamaan (4.41) karena model tersebut merupakan *joint model* yang melibatkan variabel dependen bivariat. Interpretasi dari model BLR pada persamaan (4.41) adalah sebagai berikut:

- Jika presentase penduduk miskin kabupaten/kota di Jawa Timur bertambah sebesar 1%, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 50609 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.

- Jika APM SMP kabupaten/kota di Jawa Timur bertambah sebesar 10, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1442,85 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika terdapat penambahan satu unit puskesmas kabupaten/kota di Jawa Timur, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika terdapat penambahan presentase penduduk miskin dan APM SMP sebesar 1% kabupaten/kota di Jawa Timur, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika terdapat penambahan presentase penduduk miskin sebesar 1% dan satu unit jumlah puskesmas kabupaten/kota di Jawa Timur, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.
- Jika terdapat penambahan APM SMP sebesar 10 dan satu unit jumlah puskesmas kabupaten/kota di Jawa Timur, maka kabupaten/kota memiliki kecenderungan sebesar 1 kali mempunyai IPM sedang dan IPKM DBK daripada IPM tinggi dan IPKM B-DBK.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai kesimpulan hasil-hasil yang diperoleh pada penaksiran parameter, penentuan statistik uji, daerah penolakan pengujian hipotesis parameter secara serentak dan parsial model BLR kabupaten/kota di Jawa Timur, dan saran yang diajukan untuk penelitian lanjutan.

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan pada hasil pembahasan model BLR dapat disimpulkan:

   1.1 Model BLR merupakan model regresi yang dikembangkan dari distribusi multinomial. Model BLR mempunyai dua variabel dependen yang saling berkorelasi, dimana masing-masing variabel dependen mempunyai dua kategori yang dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\eta_1(\boldsymbol{x}^*) = \textbf{\textit{logit}}\left(\pi_1^*(\boldsymbol{x}^*)\right) = \ln\left(\frac{\pi_1^*(\boldsymbol{x}^*)}{1-\pi_1^*(\boldsymbol{x}^*)}\right) = \boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{x}^*$$

$$\eta_2(\boldsymbol{x}^*) = \textbf{\textit{logit}}\left(\pi_2^*(\boldsymbol{x})\right) = \ln\left(\frac{\pi_2^*(\boldsymbol{x}^*)}{1-\pi_2^*(\boldsymbol{x}^*)}\right) = \boldsymbol{\beta}_2^T \boldsymbol{x}^*$$

$$\eta_3(\boldsymbol{x}^*) = \ln\left(\psi(\boldsymbol{x}^*)\right) = \ln\left(\frac{\pi_{11}\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\pi_{00}\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)}{\pi_{10}\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)\pi_{01}\left(\boldsymbol{x}_i^*\right)}\right) = \boldsymbol{\beta}_3^T \boldsymbol{x}_i^*$$

   1.2 Penaksir parameter diperoleh dengan menggunakan metode MLE. Penaksir maksimum likelihood (ML) parameter model BLR berbentuk fungsi yang tidak eksplisit, sehingga penaksir MLR dapat diperoleh dengan menggunakan metode iterasi Fisher Scoring dan Berndt-Hall-Hall-Hausmann (BHHH). Proses iterasi pada metode Fisher Scoring menggunakan vektor gradien $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})$ dan matriks informasi $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta})$, sedangkan untuk proses iterasi pada metode BHHH menggunakan vektor gradien $\boldsymbol{g}(\beta)$ dan matriks hessian $\boldsymbol{H}(\beta)$.

1.3 Pengujian hipotesis parameter model BLR terdiri dari pengujian secara serentak dan pengujian secara parsial. Statistik uji untuk uji serentak menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) yaitu $G^2 \sim \chi^2_{(\alpha,v)}$, sedangkan statistik uji untuk pengujian parameter secara parsial menggunakan statistik Wald.

2. Berdasarkan hasil dan pembahasan penerapan model BLR pada pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

2.1 Pemodelan IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur dengan metode BLR diperoleh hasil bahwa semua variabel independen berpengaruh signifikan terhadap IPM dan IPKM.

2.2 Faktor-faktor yang mempengaruhi IPM dan IPKM kabupaten/kota di Jawa Timur tahun 2018 adalah presentase penduduk miskin, Angka Partisipasi Murni (APM) Sekolah Menengah Pertama (SMP), dan jumlah puskesmas.

2.3 Berdasarkan nilai presentase ketepatan klasifikasi, standar error, dan nilai dari Z_{hitung} baik model BLRorde satu maupun orde dua, metode iterasi BHHH medapatkan hasil model terbaik untuk pemodelan IPM dan IPKM di Jawa Timur tahun 2018 dibandingkan dengan metode iterasi Fisher Scoring.

5.2 Saran

Saran yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan untuk penggunaan metode numerik yang lainnya, seperti contohnya Espectation Maximization dan Quasi-Newton.

2. Dapat menambah variabel dependen menjadi tiga atau lebih kategorik yang digunakan.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR PUSTAKA

Alesina, A. dan Rodrik, D., (1994), "Distributive Politics and Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 19 No. 2, Oxford University Press.

Anath, C. V., dan Preisser, J. S. (1999), "Bivariate Logistic Regression: Modelling The Association of Small for Gestational Age Births in Twin Gestations", *Statistics in Medicine*, Statist.Med.18,2011-2023.

Astuti, M. (2018). *"Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2010-2016"*, Skripsi, Universitas Islam Indonesia.

Berndt, E., Hall, B., Hall, R., Hausman, J. (1974), "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models", *Annals of Economic and Sosial Measurement* 3, 653-665.

Ehlers, R. (2002). *"Maximum Likelihood Estimation Procedures for Categorical Data"*, Thesis, University of Pretoria.

Fathurahman, M., Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V. (2020), "Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression Model and Its Application", *Hindawi*, Volume 2020, Article ID 8353481, 10 pages.

Fathurahman, M., Purhadi, Sutikno, dan Ratnasari, V. (2016), "Pemodelan Geographically Weighted Logistic Regression pada Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua", Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016 hal. 34-42. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran, Jatinangor.

Fibriyani, V., Latra, I. N., dan Purhadi. (2015), "Geographically Weighted Multinomial Logistic Regression Model (Case Study: Human Development Index Value and Healths Status Areas of Districts/Cities 2013 in Sumatera", Proceedings of the IConSSE FSM SWCU, hal. 13-19.

Greene, W. H. (2008), *Econometric Analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

Hocking, R. (2003), *Methods and Application of Linear Models*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Hogg, R. V., McKean, J. W., dan Craig, A. T. (2013), *Introduction to Mathematical Statistics*, Eight Edition, Pearson Education, Inc., United States of America.

Hosmer, D. W., Lemeshow, S., dan Surdivant, R. X. (2013), *Applied Logistic Regression*, Third Edition, John Wiley&Sons, Inc., New York.

Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1997), *Discrete Multivariate Distributions*, John Wiley&Sons, Inc, New York.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., dan Neter, J. (2004), *Applied Linear Regression Models*, McGraw-Hill, New York, USA.

McDonald, B. W. (1993), "Estimating Logistic Regression Parameters for Bivariate Binary Data", *J. R. Statist. Soc. B*, 55 No. 2, pp 391-397.

Octavanny, M. A. D., Budiantara, I. N., dan Ratnasari, V. (2017), "Pemodelan Faktor-faktor yang memengaruhi Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat Provinsi Jawa Timur Menggunakan Pendekatan Regresi Semiparametrik", Jurnal Sains dan Seni ITS, Vol. 6, No. 1, hal. 122-128.

Palmgren, J. (1989), "Regression Models for Bivariate Binary Responses", *Technical Report* 101, Department of Biostatistics, School of Public Health and Community Medicine, Seattle.

Pawitan, Y. (2001), *In All Likelihood Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Clarendon Press, Oxford.

Purhadi, P., Fathurahman, M., "A Logit Model for Bivariate Binary Responses, *Symmetry* 2021, 13, 326.

Ramirez, A., G. Ranis, dan F. Stewart. (1998). *Economic Growth and Human Capital*. QEH Working Paper No. 18.

Ranis, G. dan Stewart, F. (2000), “Economic Growth and Human Development”, *World Development*, Vol 28 No. 2, pp. 197-219.

Samman, E., Melamed, C. 2016. *Equity, Inequality and Human Development in A Post 2015 Framework*, UNDP, New York.

Sapaat, T. M., Lapian, A. L. Ch. P., dan Tumangkareng, S. Y. L. (2020), “Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Provinsi Sulawesi Utara Tahun (2005-2019)”, *Jurnal Berkala Ilmiah Efisiensi*, Volume 20 No. 03 Tahun 2020.

Schworer, A. dan Hovey, P., Dr. (2004), “Newton-Raphson Versus Fisher Scoring Algorithms in Calculating Maximum Likelihood Estimates”, *Electronic Proceedings of Undergraduate Mathematics Day*, No. 1, 2004.

Widyaningsih, P., Saputro, D. R. S., dan Putri, A. N. (2017), “Fisher Scoring Method for Parameter Estimation of Geographically Weighted Ordinal Logistic Regression (GWOLR) Model”, *Journal of Physics,* Conf. Series 855.

Yanthi, N. P. D., dan Budiantara, I. N. (2016), “Pemodelan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia Menggunakan Regresi Nonparametrik *Spline* di Jawa Tengah”, *Jurnal Sains dan Seni ITS*, Vol. 5 No. 2 2016.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Lampiran 1. Data Penelitian

Y1	Y2	X1	X2	X3	X1X1	X2X2	X3X3
0	1	14,19	92,84	24	201,3561	8619,266	576
0	1	10,36	93,95	31	107,3296	8826,603	961
0	1	12,02	89,47	22	144,4804	8004,881	484
1	1	7,27	98,22	32	52,8529	9647,168	1024
0	1	9,72	95,99	24	94,4784	9214,08	576
1	1	11,31	95,46	37	127,9161	9112,612	1369
0	1	10,37	87,76	39	107,5369	7701,818	1521
0	0	9,98	95,63	25	99,6004	9145,097	625
0	0	9,98	88,3	50	99,6004	7796,89	2500
1	1	7,8	90,74	45	60,84	8233,748	2025
0	0	14,39	100,81	25	207,0721	10162,66	625
0	0	11,82	89,84	17	139,7124	8071,226	289
0	1	18,71	81,18	33	350,0641	6590,192	1089
0	0	9,45	88,69	33	89,3025	7865,916	1089
1	1	5,69	98,07	26	32,3761	9617,725	676
1	1	10,08	91,54	27	101,6064	8379,572	729
1	1	9,56	96,42	34	91,3936	9296,816	1156
1	1	12,11	92,61	20	146,6521	8576,612	400
1	1	11,42	90,48	26	130,4164	8186,63	676
1	1	10,31	98,96	22	106,2961	9793,082	484
0	0	14,83	97,98	24	219,9289	9600,08	576
0	1	13,16	94,95	36	173,1856	9015,503	1296
0	1	15,31	91,72	33	234,3961	8412,558	1089
1	1	13,8	94,08	33	190,44	8851,046	1089
1	1	11,89	92,14	32	141,3721	8489,78	1024
0	0	19,59	87,59	22	383,7681	7672,008	484
0	0	21,21	86,41	21	449,8641	7466,688	441
0	0	14,47	84,98	20	209,3809	7221,6	400
0	0	20,16	92,03	30	406,4256	8469,521	900
1	1	7,68	93,56	9	58,9824	8753,474	81
1	1	7,44	89,53	3	55,3536	8015,621	9
1	1	4,1	100,49	16	16,81	10098,24	256
1	0	7,2	97,59	6	51,84	9523,808	36
1	1	6,77	84,29	8	45,8329	7104,804	64
1	1	5,5	92,46	5	30,25	8548,852	25
1	1	4,49	94,45	6	20,1601	8920,803	36
1	1	4,88	94,39	63	23,8144	8909,472	3969
1	1	3,89	91,76	5	15,1321	8419,898	25

Lampiran 1. Lanjutan

X1X2	X1X3	X2X3
1317,4	340,56	2228,16
973,322	321,16	2912,45
1075,429	264,44	1968,34
714,0594	232,64	3143,04
933,0228	233,28	2303,76
1079,653	418,47	3532,02
910,0712	404,43	3422,64
954,3874	249,5	2390,75
881,234	499	4415
707,772	351	4083,3
1450,656	359,75	2520,25
1061,909	200,94	1527,28
1518,878	617,43	2678,94
838,1205	311,85	2926,77
558,0183	147,94	2549,82
922,7232	272,16	2471,58
921,7752	325,04	3278,28
1121,507	242,2	1852,2
1033,282	296,92	2352,48
1020,278	226,82	2177,12
1453,043	355,92	2351,52
1249,542	473,76	3418,2
1404,233	505,23	3026,76
1298,304	455,4	3104,64
1095,545	380,48	2948,48
1715,888	430,98	1926,98
1832,756	445,41	1814,61
1229,661	289,4	1699,6
1855,325	604,8	2760,9
718,5408	69,12	842,04
666,1032	22,32	268,59
412,009	65,6	1607,84
702,648	43,2	585,54
570,6433	54,16	674,32
508,53	27,5	462,3
424,0805	26,94	566,7
460,6232	307,44	5946,57
356,9464	19,45	458,8

Lampiran 2. Probabilitas Y_1 dan Y_2

Orde Satu					Orde Dua				
Fisher Scoring	phi11_topi	phi10_top	phi01_topi	phi00_topi	Fisher Scoring	phi11_topi	phi10_topi	phi01_topi	phi00_topi
	0,0242741	0,0001	0,9739591	0,0017649		0,108	0,055	0,379	0,459
	0,067476	0,0001	0,9323188	0,0002046		0,696	0,003	0,298	0,003
	0,0788786	0,0001	0,9199226	0,0011946		0,200	0,042	0,504	0,254
	0,4507038	0,0001	0,5492249	0,0001		0,954	0,000	0,046	0,000
	0,4088273	0,0001	0,590708	0,0004516		0,717	0,022	0,242	0,018
	0,0137511	0,0001	0,986132	0,0001168		0,788	0,000	0,212	0,000
	0,0045282	0,0001	0,9954083	0,0001		0,050	0,026	0,413	0,512
	0,3082433	0,0001	0,6913218	0,000427		0,702	0,017	0,267	0,015
	0,0005844	0,0001	0,9994038	0,0001		0,113	0,064	0,350	0,472
	0,0100636	0,0001	0,9899239	0,0001		0,545	0,193	0,143	0,120
	0,0620668	0,0001	0,9362375	0,0016909		0,001	0,030	0,011	0,959
	0,2338367	0,0001	0,7638547	0,0022792		0,253	0,163	0,231	0,353
	0,0001	0,0001	0,998096	0,001874		0,000	0,000	0,805	0,195
	0,0335449	0,0001	0,9663413	0,0001137		0,168	0,067	0,393	0,371
	0,8878522	0,0001	0,1120436	0,0001		0,973	0,001	0,025	0,000
	0,1210593	0,0001	0,8786109	0,0003279		0,550	0,023	0,388	0,039
	0,0858199	0,0001	0,9140738	0,0001058		0,871	0,000	0,128	0,000
	0,1736229	0,0001	0,8247111	0,0016514		0,245	0,155	0,239	0,360
	0,0583324	0,0001	0,9411	0,0005661		0,301	0,020	0,585	0,094
	0,5466018	0,0001	0,4526474	0,0007145		0,359	0,088	0,351	0,203
	0,0375629	0,0001	0,9602357	0,0021978		0,003	0,063	0,018	0,917
	0,0049643	0,0001	0,9948003	0,0002354		0,560	0,000	0,440	0,000
	0,001452	0,0001	0,9978665	0,0006814		0,128	0,001	0,863	0,009
	0,0055113	0,0001	0,9940518	0,0004368		0,348	0,001	0,648	0,003
	0,0162656	0,0001	0,9834545	0,0002797		0,402	0,002	0,588	0,008
	0,0005437	0,0001	0,9878366	0,0116194		0,000	0,004	0,017	0,979
	0,0002011	0,0001	0,9782594	0,0215393		0,000	0,001	0,003	0,995
	0,0133299	0,0001	0,9834037	0,0032646		0,008	0,005	0,421	0,566
	0,0001401	0,0001	0,9953267	0,0045331		0,007	0,012	0,186	0,796
	0,9758874	0,0013744	0,0220023	0,0007359		0,778	0,204	0,011	0,007
	0,9858193	0,0036681	0,009659	0,0008536		0,971	0,026	0,002	0,000
	0,9961937	0,0002513	0,0035338	0,0001		0,976	0,005	0,019	0,000
	0,9928217	0,0025918	0,0043188	0,0002678		0,193	0,771	0,003	0,033
	0,9523016	0,0008214	0,0459359	0,000941		0,902	0,063	0,030	0,005
	0,9952207	0,0017994	0,0028572	0,0001227		0,984	0,015	0,001	0,000
	0,9973835	0,0012013	0,0013758	0,0001		0,989	0,010	0,001	0,000
	0,0023374	0,0001	0,9976622	0,0001		0,949	0,051	0,000	0,000
	0,9976337	0,0011448	0,0011891	0,0001		0,997	0,003	0,000	0,000

Lampiran 2. Lanjutan

Orde Satu					Orde Dua				
BHHH	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001	BHHH	0,001	0,999	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,158	0,842	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,006	0,994	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,724	0,276	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,023	0,977	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,845	0,155	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,002	0,998	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,030	0,970	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,001	0,999	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,003	0,997	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,000	1,000	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,002	0,998	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,015	0,144	0,004	0,837
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,003	0,997	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,320	0,680	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,024	0,976	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,670	0,330	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,002	0,998	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,014	0,986	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,002	0,998	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,000	1,000	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,701	0,299	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,120	0,880	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,208	0,792	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,114	0,886	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,000	0,993	0,000	0,007
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,000	0,974	0,000	0,026
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,003	0,992	0,000	0,005
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,000	0,999	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,008	0,992	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0003456	0,9996544		0,125	0,875	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,114	0,886	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0000893		0,000	1,000	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0000994		0,082	0,918	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0007897	0,9992103		0,148	0,852	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0012899	0,9987101		0,163	0,837	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0001	1,0001		0,008	0,992	0,000	0,000
	0,0001	0,0001	0,0166194	0,9833806		0,478	0,522	0,000	0,000

Lampiran 3. Script dan Output R untuk Deskripsi Variabel Penelitian

```
library(readxl)

logistik<- read_excel("D:/dataipkm.xlsx")
X=as.matrix(logistik[,4:6])
X1=X[,1]
X2=X[,2]
X3=X[,3]
Y=logistik[,2:3]
y1=as.matrix(Y[,1])
y2=as.matrix(Y[,2])
n=nrow(Y)
y11=matrix(0,n,1)
for(i in 1:n) {
  if(y1[i]==1 & y2[i]==1)
    y11[i,1]=1 else
    y11[i,1]=0
}
y10=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
  if (y1[i]==1 & y2[i]==0)
    y10[i,1]=1 else
    y10[i,1]=0
}
y01=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
  if (y1[i]==0 & y2[i]==1)
    y01[i,1]=1 else
    y01[i,1]=0
}
y00=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
```

```
if (y1[i]==0 & y2[i]==0)
    y00[i,1]=1 else
    y00[i,1]=0
}
Y11=sum(y11)
Y10=sum(y10)
Y01=sum(y01)
Y00=sum(y00)
sd.X1=sd(X1)
sd.X2=sd(X2)
sd.X3=sd(X3)
tabkon=array(data=c(Y11,Y01,Y11+Y01,Y10,Y00,Y10+Y00,Y11+Y10,
                   Y01+Y00,Y11+Y10+Y01+Y00),
             dim=c(3,3), dimnames=list(vardep=c("Y1=1","Y1=0","Total"),
                                       c("Y2=1","Y2=0","Total")))
tabkon
> tabkon
vardep Y2=1 Y2=0 Total
  Y1=1     19   1    20
  Y1=0      8  10    18
  Total    27  11    38

tabkon[1:2,1:2]
> tabkon[1:2,1:2]
vardep Y2=1 Y2=0
Y1=1 19  1
  Y1=0   8   10
st.dev=array(data=c(sd.X1,sd.X2,sd.X3),
             dim=c(3,1),
             dimnames=list(standar.deviasi=c("X1","X2","X3"),
                           c("Nilai")))

#Diagram lingkaran untuk kategori variabel dependen
library(readxl)
```

```
katvardep<- read_excel("D:/ny1y22.xlsx")
katvardep
Persen=round(katvardep$Jumlah/sum(katvardep$Jumlah)*100,2)
Persen
Persen=paste(Persen,"%",sep="")
pie(katvardep$Jumlah, labels=Persen, col=c("pink","red","yellow","lightblue"))
colors=c("red","yellow","pink","blue")
legend(2,0.5,c("nY11","nY10","nY01","nY00"), cex=0.8, fill=colors)

#Deskripsi variabel independen
summary(X)
> summary(X)
      X1             X2              X3
 Min.  : 3.89    Min.  : 81.18  Min.   : 3.00
 1st Qu.: 7.50   1st Qu.: 89.61   1st Qu.:20.00
 Median :10.34   Median : 92.53   Median :25.00
 Mean  :10.87   Mean   : 92.56   Mean  :25.37
 3rd Qu.:13.64 3rd Qu.: 95.59 3rd Qu.:33.00
 Max. :21.21  Max. :100.81 Max.  :63.00

st.dev
> st.dev
standar.deviasi     Nilai
             X1  4.445216
             X2  4.538416
             X3 12.964444

#Uji Korelasi antara IPM (Y1) dan Presentase Penduduk Miskin (Y2)
library(vcd)
assocstats(tabkon[1:2,1:2])
> assocstats(tabkon[1:2,1:2])
                    X^2 df P(> X^2)
Likelihood Ratio 13.056  1 0.00030224
Pearson          11.772  1 0.00060113
```

```
Phi-Coefficient : 0.557
Contingency Coeff.: 0.486
Cramer's V        : 0.557

#Menghitung nilai tabel chi-square
qchisq(p=0.95,df=1)
> #Menghitung nilai tabel chi-square
> qchisq(p=0.95,df=1)
[1] 3.841459

#Nilai harapan (expected value) Uji Pearson chi-square
chisq<-chisq.test(tabkon[1:2,1:2])
chisq
> chisq
        Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
data: tabkon[1:2, 1:2]
X-squared = 9.4428, df = 1, p-value = 0.00212

chisq$observed
> chisq$observed
vardep Y2=1 Y2=0
Y1=1 19  1
  Y1=0   8  10

round(chisq$expected,2)
> round(chisq$expected,2)
vardep Y2=1 Y2=0
  Y1=1 14.21 5.79
  Y1=0 12.79 5.21

#Nilai odds rasio variabel dependen
oddsratio=tabkon[1,1]*tabkon[2,2]/(tabkon[2,1]*tabkon[1,2])
OR=round(oddsratio,4)
OR
```

```
> OR
[1] 23.75

#Interval Konfidensi 95% untuk odds ratio variabel dependen
alpha=0.05
var.logOR=1/tabkon[1,1]+1/tabkon[1,2]+1/tabkon[2,1]+1/tabkon[2,2]
intkonf.OR=exp(log(oddsratio)+qnorm(p=c(alpha/2,1-alpha/2))*sqrt(var.logOR))
int.konf.OR=round(intkonf.OR,4)
int.konf.OR
> int.konf.OR
[1]  2.5914 217.6691

#Pengujian Multikolinieritas
cor(X)
> cor(X)
           X1          X2          X3
X1  1.0000000 -0.36426068  0.19592226
X2 -0.3642607  1.00000000 -0.01437729
X3  0.1959223 -0.01437729  1.00000000

cor.test(X1,X2)
> cor.test(X1,X2)
        Pearson's product-moment correlation
data: X1 and X2
t = -2.3468, df = 36, p-value = 0.02456
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.61260712 -0.05045241
sample estimates:
       cor
-0.3642607

cor.test(X1,X3)
> cor.test(X1,X3)
```

```
Pearson's product-moment correlation
data: X1 and X3
t = 1.1988, df = 36, p-value = 0.2385
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1320306  0.4852151
sample estimates:
      cor
0.1959223

cor.test(X2,X1)
> cor.test(X2,X1)
          Pearson's product-moment correlation
data: X2 and X1
t = -2.3468, df = 36, p-value = 0.02456
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.61260712 -0.05045241
sample estimates:
       cor
-0.3642607

cor.test(X2,X3)
> cor.test(X2,X3)
          Pearson's product-moment correlation
data: X2 and X3
t = -0.086273, df = 36, p-value = 0.9317
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3325323  0.3067158
sample estimates:
        cor
-0.01437729
```

```
cor.test(X3,X1)
> cor.test(X3,X1)
        Pearson's product-moment correlation
data: X3 and X1
t = 1.1988, df = 36, p-value = 0.2385
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1320306  0.4852151
sample estimates:
      cor
0.1959223

cor.test(X3,X2)
> cor.test(X3,X2)
        Pearson's product-moment correlation
data: X3 and X2
t = -0.086273, df = 36, p-value = 0.9317
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3325323  0.3067158
sample estimates:
        cor
-0.01437729

#Nilai VIF Model
library(car)
Mod.RLB<-glm(Y1~X1+X2+X3, family=gaussian(identity),data=as.data.frame(cbind(y1,X)))
vif(Mod.RLB)
> vif(Mod.RLB)
      X1       X2       X3
1.203448 1.157492 1.043983
```

Lampiran 4. Script dan Output R untuk Initial Value

```
library(VGAM)
library(readxl)
logistik<- read_excel("D:/dataipkm.xlsx")
logistik
X=as.matrix(logistik[,4:12])
n=nrow(logistik)
x=as.matrix(cbind(rep(1,n),(logistik[,4:12])))
Y=logistik[,2:3]
y1=as.matrix(Y[,1])
y2=as.matrix(Y[,2])
y1y2=c(y1,y2)
n=nrow(Y)
y11=matrix(0,n,1)
for(i in 1:n) {
  if(y1[i]==1 & y2[i]==1)
    y11[i,1]=1 else
    y11[i,1]=0
}
y10=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
  if (y1[i]==1 & y2[i]==0)
    y10[i,1]=1 else
    y10[i,1]=0
}
y01=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
  if (y1[i]==0 & y2[i]==1)
    y01[i,1]=1 else
    y01[i,1]=0
}
y00=matrix(0,n,1)
for (i in 1:n) {
```

```
  if (y1[i]==0 & y2[i]==0)
    y00[i,1]=1 else
    y00[i,1]=0
}
Y11=sum(y11)
Y10=sum(y10)
Y01=sum(y01)
Y00=sum(y00)

#inisial value parameter
#univariat y1
awal1 <- glm(y1 ~ X, data = logistik, family = binomial)
awal1
> #univariat y1
> awal1 <- glm(y1 ~ X, data = logistik, family = binomial)
> awal1
Call: glm(formula = y1 ~ X, family = binomial, data = logistik)
Coefficients:
(Intercept)        XX1        XX2        XX3      XX1X1      XX2X2      XX3X3
XX1X2
 -3.209e+02   4.276e-01   7.427e+00   -2.439e+00   7.486e-03   -4.115e-02   4.116e-03   -
1.627e-02
     XX1X3      XX2X3
  1.366e-02   2.231e-02
Degrees of Freedom: 37 Total (i.e. Null);  28 Residual
Null Deviance:       52.57
Residual Deviance: 25.36  AIC: 45.36

summary(awal1)
> summary(awal1)
Call:
glm(formula = y1 ~ X, family = binomial, data = logistik)
Deviance Residuals:
     Min       1Q    Median      3Q      Max
-1.64104 -0.49250   0.02324  0.29736   1.50635
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -3.209e+02 3.853e+02  -0.833  0.405
XX1          4.276e-01  8.013e+00  0.053    0.957
XX2          7.427e+00  8.385e+00  0.886    0.376
XX3         -2.439e+00  1.918e+00  -1.271    0.204
XX1X1        7.486e-03  6.849e-02   0.109    0.913
XX2X2       -4.115e-02  4.553e-02  -0.904    0.366
XX3X3        4.116e-03  6.092e-03   0.676    0.499
XX1X2       -1.627e-02  7.705e-02  -0.211    0.833
XX1X3        1.366e-02  2.864e-02   0.477    0.634
XX2X3        2.231e-02  1.955e-02   1.141    0.254
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
    Null deviance: 52.574  on 37  degrees of freedom
Residual deviance: 25.361 on 28 degrees of freedom
AIC: 45.361
Number of Fisher Scoring iterations: 7

#univariat y2
awal2<-glm(y2 ~ X, data = logistik, family = binomial)
awal2
> #univariat y2
> awal2<-glm(y2 ~ X, data = logistik, family = binomial)
> awal2

Call: glm(formula = y2 ~ X, family = binomial, data = logistik)

Coefficients:
(Intercept)        XX1         XX2         XX3       XX1X1       XX2X2       XX3X3
XX1X2
 -3.376e+02    1.215e+01    7.428e+00   -6.561e+00   -7.390e-02   -3.963e-02    1.841e-04 -
1.381e-01
     XX1X3       XX2X3
  7.634e-02  6.521e-02
```

```
Degrees of Freedom: 37 Total (i.e. Null);  28 Residual
Null Deviance:       45.73
Residual Deviance: 21.58  AIC: 41.58


summary(awal2)
> summary(awal2)
Call:
glm(formula = y2 ~ X, family = binomial, data = logistik)
Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.6230  -0.1338   0.1059   0.3735   1.2482
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -3.376e+02  3.306e+02  -1.021   0.3071
XX1          1.215e+01  6.831e+00   1.778   0.0754 .
XX2          7.428e+00  6.902e+00   1.076   0.2818
XX3         -6.561e+00  3.135e+00  -2.093   0.0363 *
XX1X1       -7.390e-02  6.287e-02  -1.175   0.2398
XX2X2       -3.963e-02  3.589e-02  -1.104   0.2694
XX3X3        1.841e-04  4.476e-03   0.041   0.9672
XX1X2       -1.381e-01  7.188e-02  -1.921   0.0548 .
XX1X3        7.634e-02  4.075e-02   1.873   0.0610 .
XX2X3        6.521e-02  3.023e-02   2.157   0.0310 *
---
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
    Null deviance: 45.728 on 37 degrees of freedom
Residual deviance: 21.582 on 28 degrees of freedom
AIC: 41.582
Number of Fisher Scoring iterations: 7


#univariat y3
ymult=y11+y10+y01
mult=as.data.frame(cbind(ymult,X))
```

```
awal3<-glm(V1~X,data=mult, family=binomial)

awal3

> awal3

Call:  glm(formula = V1 ~ X, family = binomial, data = mult)

Coefficients:

(Intercept)        XX1        XX2        XX3       XX1X1       XX2X2       XX3X3       XX1X2

 -3.472e+02    1.083e+01    7.274e+00   -4.523e+00   -4.815e-02   -3.631e-02    1.759e-03
-1.276e-01

     XX1X3       XX2X3

  6.398e-02   4.239e-02

Degrees of Freedom: 37 Total (i.e. Null);  28 Residual

Null Deviance:       43.8

Residual Deviance: 20.67            AIC: 40.67


summary(awal3)

> summary(awal3)

Call:

glm(formula = V1 ~ X, family = binomial, data = mult)

Deviance Residuals:

    Min       1Q    Median       3Q      Max

-2.55459  -0.11569  0.09668  0.42086   1.27754

Coefficients:

            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)

(Intercept) -3.472e+02  3.293e+02  -1.054  0.2917

XX1         1.083e+01  5.883e+00   1.841   0.0656 .

XX2         7.274e+00  6.931e+00   1.049   0.2940

XX3        -4.523e+00  2.625e+00  -1.723   0.0849 .

XX1X1      -4.815e-02  5.434e-02  -0.886   0.3756

XX2X2      -3.631e-02  3.610e-02  -1.006   0.3145

XX3X3       1.759e-03  4.686e-03   0.375   0.7073
```

```
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 43.801  on 37  degrees of freedom
Residual deviance: 20.671  on 28  degrees of freedom
AIC: 40.671

Number of Fisher Scoring iterations: 7


beta1=awal1$coefficients
beta1
> beta1=awal1$coefficients
> beta1
  (Intercept)           XX1           XX2           XX3        XX1X1        XX2X2        XX3X3        XX1X2 
-3.208553e+02 4.275849e-01 7.427487e+00 -2.438884e+00 7.485752e-03 -4.114980e-02  4.116168e-03 -1.627055e-02 
       XX1X3         XX2X3 
 1.365603e-02  2.230597e-02 


beta2=awal2$coefficients
beta2
> beta2=awal2$coefficients
> beta2
  (Intercept)           XX1           XX2           XX3        XX1X1        XX2X2        XX3X3        XX1X2 
-3.376334e+02 1.214781e+01 7.428364e+00 -6.561497e+00 -7.390431e-02 -3.963426e-02  1.840923e-04 -1.380597e-01 
       XX1X3         XX2X3 
 7.634027e-02  6.520518e-02 


beta3=awal1$coefficients
> beta3=awal1$coefficients
> beta3
  (Intercept)           XX1           XX2           XX3        XX1X1        XX2X2        XX3X3        XX1X2 
```

```
      XX1X3        XX2X3
 1.365603e-02  2.230597e-02


param1=cbind(t(beta1),t(beta2),t(beta3))
> param1=cbind(t(beta1),t(beta2),t(beta3))
> param1
    (Intercept)       XX1      XX2       XX3       XX1X1       XX2X2       XX3X3       XX1X2       XX1X3
[1,]  -320.8553 0.4275849 7.427487 -2.438884 0.007485752 -0.0411498 0.004116168 -
0.01627055 0.01365603
        XX2X3 (Intercept)      XX1      XX2       XX3       XX1X1       XX2X2        XX3X3      XX1X2
[1,] 0.02230597  -337.6334 12.14781 7.428364 -6.561497 -0.07390431 -0.03963426
0.0001840923 -0.1380597
        XX1X3      XX2X3 (Intercept)       XX1      XX2       XX3       XX1X1       XX2X2       XX3X3
[1,] 0.07634027 0.06520518  -320.8553 0.4275849 7.427487 -2.438884 0.007485752 -
0.0411498 0.004116168
         XX1X2      XX1X3      XX2X3
[1,] -0.01627055 0.01365603 0.02230597
```

Lampiran 5. Script MATLAB untuk Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model BLR Dengan Fisher Scoring

```
MaxIter=1000;
toleransi=10^-5;
x=[X1 X2 X3 X1X1 X2X2 X3X3 X1X2 X1X3 X2X3];
X=[ones(size(x,1),1) x];
[n p]=size(X);
%param11=[-320.855283279989;0.427584874857217;7.4274872339809;-
2.43888377817806;0.00748575168713248;-
0.0411498013771831;0.00411616806352581;-
0.0162705461941119;0.0136560344330877;0.0223059700635029;-
337.633358292297;12.1478139950937;7.42836409549577;-
6.56149654667936;-0.0739043063387402;-
0.0396342595959732;0.000184092304801712;-
0.138059746344504;0.0763402714995309;0.0652051842698839;-
347.2447;10.83187;7.274404;-4.523134;-0.0481503;-
0.0363063;0.0017593;-0.1276138;0.0639832;0.0423898];
%param11=[-320.855283279989;0.427584874857217;7.4274872339809;-
2.43888377817806;0.00748575168713248;-
0.0411498013771831;0.00411616806352581;-
0.0162705461941119;0.0136560344330877;0.0223059700635029;-
337.633358292297;12.1478139950937;7.42836409549577;-
6.56149654667936;-0.0739043063387402;-
0.0396342595959732;0.000184092304801712;-
0.138059746344504;0.0763402714995309;0.0652051842698839;-
21.6418082140692;6.97479962703184;0.705208006947663;-
4.50435504540452;-0.0372838994170248;-
0.00337542098170257;0.00133578259213586;-
0.0874427538681096;0.0588223457340848;0.0429172676429876];
param11=[-320.855283279989;0.427584874857217;7.4274872339809;-
2.43888377817806;0.00748575168713248;-
0.0411498013771831;0.00411616806352581;-
0.0162705461941119;0.0136560344330877;0.0223059700635029;-
337.633358292297;12.1478139950937;7.42836409549577;-
6.56149654667936;-0.0739043063387402;-
0.0396342595959732;0.000184092304801712;-
0.138059746344504;0.0763402714995309;0.0652051842698839;-
0.095138685;0.953957805;-
2.02091644;5.367760219;0.34027625;0.017796462;-0.001322749;-
0.009271748;-0.285029161;-0.039760981];

g=zeros(p*3,1);
I=zeros(p*3,p*3);

y11=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==1,Y2(ii)==1)
y11(ii,1)=1;
else
y11(ii,1)=0;
end
end

y10=zeros(n,1);
for ii=1:n
```

```
if and(Y1(ii)==1,Y2(ii)==0)
y10(ii,1)=1;
else
y10(ii,1)=0;
end
end

y01=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==0,Y2(ii)==1)
y01(ii,1)=1;
else
y01(ii,1)=0;
end
end

y00=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==0,Y2(ii)==0)
y00(ii,1)=1;
else
y00(ii,1)=0;
end
end

H1=eye(p*3);

psi=sum(y11)*sum(y00)/(sum(y10)*sum(y01));

iterasi=0;
error=1000;


while error>=toleransi && iterasi<MaxIter
iterasi=iterasi+1;

phi1a=exp(X*param11(1:p));
phi1a(find(phi1a==Inf))=0.9;
phi2a=exp(X*param11(p+1:2*p));
phi2a(find(phi2a==Inf))=0.9;

phi1=phi1a./(1+phi1a);
phi2=phi2a./(1+phi2a);
a=1+(psi-1)*(phi1+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phi1.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*(psi-1));
phi11(find(phi11<0.0001))=0.0001;
phi10=phi1-phi11;
phi10(find(phi10<0.0001))=0.0001;
phi01=phi2-phi11;
phi01(find(phi01<0.0001))=0.0001;
phi00=1-phi1-phi2+phi11;
phi00(find(phi00<0.0001))=0.0001;

omega_atas=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00);
```

```
omega_bawah=phi1.*(1-phi1).*phi2.*(1-
phi2).*(((1./phi11)+(1./phi10)+(1./phi01)+(1./phi00)).^-1);
pembagidelta=(phi1.*phi2.*(1-phi1).*(1-phi2));
pembagidelta(find(pembagidelta<0.0001))=0.0001;
delta=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00).*((1./phi11)+(1./phi01)+(1./ph
i10)+(1./phi00))./pembagidelta;
delta(find(delta<0.0001))=0.0001;

g1a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g1a(i,:)=1/delta(i)*(((y11(i).*phi01(i)-
y01(i).*phi11(i))./phi2(i))+((y10(i).*phi10(i)-
y00(i).*phi10(i))./(1-phi2(i))))*X(i,:);
end
gg1=sum(g1a);

g2a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g2a(i,:)=1/delta(i).*(((y11(i)*phi10(i)-
y10(i)*phi11(i))/phi1(i))+((y01(i)*phi10(i)-y00(i)*phi01(i))/(1-
phi1(i))))*X(i,:);
end
gg2=sum(g2a);

g3a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g3a(i,:)=(((y11(i)/phi11(i))-(y10(i)/phi10(i))-
(y01(i)/phi01(i))+(y00(i)/phi00(i)))/((1/phi11(i))+(1/phi10(i))+(
1/phi01(i))+(1/phi00(i))))*X(i,:);
end
gg3=sum(g3a);

g1=[gg1';gg2';gg3'];
g1(find(g1==Inf))=1000;
g1(isnan(g1))=1000;

%Turunan Kedua
deltaa=(1./phi11+1./phi10+1./phi01+1./phi00).^-1;
delta1=phi11.*phi10.*phi01.*phi00./phi1.*(1-phi1).*phi2.*(1-
phi2).*deltaa;
%b1b1
a11=y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2+y10(i)./phi
10.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi2).*delta).^2+y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*delta).^2+y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi2).*delta).^2;
a1=-sum(a11);
a22=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X1(i,:))+
(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi2).*delta).^2.*X1(i,:));
a2=-sum(a22);
a33=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X1(i,:))+
(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
```

```
a3=-sum(a33);
a44=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X1(i,:)
)+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi2).*delta).^2.*X1(i,:));
a4=-sum(a44);
a55=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X1(i,:)
.*X2(i,:))+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:))+(y00(i)./phi0
0.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi2).*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:));
a5=-sum(a55);
a66=0;
a6=0;
a77=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X2(i,:)
)+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*delta).^2.*X2(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*delta).^2.*X2(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi2).*delta).^2.*X2(i,:));
a7=-sum(a77);
a88=0;
a8=0;
a99=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X2(i,:)
.*X1(i,:))+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi2.*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:))+(y00(i)./phi0
0.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi2).*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:));
a9=-sum(a99);
a100=0;
a10=0;
aa=[a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9
a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9
a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9
a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9
a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10;a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9
a10];

%b1b2
b11=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi
1.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
b1=-sum(b11);
b22=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta
a.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
b2=-sum(b22);
b33=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta
a.*X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
b3=-sum(b33);
```

```
b44=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi
1.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
b4=-sum(b11);
b55=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi
1.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
b5=-sum(b11);
b66=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta *
a.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
b6=-sum(b22);
b77=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta
a.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
b7=-sum(b22);
b88=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta
a.*X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
b8=-sum(b33);
b99=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi1
0.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*delta
a.*X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
b9=-sum(b33);
b100=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./ph
i1.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
b10=-sum(b11);
bb=[b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9
b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9
b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9
b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9
b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10;b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9
b10];

%b1b3
c1=0;
c2=0;
c3=0;
c4=0;
c5=0;
c6=0;
c7=0;
```

```
c8=0;
c9=0;
c10=0;
cc=[c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9
c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9
c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9
c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9
c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10;c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9
c10];

%b2b1
d11=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1
.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
d1=-sum(b11);
d22=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
d2=-sum(b22);
d33=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
d3=-sum(b33);
d44=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1
.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
d4=-sum(b11);
d55=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1
.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
d5=-sum(b11);
d66=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
d6=-sum(b22);
d77=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*X1(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X1(i,:)).^2);
d7=-sum(b22);
d88=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*
```

```
X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
d8=-sum(b33);
d99=(1./phi11.*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi10
.*(-phi11.*phi01./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2+1./phi01.*(phi01.*phi00./phi1.*deltaa
.*X2(i,:)).^2+1./phi00.*(-phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa.*X2(i,:)).^2);
d9=-sum(b33);
d100=(1./phi11.*(phi11.*phi01./phi2.*deltaa).*(phi11.*phi10./phi
1.*deltaa)+1./phi10.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi11.*phi10./phi1.*deltaa)+(phi01.*phi00./(1-
phi1).*deltaa)+1./phi00.*(phi10.*phi00./(1-
phi2).*deltaa).*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa));
d10=-sum(b11);
dd=[d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9 d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9
d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9 d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9
d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9 d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9
d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9 d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9
d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9 d10;d1 d2 d3 d4 d5 d6 d7 d8 d9
d10];

%b2b2
e11=y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2+y10(i)./ph
i10.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2+y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*delta).^2+y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2;
e1=-sum(a11);
e22=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X1(i,:))
+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2.*X1(i,:));
e2=-sum(a22);
e33=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X1(i,:))
+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2.*X1(i,:));
e3=-sum(a33);
e44=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X1(i,:))
+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*delta).^2.*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*delta).^2.*X1(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2.*X1(i,:));
e4=-sum(a44);
e55=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X1(i,:).
*X2(i,:))+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:))+(y00(i)./phi00
.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa).^2.*X1(i,:).*X2(i,:));
e5=-sum(a55);
e66=0;
e6=0;
e77=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X2(i,:))
+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*delta).^2.*X2(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
```

```
phi11.*phi01./phi1.*delta).^2.*X2(i,:))+(y00(i)./phi00.^2.*(-
phi10.*phi00./(1-phi1).*delta).^2.*X2(i,:));
e7=-sum(a77);
e88=0;
e8=0;
e99=(y11(i)./phi11.^2.*(phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X2(i,:)
.*X1(i,:))+(y10(i)./phi10.^2.*(phi10.*phi00./(1-
phi1).*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:))+(y01(i)./phi01.^2.*(-
phi11.*phi01./phi1.*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:))+(y00(i)./phi0
0.^2.*(phi10.*phi00./(1-phi1).*deltaa).^2.*X2(i,:).*X1(i,:));
e9=-sum(a99);
e100=0;
e10=0;
ee=[e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9 e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9
e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9 e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9
e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9 e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9
e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9 e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9
e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9 e10;e1 e2 e3 e4 e5 e6 e7 e8 e9
e10];

%b2b3
f1=0;
f2=0;
f3=0;
f4=0;
f5=0;
f6=0;
f7=0;
f8=0;
f9=0;
f10=0;
ff=[f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9
f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9
f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9
f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9
f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10;f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9
f10];

%b3b1
j1=0;
j2=0;
j3=0;
j4=0;
j5=0;
j6=0;
j7=0;
j8=0;
j9=0;
j10=0;
jj=[j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9 j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9
j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9 j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9
j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9 j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9
j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9 j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9
j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9 j10;j1 j2 j3 j4 j5 j6 j7 j8 j9
j10];

%b3b1
```

```
k1=0;
k2=0;
k3=0;
k4=0;
k5=0;
k6=0;
k7=0;
k8=0;
k9=0;
k10=0;
kk=[k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9
k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9
k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9
k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9
k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k10;k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9
k10];

%b3b3
m1=0;
m2=0;
m3=0;
m4=0;
m5=0;
m6=0;
m7=0;
m8=0;
m9=0;
m100=((1./phi11.*((1./phi11+1./phi10+1./phi01+1./phi00)).^-
2)+(1./phi10.*((1./phi11+1./phi10+1./phi01+1./phi00)).^-
2)+(1./phi01.*((1./phi11+1./phi10+1./phi01+1./phi00)).^-
2)+(1./phi00.*((1./phi11+1./phi10+1./phi01+1./phi00)).^-2));
m10=sum(m100);
mm=[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9
m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9
m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9
m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9
m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10;m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9
m10];

I=[aa bb cc;dd ee ff;jj kk mm];
I(find(I==Inf))=1000;
I(find(I==-Inf))=1000;
I(isnan(I))=1000;

param22=param11-pinv(I)*g1;
error=sum(sqrt((param11-param22).^2));
param11=param22;

end

Q=zeros(n,1);
for u=1:n


Q(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u)))+y10(u)*log(abs(phi10(u)))+y01(u)
*log(abs(phi01(u)))+y00(u)*log(abs(phi00(u))); %ln likelihood
```

```
end
Q0=sum(Q);
K=3*p;
AICC=-2*(Q0-K)+(2*K*(K+1)/(n-K-1));

SE=sqrt(abs(diag(pinv(I))));
Z=param11./SE;

bintang=[];
for j=1:3
 bintang(j)=j*p-(p-1);
end
bintang=bintang';

phi1bintang=exp(param11(1))./(1+exp(param11(1)));
phi2bintang=exp(param11(p*2+1)./(1+exp(param11(p*2+1))));
abintang=1+(psi-1)*(phi1bintang+phi2bintang);
bbintang=-4*psi*(psi-1)*phi1bintang.*phi2bintang;
phi11bintang=(abintang-sqrt(abintang.^2+bbintang))/(2*(psi-1));
phi11bintang(find(phi11bintang<=0))=0.0001;
phi10bintang=phi1bintang-phi11bintang;
phi10bintang(find(phi10bintang<=0))=0.0001;
phi01bintang=phi2bintang-phi11bintang;
phi01bintang(find(phi01bintang<=0))=0.0001;
phi00bintang=1-phi1bintang-phi2bintang+phi11bintang;
phi00bintang(find(phi00bintang<0.0001))=0.0001;

GG=zeros(n,1);
for u=1:n


GG(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u)./phi11bintang))+y10(u)*log(abs((ph
i1(u)-phi11(u))./(phi1bintang-
phi11bintang)))+y01(u)*log(abs((phi2(u)-phi11(u))./(phi2bintang-
phi11bintang)))+y00(u)*log(abs((1-phi1(u)-phi2(u)+phi11(u))./(1-
phi1bintang-phi2bintang+phi11bintang)));
end
G1=abs(sum(GG));



%ketepatan klasifikasi
phi1a=exp(X*param11(1:p));
phi1a(find(phi1a==Inf))=0.9;
phi2a=exp(X*param11(p+1:2*p));
phi2a(find(phi2a==Inf))=0.9;

phi1=phi1a./(1+phi1a);
phi2=phi2a./(1+phi2a);
a=1+(psi-1)*(phi1+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phi1.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*(psi-1));
phi11(find(phi11<0.0001))=0.0001;
phi10=phi1-phi11;
phi10(find(phi10<0.0001))=0.0001;
phi01=phi2-phi11;
```

```
phi01(find(phi01<0.0001))=0.0001;
phi00=1-phi1-phi2+phi11;
phi00(find(phi00<0.0001))=0.0001;
```

Lampiran 6. Script MATLAB untuk Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model BLR Dengan BHHH

```
MaxIter=1000;
toleransi=10^-5;
x=[X1 X2 X3 X1X1 X2X2 X3X3 X1X2 X1X3 X2X3];
X=[ones(size(x,1),1) x];
[n p]=size(X);
param1=[-320.855283279989;0.427584874857217;7.4274872339809;-
2.43888377817806;0.00748575168713248;-
0.0411498013771831;0.00411616806352581;-
0.0162705461941119;0.0136560344330877;0.0223059700635029;-
337.633358292297;12.1478139950937;7.42836409549577;-
6.56149654667936;-0.0739043063387402;-
0.0396342595959732;0.000184092304801712;-
0.138059746344504;0.0763402714995309;0.0652051842698839;-
347.2447;10.83187;7.274404;-4.523134;-0.0481503;-
0.0363063;0.0017593;-0.1276138;0.0639832;0.0423898];

g=zeros(p*3,1);

y11=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==1,Y2(ii)==1)
y11(ii,1)=1;
else
y11(ii,1)=0;
end
end

y10=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==1,Y2(ii)==0)
y10(ii,1)=1;
else
y10(ii,1)=0;
end
end

y01=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==0,Y2(ii)==1)
y01(ii,1)=1;
else
y01(ii,1)=0;
end
end

y00=zeros(n,1);
for ii=1:n
    if and(Y1(ii)==0,Y2(ii)==0)
y00(ii,1)=1;
else
y00(ii,1)=0;
end
```

```
end



H1=eye(p*3);

psi=sum(y11)*sum(y00)/(sum(y10)*sum(y01));

iterasi=0;
error=1000;



while error>=toleransi && iterasi<MaxIter
iterasi=iterasi+1;

phi1a=exp(X*param1(1:p));
phi1a(find(phi1a==Inf))=0.9;
phi2a=exp(X*param1(p+1:2*p));
phi2a(find(phi2a==Inf))=0.9;

phi1=phi1a./(1+phi1a);
phi2=phi2a./(1+phi2a);
a=1+(psi-1)*(phi1+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phi1.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*(psi-1));
phi11(find(phi11<0.0001))=0.0001;
phi10=phi1-phi11;
phi10(find(phi10<0.0001))=0.0001;
phi01=phi2-phi11;
phi01(find(phi01<0.0001))=0.0001;
phi00=1-phi1-phi2+phi11;
phi00(find(phi00<0.0001))=0.0001;

omega_atas=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00);
omega_bawah=phi1.*(1-phi1).*phi2.*(1-
phi2).*(((1./phi11)+(1./phi10)+(1./phi01)+(1./phi00)).^-1);
pembagidelta=(phi1.*phi2.*(1-phi1).*(1-phi2));
pembagidelta(find(pembagidelta<0.0001))=0.0001;
delta=(phi11.*phi10.*phi01.*phi00).*((1./phi11)+(1./phi01)+(1./
phi10)+(1./phi00))./pembagidelta;
delta(find(delta<0.0001))=0.0001;

g1a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g1a(i,:)=1/delta(i)*(((y11(i).*phi01(i)-
y01(i).*phi11(i))./phi2(i))+((y10(i).*phi10(i)-
y00(i).*phi10(i))./(1-phi2(i))))*X(i,:);
end
gg1=sum(g1a);

g2a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g2a(i,:)=1/delta(i).*(((y11(i)*phi10(i)-
y10(i)*phi11(i))/phi1(i))+((y01(i)*phi10(i)-
y00(i)*phi01(i))/(1-phi1(i))))*X(i,:);
end
```

```
gg2=sum(g2a);

g3a=zeros(n,p);
for i=1:n
 g3a(i,:)=(((y11(i)/phi11(i))-(y10(i)/phi10(i))-
(y01(i)/phi01(i))+(y00(i)/phi00(i)))/((1/phi11(i))+(1/phi10(i))
+(1/phi01(i))+(1/phi00(i))))*X(i,:);
end
gg3=sum(g3a);

g1=[gg1';gg2';gg3'];
g1(find(g1==Inf))=1000;
g1(isnan(g1))=1000;

H1=-(1/n)*(g1*g1');
H1(find(H1==Inf))=1000;
H1(isnan(H1))=1000;

param2=param1-pinv(H1)*g1;
error=sum(sqrt((param1-param2).^2));
param1=param2;

end

Q=zeros(n,1);
for u=1:n


Q(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u)))+y10(u)*log(abs(phi10(u)))+y01(u)
*log(abs(phi01(u)))+y00(u)*log(abs(phi00(u))); %ln likelihood
end
Q0=sum(Q);
K=3*p;
AICC=-2*(Q0-K)+(2*K*(K+1)/(n-K-1));

SE=sqrt(abs(diag(pinv(H1))));
Z=param1./SE; %Zhitung

bintang=[];
for j=1:3
 bintang(j)=j*p-(p-1);
end
bintang=bintang';

phi1bintang=exp(param1(1))./(1+exp(param1(1)));
phi2bintang=exp(param1(p*2+1)./(1+exp(param1(p*2+1))));
abintang=1+(psi-1)*(phi1bintang+phi2bintang);
bbintang=-4*psi*(psi-1)*phi1bintang.*phi2bintang;
phi11bintang=(abintang-sqrt(abintang.^2+bbintang))/(2*(psi-1));
phi11bintang(find(phi11bintang<=0))=0.0001;
phi10bintang=phi1bintang-phi11bintang;
phi10bintang(find(phi10bintang<=0))=0.0001;
phi01bintang=phi2bintang-phi11bintang;
phi01bintang(find(phi01bintang<=0))=0.0001;
phi00bintang=1-phi1bintang-phi2bintang+phi11bintang;
```

```
phi00bintang(find(phi00bintang<0.0001))=0.0001;

GG=zeros(n,1);
for u=1:n


GG(u)=y11(u)*log(abs(phi11(u)./phi11bintang))+y10(u)*log(abs((p
hi1(u)-phi11(u))./(phi1bintang-
phi11bintang)))+y01(u)*log(abs((phi2(u)-
phi11(u))./(phi2bintang-phi11bintang)))+y00(u)*log(abs((1-
phi1(u)-phi2(u)+phi11(u))./(1-phi1bintang-
phi2bintang+phi11bintang)));
end
G1=abs(sum(GG));


%ketepatan klasifikasi
phi1a=exp(X*param1(1:p));
phi1a(find(phi1a==Inf))=0.9;
phi2a=exp(X*param1(p+1:2*p));
phi2a(find(phi2a==Inf))=0.9;

phi1=phi1a./(1+phi1a);
phi2=phi2a./(1+phi2a);
a=1+(psi-1)*(phi1+phi2);
b=-4*psi*(psi-1)*phi1.*phi2;
phi11=(a-sqrt(a.^2+b))/(2*(psi-1));
phi11(find(phi11<0.0001))=0.0001;
phi10=phi1-phi11;
phi10(find(phi10<0.0001))=0.0001;
phi01=phi2-phi11;
phi01(find(phi01<0.0001))=0.0001;
phi00=1-phi1-phi2+phi11;
phi00(find(phi00<0.0001))=0.0001;
```

BIODATA PENULIS

Penulis dengan nama lengkap Igar Calveria Aviantholib dilahirkan di Kota Mojokerto pada tanggal 24 April 1996. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Almarhum Bapak Abdul Muntholib dan Ibu Oktavianty Puspitasari. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Gedongan 1 Mojokerto (2002-2008), SMPN 1 Mojokerto (2008-2011), dan SMAN 2 Mojokerto (2011-2014), kemudian S1 Matematika di Universitas Airlangga Surabaya (2014-2018). Setelah lulus sarjana, penulis bekerja di usaha milik penulis yang bergerak di bidang jasa event organizer dan kembali melanjutkan pendidikan di Program Pascasarjana Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD) di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pembaca yang ingin memberikan kritik, saran, atau pertanyaan mengenai penelitian ini dapat menghubungi penulis melalui email igarcalveria@gmail.com.