



TESIS - EE185401

PERANCANGAN PREDIKTOR UNTUK PERMASALAHAN KONSENSUS DENGAN DELAY INPUT DAN KOMUNIKASI

MOH. YASYA BAHRUL ULUM
07111850020003

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

PROGRAM MAGISTER
BIDANG KEAHLIAN TEKNIK SISTEM PENGATURAN
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO
FAKULTAS TEKNOLOGI ELEKTRO DAN INFORMATIKA CERDAS
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2022



TESIS - EE185401

**PERANCANGAN PREDIKTOR UNTUK
PERMASALAHAN KONSENSUS DENGAN DELAY
INPUT DAN KOMUNIKASI**

MOH. YASYA BAHRUL ULUM
07111850020003

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

PROGRAM MAGISTER
BIDANG KEAHLIAN TEKNIK SISTEM PENGATURAN
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO
FAKULTAS TEKNOLOGI ELEKTRO DAN INFORMATIKA CERDAS
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2022

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Teknik (MT)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

MOH. YASYA BAHRUL ULUM

NRP: 07111850020003

Tanggal Ujian: 13 Januari 2022

Periode Wisuda: Maret 2022

Disetujui oleh:

Pembimbing:

1. Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T
NIP: 19680811994032001



Penguji:

1. Prof.Dr.Ir. Achmad Jazidie, M.Eng.
NIP: 195902191986101001
2. Dr.Ir. Ari Santoso, DEA.
NIP: 196602181991021001



Kepala Departemen Teknik Elektro
Fakultas Teknologi Elektro dan Informatika Cerdas

Dr. Dedet Candra Riawan, ST., M.Eng.
NIP: 197311192000031001

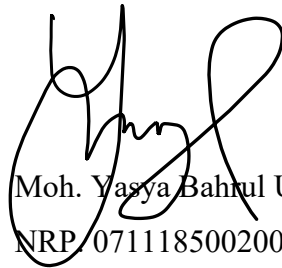
Halaman ini sengaja dikosongkan

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi keseluruhan Tesis saya dengan judul “**PERANCANGAN PREDIKTOR UNTUK PERMASALAHAN KONSENSUS DENGAN DELAY INPUT DAN KOMUNIKASI**” adalah benar-benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diizinkan dan bukan merupakan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya sendiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila ternyata pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, 12 Januari 2022



Moh. Yasya Bahtul Ulum
NRP/07111850020003

Halaman ini sengaja dikosongkan

PERANCANGAN PREDIKTOR UNTUK PERMASALAHAN KONSENSUS DENGAN DELAY INPUT DAN KOMUNIKASI

Nama Mahasiswa : Moh. Yasya Bahrul Ulum
NRP : 07111850020003
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRAK

Rancangan prediktor berbasis input delay (dengan bukti) dapat mengkompensasi efek dari delay komunikasi (berupa osilasi dan adanya batas kestabilan) pada permasalahan konsensus dengan delay input dan delay komunikasi. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana efek penggunaan prediktor berbasis input delay ke sebuah permasalahan konsensus dengan delay. Metode yang digunakan dalam penelitian ini berdasarkan pada konsep partisi graf dapat menjadi beberapa subgraf yang komplit. Hasil penelitian memberikan bukti analitik bahwa dengan adanya prediktor memberikan respon yang lebih cepat, batas delay yang lebih lama dan osilasi yang lebih rendah. Kemudian, penelitian ini juga memberikan pembuktian mengenai perilaku akar-akar persamaan Karakteristik sistem terhadap pemberian gain pada komponen terprediksi (tanpa delay) dan komponen tidak terprediksi (dengan delay). Pemberian gain yang lebih pada komponen terprediksi mempercepat respon sistem sedangkan pemberian gain yang lebih pada komponen tidak terprediksi malah bisa memperbesar osilasi kemudian membuat sistem menjadi tidak stabil. Bukti-bukti pemberian gain tersebut juga diperkuat dengan algoritma root-locus. Selain itu, robustness dari sistem dengan prediktor juga perlu diperhatikan. Pembuktian robustness dengan norm H_2 dan H_∞ menunjukkan prediktor tersebut robust terhadap input yang tidak terprediksi namun tidak robust terhadap perubahan parameter pada sistem. Metode prediksi pada akhir penelitian dapat dikembangkan menjadi benar-benar menghilangkan efek dari delay (meniadakan komponen dengan delay) dengan cara memanipulasi graf agar menjadi graf komplit.

Kata kunci: Permasalahan Konsensus, Delay, Graf, Prediktor.

Halaman ini sengaja dikosongkan

PREDICTOR DESIGN FOR CONSENSUS PROBLEMS WITH INPUT AND COMMUNICATION DELAYS

By : Moh. Yasya Bahrul Ulum
Student Identity Number : 07111850020003
Supervisor(s) : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRACT

Predictors design based on input delay (with evidence) can compensate for the effects of communication delays (in the form of oscillations and the existence of stability limits) on consensus problems with input delays and communication delays. This study aims to find out the effect of using input delay-based predictors to a consensus problem with delay. The method used in this study is based on the concept of partitioning graphs into several complete subgraphs. The results provide analytical evidence that predictors respond faster, delay limits and lower oscillations. Furthermore, this study also provides evidence of the behavior of the roots of the system's characteristic equations against gaining in predictable (without delay) and unpredictable components (with delays). Giving more gain to the predictable component accelerates the system response while the provision of more gain on the unpredictable component can even enlarge the oscillation and then make the system unstable. The evidence of gain is also reinforced by the root-locus algorithm. In addition, the robustness of systems with predictors also needs to be considered. Proving robustness with norm and showing the predictor robust to unpredictable inputs but not robust to changes in parameters in the system. The prediction method at the end of the study can be developed to completely eliminate the effects of delay by manipulating the graph into a complete graph.

Keywords: Consensus Problems, Delays, Graph, Predictors

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur pada kehadirat Allah SWT, atas segala karunia dan ridho-NYA, sehingga tesis dengan judul **“Perancangan Prediktor untuk Permasalahan Konsensus dengan Delay Input dan Komunikasi”** ini dapat diselesaikan.

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan memperoleh gelar Magister Teknik (M.T.) dalam bidang studi Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Segala ucapan terima kasih penulis ucapkan kepada Ayahanda dan Ibunda, serta Istri tercinta atas doa, semangat, kepercayaan dan kasih sayang yang tak terbatas pada penulis. Kepada Ibu Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T., atas motivasi, bimbingan, nasihat, kesabaran, arahan dan waktu yang telah diluangkan kepada penulis untuk berdiskusi mulai awal perkuliahan hingga terselesaikannya Tesis ini, kepada teman-teman pascasarjana Fakultas Teknik Elektro dan para Tendik yang telah membantu selama masa perkuliahan.

Penulis hanya percaya bahwa **“Usaha Tidak akan Menghianati Hasil”**. Maka dari itu, penyelesaian Tesis ini juga tak lepas dari segala usaha dan do'a penulis serta bantuan dari berbagai pihak. Semoga Tesis ini bermanfaat bagi pembaca terutama untuk penulis.

Surabaya, 12 Januari 2022

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN TESIS.....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL.....	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Kontribusi	3
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA.....	5
2.1 Kajian Penelitian Terkait	5
2.1.1 <i>Consensus of High-Order Multi-Agent Systems with Large Input and Communication Delays</i> [1]	5
2.1.2 <i>Consensus Problem in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays</i> [2].....	7
2.1.3 <i>Single-Delay and Multiple-Delay Proportional-Retarded Protocols for Fast Consensus in a Large Scale Network</i> [4]	8
2.2 Teori Dasar.....	9
2.2.1 Sifat Matriks Laplacian dan Penyelesaian Permasalahan Konsensus Dasar	9
2.2.2 <i>Exact Predictor Feedbacks for Multi-Input Systems with Distinct Input Delays</i> [3].....	11
2.2.3 Analisis Kestabilan Lyapunov	12
BAB 3 PERANCANGAN PREDIKTOR.....	15
3.1 Notasi dan Definisi	15

3.2	Permasalahan Konsensus dan Rancangan Penyelesaian	15
3.3	Perancangan Prediktor.....	17
3.4	Hipotesa Penelitian.....	20
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN		23
4.1	Modal Decomposition pada Persamaan Karakteristik	23
4.2	Graf Terhubung dan 0 Sebagai Eigenvalue $L\alpha$ dan $L\beta$	25
4.3	Hasil Pembuktian Analitik Batas Kestabilan	27
4.4	Pemberian Gain $k\beta$ pada $L\beta$	32
4.5	Pemberian Gain $k\alpha$ pada $K\alpha$	35
4.6	Perancangan Algoritma Root Locus.....	37
4.8	Perancangan Tuning $K\beta$ agar Mendapatkan Akar s Real Terkecil	42
4.9	Robustness terhadap Input yang tidak Terprediksi	46
4.10	Metode-metode untuk Mengkompensasi Sepenuhnya Delay	47
4.10.1	<i>Walk Based</i>	48
4.10.2	<i>Sequential Predictive</i>	49
4.10.3	<i>Graf Khusus</i>	52
4.10.4	<i>Pendekatan deret Mc Laurin pada Predictor</i>	53
BAB 5 KESIMPULAN		55
DAFTAR PUSTAKA.....		57

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Perbandingan Respon Permasalahan Konsensus dengan Delay Berbeda-beda	8
Gambar 2.2 Respon Sistem dari Permasalahan Konsensus [5]	11
Gambar 3.1 Contoh Partisi Menjadi Graf Komplit	16
Gambar 3.2 Alur Pengiriman Informasi Antar Agen	19
Gambar 3.3 Blok Diagram Masing-masing Agen	20
Gambar 3.4 Blok Diagram untuk Kasus 2 Agen	20
Gambar 4.1 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Prediktor (kiri) dan Dengan Prediktor (kanan) dengan delay 0.4s	31
Gambar 4.2 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Prediktor (kiri) dan Dengan Prediktor (kanan) dengan delay 0.5s	31
Gambar 4.3 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Prediktor (kiri) dan Dengan Prediktor (kanan) dengan delay 0.6s	32
Gambar 4.4 Plot Bagian Imaginer Root Locus	39
Gambar 4.5 Plot Bagian Imaginer Root Locus Ketika ω Bertambah dan σ Membesar	40
Gambar 4.6 Plot Bagian Imaginer Root Locus garis Biru	41
Gambar 4.7 Plot Bagian Imaginer Root Locus Garis Biru Invarian Terhadap Himpunan Berhingga	41
Gambar 4.8 Plot Bagian Imaginer Root Locus Garis Biru Invarian Terhadap Himpunan Berhingga	42
Gambar 4.9 Graf Komponen $\mathbf{K}j, j \neq i$ melalui perantara graf yang direpresentasikan $\mathbf{L}\beta$	43
Gambar 4.10 Graf 12 Agent	45
Gambar 4.11 Contoh Graf untuk Subbab 10	48
Gambar 4.12 Contoh Pengiriman Informasi Berdasarkan <i>Walk</i>	49
Gambar 4.13 Ilustrasi <i>Sequential Predictive</i>	50
Gambar 4.14 <i>Hypercube</i>	52

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Batas nilai $\lambda\tau$	53
---	----

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Permasalahan konsensus adalah salah satu jenis permasalahan dasar pada sistem multi agen [1]-[3]. Pada permasalahan konsensus, setiap agen saling berkomunikasi dan memiliki tujuan dapat berkumpul pada satu titik yang sama. Permasalahan konsensus ini menjadi permasalahan mendasar pada kontrol kooperatif sistem multi agen seperti permasalahan flocking dan kontrol formasi. Beberapa contoh penerapan permasalahan konsensus diantaranya penggunaan jaringan sensor dan formasi pesawat. Pada permasalahan sistem multi agen ini, sekelompok agen dihubungkan oleh sebuah sistem komunikasi sehingga dapat menyelesaikan suatu masalah dimana masalah tersebut tidak dapat diselesaikan apabila ada agen yang tidak bekerja sama [1].

Pada Penelitian [2], menjelaskan bahwa pada permasalahan konsensus dapat divariasikan dalam berbagai asumsi. Salah satunya adalah adanya kekurangan dalam hal komunikasi dalam bentuk delay komunikasi. Adanya delay pada permasalahan konsensus membuat akar Karakteristik sistem menjadi bilangan tidak riil sehingga memunculkan osilasi. Osilasi sendiri meskipun tidak berpengaruh pada laju konsensus namun mengakibatkan energi yang dibutuhkan semakin besar dan apabila diaplikasikan pada kontrol formasi dapat menyebabkan tabrakan antar agen. Semakin besar delay membuat osilasi semakin besar bahkan pada batas tertentu menjadi tidak stabil. Pada nilai tertentu, ada batas maksimal delay yang diperbolehkan agar sistem menjadi stabil.

Adapun permasalahan konsensus paling dasar yang dijelaskan pada Penelitian [3] memiliki solusi yang dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan differensial biasa sehingga membentuk sistem linier. Sistem linier dengan delay input dapat menjadi sebuah desain sebuah prediktor berbasis input delay sehingga dapat mengurangi bahkan dapat menghilangkan sifat delay.

Maka dari itu penulis ingin mengetahui bagaimana efek penggunaan prediktor berbasis input delay ke sebuah permasalahan konsensus dengan delay.

Terutama pada penelitian [1] yang menggunakan prediksi satu langkah untuk mengkompensasi delay input namun belum untuk delay komunikasi dimana masih bergantung pada hasil penelitian [2].

Pada penelitian ini, penulis ingin menggunakan prediksi dua langkah ataupun tiga langkah untuk mengkompensasi delay input dan delay komunikasi.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas adalah bagaimana merancang prediktor berbasis input delay (dengan bukti) yang dapat mengkompensasi efek dari delay komunikasi (osilasi dan batas kestabilan) pada permasalahan konsensus dengan delay input dan delay komunikasi.

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah dapat merancang sebuah prediktor berbasis input delay (dengan bukti) dan membuktikan prediktor tersebut dapat mengurangi osilasi (dengan laju kestabilan yang sama apabila dibandingkan dengan tanpa menggunakan prediktor) dan memperlebar batas kestabilan.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang akan diteliti adalah sebagai berikut:

1. Semua agen adalah identik dengan masing-masing agen dimodelkan dengan plant single integrator.
2. Ada dua jenis delay yang digunakan yaitu delay input τ_{in} dan delay komunikasi τ_c . Semua agen memiliki delay input dan pada semua pasangan agen yang terhubung memiliki delay komunikasi.
3. Kedua delay bernilai tetap dan tidak berubah terhadap waktu.
4. Waktu komputasi untuk prediktor adalah instan.
5. Setiap agen memiliki memori yang sangat besar sehingga dapat menyimpan informasi-informasi yang didapat, dan
6. Tidak adanya perubahan topologi jaringan.

1.5 Kontribusi

Penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi ilmiah terkait perancangan prediktor berbasis input delay ke permasalahan konsensus dengan delay komunikasi. Berikut uraian mengenai prediktor yang dirancang dalam penelitian:

1. Prediktor yang dirancang dapat memberikan respon yang lebih cepat, batas delay yang lebih lama dan osilasi yang lebih rendah.
2. Pembuktian mengenai perilaku akar-akar persamaan Karakteristik sistem terhadap pemberian gain pada komponen terprediksi (tanpa delay) dan komponen tidak terprediksi (dengan delay).
3. Bukti-bukti pemberian gain diperkuat dengan algoritma root-locus.
4. Pembuktian robustness dengan norm H_2 dan H_∞ menunjukkan prediktor tersebut robust terhadap input yang tidak terprediksi namun tidak robust terhadap perubahan parameter yang cukup besar pada sistem.
5. Metode prediksi pada akhir penelitian dapat dikembangkan menjadi menghilangkan efek dari delay (meniadakan komponen dengan delay) dengan cara memanipulasi graf agar menjadi graf komplit.
6. Prediktor dapat dikembangkan untuk mengkompensasi delay sepenuhnya.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA

Pada Bab 2 ini akan dijelaskan kajian pustaka yang terkait dengan penelitian dan teori dasar yang mendasari penelitian ini.

2.1 Kajian Penelitian Terkait

2.1.1 *Consensus of High-Order Multi-Agent Systems with Large Input and Communication Delays* [1]

Tujuan yang dilakukan pada Penelitian [1] untuk menyelesaikan permasalahan konsensus dengan delay input dan delay komunikasi yang tetap dan tidak berubah terhadap waktu, dengan agen-agen identik berupa sebuah sistem linier secara umum. Didefinisikan pada masing-masing agen, agen i memiliki model

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t - \tau_{con}), i = 1, 2, \dots, N, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$$

dimana τ_{con} adalah delay input dan N adalah banyaknya agen n dan m berturut-turut adalah ukuran variable state dan input dengan (A, B) controllable.

Kemudian masing-masing agen mengumpulkan informasi dari agen-agen yang terhubung

$$\mathbf{z}_i(t) = \sum_{j \sim i} \alpha_{ij} (\mathbf{x}_i(t - \tau_{com}) - \mathbf{x}_j(t - \tau_{com})) = \sum_{j=1}^N l_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau_{com})$$

dimana τ_{com} adalah delay komunikasi. Koefisien α_{ij} bernilai 0 apabila agen i dan agen j tidak terhubung. Sedangkan koefisien l_{ij} adalah komponen ij dari matriks Laplacian $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Didefinisikan pula delay total $\tau = \tau_{con} + \tau_{com}$.

Agar konsensus terjadi, nilai $\mathbf{z}_i(t)$ akan diumpan balikkan ke input dengan gain $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

$$\mathbf{u}_i(t - \tau_{con}) = \mathbf{F}\mathbf{z}_i(t)$$

Nilai input didapatkan dengan prediktor berbasis delay input:

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}_i(t + \tau_{con}) = \mathbf{F} \left(\mathbf{e}^{A\tau} \mathbf{z}_i(t - \tau_{com}) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-As} \mathbf{B}\mathbf{z}_i(t + s) ds \right)$$

sehingga persamaan sistem pada agen i menjadi:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{F} \sum_{j=1}^N l_{ij}\mathbf{x}(t - \tau_{com})$$

Kemudian dimisalkan $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \mathbf{x}_2^T(t) \dots \mathbf{x}_N^T(t)]^T$ adalah variable state yang memuat semua agen. Maka persamaan keseluruhan sistem adalah:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x}(t - \tau_{com}) \quad (2.1)$$

Kemudian matriks Laplacian \mathbf{L} ditransformasikan ke bentuk Jordan:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \delta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} = \mathbf{J}_L$$

dengan Persamaan (2.1) didapatkan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t) + (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{J}_L \otimes \mathbf{B}\mathbf{F})(\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t - \tau_{com})$$

misal

$$\boldsymbol{\chi} = (\mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}$$

maka

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{J}_L \otimes \mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\chi}(t - \tau_{com}) \quad (2.2)$$

Perhatikan dari Persamaan (2.2) yang memuat baris terakhir dari \mathbf{J}_L :

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_N(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\chi}_N(t) + \lambda_N \mathbf{B}\mathbf{F}\boldsymbol{\chi}_N(t - \tau_{com}) \quad (2.3)$$

dengan nilai λ_N bisa diganti semua nilai λ_i , $i = 2, 3, 4, \dots, N$ bergantung bagaimana melakukan transformasi ke bentuk Jordan. Untuk batas τ_{com} sendiri bergantung pada teorema yang ada pada Penelitian [2]. Untuk mempermudah analisis pada Persamaan (2.3) diperlukan dahulu hasil pada plant single integrator:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_N(t) = \lambda_N k_F \boldsymbol{\chi}_N(t - \tau_{com}) \quad (2.4)$$

pada Persamaan (2.4) apabila dilakukan transformasi Laplace menjadi:

$$s = \lambda_N k_F e^{-\tau_{com}s} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) akan dijelaskan pada kajian pustaka Penelitian [2].

2.1.2 Consensus Problem in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays [2]

Pada Penelitian [2] terdapat beberapa teorema-teorema yang dibuktikan. Sementara, pada bahasan ini akan dibatasi pada bagian *Network with Communication Time-Delays*. Pada bagian ini diberikan N buah agen identik berupa single integrator.

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t)$$

dimana komunikasi antar agen yang terhubung memiliki delay yang tetap sebesar τ .

Seperti Penelitian [1], masing-masing agen mengumpulkan nilai state agen-agen yang terhubung dan menggunakannya sebagai input feedback sedemikian sehingga persamaan konsensusnya adalah

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{i \sim j} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) = \sum_{j=1}^N -l_{ij}x_j(t - \tau)$$

dengan l_{ij} adalah elemen ij dari matriks Laplacian \mathbf{L} . Misal $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ maka persamaan sistem keseluruhan menjadi

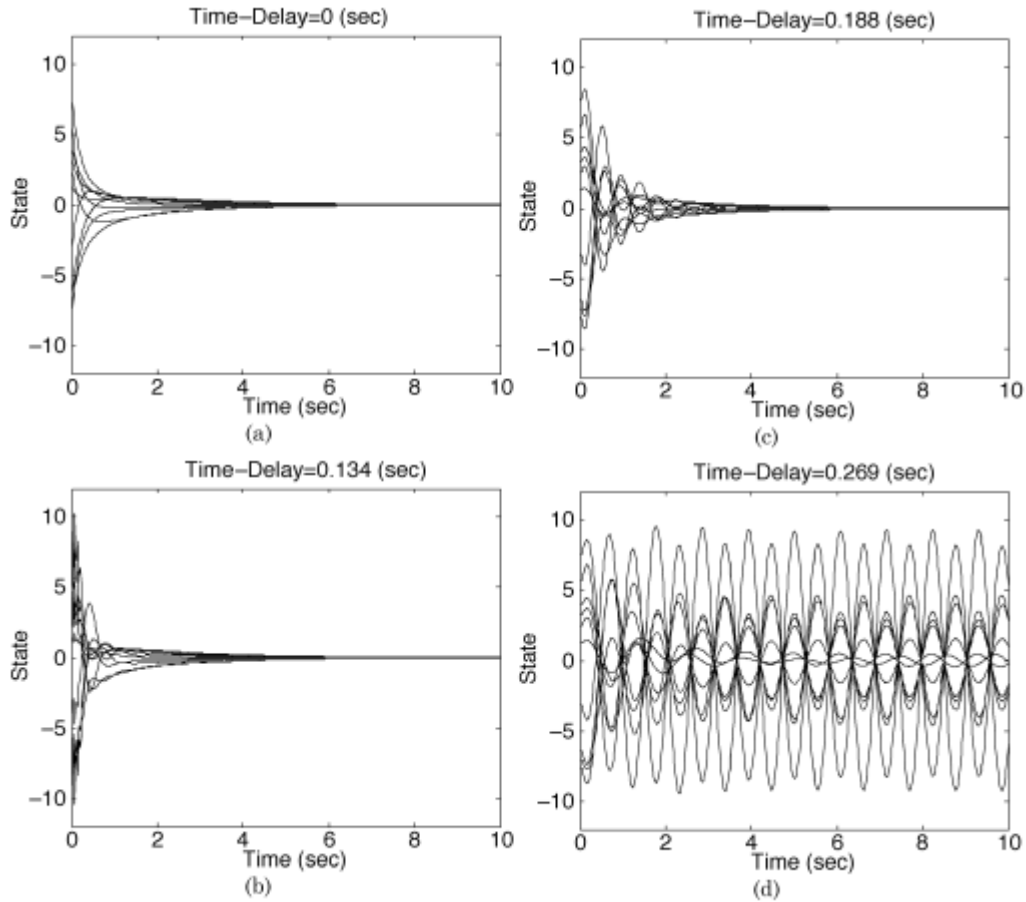
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t - \tau) \quad (2.5)$$

Penelitian [2] membuktikan bahwa Persamaan (2.5) akan stabil jika dan hanya jika $\lambda^*\tau < \frac{\pi}{2}$ dengan λ^* adalah eigenvalue terbesar dari \mathbf{L} . Selain itu, semakin besar nilai λ^* maka semakin besar pula osilasi yang dihasilkan.

Gambar 2.1 adalah hasil simulasi yang menunjukkan semakin besar nilai τ maka osilasi yang timbul juga semakin besar. Persamaan (2.4) stabil eksponen jika nilai k_F memenuhi:

$$k_F < \frac{\pi}{2\tau_{com}\lambda_N}$$

Nilai k_F yang lebih besar pada suatu batas tertentu menyebabkan osilasi semakin besar.



Gambar 2.1 Perbandingan Respon Permasalahan Konsensus dengan Delay Berbeda-beda

2.1.3 *Single-Delay and Multiple-Delay Proportional-Retarded Protocols for Fast Consensus in a Large Scale Network [4]*

Pada penelitian ini dijelaskan suatu metode yang berhubungan dengan delay pada permasalahan konsensus. Pada bahasan kali ini dipersempit pada bagian *single-delay* saja.

Misal diberikan N buah agen identik dengan *plant single integrator*

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t)$$

Didefinisikan sama seperti [1] dan [2], \mathbf{L} adalah matriks Laplacian dan $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$.

Kemudian didefinisikan kontrol PR (*Proportional-Retarded*) pada permasalahan konsensus adalah

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_p \mathbf{L}\mathbf{x}(t) + k_r \mathbf{L}\mathbf{x}(t - h) \quad (2.6)$$

yaitu memberikan umpan balik positif dari *retarded action* dan umpan balik negatif dari *proportional action*. Tujuan dari pemberian feedback positif ini adalah untuk mempercepat konsensus pada permasalahan konsensus dengan skala yang besar.

Persamaan (2.6) ditransformasikan menjadi persamaan karakteristik f dengan akar-akar s memenuhi:

$$f(s) = \det(s\mathbf{I} + k_p \mathbf{L} - k_r \mathbf{L}e^{-sh}) = 0$$

kemudian $f(s)$ dapat didekomposisikan menjadi:

$$f(s) = \prod_m^N f_m(s) = \prod_m^N (s + k_p \lambda_m - k_r \lambda_m e^{-hs})$$

dengan λ_m adalah eigenvalue-eigenvalue dari L dan dimana masing-masing $(s + k_p \lambda_m - k_r \lambda_m e^{-hs}) = 0$ memiliki tak hingga solusi. Didefinisikan spectral abscissa $\gamma^* = \max\{\text{Real}(s) | f(s) = 0, s \neq 0\}$, sehingga Persamaan (2.6) stabil jika dan hanya jika $\gamma^* < 0$.

Teorema utama dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa dapat ditentukan nilai k_p dan k_r sesuai dengan nilai γ^* yang diinginkan yaitu dengan mensubstitusi $h = \frac{1}{\lambda_2}$.

2.2 Teori Dasar

2.2.1 Sifat Matriks Laplacian dan Penyelesaian Permasalahan Konsensus

Dasar

Diambil dari Buku [5], matriks Laplacian $\mathbf{L} = [l_{ij}]_{N \times N}$ secara umum merepresentasikan graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ didefinisikan sebagai berikut :

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jika } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{jika } (i, j) \notin \mathcal{E} \\ d_i, & \text{jika } i = j \end{cases}$$

dimana d_i menyatakan degree dari vertex i .

Misal $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ merupakan eigenvalue- eigenvalue dari \mathbf{L} maka teorema-teoremanya antara lain:

Matriks \mathbf{L} adalah matriks simetris jika dan hanya jika \mathcal{G} adalah graf tidak berarah, apabila \mathcal{G} adalah graf tidak berarah maka \mathbf{L} memiliki eigenvalue real dan $\mathbf{L} = \mathbf{E}^T \mathbf{E}$ dengan \mathbf{E} adalah matriks insiden. Selanjutnya, matriks \mathbf{L} merupakan matriks positif semidefinite pada graf tidak berarah.

Banyaknya i sehingga $\lambda_i = 0$ adalah sama dengan banyaknya komponen terhubung dari \mathcal{G} sehingga apabila \mathcal{G} adalah graf terhubung maka $\lambda_1 = 0$ tetapi $\lambda_2 > 0$.

Pada permasalahan konsensus, untuk kasus paling dasar misal digunakan sejumlah N agen dengan masing-masing agen memiliki plant identik yaitu single integrator. Berikut adalah model agen i

$$\dot{x}_i(t) = u(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Agen-agen tersebut berkomunikasi membentuk graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dimana vertex dari \mathcal{G} menyatakan agen-agen, $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$. Kemudian $(i, j) \in \mathcal{E}$ jika dan hanya jika agen i dan j berkomunikasi. Untuk mempermudah agen (i, j) tersebut dikatakan berdekatan / *adjacent*. Kemudian agen i mengumpulkan informasi dari agen-agen lainnya yang berdekatan sebesar

$$\sum_{j \sim i} (x_j - x_i) = \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j$$

dan informasi tersebut digunakan untuk umpan balik ke input sehingga mendapatkan masing-masing agen memiliki persamaan sistem

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j(t)$$

Keseluruhan sistem dapat dinyatakan dalam sebuah persamaan state yang masing-masing variabel statenya berasal dari variabel state dari masing-masing

agen. Misal $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ adalah vektor kumpulan state dari masing-masing agen maka

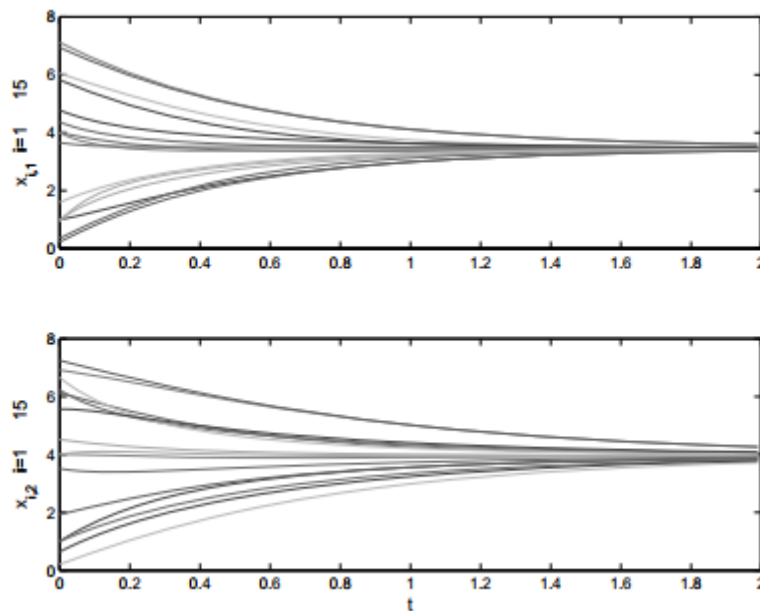
didapatkan sistem

$$\dot{x}(t) = -\mathbf{L}x(t)$$

Apabila \mathcal{G} adalah graf terhubung dan tidak berarah maka $-\mathbf{L}$ adalah semidefinite negatif dengan tepat memiliki sebuah eigenvalue bernilai 0 berpasangan dengan

eigenvektor $\mathbf{1}_N = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, sehingga apabila $x_1 = x_2 = \dots = x_N$ sistem tersebut akan mencapai titik equilibrium. Karena eigenvalue yang lain dari $-\mathbf{L}$ memiliki nilai negatif maka sistem tersebut akan stabil dan ketika $t \rightarrow \infty$ akan berlaku $x_i(t) - x_j(t) \rightarrow 0$ untuk setiap $i, j \in \mathcal{V}$. Berdasarkan persoalan dan penyelesaian di atas didefinisikan permasalahan konsensus adalah bagaimana membuat sinyal kontrol pada setiap agen dengan tujuan dari permasalahan konsensus adalah $\forall i, j \in \mathcal{V}$ memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = 0$$



Gambar 2.2 Respon Sistem dari Permasalahan Konsensus [5]

Sebagai contoh respon sistem dari permasalahan konsensus dapat dilihat pada Gambar 2.2.

2.2.2 *Exact Predictor Feedbacks for Multi-Input Systems with Distinct Input Delays* [3]

Pada penelitian ini digunakan untuk membuat prediktor berbasis input delay apabila memiliki delay input lebih dari 1 dan berbeda. Permasalahan pada Penelitian [3] adalah merancang prediktor delay untuk sistem LTI berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m b_i u_i(t - d_i)$$

Apabila dimisalkan $\mathbf{B} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$ dan tanpa mengurangi keumuman $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$ maka apabila (\mathbf{A}, \mathbf{B}) controllable dapat didesain feedback gain \mathbf{K} sehingga $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ Hurwitz. Ide dari prediktor ini adalah untuk masing-masing input $u_i(t - d_i)$ dapat dipaksakan untuk sama dengan $k_i x(t)$

$$u_i(t - d_i) = k_i x(t)$$

maka diperlukan prediksi untuk nilai $x(t + d_i)$.

Didefinisikan $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_i + b_i \mathbf{k}_i$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ dan $\mathbf{A}_m = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$ maka:

$$\mathbf{x}(t + d_1) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_0 d_1} \mathbf{x}(t) + \int_0^{d_1} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_0(s-d_1)} \sum_{i=1}^m b_i u_i(t - d_i + s) ds$$

$$\mathbf{x}(t + d_2) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1(d_2-d_1)} \mathbf{x}(t + d_1) + \int_{d_1}^{d_2} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_1(s-d_2)} \sum_{i=2}^m b_i u_i(t - d_i + s) ds$$

$$\mathbf{x}(t + d_3) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_2(d_3-d_2)} \mathbf{x}(t + d_2) + \int_{d_2}^{d_3} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_2(s-d_3)} \sum_{i=3}^m b_i u_i(t - d_i + s) ds$$

⋮

$$\mathbf{x}(t + d_m) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{m-1}(d_m-d_{m-1})} \mathbf{x}(t + d_{m-1})$$

$$+ \int_{d_{m-1}}^{d_m} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}_{m-1}(s-d_m)} b_m u_m(t - d_m + s) ds$$

Kemudian substitusi, $u_i(t) = k_i x(t + d_i)$ dan dengan prediktor di atas akan didapatkan umpan balik sama seperti LTI tanpa delay.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\mathbf{x}(t)$$

Berdasarkan Penelitian [8] juga telah diuraikan bahwa permasalahan konsensus secara luas dipelajari sebagai sistem LTI serta dipelajari sebagai sistem non-linear seperti robot otonom.

2.2.3 Analisis Kestabilan Lyapunov

Dasar Teori untuk analisis kestabilan dengan fungsi kandidat Lyapunov ini diambil dari Buku [6]. Pada sebuah sistem LTI dengan delay,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - \tau) \quad (2.7)$$

Nilai awal $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ untuk $t \in [-\tau, 0]$, dan \mathbf{A}_0 dan \mathbf{A}_1 matriks ukuran $n \times n$.

Definisi Fundamental Matrix $\mathbf{K}(t)$ adalah

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{A}_0 + \mathbf{K}(t - \tau)\mathbf{A}_1$$

dengan \mathbf{K} adalah matriks ukuran $n \times n$, $\mathbf{K}(t) = \mathbf{0}_{n \times n}$ untuk $t \in [-\tau, 0)$ dan $\mathbf{K}(0) = \mathbf{I}_n$ dengan solusi dari Sistem (2.7) adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varphi}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{K}(t - \theta - \tau)\boldsymbol{\varphi}(\theta)d\theta$$

Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Sistem (2.7). Perhatikan untuk matriks (definit positif) \mathbf{W}_1 dan \mathbf{W}_2 berlaku

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta)(\mathbf{W}_1 + (\tau + \theta)\mathbf{W}_2)\mathbf{x}(t + \theta)d\theta \right) \\ &= \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{W}_1 + \tau\mathbf{W}_2)\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - \tau)\mathbf{W}_1\mathbf{x}(t - \tau) \\ & \quad - \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta)\mathbf{W}_2\mathbf{x}(t + \theta)d\theta \end{aligned}$$

Apabila dapat ditemukan fungsi $\mathbf{v}_0(t)$ dan matriks definit positif \mathbf{W} sehingga

$$\frac{d\mathbf{v}_0(\mathbf{x}(t))}{dt} = -\mathbf{x}^T(t)\mathbf{W}\mathbf{x}(t)$$

dan $\mathbf{W} - \mathbf{W}_1 - \tau\mathbf{W}_2$ juga definit positif maka Sistem (2.7) stabil eksponen maka bisa didapatkan pula fungsi Lyapunov:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}(t)) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta)(\mathbf{W}_1 + (\tau + \theta)\mathbf{W}_2)\mathbf{x}(t + \theta)d\theta$$

Pembahasan mengenai fungsi Lyapunov juga digunakan pada Penelitian [9] untuk memastikan adanya pengaruh kontrol terhadap tingkat konvergensi. Vektor ketidaksepakatan kelompok yang didefinisikan terbukti menghilang secara global secara asimtotik dengan kecepatan yang sama dengan eigenvalue Fiedler dari graf refleksi topologi asli. Hal ini menunjukkan adanya hubungan antara tingkat konvergensi protokol konsensus linier dan konektivitas aljabar jaringan. Kemudian, kesimpulan diperluas ke jaringan dengan beralih aliran informasi. Konsensus rata-rata tercapai dan vektor ketidaksepakatan kelompok menghilang secara eksponensial dengan cepat dengan tingkat yang sama dengan konektivitas aljabar paling sedikit [11].

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 3

PERANCANGAN PREDIKTOR

Pada Bab ini akan membahas tahapan konseptual sistem yang akan dibuat. Akan digunakan sejumlah N agen dengan masing-masing agen memiliki plant identik yaitu single integrator dengan delay input τ_{in} . Berikut adalah model agen i

$$\dot{x}_i(t) = u(t - \tau_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Agen-agen tersebut berkomunikasi membentuk graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dimana vertex dari \mathcal{G} menyatakan agen-agen, $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$. Kemudian $(i, j) \in \mathcal{E}$ jika dan hanya jika agen i dan j berkomunikasi. Untuk mempermudah, pasangan agen (i, j) yang dapat berkomunikasi dikatakan berdekatan / *adjacent*. Agen i dan j yang berkomunikasi memiliki delay dalam penyampaian informasi dari i ke j ataupun dari j ke i sebesar τ_c atau pada bahasan ini disebut delay komunikasi.

3.1 Notasi dan Definisi

$\lambda_i^{\{\mathbf{M}\}}$ merupakan eigen value dari $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ dengan $\lambda_1^{\{\mathbf{M}\}} \leq \lambda_2^{\{\mathbf{M}\}} \leq \dots \leq \lambda_N^{\{\mathbf{M}\}}$ yang berasosiasi dengan eigen vector $v_i^{\{\mathbf{M}\}}$

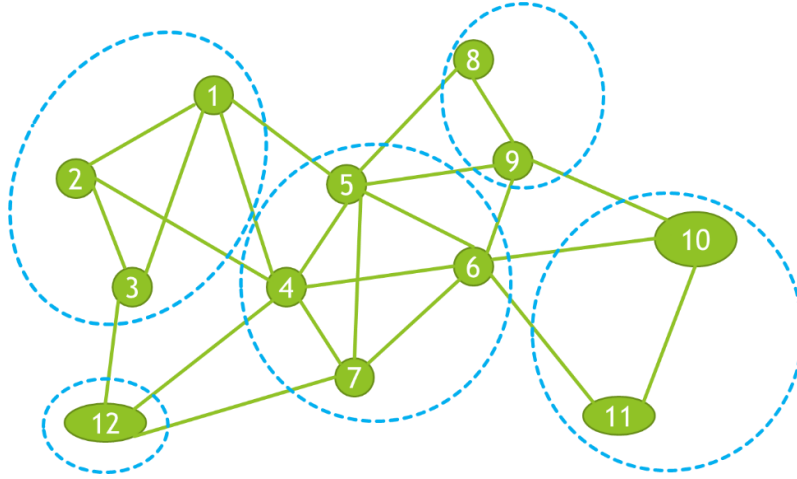
Apabila \mathbf{M} dapat didiagonalkan maka $V_{\mathbf{M}}$, eigen space dari matriks \mathbf{M} , adalah himpunan vektor \mathbf{x} sehingga untuk setiap $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{M}}$ terdapat λ sehingga $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

3.2 Permasalahan Konsensus dan Rancangan Penyelesaian

Tujuan dari permasalahan konsensus adalah $\forall i, j \in \mathcal{V}$ memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = 0$$

Rancangan penyelesaian pada Penelitian ini adalah mempartisi graf menjadi beberapa graf komplit. Misal $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$ adalah partisi dari \mathcal{G} sedemikian sehingga masing-masing \mathcal{G}_k $k = 1, 2, \dots, M$, adalah graf komplit. Sebagai contoh partisi yang dimaksud ada pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Contoh Partisi Menjadi Graf Komplit

Kemudian didefinisikan pula \mathbf{L}_α adalah matriks Laplacian yang hanya memuat semua edge dari $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$ sedangkan \mathbf{L}_β adalah matriks Laplacian yang memuat semua edge selain dari $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$. Definisikan agen i dan agen j sekawan apabila terdapat k sehingga $(i, j) \in \mathcal{V}_k$. Misal \mathbf{L} adalah matriks Laplacian dari \mathcal{G} maka

$$\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta = \mathbf{L}$$

Tanpa mengurangi keumuman misal:

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_M \end{bmatrix}$$

Definisikan \mathbf{K}_i adalah Laplacian dari graf komplit \mathcal{G}_i untuk $i = 1, 2, \dots, M$.

Kemudian, nilai \mathbf{L} harus dipecah dahulu menjadi \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β sebab pembuatan prediksi selalu terdapat matriks $\mathbf{e}^{-\mathbf{L}}$. Sementara, elemen-elemen l_{ij} pada \mathbf{L} apabila i dan j tidak berkomunikasi maka $l_{ij} = 0$ namun $[\mathbf{e}^{-\mathbf{L}}]_{ij} \neq 0$ sehingga apabila komunikasi terbatas, maka tidak dapat dilakukan prediksi. Namun pada graf komplit semua agen pada graf tersebut berkomunikasi sehingga dapat dilakukan prediksi. Misal $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$. Berikut persamaan konsensus yang diharapkan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t) - k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c) \quad (3.1)$$

Pada umumnya, prediktor akan bekerja hanya ketika graf mewakili agen, yakni adalah graf komplit. Dalam Penelitian [10] telah dijelaskan cara meningkatkan respon sistem dengan graf komplit gabungan antara koefisien yang tidak tertunda

dan koefisien tertunda untuk mengurangi efek delay. Graf komplit juga diterapkan pada Penelitian [12] dalam menganalisis sifat stabilitas sekelompok agen yang berkomunikasi melakukan penyesuaian vektor kecepatan dan mengupayakan kestabilkan jarak antar-agen dengan menggunakan aturan interaksi terdekat yang terdesentralisasi, bertukar informasi melalui topologi jaringan yang berubah-ubah.

3.3 Perancangan Prediktor

Prediktor dirancang agar persamaan sistem pada keseluruhan agen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t - \tau_{in})$$

dimana $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ dapat menjadi Persamaan (3.1). Pertama-tama lakukan input buatan tambahan sehingga persamaan sistem menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_\alpha(t - \tau_{in}) + \mathbf{u}_\beta(t - \tau_{in} - \tau_c) \quad (3.2)$$

Kemudian hubungkan Persamaan (3.2) ke (3.1), didapatkan

$$\mathbf{u}_\alpha(t - \tau_{in}) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t) \quad (3.3)$$

dan

$$\mathbf{u}_\beta(t - \tau_{in} - \tau_c) = -k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c) \quad (3.4)$$

Seperti pada Dasar Teori (2.2.2) dari Persamaan (3.3) dan

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t + \tau_{in})$$

Maka diperlukan prediksi untuk mendapatkan $\mathbf{x}(t + \tau_{in})$

$$\mathbf{x}(t + \tau_{in}) = \mathbf{x}(t) + \int_{-\tau_{in}}^0 \mathbf{u}_\alpha(t + \theta) + \mathbf{u}_\beta(t + \theta - \tau_c) d\theta \quad (3.5)$$

Maka didapatkan sinyal input

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \left(\mathbf{x}(t) + \int_{-\tau_{in}}^0 \mathbf{u}_\alpha(t + \theta) + \mathbf{u}_\beta(t + \theta - \tau_c) d\theta \right)$$

Adapun dari Persamaan (3.4) didapatkan sinyal input $\mathbf{u}_\beta(t)$

$$\mathbf{u}_\beta(t - \tau_c) = -k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c + \tau_{in})$$

Kemudian dilakukan prediksi untuk mendapatkan nilai $\mathbf{x}(t + \tau_{in} + \tau_c)$

$$\mathbf{x}(t + \tau_{in} + \tau_c) = \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in}) + \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} (\mathbf{u}_\beta(t + \theta)) d\theta \quad (3.6)$$

Pada Persamaan (3.6) masing-masing agen i memerlukan informasi antara lain $\mathbf{L}'_{\alpha i} \mathbf{x}(t + \tau_{in})$ dan $\mathbf{L}'_{\alpha i} \mathbf{u}_\beta(t)$ dimana $\mathbf{L}'_{\alpha i}$ adalah baris ke i matriks $\mathbf{L}'_\alpha = \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta}$. Sehingga untuk mendapatkan Persamaan (3.6) masing-masing agen i memerlukan informasi semua state x_j pada waktu $t + \tau_{in}$ dimana agen j adalah

agen yang sekawan dengan agen i . Maka pada setiap agen i juga harus melakukan prediksi untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t + \tau_{in}) &= \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c) \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} \left(-k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c + \tau_{in} + \theta) \right) d\theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

Kemudian hasil dari Prediksi (3.7) digunakan untuk memprediksi $\mathbf{x}(t + \tau_{in} + \tau_c)$. Misalkan $\hat{\hat{\mathbf{x}}}$ menyatakan hasil prediksi dua langkah dari \mathbf{x} maka

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\mathbf{x}}}(t + \tau_{in} + \tau_c) &= \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \hat{\mathbf{x}}(t + \tau_{in}) \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} \left(-k_\beta \mathbf{L}_\beta \hat{\mathbf{x}}(t + \theta + \tau_{in}) \right) d\theta \\ &= \mathbf{e}^{-2k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c) \\ &- \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &- \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{-k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \phi} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta + \phi) d\phi d\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

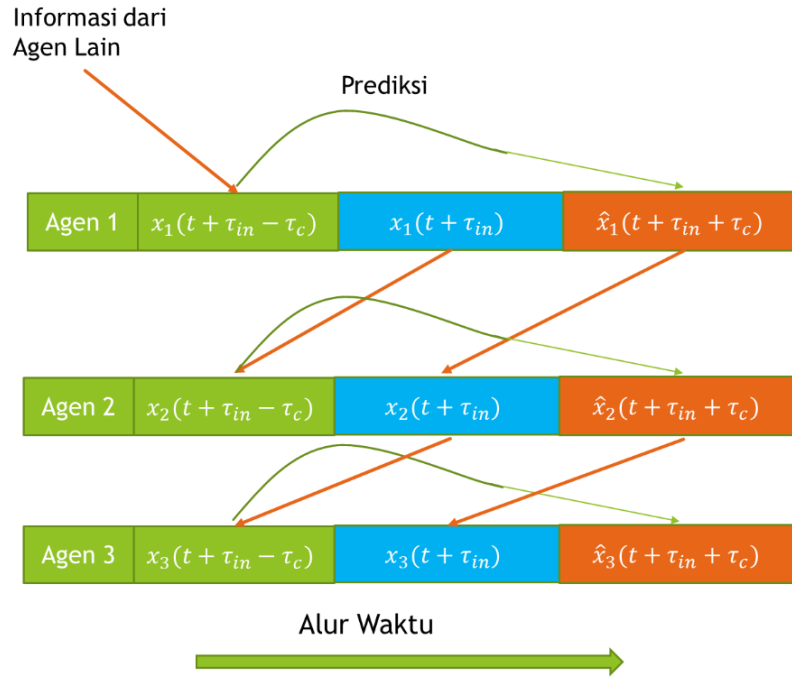
Definisikan kembali $r_{ij}(\theta) = (\mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta})_{ij}$ dan $s_{ij}(\theta, \phi) = (\mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \phi})_{ij}$ untuk mempersingkat persamaan maka pada masing-masing agen melakukan prediksi dua langkah

$$\hat{\hat{x}}_i(t + \tau_{in} + \tau_c) = \sum_{j=1}^N \xi_{ij}$$

dengan

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= (r_{ij}(-2\tau_c) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c) \\ &- \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta - \tau_c, 0) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &- \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta, -\tau_c) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta, -\tau_c) \hat{u}_{\beta j}(t - \tau_c + \theta + \phi) d\phi d\theta \end{aligned}$$

Berikut ilustrasi untuk mempermudah alur prediksi dua langkah pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Alur Pengiriman Informasi Antar Agen

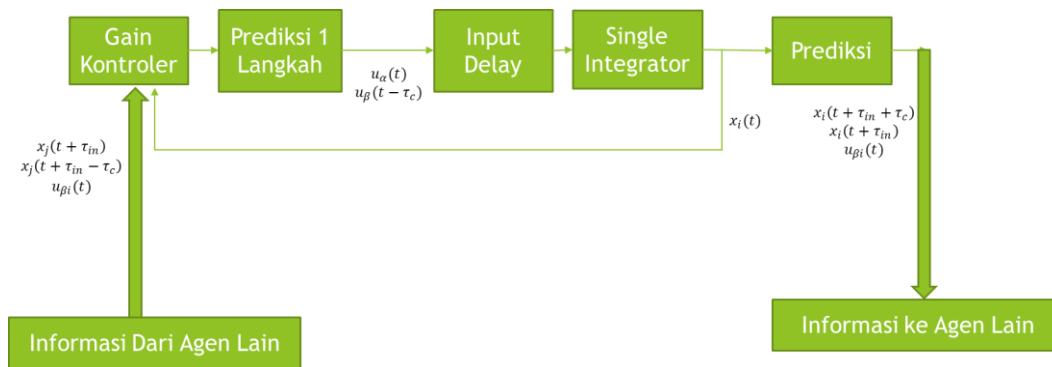
Berikut algoritma kontrol yang dilakukan agen i pada saat waktu t :

1. Menerima informasi state $x_i(t)$ dari sensor.
2. Melakukan prediksi untuk mendapatkan informasi state $x_i(t + \tau_{in})$

$$\hat{x}_i(t + \tau_{in}) = x_i(t) + \int_{-\tau_{in}}^0 u_{\alpha i}(t + \theta) + u_{\beta i}(t + \theta - \tau_c) d\theta$$

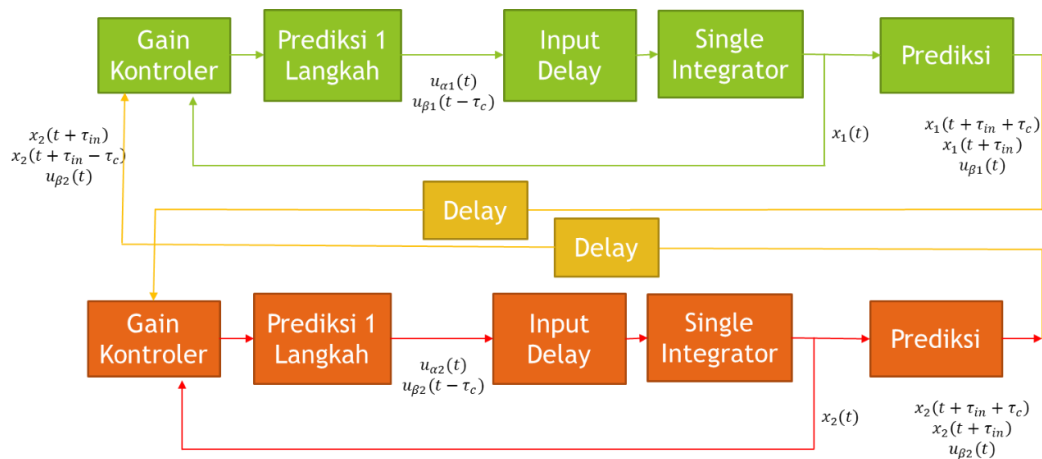
3. Menerima informasi state $\hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c)$ dan $\hat{x}_j(t + \tau_{in})$ dari agen yang berdekatan.
4. Memberikan sinyal input $u_{\alpha i}(t) = -k_{\alpha} \sum_{j=1}^N l_{\alpha ij} \hat{x}_j(t + \tau_{in})$.
5. Memberikan sinyal input $u_{\beta i}(t - \tau_c) = -k_{\beta} \sum_{j=1}^N l_{\beta ij} \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c)$.
6. Melakukan prediksi $\hat{u}_{\beta i}(t) = -k_{\beta} \sum_{j=1}^N l_{\beta ij} \hat{x}_j(t + \tau_{in})$.
7. Melakukan prediksi dua langkah $\hat{\hat{x}}_i(t + \tau_{in} + \tau_c)$.
8. Mengirimkan informasi $\hat{\hat{x}}_i(t + \tau_{in} + \tau_c)$, $\hat{x}_i(t + \tau_{in})$ dan $u_{\beta i}(t)$ ke agen yang berdekatan dengan agen i .

Berikut pula blok diagram pada masing-masing agen disajikan dalam Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Blok Diagram Masing-masing Agen

Untuk memperjelas berikut contoh blok diagram untuk sistem dengan dua agen dan saling berkomunikasi disajikan dalam Gambar 3.3.



Gambar 3.4 Blok Diagram untuk Kasus 2 Agen

Gambar 3.4 menjelaskan masing-masing agen memiliki model yang sama baik plant (*single integrator*), delay dan prediktor. Prediktor sebelum input masing-masing agen menggunakan prediksi 1 langkah digunakan untuk mengkompensasi input delay. Sedangkan Prediktor pada output menggunakan prediksi 2 langkah dimana hasil state yang terprediksi di kirim ke agen yang lain dan terdapat delay pada pengiriman informasi ke agen yang lain.

3.4 Hipotesa Penelitian

Pada Subbab 3.2 dijelaskan bahwa dapat membuat prediktor agar Persamaan (3.1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{x}(t) - k_{\beta} \mathbf{L}_{\beta} \mathbf{x}(t - \tau_c)$$

terpenuhi. Maka langkah terakhir pada penelitian ini adalah membuktikan Persamaan (3.1) apabila dibandingkan dengan Persamaan (2.4)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_F \mathbf{L}x(t - \tau_c)$$

akan berlaku apabila $k_\alpha = k_\beta = k_F$ maka Persamaan (3.1) memiliki batas kestabilan yang lebih besar dibandingkan dengan Persamaan (2.4).

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab 4 ini akan dijelaskan mengenai hasil perhitungan analitis dari hasil perancangan dan apa yang dihipotesakan pada Bab 3. Selain itu juga akan diperkuat dengan perhitungan numerik.

4.1 Modal Decomposition pada Persamaan Karakteristik

Perhatikan Persamaan Karakteristik dari Persamaan (3.1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t) - k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c)$$

Pada Subbab 4.1 ini membahas terlebih dahulu kasus tanpa adanya delay input dan gain pada \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β sehingga persamaan Karakteristiknya disederhanakan menjadi

$$\mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau_c s} = 0 \quad (4.1)$$

Apabila Persamaan (4.1) dapat didekomposisikan maka terdapat eigen vector \mathbf{v} yang invariant terhadap s . Misalkan ada $s_1 \neq s_2$ maka akan ada fungsi skalar $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau_c s_1})\mathbf{v} = f(s_1)\mathbf{v} \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau_c s_2})\mathbf{v} = f(s_2)\mathbf{v}$$

apabila dikurangkan kedua persamaan akan didapatkan

$$\mathbf{L}_\beta (e^{-\tau_c s_1} - e^{-\tau_c s_2})\mathbf{v} = (f(s_1) - f(s_2))\mathbf{v}$$

maka \mathbf{v} adalah eigenvector dari $\mathbf{L}_\beta \dots$ (4.2). Apabila disubstitusi ke Persamaan (4.3) maka akan didapatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\alpha \mathbf{v} + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau_c s} \mathbf{v} &= \mathbf{L}_\alpha \mathbf{v} + \lambda_\beta e^{-\tau_c s} \mathbf{v} = f(s)\mathbf{v} \\ \Rightarrow \mathbf{L}_\alpha \mathbf{v} &= (f(s) - \lambda_\beta e^{-\tau_c s})\mathbf{v} \end{aligned}$$

maka \mathbf{v} juga merupakan eigenvector dari \mathbf{L}_α . Maka berlaku

$$\mathbf{L}_\alpha \mathbf{L}_\beta \mathbf{v} = \mathbf{L}_\beta \mathbf{L}_\alpha \mathbf{v} \quad (4.4)$$

Dengan demikian, Persamaan (4.4) tidak selalu berlaku untuk setiap eigenvector dari setiap pasang \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β . Namun, juga tidak selalu tidak berlaku untuk setiap pasang \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β .

Pada Buku [7] dijelaskan dua matriks persegi \mathbf{A} dan \mathbf{B} dengan ukuran yang sama akan memiliki eigenspace yang sama jika dan hanya jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} komutatif yaitu $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Sebagai contoh untuk pasangan \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β berikut :

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_\alpha \mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_\beta \mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_\alpha \mathbf{L}_\beta \neq \mathbf{L}_\beta \mathbf{L}_\alpha$$

sehingga keduanya memiliki himpunan eigenvector yang berbeda. Akan tetapi perhatikan bahwa L_α dan L_β memiliki sebuah eigenvector yang sama, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka kedua matriks memiliki eigenvector yang sama sehingga Persamaan Karakteristik (4.1) dengan \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β seperti pada contoh dapat didekomposisi dengan $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ menjadi

$$(\mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau c s})\mathbf{v} = (s + 2 + e^{-\tau c s})\mathbf{v} = 0$$

sehingga cukup diselesaikan persamaan $s + 2 + e^{-\tau c s} = 0$ untuk mendapatkan akar-akar s terhadap eigenvector $\mathbf{v} = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$.

Contoh berikutnya adalah \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β mungkin untuk memiliki himpunan eigenvector yang sama. Yaitu:

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\alpha \mathbf{L}_\beta = \mathbf{L}_\beta \mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga untuk mendapatkan semua akar Karakteristik dari Persamaan (4.1) bisa dengan melakukan dekomposisi terhadap semua eigenvector.

Pembahasan selanjutnya akan berfokus pada matriks \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β secara keseluruhan karena tidak setiap pasang \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β dapat dilakukan dekomposisi. Pada Subbab 4.1 ini merupakan kendala awal dalam melakukan penelitian karena Hipotesa mula dalam penelitian ini Persamaan Karakteristik (4.1) dapat didekomposisikan. Namun, dalam penelitian dihasilkan hipotesa yang berlawanan yakni eigenvector \mathbf{v} dari matriks $\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau s}$ tidak selalu invarian terhadap s . Sehingga, dapat dituliskan $\mathbf{v}(s)$ yaitu eigenvector dari

$$\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau s} \tag{4.5}$$

Adapun dalam pemberian dua contoh pasangan matriks dapat diketahui adanya hubungan isomorfisme terhadap sifat abelian dari matriks \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β yang akan diuraikan di akhir Bab 4 ini.

4.2 Graf Terhubung dan 0 Sebagai Eigenvalue \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β

Dalam Teori Graf dan Matriks Laplacian [5]. Nilai $\mathbf{0}$ selalu menjadi eigenvalue dari \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β dengan eigenvector $\mathbf{1}_N = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ disebut sebagai indikasi konektivitas sebuah graf. Banyaknya eigenvalue 0 dari matriks Laplacian \mathbf{L} adalah banyaknya komponen terhubung dari graf \mathcal{G} . Apabila \mathcal{G} terhubung maka hanya ada 1 komponen terhubung maka hanya ada sebuah eigenvalue 0 dengan

eigenvector $\mathbf{1}_N$. Untuk Matriks \mathbf{L}_α yang menyatakan dari kumpulan beberapa komponen graf berupa graf komplit. Maka

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 \oplus \mathbf{K}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}_M \quad (4.6)$$

dimana

$$\mathbf{K}_i = W_i \begin{bmatrix} |\mathcal{V}_i| - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & |\mathcal{V}_i| - 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & |\mathcal{V}_i| - 1 \end{bmatrix}$$

dengan W_i adalah bilangan real positif sebagai pembobot dan $|\mathcal{V}_i|$ merupakan banyak verteks dari \mathcal{G}_i , $i = 1, 2, 3, \dots, M$. Perhatikan masing-masing \mathbf{K}_i menyumbang sebuah null dengan eigenvector

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{|\mathcal{V}_1|} \\ \mathbf{0}_{|\mathcal{V}_2|} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{V}_i|} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{|\mathcal{V}_M|} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Pada batasan asumsi dijelaskan bahwa graf terhubung sedemikian sehingga hanya akan ada sebuah eigenvalue 0 dengan eigenvector $\mathbf{1}_N$ pada matriks $\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau s}$. Karena dalam penelitian ini banyak menggunakan metode yang menggunakan istilah “matriks singular” tetapi bukan untuk eigenvalue 0 dengan eigenvector $\mathbf{1}_N$ ini maka untuk Subbab-subbab pada Bab 4 akan “abuse” istilah “matriks singular” apabila ada eigenvalue 0 dengan eigenvector selain $\mathbf{1}_N$. Sementara, matriks dengan sebuah eigenvalue 0 dengan eigenvector $\mathbf{1}_N$ tetap disebut “matriks non-singular”.

Untuk invers matriks Laplacian non-singular \mathbf{L} sendiri akan dilakukan pseudo-invers

$\mathbf{L}^+ = (\mathbf{L} + \epsilon \mathbf{M})^{-1}$, $\mathbf{M} = \mathbf{1}_{N \times N}$, ϵ adalah sembarang bilangan real dengan kontinuitas terhadap ϵ maka pasti ada ϵ sehingga $\mathbf{L} + \epsilon \mathbf{M}$ dapat diinvers dan untuk sembarang vektor \mathbf{u}, \mathbf{v} dengan $\mathbf{u}^T \mathbf{1}_N = 0$ dan $\mathbf{v}^T \mathbf{1}_N = 0$ dimana $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Karena $\mathbf{1}_N$ adalah nullspace dari \mathbf{L} maka \mathbf{u} unik terhadap \mathbf{v} dan \mathbf{v} unik terhadap \mathbf{u} .
 karena $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ maka

$$(\mathbf{L} + \epsilon\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{v} \implies \mathbf{u} = (\mathbf{L} + \epsilon\mathbf{M})^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{L}^+\mathbf{v} \quad (4.8)$$

4.3 Hasil Pembuktian Analitik Batas Kestabilan

Pada Subbab 4.3 ini akan membuktikan pernyataan pada hipotesa bahwa batas kestabilan (nilai maksimal τ agar konsensus terpenuhi) pada persamaan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}_\alpha\mathbf{x}(t) - \mathbf{L}_\beta\mathbf{x}(t - \tau) \quad (4.9)$$

lebih besar daripada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}_\alpha\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{L}_\beta\mathbf{x}(t - \tau) = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t - \tau) \quad (4.10)$$

Analisa yang mendalam tentang persamaan karakteristik dari Persamaan (4.9) dapat diambil dari teori-teori yang ada pada Buku [6] dan [14] sedangkan Persamaan (4.10), dengan menggunakan Teorema pada paper [2] maka batas kestabilannya adalah

$$\tau \leq \frac{\pi}{2\lambda_N^{\{\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta\}}}$$

Kembali ke Persamaan (4.9), dengan menggunakan transformasi Laplace maka didapatkan

$$\det(\mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}) = 0 \quad (4.11)$$

Definisikan $\mathbf{M}(s, \tau) = \mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}$ dan $s = \sigma + j\omega$. Untuk eigenvalue $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N - \text{Span}\{\mathbf{1}_N\}$

Lemma 4.1:

$$\lambda_1^{\{\mathbf{M} + \mathbf{M}^*\}} \leq 2\text{Re}(\lambda_i^{\{\mathbf{M}\}}) \leq \lambda_N^{\{\mathbf{M} + \mathbf{M}^*\}}$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika \mathbf{M} Normal dan $i = 1$ atau $i = N$

Bukti:

Perhatikan untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ dengan $|\mathbf{x}| = 1$, karena $\mathbf{M} + \mathbf{M}^*$ hermitian maka

$$\lambda_1^{\{\mathbf{M} + \mathbf{M}^*\}} \leq \mathbf{x}^*(\mathbf{M} + \mathbf{M}^*)\mathbf{x} \leq \lambda_N^{\{\mathbf{M} + \mathbf{M}^*\}}$$

Ambil \mathbf{x} yang merupakan eigenvalue dari \mathbf{M} maka

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{M} + \mathbf{M}^*)\mathbf{x} = 2\text{Re}(\lambda_i^{\{\mathbf{M}\}})$$

maka terbukti

$$\lambda_1^{\{\mathbf{M}+\mathbf{M}^*\}} \leq 2\text{Re}(\lambda_i^{\{\mathbf{M}\}}) \leq \lambda_N^{\{\mathbf{M}+\mathbf{M}^*\}}$$

Perhatikan \mathbf{M} dikatakan definit positif pada ruang vektor \mathbb{V} jika dan hanya jika untuk setiap $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ berlaku

$$\mathbf{v}^* \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$$

Begitu juga \mathbf{M} dikatakan definit negatif pada ruang vektor \mathbb{V} jika dan hanya jika untuk setiap $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ berlaku

$$\mathbf{v}^* \mathbf{M} \mathbf{v} < 0$$

Lemma 4.2:

Jika ada $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ sehingga $\mathbf{M} \mathbf{v} = 0$ maka $\mathbf{M} + \mathbf{M}^*$ tidak mungkin definit positif ataupun definit negatif pada ruang vector \mathbb{V}

Bukti:

Andaikan $\det(\mathbf{M}) = 0$ dan \mathbf{M} semidefinit positif maka

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{M}^* + \mathbf{M}) \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} \quad (4.12)$$

Karena $\det(\mathbf{M}) = 0$ maka terdapat \mathbf{v} sehingga $\mathbf{M} \mathbf{v} = 0$, substitusikan $\mathbf{x} := \mathbf{v}$ pada Persamaan (4.12) maka

$$\mathbf{v}^* (\mathbf{M}^* + \mathbf{M}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \mathbf{M}^* \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{M} \mathbf{v} = 0 > 0$$

Kontradiksi, analog untuk bukti bagian semi definit negatif dengan substitusi $\mathbf{M} := -\mathbf{M}$ pada Pertidaksamaan (4.12). Dengan kontinuitas, maka perlu mendapatkan τ terkecil yaitu τ^* sehingga

$$\det(\mathbf{M}(j\omega, \tau^*)) = 0$$

Misalkan $\mathbb{V} = \mathbb{C}^N - \text{Span}\{\mathbf{1}_N\}$

$$\mathbf{M}(j\omega, \tau^*) + \mathbf{M}^*(j\omega, \tau^*) = 2\mathbf{L}_\alpha + 2\mathbf{L}_\beta \cos \omega \tau^*$$

Andaikan $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \tau^* \leq \frac{\pi}{2}$ maka $\cos \omega \tau^* \geq 0$ maka $\mathbf{L}_\beta \cos \omega \tau^*$ definit positif pada \mathbb{V} maka

$$\mathbf{M}(j\omega, \tau^*) + \mathbf{M}^*(j\omega, \tau^*) = 2\mathbf{L}_\alpha + 2\mathbf{L}_\beta \cos \omega \tau^* > 0$$

Maka

$$|\omega \tau^*| > \frac{\pi}{2} \quad (4.12)$$

Perhatikan pula

$$\begin{aligned}
-j\mathbf{M}(j\omega, \tau^*) + (-jM_1(j\omega, \tau^*))^* &= -jM_1(j\omega, \tau^*) + jM_1^*(j\omega, \tau^*) \\
&= 2I\omega - 2L_\beta \sin \omega\tau^*
\end{aligned}$$

Andaikan $|\omega| > \lambda_N^{\{L_\beta\}}$ maka

$$0 < I|\omega| - L_\beta$$

Jika $\omega > 0$ maka

$$0 < I|\omega| - L_\beta < I\omega - L_\beta \sin \omega\tau^*$$

Jika $\omega < 0$ maka

$$0 < I|\omega| - L_\beta < -I\omega + L_\beta \sin \omega\tau^*$$

Keduanya kontradiksi dengan lemma maka $|\omega| \leq \lambda_N^{\{L_\beta\}}$. Karena $\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta - \mathbf{L}_\beta = \mathbf{L}_\alpha$ semidefinit positif maka

$$|\omega| \leq \lambda_N^{\{L_\beta\}} \leq \lambda_N^{\{L_\alpha + L_\beta\}}$$

dengan Persamaan (4.12) maka

$$\tau^* > \frac{\pi}{2|\omega|} \geq \frac{\pi}{2\lambda_N^{\{L_\beta\}}} \geq \frac{\pi}{2\lambda_N^{\{L_\alpha + L_\beta\}}} \quad (4.13)$$

Didapatkan $\frac{\pi}{2\lambda_N^{\{L_\alpha + L_\beta\}}}$ merupakan batas kestabilan dari Persamaan (4.11)

maka terbukti Sistem (4.9) memiliki batas kestabilan lebih baik dengan Sistem (4.10).

Special case apabila dapat dilakukan dekomposisi terhadap sebuah vector \mathbf{v} , untuk eigenvektor $\mathbf{v} = V_{L_\alpha} \cap V_{L_\beta} - \text{Span}\{\mathbf{1}_N\}$ dimana

$$\mathbf{L}_\alpha \mathbf{v} = \lambda_\alpha \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L}_\beta \mathbf{v} = \lambda_\beta \mathbf{v}$$

maka $\mathbf{M}(s, \tau)\mathbf{v} = 0$ dapat dekomposisi menjadi

$$\begin{aligned}
s + \lambda_\alpha + \lambda_\beta e^{-s\tau} &= 0 \\
\Rightarrow s &= \frac{W(\lambda_\beta e^{\lambda_\alpha \tau})}{\tau} - \lambda_\alpha
\end{aligned} \quad (4.14)$$

untuk mendapatkan batas kestabilannya, dengan kontinuitas maka perlu mendapatkan τ terkecil yaitu τ^* sehingga

$$\det(\mathbf{M}(j\omega, \tau^*)) = 0$$

dibantu dengan Persamaan (4.14) maka

$$j\omega + \lambda_\alpha + \lambda_\beta \cos \omega\tau^* - j\lambda_\beta \sin \omega\tau^* = 0$$

kelompokkan bagian real dan imajiner menjadi

$$\lambda_\alpha = -\lambda_\beta \cos \omega\tau^* \quad (4.15)$$

$$\omega = \lambda_\beta \sin \omega\tau^* \quad (4.16)$$

jumlahkan kuadrat persamaan diatas menjadi

$$\omega^2 = \lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}$$

apabila $\lambda_\alpha \geq \lambda_\beta$ maka tidak ada solusi sehingga akan selalu stabil dengan delay berapapun. Untuk $\lambda_\beta > \lambda_\alpha$ Substitusi ke Persamaan (4.16)

$$\sin \omega\tau^* = \pm \frac{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}{\lambda_\beta}$$

karena Persamaan (4.15) maka $|\omega\tau^*| > \frac{\pi}{2}$

$$\omega\tau^* = \pm \pi \mp \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}{\lambda_\beta} \Rightarrow \tau^* = \frac{\pi - \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}{\lambda_\beta}}{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}$$

karena $\arcsin \frac{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}{\lambda_\beta} < \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} < \lambda_\beta < \lambda^{\{L_\alpha + L_\beta\}}$ dan $\lambda^{\{L_\alpha + L_\beta\}}$ adalah eigenvalue $L_\alpha + L_\beta$ maka

$$\tau^* = \frac{\pi - \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}}{\lambda_\beta}}{\sqrt{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2}} > \frac{\pi}{2\lambda^{\{L_\alpha + L_\beta\}}}$$

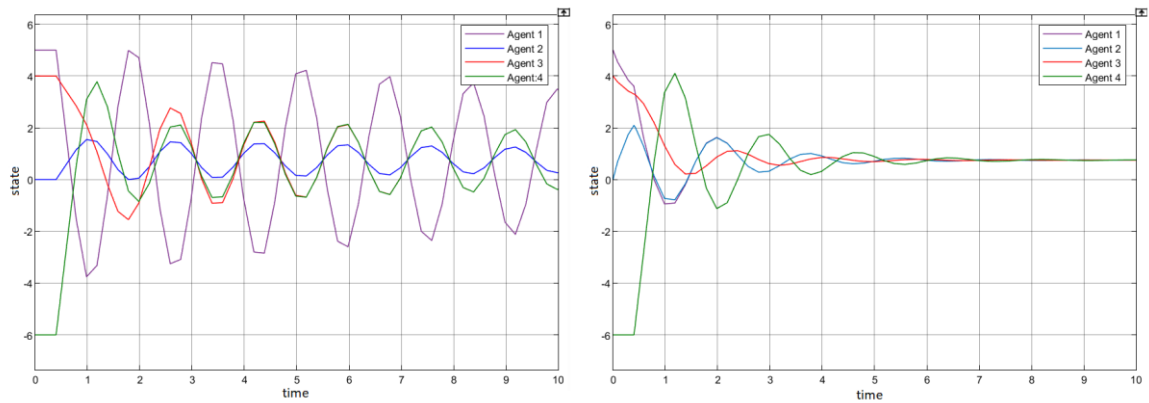
dimana $\frac{\pi}{2\lambda^{\{L_\alpha + L_\beta\}}}$ merupakan batas kestabilan dari sistem (4.9) apabila $\lambda^{\{L_\alpha + L_\beta\}}$ merupakan eigenvalue terbesar dari $L_\alpha + L_\beta$.

Berikut ditampilkan pula hasil simulasi dengan nilai

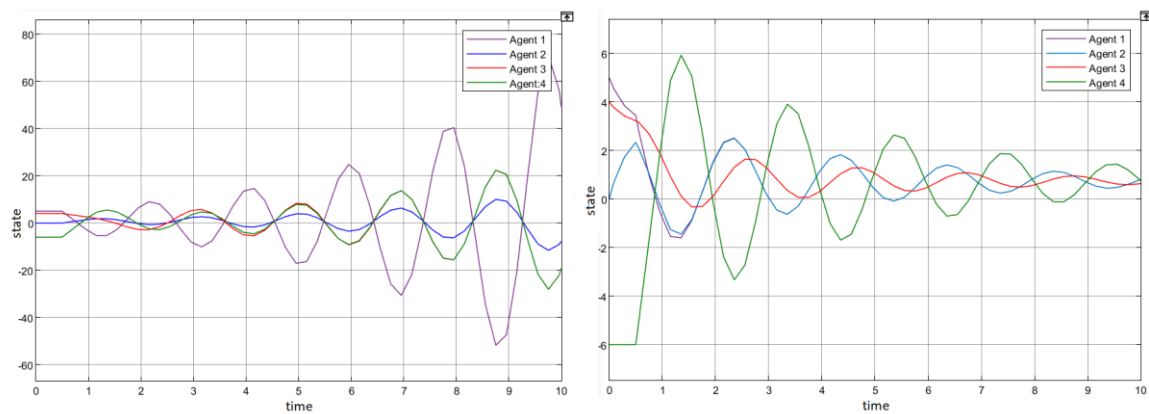
$$L_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

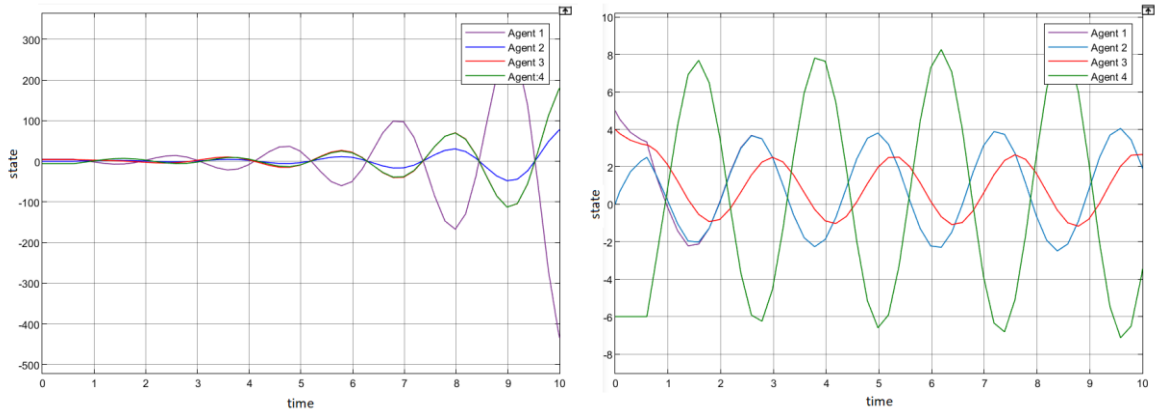
dan dengan delay 0.4s, 0.5s dan 0.6s berturut-turut disimulasikan menggunakan simulink dan hasil ditampilkan Gambar 4.1, Gambar 4.2 dan Gambar 4.3



Gambar 4.1 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Prediktor (kiri) dan Dengan Prediktor (kanan) dengan delay 0.4s



Gambar 4.2 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Prediktor (kiri) dan Dengan Prediktor (kanan) dengan delay 0.5s



Gambar 4.3 Perbandingan Respon Sistem Tanpa Predikor (kiri) dan Dengan Predikor (kanan) dengan delay 0.6s

Dari ketiga gambar yaitu Gambar 4.1 , Gambar 4.2 dan Gambar 4.3. Pada delay 0.4s dengan atau tanpa predikor sistem stabil konsensus. Kemudian dengan delay 0.5s sistem dengan predikor stabil konsensus namun tidak dengan sistem tanpa predikor. Terakhir, dengan delay 0.6s kedua sistem tidak stabil.

4.4 Pemberian Gain k_β pada L_β

Pada bahasan Subbab 4.5 ini akan dibahas mengenai apabila diberikan gain pada komponen delay

$$\dot{x}(t) = -L_\alpha x(t) - k_\beta L_\beta x(t - \tau)$$

atau persamaan Karakteristiknya

$$\det(Is + L_\alpha + k_\beta L_\beta e^{-s\tau}) = 0 \quad (4.17)$$

Perhatikan dari Pertidaksamaan (4.13) jika

$$k_\beta < \frac{\pi}{2\lambda_N^{\{L_\beta\}}\tau}$$

maka sistem dijamin stabil.

Lemma 4.3: Akan dibuktikan untuk $k_\beta < P$ untuk suatu $P > 0$ maka terdapat s akar real yang menjadi akar Persamaan (4.17).

Bukti :

Andaikan akarnya tidak real misal $s = \sigma + j\omega$, $\omega \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} |\omega| &< |\sin \omega\tau| k_\beta \lambda_N^{\{L_\beta\}} e^{-\sigma\tau} < |\omega\tau| k_\beta \lambda_N^{\{L_\beta\}} e^{-\sigma\tau} \\ \Rightarrow 1 &< \tau k_\beta \lambda_N^{\{L_\beta\}} e^{-\sigma\tau} \end{aligned}$$

$$\sigma \leq \frac{\ln(\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})}{\tau}$$

Gunakan sifat kontinuitas mulai dari $k_\beta = 0$ maka

$$\det(\mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha) = 0$$

memiliki akar-akar persamaan berupa eigenvalue dari $-\mathbf{L}_\alpha$ yaitu M buah 0 dan $N - M$ akar real negatif.

Dengan menggunakan sifat kontinuitas, apabila $k_\beta \rightarrow 0$ maka $\sigma \rightarrow \sigma_0$ untuk suatu σ_0 eigenvalue dari $-\mathbf{L}_\alpha$ maka kontradiksi karena

$$\sigma \leq \frac{\ln(\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})}{\tau} \rightarrow -\infty \quad (4.18)$$

Perhatikan akar-akar real $s < 0$ pada (4.17) maka matriks

$$\mathbf{L}_\alpha + k_\beta \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}$$

adalah definit positif pada $\mathbb{C}^n - \text{Span}\{1\}$ maka

$$\mathbf{L}_\alpha e^{-s\tau} + k_\beta \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau} > \mathbf{L}_\alpha + k_\beta \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau} > k_\beta \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}$$

dan dengan menggunakan Teorema [7] maka didapatkan

$$\lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} e^{-s\tau} + k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-s\tau} > \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha + k_\beta \mathbf{L}_\beta\}} e^{-s\tau} > -s > \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} + k_\beta \lambda_1^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-s\tau} \quad (4.19)$$

Maka untuk $i = M + 1, \dots, N$

$$-s > \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}}$$

Lemma 4.4 : Untuk setiap \mathbf{L}_α maka terdapat k_β sehingga Persamaan (4.17) memiliki solusi real s dan

$$-s > \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}}$$

Bukti :

Untuk $i = 1, 2, \dots, M$ apabila $s = \sigma + j\omega$ kompleks maka dengan Pertidaksamaan (4.19)

$$k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-s\tau} = \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} e^{-s\tau} + k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-s\tau} > \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha + k_\beta \mathbf{L}_\beta\}} > -\sigma \quad (4.20)$$

Akan dibuktikan ketika $|\omega| > 0$ maka $k_\beta > \frac{e^{-1}}{\tau \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}}$. Karena adanya batas kestabilan

dimana pada kondisi tersebut $|\omega| > 0$ maka terdapat k_β sehingga $|\omega| > 0$ maka

$$|\omega| < |\sin \omega \tau| k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-\sigma\tau} \leq |\omega \tau| k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-\sigma\tau}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-\sigma\tau} \quad (4.21)$$

$$\sigma < \frac{\ln(\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})}{\tau} \quad (4.22)$$

Dengan Pertidaksamaan (4.20) berlaku pula

$$\begin{aligned} -\sigma < k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} \cos \omega^+ \tau e^{-\sigma\tau} \leq k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} e^{-\sigma\tau} \\ -\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} < \sigma \tau e^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

Andaikan $\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} \leq e^{-1}$ maka

$$-\sigma\tau < e^{-1}$$

dengan definisi lambert W function

$$\frac{W_0(-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})}{\tau} < \sigma \quad (4.23)$$

Dari Pertidaksamaan (4.22) dan (4.23)

$$\begin{aligned} W_0(-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}) < \ln(\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}) \\ \Rightarrow e^{W_0(-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})} < e^{\ln(\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})} \\ \Rightarrow \frac{-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}}{W_0(-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}})} < \tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} \\ \Rightarrow W_0(-\tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}) < -1 \end{aligned}$$

kontradiksi maka terbukti bahwa

$$\begin{aligned} \tau k_\beta \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}} > e^{-1} \\ \Rightarrow k_\beta > \frac{e^{-1}}{\tau \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}} \quad (4.24) \end{aligned}$$

Adapun Rangkuman untuk Subbab 4.4 ini adalah:

1. Dengan Pertidaksamaan (4.13) untuk $k_\beta \leq \frac{\pi}{2\lambda_N^{\{\mathbf{L}_\beta\}}\tau}$ sistem akan dijamin stabil konsensus.
2. Dengan Pernyataan (4.18) ketika k_β cukup kecil maka dijamin memiliki $N - 1$ buah akar-akar real negatif.

3. Dengan lanjutan Pertidaksamaan (4.19) ketika k_β cukup kecil maka dijamin memiliki $N - M$ akar real s yang masing-masing kurang dari $\lambda_i^{\{L_\alpha\}}$ yang tidak 0.
4. Dengan Pertidaksamaan (4.24) ketika $k_\beta \leq \frac{e^{-1}}{\tau \lambda_N^{\{L_\beta\}}}$ sistem dijamin akan memiliki $N - 1$ akar real negatif.

4.5 Pemberian Gain k_α pada K_α

Pada bahasan Subbab 4.5 ini akan dibahas mengenai apabila diberikan gain pada komponen terprediksi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -k_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t) - \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t - \tau)$$

atau persamaan Karakteristiknya

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}s + k_\alpha \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau} \quad (4.25)$$

karena \mathbf{L}_α normal maka ada unitary \mathbf{U} sehingga

$$\mathbf{U}^* \mathbf{L}_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} \end{bmatrix}$$

dengan \mathbf{D}_α matriks diagonal yang memuat $N - M$ eigenvalue positif dan M eigenvalue 0, maka $\det(\mathbf{M}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{U}^* \mathbf{M} \mathbf{U}) = 0$

Gunakan ke persamaan (4.25)

$$\mathbf{U}^* \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{I}s + k_\alpha \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{U}^* \mathbf{L}_\beta \mathbf{U} e^{-s\tau}$$

misalkan $[\mathbf{U}^* \mathbf{L}_\beta \mathbf{U}]_{ij} = a_{ij}$ dan

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|$$

maka dengan teorema Gersgorin, didapatkan

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s + k_\alpha \lambda_i^{\{\mathbf{L}_\alpha\}} + a_{ii} e^{-s\tau} \right| \leq r_i e^{-\sigma\tau} \right\}$$

dan apabila diperhatikan bagian real-nya saja, maka didapatkan

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| \sigma + k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} + a_{ii} e^{-\sigma\tau} \cos \omega\tau \right| \leq r_i e^{-\sigma\tau} \right\}$$

Perhatikan untuk $i > M$ maka $\lambda_i^{\{L_\alpha\}} > 0$ sehingga

$$\begin{aligned} \sigma + k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} + a_{ii} e^{-\sigma\tau} \cos \omega\tau &\leq r_i e^{-\sigma\tau} \\ \Rightarrow \sigma + k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} &\leq (r_{ii} + |a_{ii}|) e^{-\sigma\tau} \\ \Rightarrow \sigma - (r_{ii} + |a_{ii}|) e^{-\sigma\tau} &\leq -k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} \end{aligned}$$

karena $\sigma - (r_{ii} + |a_{ii}|) e^{-\sigma\tau}$ adalah fungsi naik terhadap σ dan karena k_α adalah variable tuning maka untuk setiap $P < 0$ terdapat k_α sedemikian sehingga

$$\sigma < P \quad (4.26)$$

tetapi untuk $i \leq M, \lambda_i^{\{L_\alpha\}} = 0$ maka

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^M \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s + k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} + a_{ii} e^{-s\tau} \right| \leq r_i e^{-s\tau} \right\} \\ = \bigcup_{i=1}^n \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s + a_{ii} e^{-s\tau} \right| \leq r_i e^{-s\tau} \right\} \end{aligned}$$

tidak berubah berapapun nilai k_α sehingga untuk k_α yang cukup besar

$$\bigcup_{i=1}^M \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s + a_{ii} e^{-s\tau} \right| \leq r_i e^{-s\tau} \right\} \quad (4.26)$$

dan

$$\bigcup_{i=M+1}^N \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s + k_\alpha \lambda_i^{\{L_\alpha\}} + a_{ii} e^{-s\tau} \right| \leq r_i e^{-s\tau} \right\} \quad (4.27)$$

akan disjoint sehingga dengan teorema gersgorin kedua.

Berdasarkan uraian pada Subbab 4.5 maka didapatkan rangkuman berikut

1. Menurut (4.25) untuk setiap $P < 0$ maka terdapat $k_\alpha > 0$ sehingga $N - M$ akar memiliki bagian real yang kurang dari P
2. M akar yang tidak disebutkan pada Point 1 yaitu Himpunan (4.26) berada pada suatu himpunan yang invariant terhadap perubahan k_α
3. Sedangkan $N - M$ akar yang lain yaitu pada Himpunan (4.27) akan $\rightarrow -\infty$ ketika $k_\alpha \rightarrow +\infty$

Sehingga dari Point 3. dan 4. dapat disimpulkan pula gain $k_\alpha > 0$ akan invariant dengan kestabilan sistem.

4.6 Perancangan Algoritma Root Locus

Root locus pada penelitian ini digunakan memverifikasi hasil perhitungan analitis pada Subbab 4.5 dan 4.6. Adapun dasar algoritmanya ada di [6] yang berbasis algoritma newton. Sehingga perlu mendefinisikan persamaan dan variabelnya. Terdapat dua persamaan yang akan diverifikasi dengan algoritma ini yaitu:

Persamaan 1:

$$\mathbf{M}(k, s) = \mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + k\mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}$$

Persamaan 2:

$$\mathbf{M}(k, s) = \mathbf{I}s + k\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-s\tau}$$

Akan dicari solusi

$$\mathbf{M}(k, s)\mathbf{v}(k) = 0 \quad (4.28)$$

atau $\mathbf{w}^*(k)\mathbf{M}(k, s) = 0$ untuk nilai k bervariasi dari 0 hingga ∞ dengan $s(k)$ adalah solusi; $\mathbf{v}(k)$ dan $\mathbf{w}^*(k)$ adalah eigenvector kanan dan eigenvector kiri.

Berdasarkan persamaan dengan eigenvector kanan yaitu pada Persamaan (4.28), maka akan dicari nilai s dan v pada masing-masing nilai k dengan memperhatikan s dan v adalah independen. Kemudian, didefinisikan ulang:

$$\mathbf{f}(s, v; k) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(k, s)\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{v}^T(k)\mathbf{v}(k) - 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Untuk nilai awal nilai $k = 0$, $s(0)$ dan $\mathbf{v}(0)$ dicari menggunakan pencarian eigenvalue dan eigenvektor dan untuk Persamaan 2 ditambah dengan fungsi Lambert-W.

$$\mathbf{M}(0, s)\mathbf{v}(0) = 0$$

$$\mathbf{v}^*(0)\mathbf{v}(0) = 1$$

Didefinisikan $\mathbf{x}(k) = [s(k) \ \mathbf{v}^T(k)]^T$ adalah variabel dalam Persamaan (4.29) adapun dengan metode newton akan dicari $\mathbf{f}(\mathbf{x}, k) = 0$ dengan $k \in \{k_0, k_1, \dots, k_n\}$. Lalu, diperlukan matriks jacobii yaitu turunan pertama dari f

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}; k)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(s) & \frac{\partial \mathbf{M}(s)}{\partial s} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^* & 0 \end{bmatrix}$$

Sebab $[\mathbf{1}_N^T \ 0]^T$ adalah eigenvector dari J dengan eigenvalue 0 maka seperti yang dijelaskan pada Persamaan (5.8) menggunakan Pseudoinvers yaitu dengan menambahkan $\epsilon \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N \times N} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Perhatikan untuk k kecil apabila $\mathbf{M}(0, s)$ memiliki eigenvalue kembar maka $\mathbf{v}(0)$ memiliki solusi berbentuk eigenspace tetapi $\mathbf{v}(k)$ bisa iya ataupun tidak. Jika $\mathbf{v}(k)$ adalah eigenvector dari \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β yang masing-masing memiliki akar kembar maka $\mathbf{v}(k)$ berbentuk eigenspace sehingga. Jika $\mathbf{v}(k)$ bukan merupakan eigenvector dari \mathbf{L}_α dan \mathbf{L}_β maka $\mathbf{v}(k)$ tidak membentuk eigenspace yang menyebabkan J tidak konsisten. Sehingga untuk k kecil pada kasus tertentu diperlukan trial and error untuk intial state.

Berikut adalah algortima root locus:

1. Definisikan rentang himpunan k yaitu $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ dengan $k_0 = 0$ dan $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$
2. Definisikan $\mathbf{f}(\mathbf{x}, k)$ dan $J(\mathbf{x}, k)$
3. Cari solusi $\mathbf{x}(0)$
4. Untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ lakukan iterasi
 - 4.1 Jika $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ tidak konsisten acak nilai \mathbf{x}_0
 - 4.2 Jika $\mathbf{x}(k_i)$ belum dideklarasikan, $\mathbf{x}(k_i) := \mathbf{x}(k_{i-1})$
 - 4.3 Jika $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i; k_i)| > \epsilon$ maka
$$\mathbf{x}_i := \mathbf{x}_i - J^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i; k_i)$$
 - 4.4 Apabila hasil terlalu jauh, hapus nilai $\mathbf{x}(k_i)$ dan kembali ke Langkah 4.1.
 - 4.5 Jika $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_i; k_i)| < \epsilon$ maka naikkan nilai i menjadi $i + 1$
5. Dapatkan nilai $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

Adapun bisa dilakukan perbaikan apabila jarak antar k_i cukup jauh dengan menggunakan pendekatan first order yaitu.

$$s(k_{i+1}) := s(k_i) + (k_{i+1} - k_i) \frac{\partial s}{\partial k}$$

dimana dapat dicari dengan cara

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}; k) = 0 &\implies \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}; k) = 0 \\ \implies \partial \mathbf{M}(s; k) \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \mathbf{v} \partial s + \partial \mathbf{M}(k) \mathbf{v} + \mathbf{M}(s, k) \partial \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{M}(s; k) \mathbf{v}}{\partial k} &= \frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \mathbf{v} \frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{M}(k)}{\partial k} \mathbf{v} + \mathbf{M}(s, k) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial k} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \mathbf{v} \frac{\partial s}{\partial k} + \mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(k)}{\partial k} \mathbf{v} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial k} &= - \frac{\mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(k)}{\partial k} \mathbf{v}}{\mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \mathbf{v}} \end{aligned}$$

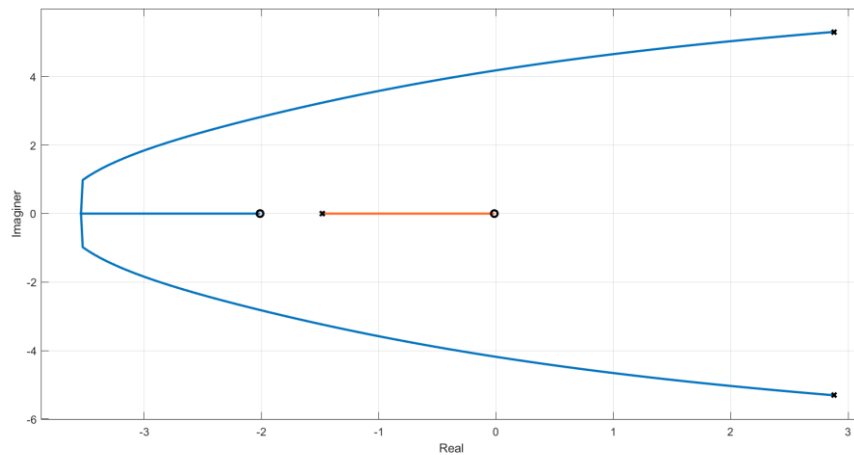
dengan \mathbf{w}^* adalah eigenvector kiri dari $\mathbf{M}(s, k)$ dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial k} &= -\mathbf{M}(s, k)^+ \left(\frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \mathbf{v} \frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial \mathbf{M}(k)}{\partial k} \mathbf{v} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial k} &= - \left(\mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(s; k)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial k} + \mathbf{w}^* \frac{\partial \mathbf{M}(k)}{\partial k} \right) \mathbf{M}(s, k)^+ \end{aligned}$$

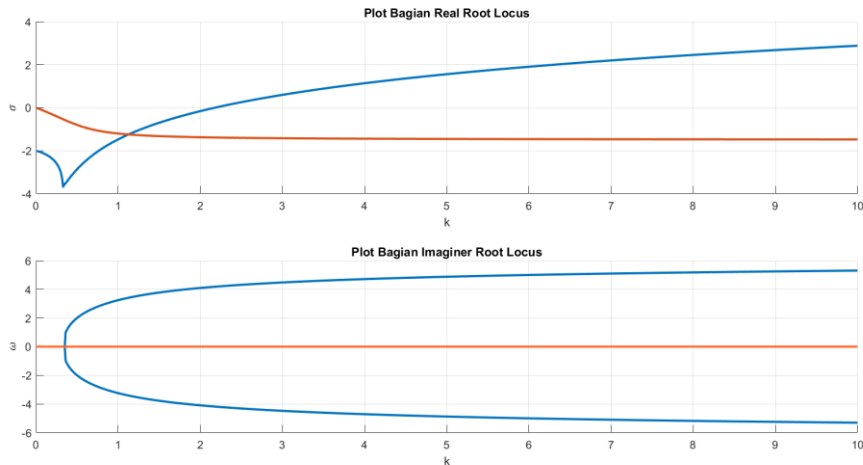
Berikut adalah hasil rootlocus beberapa akar dari Persamaan 1 dari (5.28) dengan k bernilai dari 0 ke 10 dengan interval 0.01 pada graf dengan

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.4 Plot Bagian Imaginer Root Locus



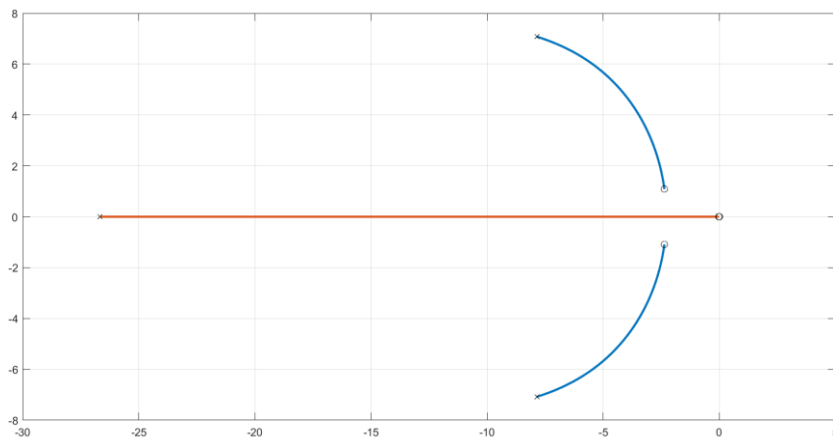
Gambar 4.5 Plot Bagian Imaginer Root Locus Ketika $|\omega|$ Bertambah dan σ Membesar

Terlihat pada Gambar 4.4 dan 4.5 bahwa ada nilai $s = \sigma + j\omega$ yang bewarna biru, pada mulanya $\omega = 0$ dan σ mengecil pada domain real kemudian $|\omega|$ bertambah dan σ membesar hingga menjadikan tidak stabil. Merepresentasikan apa yang ada pada Subbab 4.5.

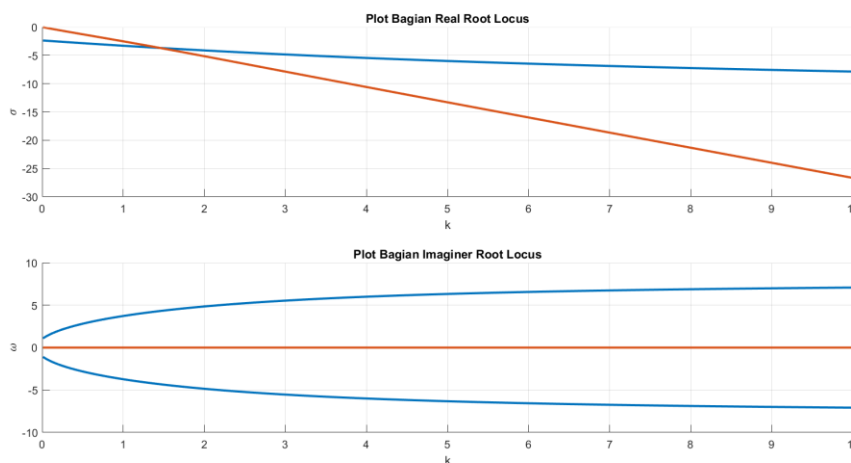
Berikut adalah hasil root locus beberapa akar dari Persamaan 2 dari (4.28) dengan k bernilai dari 0 hingga 10 dengan interval 0.01 pada graf dengan

$$L_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.6 Plot Bagian Imaginer Root Locus garis Biru



Gambar 4.7 Plot Bagian Imaginer Root Locus Garis Biru Invarian Terhadap Himpunan Berhingga

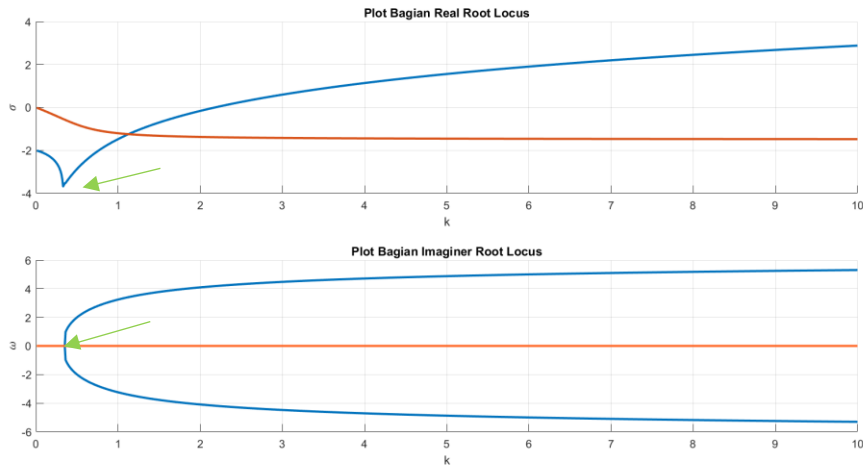
Seharusnya ada $4-1=3$ akar yang terlihat di locus. Namun, karena ada

eigenvector yang merupakan eigenvector L_α dan L_β yaitu $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yang memuat akar

kembar mengakibatkan hanya terlihat 2 akar saja. Terlihat bahwa pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 yang berwarna biru invarian terhadap Himpunan Berhingga (4.26) dan yang berwarna oranye menuju ke tak hingga seperti Himpunan (4.27).

4.8 Perancangan Tuning K_β agar Mendapatkan Akar s Real Terkecil

Salah satu tujuan dari penelitian ini adalah bagaimana mempercepat konsensus seperti halnya pada [4]. Karena pemberian gain k_α yang semakin besar menjadikan respon semakin cepat maka apabila tidak ada batasan energi nilai yang semakin besar akan semakin baik. Sedangkan pemberian gain k_β yang kecil menimbulkan respon yang lambat tetapi semakin besar malah menimbulkan osilasi hingga sistem menjadi tidak stabil. Sehingga ada titik optimal yang dapat dirumuskan yaitu saat s merupakan bilangan real terkecil. Seperti halnya pada lanjutan Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Plot Bagian Imaginer Root Locus Garis Biru Invarian Terhadap Himpunan Berhingga

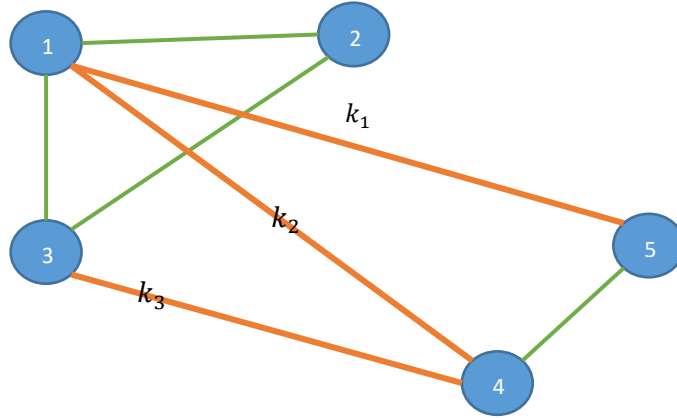
Karena k_β skalar maka hanya bisa membuat salah satu akar s saja menjadi optimal. Untuk itu dibuatlah menjadi gain matriks \mathbf{K}_β memanfaatkan sifat

$$\mathbf{L}_\beta = \mathbf{E}_\beta^T \mathbf{E}_\beta$$

dengan \mathbf{E}_β adalah matriks inciden berukuran $K \times N$ dengan K adalah banyaknya edge. Kemudian diselipkan lah gain \mathbf{K}_β adalah matriks diagonal ukuran $K \times K$ sehingga menjadikan \mathbf{L}_β adalah matriks Laplacian dengan bobot.

$$\mathbf{L}_\beta = \mathbf{E}_\beta^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{E}_\beta$$

sebagai contoh pada graf berikut:



Gambar 4.9 Graf Komponen $\mathbf{K}_j, j \neq i$ melalui perantara graf yang direpresentasikan \mathbf{L}_β .

Jika $\mathbf{L}_\beta = \mathbf{E}_\beta^T \mathbf{E}_\beta$ maka matriks Laplacian yang dinyatakan dalam perkalian matriks insiden adalah

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\mathbf{L}_\beta = \mathbf{E}_\beta^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{E}_\beta$ maka matriks Laplacian yang dinyatakan dalam perkalian matriks insiden dengan gain adalah

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_\beta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & 0 & -k_2 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_3 & k_2 + k_3 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

Jika kembali memperhatikan partisi graf \mathbf{L}_α pada Persamaan (4.6), maka setiap komponen \mathbf{K}_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, M$ dapat terhubung dengan komponen $\mathbf{K}_j, j \neq i$ melalui perantara graf yang direpresentasikan \mathbf{L}_β . Sedemikian sehingga pasti terdapat setidaknya $M - 1$ edge yang menjadi anggota L_β . Menurut Pertidaksamaan (4.18) dan (4.19) maka untuk k_β cukup kecil akan ada $N - 1 - (N - M) = M - 1$ akar real negatif dimana jika $k_\beta = 0$ maka akar tersebut bernilai

0 dengan eigenvector bukan $\mathbf{1}_N$. Kemudian $M - 1$ akar ini akan dioptimalkan yaitu dengan menjadikannya bilangan real sekecil-kecilnya. Karena K_β memiliki setidaknya $M - 1$ variabel ... (4.30).

Penelitian ini sejalan dengan Penelitian [13] yang memanfaatkan Matriks Laplacian dalam sistem multiagen kontinu dengan delay dan input, namun menggunakan pseudo-prediktor berbasis *full-order/reduced-order observer* dengan dinamika loop tertutup dari sistem multiagen. Sementara, tujuan dari Subbab 4.8 berfokus pada memaksimalkan k_1, k_2, \dots dengan memanfaatkan akar karakteristik s berada pada domain real. Perhatikan analogi kasus persamaan karakteristik dengan 1 variabel berikut, yaitu memaksimalkan nilai k dengan s real

$$\begin{aligned} s + ke^{-\tau s} &= 0 \\ k &= -se^{\tau s} \\ \Rightarrow \frac{dk}{ds} &= e^{\tau s}(-\tau s - 1) \end{aligned}$$

titik ekstremum saat $s = -\frac{1}{\tau}$ maka nilai k maksimum adalah

$$\frac{e^{-1}}{\tau} \tag{4.31}$$

Perhatikan Persamaan Karakteristik (4.1) dapat gunakan M eigenvector yang ada pada Persamaan (4.7) didefinisikan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$ sehingga $\mathbf{L}_\alpha \mathbf{v}_i = 0$ dan tanpa mengurangi keumuman $\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i = 1$ maka

$$\begin{aligned} \mathbf{I}s + \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta e^{-\tau s} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{L}_\beta &= e^{\tau s}(-\mathbf{I}s - \mathbf{L}_\alpha) \\ \Rightarrow \mathbf{v}_i^* \mathbf{L}_\beta \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i^*(e^{\tau s})(-\mathbf{I}s - \mathbf{L}_\alpha)\mathbf{v}_i = -se^{\tau s} \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i = -es^{\tau s} \end{aligned}$$

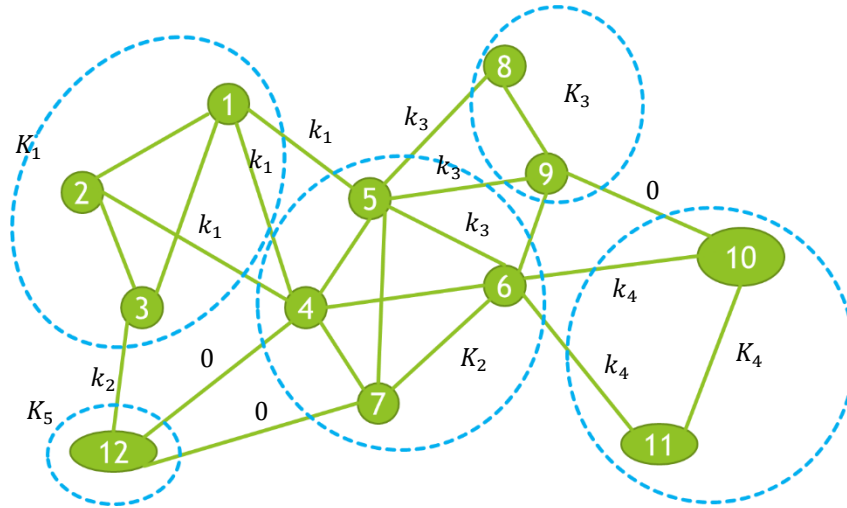
dengan (4.31), maka didapatkan \mathbf{L}_β mencapai nilai maksimal saat

$$\mathbf{v}_i^* \mathbf{L}_\beta \mathbf{v}_i = \frac{e^{-1}}{\tau}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M \tag{4.32}$$

namun karena $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_M = \mathbf{1}_N$ dan $\mathbf{L}_\beta \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ maka Persamaan (4.32) hanya memiliki $M - 1$ persamaan yang linier independen.

Menurut Metode (4.30) pasti terdapat solusi k_1, k_2, \dots meskipun mungkin tidak unik. Salah satu contoh penerapan Metode (4.30) yang dipaksa hanya tepat ada $M - 1$ variabel bebas yaitu dengan mealakukan *Spanning Tree* pada graf $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_M$. Untuk edge yang tidak terlibat dalam *Spanning Tree* nilai gainnya

menjadi 0 sedangkan untuk edge yang sama yang terlibat dalam spanning Tree nilai gainnya disamakan. Untuk eigenvector yang dipilih dapat menggunakan kombinasi (4.7). Sebagai contoh graf berikut:



Gambar 4.10 Graf 12 Agen

Seperti biasa terdapat 12 agen sehingga didefinisikan \mathbf{L}_α adalah Matriks berukuran 12×12 seperti pengelompokan pada Gambar 4.10 Sedemikian sehingga \mathbf{L}_β yang berukuran 12×12 didekomposisikan menjadi

$$\mathbf{L}_\beta = \mathbf{F}^T \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \mathbf{F}$$

dan gunakan Persamaan (4.32) dengan Eigenvector

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka akan didapatkan 4 persamaan berikut

$$k_2 + 3k_3 + 2k_4 = 7 \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$3k_1 = 4 \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$3k_1 + 2k_4 = 6 \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$3k_1 + 3k_3 = 6 \frac{e^{-1}}{\tau}$$

sedemikian sehingga dari persamaan linier 4 variabel didapatkan

$$k_1 = \frac{4}{3} \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$k_2 = 3 \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$k_3 = \frac{2}{3} \frac{e^{-1}}{\tau}$$

$$k_4 = \frac{e^{-1}}{\tau}$$

adapun k_1, k_2, k_3, k_4 hanyalah salah satu kemungkinan solusi. Mengingat \mathbf{L}_β memiliki 12 edge dan $M = 4$ sehingga persamaan tersebut redundan dan memungkinkan adanya solusi yang lain.

4.9 Robustness terhadap Input yang tidak Terprediksi

Pada persamaan prediktor, diketahui bahwa terdapat selang waktu dari $t - \tau$ hingga $t + \tau$ yang terdapat kemungkinan adanya input yang tidak masuk ke prediktor tetapi masuk ke dalam sistem seperti eror pengukuran, error perhitungan, noise, dsb. Input yang tidak terprediksi disebut dengan perturbasi. Misalkan pada sistem ada perturbasi $\mathbf{w}(t)$ tidak terukur dalam rentang waktu $(0, t + \tau)$, maka ditinjau dari persamaan sistem dan prediktor didapatkan

$$\dot{\mathbf{x}}(t + \tau) = -\mathbf{L}_\alpha \mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{e}^{-\mathbf{L}_\alpha \tau} \mathbf{x}(t) - \int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-\mathbf{L}_\alpha \theta} \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t + \theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-\mathbf{L}_\alpha \theta} \mathbf{w}(t + \theta) d\theta$$

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \hat{\mathbf{x}}(t + \tau) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-\mathbf{L}_\alpha \theta} \mathbf{w}(t + \theta) d\theta$$

Perhatikan $\int_{-\tau}^0 \mathbf{e}^{-\mathbf{L}_\alpha \theta} \mathbf{w}(t + \theta) d\theta$ invariant terhadap variable state dan apabila menggunakan norm H_∞ perhatikan

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right| < \left| \int_{-\tau}^0 \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right| \leq \tau \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\mathbf{w}(t+\theta)\} \\
& \Rightarrow \sup_{0 \leq t < \infty} \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right| < \tau \sup_{0 \leq t < \infty} \left\{ \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\mathbf{w}(t+\theta)\} \right\} = \\
& \tau \sup_{-\tau \leq t < \infty} \{\mathbf{w}(t)\} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

maka apabila w bounded nilai perturbasi pun juga bounded dan apabila menggunakan norm H_2 dengan pertidaksamaan Cauchy-Swarz

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right|^2 \leq \left(\int_{-\tau}^0 |e^{-L\alpha\theta}|^2 d\theta \right) \left(\int_{-\tau}^0 |\mathbf{w}(t+\theta)|^2 d\theta \right) \\
& \Rightarrow \int_0^\infty \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right|^2 dt \\
& \leq \left(\int_{-\tau}^0 |e^{-L\alpha\theta}|^2 d\theta \right) \int_0^\infty \int_{-\tau}^0 |\mathbf{w}(t+\theta)|^2 d\theta dt \\
& \Rightarrow \int_0^\infty \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right|^2 dt < \left(\int_{-\tau}^0 |e^{-L\alpha\theta}|^2 d\theta \right) \tau \int_{-\tau}^\infty |\mathbf{w}(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

maka besarnya atenuasi

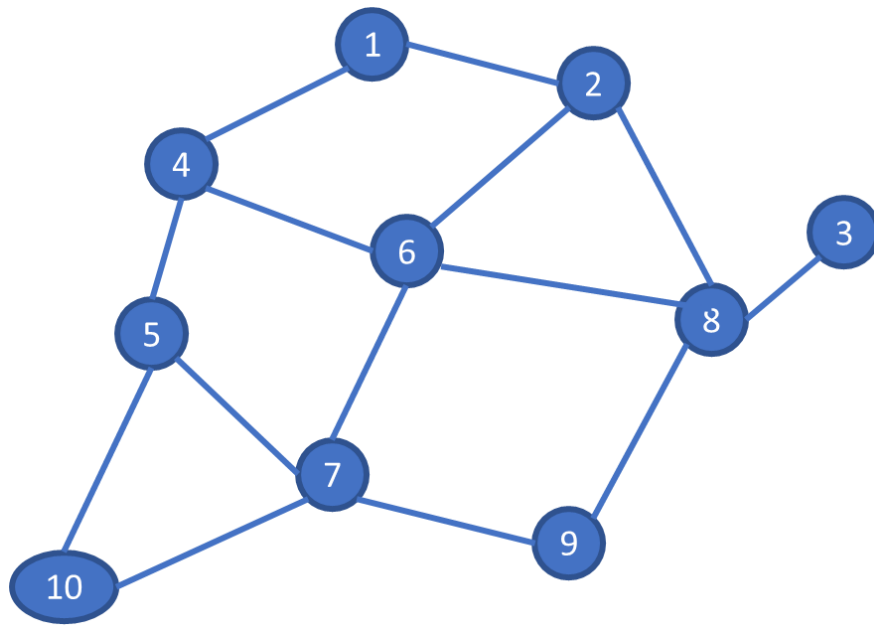
$$\frac{\int_0^\infty \left| \int_{-\tau}^0 e^{-L\alpha\theta} \mathbf{w}(t+\theta) d\theta \right|^2 dt}{\int_{-\tau}^\infty |\mathbf{w}(t)|^2 dt} < \left(\int_{-\tau}^0 |e^{-L\alpha\theta}|^2 d\theta \right) \tau \tag{4.33}$$

dengan RHS invarian terhadap $\mathbf{w}(t)$ dan terbatas.

Maka dengan Pertidaksamaan (4.32) dan (4.33) robust terhadap perturbasi dari input yang tidak terprediksi.

4.10 Metode-metode untuk Mengkompensasi Sepenuhnya Delay

Ide lain yang didapatkan dari penelitian ini adalah bagaimana mengkonstruksikan graf lengkap dengan memanfaatkan agen sebagai penghubung informasi. Sebagaimana diketahui bahwa sekelompok agen yang terhubung oleh sistem komunikasi akan memecahkan masalah apabila bekerja sama, sementara jika tidak bekerja sama satu sama lain maka tidak dapat menyelesaikan masalah [9]. Berikut adalah contoh pada graf lengkap yang memanfaatkan agen sebagai penghubung informasi. Pada Gambar 4.11 terlihat informasi state dari agen 1 bisa disampaikan ke agen 10 dengan melalui agen 4 kemudian 5 kemudian 10.



Gambar 4.11 Contoh Graf untuk Subbab 10

Sedemikian sehingga apabila semua informasi dari setiap agen terkirim ke setiap agen maka berapapun besar delaynya (*time independent*) akan tetap bisa stabil konsensus dengan respon sistem yang proporsi dengan gain sistem.

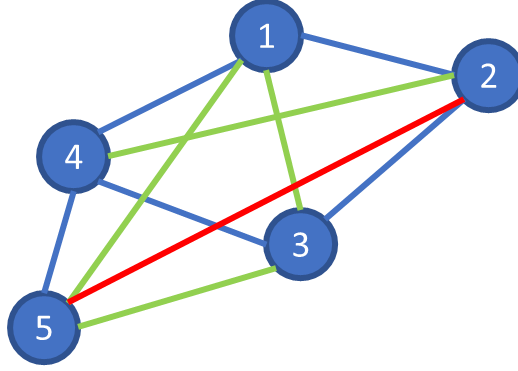
Berikut merupakan beberapa contoh metode mengkompensasi sepenuhnya delay:

4.10.1 *Walk Based*

Pada metode ini ide dasarnya adalah mengirimkan nilai state agen melalui perantara agen-agen yang lain. Informasi dari agen i ke agen j disampaikan melalui walk terdekat dari i ke j . Sedemikian sehingga masing-masing state perlu menyimpan agen yang lain dan apabila delay komunikasi antar agen adalah τ maka delay pengiriman informasi ke semua agen adalah $m\tau$ dengan m adalah besar diameter.

Gambar 4.12 memberikan contoh sederhana bagaimana metode ini bekerja. Pada mulanya agen terhubung melalui edge yang berwarna biru. Sehingga graf mulanya adalah $\mathcal{V} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{E} = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ dengan delay komunikasi sebesar τ . Maka informasi state dari agen dua dapat dikirimkan ke agen 4 melalui agen 1, begitu pula dari agen 1 ke agen 3, agen 1 ke agen 5 dan agen 3 ke agen 5 dengan delay komunikasi 2τ . Pada Gambar 4.12

direpresentasikan dalam edge warna hijau. Kemudian agen 2 mengirimkan informasi ke agen 5 melalui perantara agen 1 dan 4 dengan delay 3τ . Diameter pada graf ini adalah 3.



Gambar 4.12 Contoh Pengiriman Informasi Berdasarkan *Walk*

Karena graf merupakan graf lengkap dengan delay 3τ maka untuk graf secara umum dapat dibuat persamaan konsensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (5.34)$$

dan prediksi state

$$\hat{\mathbf{x}}(t + m\tau) = \mathbf{e}^{-2m\mathbf{L}}\mathbf{x}(t - m\tau) \quad (5.35)$$

untuk kasus khusus pada Gambar 4.12 memiliki nilai $m = 3$. Nilai $e^{-2m\mathbf{L}}$ dapat dibentuk karena masing-masing agen memiliki state dari semua agen yang ada. Adapun kelemahan dalam metode ini adalah masing-masing agen harus menyimpan state dari setiap agen atau memori masing-masing agen memiliki kompleksitas $O(N)$.

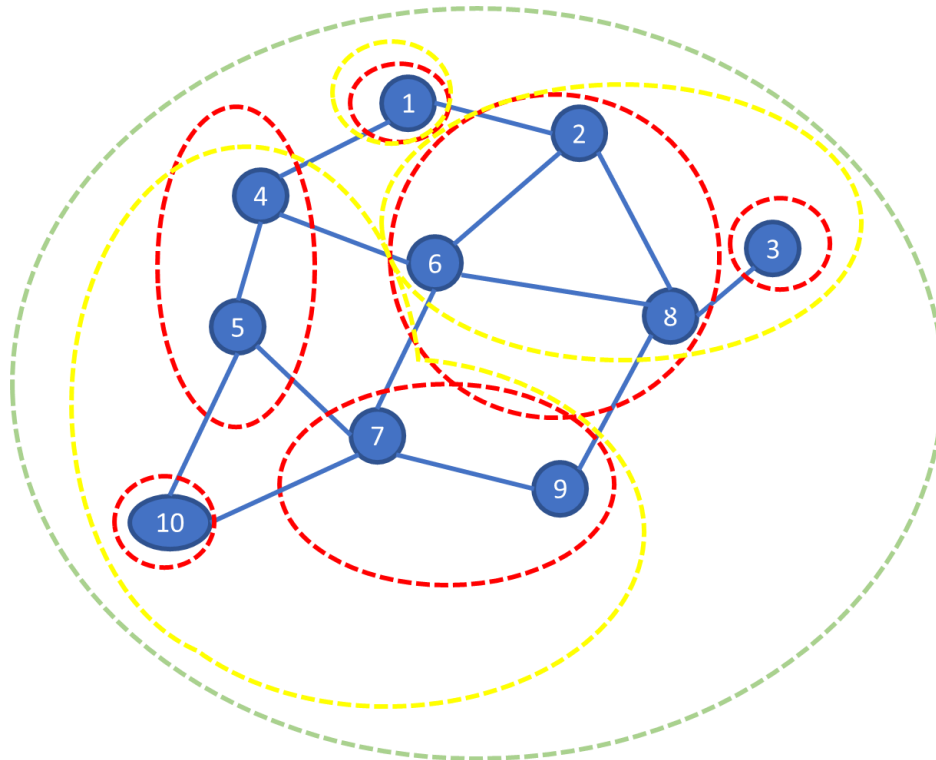
4.10.2 Sequential Predictive

Metode ini adalah kelanjutan dari apa yang dijelaskan pada Bab 3. Yaitu adanya subgraf komplit pada Bab 3 adalah mendapatkan state konsensus dari subgraf tersebut yaitu jumlahan dari setiap state yang ada pada subgraf komplit K_i .

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}, \quad i_1, i_2, i_3, \dots, i_k \in K_i$$

$$\frac{d(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{|V_i|} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{L}\mathbf{x} = 0$$

Sehingga nilai tersebut akan konstan apabila tidak ada gaya dari luar subgraf komplit tersebut. Kemudian dibuatlah metode bagaimana membuat dua atau lebih subgraf komplit bertukar consensus state sedemikian sehingga didapatkan state konsensus dari gabungan beberapa subgraf komplit. Berikut ilustrasi dengan Gambar 4.13 yang menggunakan graf yang sama dengan Gambar 4.11.



Gambar 4.13 Ilustrasi *Sequential Predictive*

Pada mulanya dilakukan partisi seperti pada Bab 3 yaitu didapatkan subgraf komplit, pada Gambar 4.10 dilingkari dengan warna merah. Kemudian beberapa subgraf komplit dengan lingkaran warna merah bergabung membentuk subgraf komplit dengan lingkaran warna kuning. Kemudian bergabung lagi membentuk lingkaran dengan warna hijau sehingga masing-masing agen mendapatkan consensus state dari semua agen. Sehingga apabila menggunakan matriks Laplacian \mathbf{L} dengan

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & N-1 \end{bmatrix}$$

maka

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{L}\theta} = \begin{bmatrix} A_N(\theta) & B_N(\theta) & \cdots & B_N(\theta) \\ B_N(\theta) & A_N(\theta) & \cdots & B_N(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(\theta) & B_N(\theta) & \cdots & B_N(\theta) \end{bmatrix}$$

karena $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = 0$ maka $\mathbf{e}^{-\mathbf{L}\theta}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$ maka

$$A_N(\theta) + (N-1)B_N(\theta) = 1$$

dan karena $\mathbf{L} \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix}$ maka $\mathbf{e}^{-\mathbf{L}\theta} \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{-N\theta} \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix}$ maka

$$(N-1)A_N(\theta) - (N-1)B_N(\theta) = e^{-N\theta}(N-1)$$

$$A_N(\theta) - B_N(\theta) = e^{-N\theta}$$

$$\Rightarrow A_N(\theta) = \frac{1 + (N-1)e^{-N\theta}}{N}, B_N(\theta) = \frac{1 - e^{-N\theta}}{N}$$

sehingga masing-masing agen i dapat menyatakan Persamaan (5.34) dan (5.35) dalam state konsensus $x_1 + \cdots + x_n$ dan state agen i sendiri yaitu x_i . Adapun dengan asumsi rata-rata penggabungan beberapa graf adalah dua graf misal \mathcal{G}_a dan \mathcal{G}_b bergabung menjadi \mathcal{G} maka agar konsensus state dari \mathcal{G}_a menjangkau semua agen pada \mathcal{G}_b diperlukan maksimal sebesar diameter dari \mathcal{G}_b atau sebaliknya. Maka apabila $f(\mathcal{G})$ menyatakan banyak walk yang diperlukan untuk mengirimkan informasi state konsensus ke semua agen pada \mathcal{G} maka

$$f(\mathcal{G}) \leq \max\{f(\mathcal{G}_a), f(\mathcal{G}_b)\} + \max\{\text{diam}(\mathcal{G}_a), \text{diam}(\mathcal{G}_b)\}$$

pada kasus terburuknya

$$\max\{f(\mathcal{G}_a), f(\mathcal{G}_b)\} + \max\{\text{diam}(\mathcal{G}_a), \text{diam}(\mathcal{G}_b)\} \leq f(\mathcal{G} - \{v\}) + \text{diam}\{G\} - 1$$

apabila dilakukan secara rekursif maka

$$f(\mathcal{G}) \leq 1 + 2 + 3 + \cdots + \text{diam}\{G\} - 1 = O(m^2)$$

dengan salah satu kesamaan terjadi saat graf berbentuk path dan penggabungan antar graf dilakukan 1 per satu. Sehingga apabila delay komunikasi adalah τ maka delay keseluruhan adalah $O(m^2\tau)$ dengan m diameter graf. Adapun apabila menggunakan algoritma *divide and conquer* nilai \mathcal{G}_a dan \mathcal{G}_b memiliki diameter yang sama dan \mathcal{G}_a maupun \mathcal{G}_b juga dipartisi dalam 2 graf dengan diameter yang sama dan seterusnya maka nilai $f(\mathcal{G})$ dapat diminimalkan hingga

$$f(\mathcal{G}) \leq \text{diam}(\mathcal{G}_a) + \text{diam}\left(\mathcal{G}_{\frac{a}{2}}\right) + \cdots + \text{diam}\left(\mathcal{G}_{\frac{a}{2^k}}\right) \leq 2\text{diam}(\mathcal{G}) = 2m$$

dan memori yang digunakan masing-masing agen adalah $O(\log N)$.

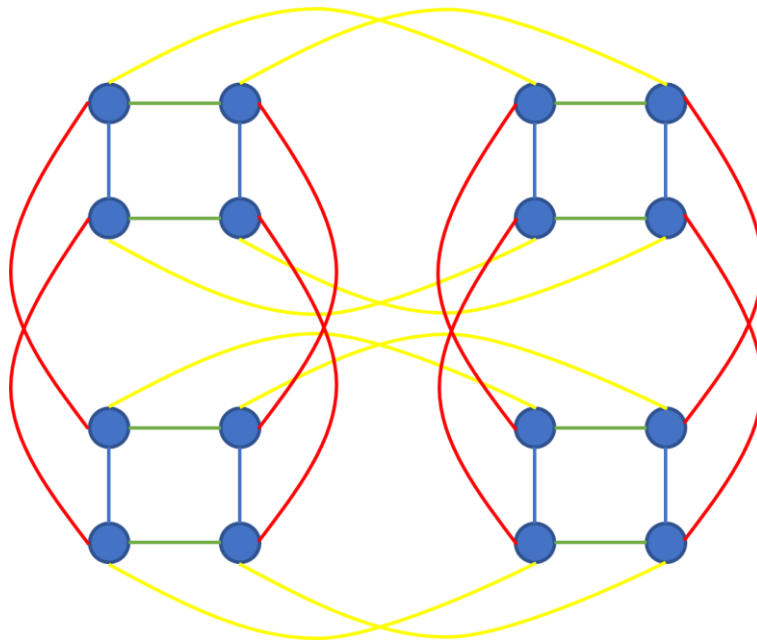
4.10.3 Graf Khusus

Pada Subbab 4.10.1 memiliki kelemahan memori $O(N)$ tetapi travel time $O(m\tau)$ dengan m adalah diameter sedangkan pada Subbab 4.10.2 memiliki kelebihan memori yang digunakan maksimal sebesar $O(\log N)$. Pada graf tertentu diameternya bisa sangat besar yaitu mendekati $N - 1$ ditemukan pada graf berbentuk path atau $\frac{N}{2}$ yaitu pada circle. Sehingga pada graf tertentu nilai m bisa sangat kecil. Pada bahasan ini akan dibahas graf yang merupakan Kronecker Product dari beberapa graf komplit.

$$\mathcal{G} = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_l$$

Karena K_i adalah graf lengkap maka diameternya adalah l dan $N = |K_1| \cdot |K_2| \dots |K_l| \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^l$ maka $l \leq \log_2 N$ atau $l = O(\log N)$. Algoritmanya pun lebih mudah yaitu untuk $j = l, l - 1, \dots, 1$ dengan \mathcal{G}_0 adalah sebuah vertex. Masing-masing subgraf berbentuk $\mathcal{G}_j = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_j$ dipartisi menjadi $|K_j|$ buah subgraf $\mathcal{G}_{j-1} = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_{j-1}$.

Adapun contoh kasus ini yaitu pada graf *hypercube* yang disajikan pada Gambar 4.14



Gambar 4.14 *Hypercube*

4.10.4 Pendekatan deret Mc Laurin pada Predictor

Perhatikan Persamaan (4.34) dan (4.35), sebenarnya dapat menggunakan pendekatan

$$\mathbf{e}^{-2\mathbf{L}\tau} = \mathbf{I} - 2\mathbf{L}\tau + \frac{4\mathbf{L}^2\tau^2}{2} - \dots \frac{(-2\mathbf{L}\tau)^n}{n!} = P(-2\mathbf{L}\tau)$$

Pendekatan tersebut bersifat naif sehingga akan dibuktikan jika $n < \infty$ maka sistem akan tidak stabil jika $\lambda\tau$ cukup besar dengan λ adalah eigenvalue dari \mathbf{L} . Perhatikan dari Persamaan (4.34) dan (4.35).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}P(-2\mathbf{L}\tau)\mathbf{x}(t - 2\tau)$$

kemudian, ambil persamaan Karakteristiknya didapatkan

$$\mathbf{I}s = -\mathbf{L}P(-2\mathbf{L}\tau)e^{-2s\tau}$$

gunakan dekomposisi terhadap eigenvector \mathbf{v} maka dengan Cayley-Hamilton karena $xP(-2x\tau)$ adalah polinomial maka

$$\Rightarrow s = -\lambda P(-2\lambda\tau)e^{-2s\tau} \Rightarrow 2s\tau e^{2s\tau} = -2\lambda\tau P(-2\lambda\tau)$$

dengan lemma pada Subbab 2.1.2 maka agar sistem stabil harus berlaku

$$\frac{\pi}{2} > -2\lambda\tau P(-2\lambda\tau) > 0$$

Padahal $-2\lambda\tau P(-2\lambda\tau)$ adalah polinom tidak mungkin terbatas di atas dan di bawah. Berikut adalah hasil perhitungan batas $\lambda\tau$ untuk beberapa nilai l agar sistem menjadi stabil

Tabel 4.1 Batas nilai $\lambda\tau$

l	$\sup \lambda\tau$	$\inf \lambda\tau$
$l = 1$	$\sup \lambda\tau = 0.5$	$\inf \lambda\tau = 0$
$l = 2$	$\sup \lambda\tau = 0.920343$	$\inf \lambda\tau = 0$
$l = 3$	$\sup \lambda\tau = 0.798036$	$\inf \lambda\tau = 0$
$l = 4$	$\sup \lambda\tau = 1.24175$	$\inf \lambda\tau = 0$
$l = 5$	$\sup \lambda\tau = 1.0903$	$\inf \lambda\tau = 0$
$l = 6$	$\sup \lambda\tau = 1.58543$	$\inf \lambda\tau = 0$

Maka terbukti untuk $n < \infty$ sistem akan tidak stabil jika $\lambda\tau$ cukup besar. Adapun dengan Teorema Cayley-Hamilton pula nilai $\mathbf{e}^{-2\mathbf{L}\tau}$ dapat dinyatakan dalam berhingga suku, lebih tepatnya N suku.

$$\mathbf{e}^{-2\mathbf{L}\tau} = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (-2\mathbf{L}\tau)^i$$

sehingga dapat direalisasikan menggunakan Subbab 4.10.1 namun sama-sama memiliki memori $O(N)$.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 5

KESIMPULAN

Permasalahan konsensus pada sebuah sistem multi agen yang memiliki tujuan untuk mendapatkan sebuah nilai yang sama untuk masing-masing agen. Permasalahan konsensus ini menjadi permasalahan mendasar pada kontrol kooperatif sistem multi agen seperti permasalahan flocking dan kontrol formasi. Sekelompok agen dihubungkan oleh sebuah sistem komunikasi sehingga dapat menyelesaikan suatu masalah. Masalah tersebut tidak dapat diselesaikan apabila ada agen yang tidak bekerja sama.

Hasil penelitian memberikan bukti analitik bahwa dengan adanya prediktor memberikan respon yang lebih cepat, batas delay yang lebih lama dan osilasi yang lebih rendah. Kemudian, penelitian ini juga memberikan pembuktian mengenai perilaku akar-akar persamaan Karakteristik sistem terhadap pemberian gain pada komponen terprediksi (tanpa delay) dan komponen tidak terprediksi (dengan delay). Pemberian gain yang lebih pada komponen terprediksi mempercepat respon sistem sedangkan pemberian gain yang lebih pada komponen tidak terprediksi malah bisa memperbesar osilasi kemudian membuat sistem menjadi tidak stabil. Bukti-bukti pemberian gain tersebut juga diperkuat dengan algoritma root-locus. Selain itu, robustness dari sistem dengan prediktor juga perlu diperhatikan. Pembuktian robustness dengan norm H_2 dan H_∞ menunjukkan prediktor tersebut robust terhadap input yang tidak terprediksi namun tidak robust terhadap perubahan parameter yang cukup besar pada sistem. Metode prediksi pada akhir penelitian dapat dikembangkan menjadi benar-benar menghilangkan efek dari delay (meniadakan komponen dengan delay) dengan cara memanipulasi graf agar menjadi graf komplit.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa:

1. Adanya prediktor memberikan batas kestabilan terhadap delay yang lebih besar daripada sistem tanpa preditor.
2. Perilaku pemberian gain k_α dan k_β telah dibuktikan dan dapat digambarkan melalui rootlocus.

3. Dari perilaku pemberian gain k_β , dapat dibuat formula untuk melakukan tuning K_β agar didapatkan *spectral abscissa* terkecil dan respon menjadi lebih cepat daripada tanpa dilakukan tuning K_β .
4. Prediktor dapat dikembangkan untuk mengkompensasi delay sepenuhnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. Zhou and Z. Lin, "Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays," *Automatica*, vol. 50, no. 2, pp. 452–464, 2014.
- [2] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [3] D. Tsubakino, M. Krstic, and T. R. Oliveira, "Exact prediktor feedbacks for multi-input LTI systems with distinct input delays," *Automatica*, vol. 71, pp. 143–150, 2016.
- [4] A. Ramirez and R. Sipahi, "Single-delay and multiple-delay proportional-retarded (PR) protocols for fast consensus in a large-scale network," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 64, no. 5, pp. 2142–2149, 2019.
- [5] M. Mesbahi and M. Egerstedt, "Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks," in *Princeton*, 2010, pp. 14–60.
- [6] S.-I. Niculescu and K. Gu, "Advances in Time-Delay Systems," in *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2004, pp. 31–43.
- [7] Fuzhen Zhang, "Matrix Theory," in *Springer New York Dordrecht Heidelberg London*, 2010, Theorem 8.12, pp. 274
- [8] A. Elahi, A. Alfi, and H. Modares, " H_∞ consensus control of discretetime multi-agent systems under network imperfections and external disturbance," *IEEE/CAA J. Autom. Sinica*, vol.6, no. 3, pp. 667–675, 2019.
- [9] S. Izumi, S. I. Azuma, and T. Sugie, "On a relation between graph signal processing and multi-agent consensus," in *Proc. 55th Conf. Decision and Control*, 2016, pp. 957–961.
- [10] W. Xing, Y. Zhao, and H. R. Karimi, "Convergence analysis on multiAUV systems with leader-follower architecture," *IEEE Access*, vol. 5, pp. 853–868, 2017.
- [11] J. Ni and L. Liu, "Fixed-time Leader-following Consensus for Second-order Multi-agent Systems with Input Delay," *IEEE Trans. on Industr. Electr.* vol. 64, no 11, pp. 8635-8646, 2017.
- [12] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, G. J. Pappas. Stable flocking of mobile agents. Part I: fixed topology. *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, USA, 2003: 2010–2015

- [13] Q. Liu, "Pseudo-Predictor Feedback Control for Multiagent Systems with Both State and Input Delays", *IEEE/CAA J. Auto. Sinica*, vol. 8, no. 11, pp. 1827-1836, 2021
- [14] J. K. Hale. Theory of functional differential equations. 2nd ed. Berlin: *Springer*, 1977: 11–3