TUGAS AKHIR – SM141501

TEOREMA TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKTIF LEMAH DAN PEMETAAN KANNAN LEMAH PADA RUANG METRIK PARSIAL

ANNISA RAHMITA SOEMARSONO
NRP. 1212 100 029

Dosen Pembimbing :
1. Sunarsini, S.Si, M.Si
2. Drs. Sadjidon, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT– SM141501

FIXED POINT THEOREM OF WEAKLY CONTRACTIVE MAPPING AND WEAKLY KANNAN MAPPING IN PARTIAL METRIC SPACE

ANNISA RAHMITA SOEMARSONO
NRP. 1212 100 029

Supervisors :
1. Sunarsini, S.Si, M.Si
2. Drs. Sadjidon, M.Si

Department of Mathematic
Faculty of Mathematics and Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

TEOREMA TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKTIF LEMAH DAN PEMETAAN KANNAN LEMAH PADA RUANG METRIK PARSIAL

FIXED POINT THEOREM OF WEAKLY CONTRACTIVE MAPPING AND WEAKLY KANNAN MAPPING IN PARTIAL METRIC SPACE

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ANNISA RAHMITA SOEMARSONO
NRP. 1212 100 029

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Sadjidon, M.Si	Sunarsini, S.Si, M.Si
NIP. 19630909 198903 1 005	NIP. 19691004 199402 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 26 Januari 2016

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul

"TEOREMA TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKTIF LEMAH DAN PEMETAAN KANNAN LEMAH PADA RUANG METRIK PARSIAL".

Tugas akhir ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains pada bidang studi Analisis dan Aljabar Program Strata-1 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan dan penulisan tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sangat berterimakasih kepada pihak-pihak tersebut, antara lain:

1. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si dan Bapak Drs. Sadjidon, M.Si selaku dosen pembimbing tugas akhir ini yang senantiasa memberi bimbingan, saran dan motivasi dalam penyelesaian tugas akhir ini.
3. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku Kepala Program Studi S-1 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember serta Mas Ali yang selalu memberi informasi mengenai tugas akhir di jurusan Matematika FMIPA ITS.

4. Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku dosen wali penulis selama berkuliah di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen penguji tugas akhir ini yang telah memberi kritik dan saran bersifat membangun dalam penyelesaian tugas akhir ini.
6. Seluruh dosen dan civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.
7. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan ilmu kepada penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Terdapat banyak kekurangan pada tugas akhir ini, sehingga kritik dan saran yang bersifat membangun diperlukan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat memberi manfaat bagi penulis dan para pembaca dalam melakukan penelitian-penelitian selanjutnya.

Surabaya, 26 Januari 2016

Penulis

Special Thank's To

Pada penyusunan tugas akhir ini, dukungan dan doa yang luar biasa diberikan oleh orang-orang terdekat penulis. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Enny Sukesi dan A. Soemarsono (alm) selaku kedua orang tua penulis yang senantiasa mendoakan dan memberi dukungan moril yang begitu luar biasa kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan sebaik-baiknya.
2. Kedua adik penulis, Fairuz Fadilah Soemarsono dan Dervish Hizzur Rahman, yang menjadi motivasi bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Teman-teman seperjuangan penulis, Auda Nuril Zazilah dan Aditya Putra Pratama yang selalu berbagi ilmu dan saling memberi dukungan.
4. Mia, Izza, Indah, Firoh, Yuni, Ninid, Adhel, Cendy, Jupe dan Neny yang merupakan teman-teman dekat penulis di bangku kuliah yang selalu memberi semangat tak henti-hentinya kepada penulis untuk segera menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Sahabat-sahabat penulis, Rinca, Debby dan Sela yang selalu memberikan doa dan dukungannya kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Teman-teman seperjuangan wisuda 113 yang saling mendukung, mendoakan, dan memberikan motivasi kepada penulis.
7. Teman-teman MAT12IKS, PELITA SAINSTEK dan seluruh mahasiswa matematika 2012 yang selalu mendoakan penulis untuk wisuda 113.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

d	Metrik
p	Metrik parsial
d^p	Metrik yang dibangun oleh metrik parsial
p^d	Metrik parsial yang dibangun oleh metrik
$f, \bar{\alpha}$	Pemetaan atau fungsi
X	Himpunan tak kosong
c	Konstanta (merupakan elemen dari himpunan bilangan real)
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan real tak negatif
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\in$	Elemen
$\subset$	Subset (himpunan bagian)
$\{x_n\}$	Barisan pada himpunan bilangan real
sup	Supremum (batas atas terkecil)
inf	Infimum (batas bawah terbesar)
max	Maksimum
$\lim_{n\to\infty}$	Limit n mendekati ∞
$\lim_{n,m\to\infty}$	Limit n, m mendekati ∞
$\sum$	Sigma (jumlahan dari bilangan-bilangan)

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai hal-hal yang menjadi latar belakang tugas akhir, serta diperoleh rumusan masalah dan batasan masalah berdasarkan latar belakang tersebut. Pada bab ini, ditunjukkan pula tujuan dan manfaat dari tugas akhir serta sistematika penulisan tugas akhir.

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu bidang yang berpengaruh dalam perkembangan ilmu pengetahuan di dunia. Banyak sekali ilmu matematika yang bermanfaat bagi kehidupan manusia. Salah satu ilmu matematika yang sering digunakan sebagai bahan penelitian adalah analisis fungsional. Analisis fungsional mengalami perluasan, seperti ruang vektor, ruang norm, dan ruang metrik. Perluasan analisis fungsional pada konsep ruang metrik telah banyak dikembangkan, seperti ruang quasi metrik, ruang pseudo metrik, ruang ultrametrik, ruang metrik terurut, dan ruang metrik parsial. Karena telah mengalami perluasan-perluasan tersebut, analisis fungsional menjadi salah satu ilmu matematika yang menarik untuk dikaji lebih dalam.

Ruang metrik parsial merupakan salah satu perluasan dari konsep ruang metrik. Salah satu ilmuwan komputer yang pertama kali mengenalkan konsep jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol atau yang lebih dikenal dengan konsep ruang metrik parsial adalah Matthews. Pada tahun 1994, lewat tulisannya yang berjudul "Partial Metric Topology" [4], dia menjabarkan hasil penelitiannya mengenai topologi ruang metrik parsial. Tidak hanya itu, di dalam penelitiannya, dia juga memperluas prinsip kontraksi Banach untuk menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial. Hasil penelitiannya tersebut dijadikan pedoman oleh peneliti-peneliti selanjutnya dalam mengembangkan konsep ruang metrik parsial. Beberapa peneliti yang melakukan penelitian dengan berpedoman pada hasil penelitian Matthews adalah Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero [2]. Mereka menyelidiki bahwa pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik dapat dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial. Adapun beberapa tujuan yang menjadi latar belakang terbentuknya konsep dasar ruang metrik parsial antara lain, untuk memperoleh model matematika dalam teori komputasi dan memodifikasi prinsip kontraksi Banach serta sebagai bahan kajian dalam menerjemahkan notasi-notasi pada jaringan data flow (diagram) [1].

Salah satu objek yang dikaji pada ruang metrik parsial adalah teorema titik tetap. Perkembangan teorema titik tetap semakin meningkat dengan adanya penelitian-penelitian yang dilakukan oleh para ilmuwan. Teorema titik tetap tidak hanya berkembang secara analisa saja namun juga pada terapannya. Teorema titik tetap biasanya diterapkan dalam permasalahan persamaan diferensial, persamaan matriks, dan permasalahan nonlinier. Pada ruang metrik parsial, teorema titik tetap menjadi objek yang dikaji untuk menerjemahkan notasi-notasi pada jaringan data flow (diagram) dan menunjukkan bahwa prinsip kontraksi Banach dapat digeneralisasi pada ruang metrik parsial untuk aplikasi dalam verifikasi program [1].

Penelitian-penelitian di atas yang berkaitan dengan perkembangan teorema titik tetap melalui perluasan prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik parsial, serta penerapan teorema titik tetap dalam kasus ruang metrik parsial itulah yang menjadikan latar belakang dari penulisan tugas akhir ini.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas pada tugas akhir ini berdasarkan latar belakang di atas adalah bagaimana keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini, yaitu hanya membahas tentang teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini berdasarkan rumusan-rumusan masalah di atas adalah menyelidiki keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial dengan menggunakan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat-manfaat yang dapat diambil dari tugas akhir ini sebagai berikut :

1. Memperluas pengetahuan tentang konsep ruang metrik parsial dan teorema-teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.
2. Sebagai bahan acuan dalam melakukan penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan perluasan konsep

ruang metrik parsial dan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.

3. Sebagai landasan dalam pembuatan aplikasi pada bidang matematika maupun di luar bidang matematika yang membutuhkan konsep ruang metrik parsial dan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini disusun atas lima bab yang meliputi, pendahuluan, tinjauan pustaka, metode penelitian, analisis dan pembahasan serta penutup. Uraian dari masing-masing bab dijelaskan di bawah ini.

1. BAB I PENDAHUAN

   Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan tugas akhir.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Pada bab ini dijelaskan tentang penelitian sebelumnya yang berkaitan tentang konsep ruang metrik parsial dan beberapa pemetaan pada ruang metrik parsial. Ditunjukkan pula beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial yang meliputi definisi ruang metrik dan ruang metrik parsial, definisi konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta definisi ruang metrik parsial lengkap. Pada bab ini juga diberikan definisi pemetaan kontraktif, pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik dan ruang metrik parsial serta beberapa teorema titik tetap, meliputi teorema titik tetap pemetaan kontraktif, teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan teorema titik tetap pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik serta teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tentang tahap-tahap dalam melakukan penelitian berkaitan dengan tugas akhir ini yang meliputi studi literatur, konstruksi terkait analogi metrik dan metrik parsial, kajian teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik, penyelidikan tentang keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial serta penarikan kesimpulan dan pembukuan tugas akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan tentang dua teorema yang berkaitan dengan analogi antara metrik dan metrik parsial. Dibuktikan pula teorema yang menunjukkan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik dan teorema yang menunjukkan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik. Selain itu, diuraikan mengenai pembuktian teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial dengan menggunakan beberapa lemma. Diberikan juga contoh dari teorema titik tetap tersebut untuk mendapatkan titik tetap yang tunggal dari pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

5. BAB V PENUTUP

Pada bab ini disajikan beberapa kesimpulan terkait ruang metrik parsial, seperti pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial dan teorema titik tetap kedua pemetaan tersebut pada ruang metrik parsial. Diberikan pula beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, ditunjukkan beberapa hal yang mendukung penyelesaian tugas akhir, meliputi penelitian-penelitian terdahulu yang dilakukan oleh beberapa ilmuwan matematika terkait konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial. Ditunjukkan pula definisi-definisi yang berkaitan dengan ruang metrik dan ruang metrik parsial dan beberapa teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik dan ruang metrik parsial.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya di beberapa dekade terakhir, teorema titik tetap telah menjadi bahan kajian yang berkaitan dengan fenomena nonlinier. Secara khusus, teorema titik tetap dan hasilnya dapat dikembangkan secara analisis, terapan, topologi dan geometri. Teorema dasar yang digunakan pada teorema titik tetap adalah prinsip kontraksi Banach. Dalam lima puluh tahun terakhir, beberapa peneliti melakukan penelitian pada teorema titik tetap dengan memperluas prinsip kontraksi Banach [1].

Pada tahun 1978, Dugundji dan Granas [5], lewat tulisannya yang berjudul "Weakly Contractive Maps and Elementary Domain", telah memperluas teorema Banach ke dalam pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik. Dari definisi pemetaan kontraktif, mereka memperluas dalam bentuk pemetaan kontraktif lemah. Dari hasil penyelidikan yang mereka lakukan terkait keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik, diperoleh hasil yaitu jika f merupakan pemetaan kontraktif lemah maka f memiliki titik tetap yang tunggal.

Kemudian, pada tahun 1994, lewat tulisannya yang berjudul “Partial Metric Topology”, Matthews [4] (seorang ilmuwan komputer) memperkenalkan konsep jarak titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol atau yang lebih dikenal dengan konsep ruang metrik parsial sebagai bagian dari penelitian notasi jaringan dataflow dan menunjukkan bahwa prinsip kontraksi Banach dapat digeneralisasi untuk konteks ruang metrik parsial sebagai aplikasi dalam verifikasi program. Dari hasil topologi ruang metrik parsial yang dilakukan oleh Matthews, diperoleh hasil yaitu jika f merupakan pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial maka f memiliki titik tetap yang tunggal. Kemudian, dari hasil penelitian Matthews, banyak peneliti yang mempelajari teorema titik tetap pada ruang metrik parsial. Salah satu peneliti yang mempelajari teorema titik tetap pada ruang metrik parsial adalah Rus.

Pada tahun 2008, Rus menyelidiki masalah-masalah dasar yang berkaitan dengan teorema titik tetap pada ruang metrik yang dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial, meliputi keberadaan titik tetap, ketunggalan titik tetap dan konvergensi barisan [1]. Selanjutnya, pada tahun 2010, Ruiz dan Antonio [7] memperluas prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik yang digagas oleh Kannan. Berpedoman pada hasil penelitian yang dilakukan oleh Dugundji dan Granas, mereka memperluas teorema Kannan ke dalam pemetaan Kannan lemah. Dari hasil penyelidikan yang mereka lakukan terkait keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik, diperoleh hasil yaitu jika f merupakan pemetaan Kannan lemah maka f memiliki titik tetap yang tunggal.

Kemudian, berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Matthews, Dugundji dan Granas serta Ruiz, pada tahun 2012, Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero [2] melakukan penelitian untuk menyelidiki bahwa pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik dapat dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial. Dari hasil penyelidikan mereka, didefinisikan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

2.2 Ruang Metrik

Pada sub bab ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik yang dibutuhkan dalam penyelesaian tugas akhir, meliputi definisi ruang metrik dan definisi beberapa pemetaan kontraktif pada ruang metrik. Diberikan pula contoh dari metrik.

Terlebih dahulu diberikan definisi metrik dan ruang metrik. Definisi berikut ini diperlukan untuk menunjukkan perbedaan antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Melalui definisi ini, dapat diperoleh analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial.

Definisi 2.2.1. [3] *Diberikan himpunan tak kosong* X. *Fungsi* $d: X \text{ x } X \to \mathbb{R}$ *dikatakan metrik pada* X *jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi*

(D1) $d(x,y) \geq 0$;

(D2) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$;

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$;

(D4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Pasangan (X, d) *dikatakan sebagai ruang metrik.*

Contoh 2.2.2. [3] Diberikan himpunan $\mathbb{R}$. Fungsi $d: \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ karena fungsi d memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, seperti pada Definisi 2.2.1. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

(D1) Didefinisikan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Karena nilai mutlak selalu bernilai tak negatif, maka $d(x, y) = |x - y| \geq 0$.

(D2) ($\Longrightarrow$)
Jika $d(x, y) = |x - y| = 0$ maka terdapat dua kondisi, yaitu $x - y = 0$ dan $-(x - y) = y - x = 0$. Dari dua kondisi tersebut, terlihat bahwa $x = y$.

($\Longleftarrow$)
Jika $x = y$, maka $d(x, y) = |x - y| = |x - x| = 0$.

(D3) Ditunjukkan bahwa $d(x, y) = d(y, x)$.
$d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$.

(D4)
$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Selanjutnya, ditunjukkan beberapa definisi pemetaan kontraktif pada ruang metrik yang meliputi, definisi pemetaan kontraktif, pemetaan kontraktif lemah, pemetaan Kannan dan pemetaan Kannan lemah. Pemetaan-pemetaan tersebut menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap.

Definisi 2.2.3. [3] *Diberikan* (X, d) *ruang metrik. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ *sedemikian hingga* $d(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha} d(x, y)$ *untuk setiap* $x, y \in X$.

Definisi 2.2.4. [5] *Diberikan* (X, d) *ruang metrik. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$$

dan

$$d(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x, y) d(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.2.5. [6] *Diberikan* (X, d) *ruang metrik. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan Kannan jika terdapat* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ *sedemikian hingga*

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.2.6. [7] *Diberikan* (X, d) *ruang metrik. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$$

dan

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

2.3 Ruang Metrik Parsial

Pada sub bab ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik parsial yang meliputi, definisi ruang metrik parsial beserta contoh metrik parsial, konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial serta definisi ruang metrik parsial lengkap. Diberikan pula definisi pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

Terlebih dahulu diberikan definisi metrik parsial dan ruang metrik parsial. Definisi berikut ini diperlukan untuk menunjukkan perbedaan antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Melalui definisi ini, dapat diperoleh analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial.

Definisi 2.3.1. [4] *Diberikan himpunan tak kosong* X. *Fungsi* $p: X \text{ x } X \rightarrow \mathbb{R}^+$ *dikatakan metrik parsial pada* X *jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi*

(P1) $x = y$ *jika dan hanya jika* $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$;

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$;

(P4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Pasangan (X,p) *dikatakan sebagai ruang metrik parsial.*

Contoh 2.3.2. [2] Diberikan himpunan $\mathbb{R}^+$. Fungsi $p: \mathbb{R}^+ \text{x } \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$ merupakan metrik parsial pada $\mathbb{R}^+$ karena fungsi p memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, seperti pada Definisi 2.3.1.

(P1) $(\Longrightarrow)$

Jika $x = y$, maka $p(x,y) = max\{x,y\} = max\{x,x\} = p(x,x)$ dan $p(x,y) = max\{x,y\} = max\{y,y\} = p(y,y)$. Hal ini menunjukkan bahwa $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$.

$(\Longleftarrow)$

Jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$, maka diperoleh $p(x,y) = p(x,x) = max\{x,x\} = x$ dan $p(x,y) = p(y,y) = max\{y,y\} = y$. Hal ini menunjukkan bahwa $x = y$.

(P2) Untuk menunjukkan bahwa p memenuhi (P2), maka dibagi menjadi dua kondisi, yaitu untuk $x \geq y$ dan $x < y$. Telah diketahui bahwa $p(x,x) = max\{x,x\} = x$. Untuk $x \geq y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = x$, sehingga diperoleh $p(x,x) = p(x,y)$ dan untuk $x < y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = y$, sehingga diperoleh $p(x,x) < p(x,y)$. Karena p memenuhi dua kondisi tersebut, maka $p(x,x) \leq p(x,y)$.

(P3) Ditunjukkan bahwa $p(x,y) = p(y,x)$.

$p(x,y) = max\{x,y\} = max\{y,x\} = p(y,x)$.

(P4) Untuk menunjukkan bahwa p memenuhi (P4), maka dibagi menjadi empat kondisi, yaitu

1) $x \geq z \geq y$

   Untuk $x \geq z$, $p(x,z) = max\{x,z\} = x$. Untuk $x \geq y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = x$. Untuk $z \geq y$, $p(y,z) = max\{y,z\} = z$. Karena $z \geq y$, maka diperoleh $z - y \geq 0$, sehingga $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$.

2) $x \geq z$ dan $z < y$

Untuk $x \geq z$, $p(x,z) = max\{x,z\} = x$. Untuk $z < y$, $p(y,z) = max\{y,z\} = y$. Karena $x \geq z$ dan $z < y$, maka diperoleh $x \geq y$ atau $x < y$. Untuk $x \geq y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = x$ sehingga diperoleh $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$. Untuk $x < y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = y$ sehingga diperoleh juga $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$.

3) $x < z$ dan $z \geq y$

Untuk $x < z$, $p(x,z) = max\{x,z\} = z$. Untuk $z \geq y$, $p(y,z) = max\{y,z\} = z$. Karena $x < z$ dan $z \geq y$, maka diperoleh $x \geq y$ atau $x < y$. Untuk $x \geq y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = x$ sehingga diperoleh $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$. Untuk $x < y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = y$ sehingga diperoleh juga $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$.

4) $x < z < y$

Untuk $x < z$, $p(x,z) = max\{x,z\} = z$. Untuk $x < y$, $p(x,y) = max\{x,y\} = y$. Untuk $z < y$, $p(y,z) = max\{y,z\} = y$, sehingga $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ dengan $p(y,y) = max\{y,y\} = y$.

Kemudian, diberikan definisi yang berkaitan dengan konvergensi barisan pada ruang metrik parsial, barisan Cauchy pada ruang metrik parsial serta ruang metrik parsial yang lengkap yang diperlukan dalam pembuktian teorema titik tetap. Teorema titik tetap hanya dapat digunakan pada ruang metrik parsial yang lengkap.

Definisi 2.3.3. [4] *Jika diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial dan* $\{x_n\}$ *adalah barisan pada* X *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$, *maka*

(i) $\{x_n\}$ *konvergen ke titik* $x \in X$ *pada* X *jika dan hanya jika* $p(x, x) = \lim_{n \to \infty} p(x_n, x)$;

(ii) $\{x_n\}$ *dikatakan barisan Cauchy pada* (X, p) *jika* $\lim_{n,m \to \infty} p(x_n, x_m)$ *ada dan berhingga;*

(iii) (X, p) *dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy* $\{x_n\}$ *pada* X *konvergen ke titik* $x \in X$ *sehingga* $p(x, x) = \lim_{n,m \to \infty} p(x_n, x_m)$.

Selanjutnya, diberikan definisi pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

Definisi 2.3.4. [4] *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ *sedemikian hingga* $p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha} p(x, y)$ *untuk setiap* $x, y \in X$.

2.4 Teorema Titik Tetap

Pada sub bab ini, diberikan beberapa teorema titik tetap. Pemetaan $f: X \to X$ dikatakan memiliki titik tetap yang tunggal jika $x = f(x)$ untuk $x \in X$. Selanjutnya, diberikan beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik lengkap yang meliputi, teorema titik tetap pemetaan kontraktif, teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan teorema titik tetap pemetaan Kannan lemah. Diberikan pula teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial lengkap.

Terlebih dahulu diberikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif dan pemetaan Kannan pada ruang metrik lengkap, serta teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial lengkap.

Teorema 2.4.1. [3] *Diberikan* (X,d) *ruang metrik lengkap. Jika* $f: X \to X$ *adalah pemetaan kontraktif, maka* f *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Teorema 2.4.2. [6] *Diberikan* (X,d) *ruang metrik lengkap. Jika* $f: X \to X$ *adalah pemetaan Kannan, maka* f *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Teorema 2.4.3. [4] *Diberikan* (X,p) *ruang metrik parsial lengkap. Jika* $f: X \to X$ *adalah pemetaan kontraktif, maka* f *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Kemudian, diberikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik lengkap dan teorema titik tetap pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik lengkap. Kedua pemetaan tersebut merupakan pengembangan dari pemetaan kontraktif pada ruang metrik lengkap.

Teorema 2.4.4. [5] *Diberikan* (X,d) *ruang metrik lengkap. Jika* $f: X \to X$ *adalah pemetaan kontraktif lemah, maka* f *memiliki titik tetap yang tunggal* x^* *dan* $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergen ke* x^* *untuk setiap* $x \in X$.

Teorema 2.4.5. [7] *Diberikan* (X, d) *ruang metrik lengkap. Jika* $f: X \rightarrow X$ *adalah pemetaan Kannan lemah, maka* f *memiliki titik tetap yang tunggal* x^* *dan* $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergen ke* x^* *untuk setiap* $x \in X$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai langkah-langkah yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir yang meliputi beberapa tahap, yaitu studi literatur, proses konstruksi terkait analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial, penyelidikan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial serta penarikan kesimpulan dan penyusunan tugas akhir. Keempat tahap tersebut dijelaskan lebih rinci melalui keempat sub bab di bawah ini.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini, melalui beberapa literatur tugas akhir, seperti buku, jurnal dan hasil penelitian-penelitian sebelumnya yang tertera pada daftar pustaka, dipelajari mengenai konsep ruang metrik yang meliputi definisi ruang metrik dan definisi beberapa pemetaan kontraktif pada ruang metrik. Diberikan pula contoh metrik. Selain itu, dipelajari juga mengenai konsep ruang metrik parsial yang meliputi, definisi ruang metrik parsial, definisi konvergensi barisan pada ruang metrik parsial dan definisi ruang metrik parsial lengkap. Diberikan pula definisi beberapa pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial serta contoh metrik parsial.

Pada tahap ini, dipelajari juga mengenai teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik serta dipelajari proses konstruksi teorema titik tetap tersebut ke dalam konsep ruang metrik parsial. Kemudian, dipelajari tentang pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik. Dipelajari juga tentang pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Selanjutnya, dipelajari mengenai cara memperluas pemetaan kontraktif menjadi pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan menjadi pemetaan Kannan lemah. Dipelajari pula tentang teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik lengkap.

3.2 Konstruksi Analogi antara Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial

Pada tahap ini, diselidiki analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Dengan mengkonstruksi fungsi yang dibangun oleh metrik parsial, diperoleh bahwa fungsi tersebut merupakan metrik. Dari hasil pengkonstruksian tersebut, terlihat bahwa metrik parsial dapat membangun metrik. Proses pengkonstruksian tersebut tertuang pada Teorema 4.1.1 dan Teorema 4.1.4.

Selain itu, diselidiki hubungan antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap. Diselidiki pula hubungan antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial. Hasil penyelidikan tersebut dapat diterapkan pada pembuktian teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial lengkap, seperti pada pembuktian Teorema 4.3.5.

Pada tahap ini juga dipelajari mengenai cara mengkonstruksi teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik lengkap ke dalam ruang metrik parsial lengkap, yaitu dengan menggunakan analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial.

3.3 Penyelidikan Keberadaan dan Ketunggalan Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pada tahap ini, diselidiki keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial lengkap dengan menggunakan teorema titik tetap. Sebelum melakukan kajian teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial lengkap, dipastikan terlebih dahulu bahwa pemetaan yang dikaji merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, sebab tidak semua pemetaan yang bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik juga bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial. Begitu juga untuk kasus pemetaan Kannan lemah. Hal ini ditunjukkan pada Contoh 4.2.2 dan Contoh 4.2.3. Pada Contoh 4.2.2 dan Contoh 4.2.3, ditunjukkan pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik. Sedangkan pada Contoh 4.2.5 dan Contoh 4.2.6, ditunjukkan pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Setelah memastikan bahwa pemetaan yang dikaji merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, selanjutnya dibuktikan bahwa pemetaan tersebut memiliki titik tetap tunggal dengan menggunakan Teorema 4.3.5. Sebelumnya, ditunjukkan beberapa lemma yang mendukung dalam proses pembuktian Teorema 4.3.5, yaitu Lemma 4.3.1, Lemma 4.3.2, Lemma 4.3.3 dan Lemma 4.3.4. Setelah membuktikan Teorema 4.3.5, selanjutnya diberikan contoh dari Teorema 4.3.5 yang tertuang pada Contoh 4.3.6. Pada contoh tersebut, didefinisikan pemetaan pada ruang metrik parsial lengkap. Pemetaan tersebut merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah. Dengan menggunakan Teorema 4.3.5, diperoleh titik tetap yang tunggal dari pemetaan tersebut.

3.4 Penarikan Kesimpulan dan Penyusunan Tugas Akhir

Pada tahap ini, diperoleh beberapa kesimpulan terkait analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial serta penyelidikan tentang pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Selain itu, diperoleh kesimpulan dari penyelidikan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial lengkap dengan menggunakan teorema titik tetap. Pada tahap ini, dilakukan pula penyusunan terhadap tugas akhir.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan mengenai analogi ruang metrik dan ruang metrik parsial. Selain itu, ditunjukkan pula teorema yang menunjukkan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik dan teorema yang menunjukkan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik. Dibuktikan pula teorema titik tetap pada ruang metrik parsial yang diperoleh dari definisi pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik, serta diberikan contoh dari teorema titik tetap tersebut.

4.1 Ruang Metrik Parsial

Ruang metrik parsial merupakan salah satu pengembangan dari konsep ruang metrik. Beberapa konsep pada ruang metrik, seperti yang berkaitan dengan konvergensi barisan pada ruang metrik, barisan Cauchy pada ruang metrik serta definisi ruang metrik lengkap dapat dianalogikan ke dalam ruang metrik parsial. Pengertian metrik dan metrik parsial sedikit berbeda, seperti yang telah dijelaskan pada Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.3.1. Konsep ruang metrik parsial yang digagas oleh Matthews [4] memberikan pernyataan bahwa jarak titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol. Hal inilah yang berbeda dengan konsep ruang metrik, bahwa jarak titik ke dirinya sendiri selalu bernilai nol.

Karena terdapat perbedaan antara konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial, maka berdasarkan [4], dapat dibentuk analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Melalui pengkonstruksian fungsi d^p yang dibangun dari metrik parsial p, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 4.1.1. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial. Jika fungsi* $d^p: X \times X \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$d^p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \tag{4.1}$$

untuk setiap $x, y \in X$, *maka* d^p *adalah metrik pada* X.

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.2.1, jika d^p adalah metrik pada X maka d^p memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in X$. Selanjutnya, dibuktikan bahwa d^p memenuhi keempat syarat tersebut.

(D1) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) dan (P2) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= p(x, y) - p(x, x) + p(x, y) - p(y, y) \\ &= p(x, y) - p(x, x) + p(y, x) - p(y, y) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Jadi, $d^p(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, artinya d^p memenuhi (D1).

(D2) $(\Longrightarrow)$

Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) dan (P2) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(x, x) \\ &= p(x, y) - p(x, x) + p(x, y) - p(y, y) \end{aligned}$$

$$= p(x,y) - p(x,x) + p(y,x) - p(y,y)$$
$$= 0$$

untuk setiap $x, y \in X$, diperoleh

$$p(x,y) - p(x,x) = 0$$

dan

$$p(y,x) - p(y,y) = 0,$$

artinya $p(x,y) = p(x,x)$ dan $p(y,x) = p(y,y)$ sehingga $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Karena p adalah metrik parsial pada X maka p juga memenuhi (P1) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga diperoleh $x = y$.

($\Leftarrow$)
Jika $x = y$, maka

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari kedua bukti tersebut maka d^p memenuhi (D2).

(D3) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\ &= d^p(y,x) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka d^p memenuhi (D3).

(D4) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P4) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$
\begin{aligned}
d^p(x,z) &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) \\
&\leq 2\big(p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\big) \\
&\quad -p(x,x) - p(z,z) \\
&= 2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y) \\
&\quad -p(x,x) - p(z,z) \\
&= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&\quad +2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z) \\
&= d^p(x,y) + d^p(y,z)
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, maka d^p memenuhi (D4).

Terbukti bahwa d^p memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in X$, maka d^p adalah metrik pada X. ■

Dari Teorema 4.1.1, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X dan d^p adalah metrik pada X. Dengan menggunakan p dan d^p, dibentuk lemma-lemma yang menunjukkan analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta analogi antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap.

Lemma 4.1.2. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial dan* (X, d^p) *ruang metrik, dengan* d^p *adalah metrik yang didefinisikan pada* (4.1). *Barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *adalah barisan Cauchy pada* (X, p) *jika dan hanya jika* $\{x_n\}$ *adalah barisan Cauchy pada* (X, d^p).

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p), maka sesuai Definisi 2.3.3 (ii), $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga. Karena

(X, d^p) adalah ruang metrik dengan d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (4.1), maka

$$\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) = 2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$$

atau

$$2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) + \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) + \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m).$$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, maka $2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ juga ada dan berhingga, sehingga $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) + \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) + \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ juga ada dan berhingga. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, d^p).

$(\Leftarrow)$

Karena d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (4.1), maka jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), diperoleh

$$\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) = 2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$$

ada dan berhingga. Sehingga, jelas bahwa $2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ ada dan berhingga. Karena $2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, maka $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, p). ∎

Lemma 4.1.3 *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial dan* (X, d^p) *ruang metrik, dengan* d^p *adalah metrik yang didefinisikan pada* (4.1). (X, p) *dikatakan lengkap jika dan hanya jika* (X, d^p) *lengkap. Sehingga, jika diberikan barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pada* (X, p) *maka untuk* $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$ *jika dan hanya jika* $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Jika (X, p) merupakan ruang metrik parsial lengkap, maka sesuai Definisi 2.3.3 (iii), setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, p) konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, d^p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik $x \in X$, artinya (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka $d^p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$.

$(\Leftarrow)$

Jika (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap dengan d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, d^p) konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $d^p(x, x) = \lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m)$. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka $d^p(x,x) = 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n,x) = 0$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X,d^p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X,p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik $x \in X$, artinya (X,p) adalah ruang metrik parsial lengkap. Karena (X,p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Definisi 2.3.3 (iii) diperoleh bahwa $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$. ■

Selanjutnya, melalui pengkonstruksian fungsi p^d yang dibangun dari metrik d, diperoleh bahwa fungsi p^d merupakan metrik parsial pada X, seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 4.1.4. *Diberikan (X,d) ruang metrik. Jika fungsi $p^d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dengan*

$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$

untuk setiap $x,y \in X$, maka p^d adalah metrik parsial pada X.

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.3.1, jika p^d adalah metrik parsial pada X maka p^d memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x,y,z \in X$. Selanjutnya, dibuktikan p^d memenuhi keempat syarat tersebut.

(P1) $(\Longrightarrow)$

Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D2) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga jika $x = y$, maka $d(x,y) = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|x| + |y|}{2} \\ &= \frac{|x| + |x|}{2} \\ &= \frac{2|x|}{2} \\ &= |x| \\ &= p^d(x,x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

dan

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|x| + |y|}{2} \\ &= \frac{|y| + |y|}{2} \\ &= \frac{2|y|}{2} \\ &= |y| \\ &= p^d(y,y) \end{aligned} \tag{4.3}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari (4.2) dan (4.3) diperoleh bahwa

$$p^d(x,y) = p^d(x,x) = p^d(y,y).$$

$(\Longleftarrow)$

Dari (4.2), diperoleh $|x| = p^d(x,x)$ dan dari (4.3), diperoleh $|y| = p^d(y,y)$. Jika

$$p^d(x,x) = p^d(x,y) = p^d(y,y),$$

maka

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|x| + |x| + d(x,x)}{2} \\ &= \frac{|x| + |x|}{2} \\ &= \frac{2|x|}{2} \\ &= |x| \\ &= p^d(x,x) \end{aligned} \tag{4.4}$$

dan

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|y| + |y| + d(y,y)}{2} \\ &= \frac{|y| + |y|}{2} \\ &= \frac{2|y|}{2} \\ &= |y| \\ &= p^d(y,y) \end{aligned} \tag{4.5}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Dari (4.4), terlihat bahwa

$$|x| + |y| + d(x,y) = |x| + |x| + d(x,x),$$

sehingga diperoleh

$$|x| - |y| = d(x,y) - d(x,x). \tag{4.6}$$

Dari (4.5), terlihat bahwa

$$|x| + |y| + d(x,y) = |y| + |y| + d(y,y),$$

sehingga diperoleh

$$|x| - |y| = d(y,y) - d(x,y). \qquad (4.7)$$

Dari (4.6) dan (4.7), diperoleh

$$d(x,y) - d(x,x) = d(y,y) - d(x,y). \qquad (4.8)$$

Karena d adalah metrik pada X, maka jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu bernilai nol, artinya

$$d(x,x) = d(y,y) = 0,$$

sehingga (4.8) menjadi

$$d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y) = 0,$$

dan diperoleh $d(x,y) = 0$. Karena d adalah metrik pada X, maka d memenuhi (D2), sehingga diperoleh $x = y$ untuk setiap $x, y \in X$.

Dari kedua bukti tersebut, terbukti bahwa p^d memenuhi (P1).

(P2) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D1) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga

$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$

atau $2p^d(x,y) = |x| + |y| + d(x,y) \geq |x| + |y|$. Dari (4.4) dan (4.5), diperoleh bahwa $|x| = p^d(x,x) = p^d(y,y) = |y|$, sehingga

$$\begin{aligned} 2p^d(x,y) &\geq |x| + |y| \\ &= p^d(x,x) + p^d(y,y) \\ &= p^d(x,x) + p^d(x,x) \\ &= 2p^d(x,x) \end{aligned}$$

atau $p^d(x,y) \geq p^d(x,x)$ untuk setiap $x, y \in X$, maka p^d memenuhi (P2).

(P3) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D3) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x|+|y|+d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|y|+|x|+d(y,x)}{2} \\ &= p^d(y,x). \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka p^d memenuhi (P3).

(P4) Karena

$$p^d(x,y) = \frac{|x|+|y|+d(x,y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka

$$2p^d(x,y) = |x|+|y|+d(x,y)$$

sehingga $d(x,y) = 2p^d(x,y) - |x| - |y|$.

Dari

$$d(x,y) = 2p^d(x,y) - |x| - |y|, \qquad (4.9)$$

maka dapat diperoleh juga

$$d(y,z) = 2p^d(y,z) - |y| - |z| \qquad (4.10)$$

dan

$$d(x,z) = 2p^d(x,z) - |x| - |z|. \qquad (4.11)$$

Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D4) seperti pada Definisi 2.2.1. Substitusi (4.9), (4.10) dan (4.11) ke dalam (D4), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2p^d(x,z) - |x| - |z| &\le 2p^d(x,y) - |x| - |y| \\ &\quad +2p^d(y,z) - |y| - |z| \\ &= 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) \\ &\quad -2|y| - |x| - |z| \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, maka

$$2p^d(x,z) \le 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) - 2|y|.$$

Dari (4.3), $|y| = p^d(y, y)$, sehingga
$2p^d(x, z) \leq 2p^d(x, y) + 2p^d(y, z) - 2|y|$
$= 2p^d(x, y) + 2p^d(y, z) - 2p^d(y, y)$
atau $p^d(x, z) \leq p^d(x, y) + p^d(y, z) - p^d(y, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, artinyap^d memenuhi (P4).

Terbukti bahwa p^d memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x, y, z \in X$, maka p^d adalah metrik parsial pada X. ■

4.2 Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik adalah dua bentuk pemetaan yang merupakan hasil perluasan pemetaan kontraktif pada ruang metrik. Pemetaan kontraktif pada ruang metrik kemudian dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial oleh Matthews [4]. Matthews menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan f jika f merupakan pemetaan kontraktif.

Hasil konstruksi yang dilakukan Matthews diterapkan oleh Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero [2] ke dalam pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial artinya dijamin juga keberadaan dan ketunggalan titik tetap kedua pemetaan tersebut sebab kedua pemetaan tersebut merupakan hasil perluasan pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial. Oleh karena itu, jika pemetaan f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah maka tidak dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap f. Begitu pula jika f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah maka tidak dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap f.

Dari Teorema 4.1.1, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, sehingga didefinisikan pemetaan kontraktif lemah pada

(X, d^p) seperti pada Definisi 2.2.4. Begitu pula pada kasus ruang metrik parsial. Dari Teorema 4.1.1, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X, sehingga berdasarkan [2], diperoleh definisi pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial sebagai berikut.

Definisi 4.2.1. *Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$,*

$$sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$$

dan

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x, y)p(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari [2], terdapat contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Di bawah ini ditunjukkan contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial.

Contoh 4.2.2. Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai $p(x, y) = max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi

$$f: [0,1] \to [0,1]$$

dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Terlihat bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.1, yaitu

$$\sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b \end{matrix} \right\} = \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b \end{matrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$p(f(x), f(y)) = p\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$$
$$= \max\left\{\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\max\{x^2, y^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(\max\{x,y\})^2$$
$$\leq \frac{1}{2}\max\{x,y\}$$
$$= \bar{\alpha}(x,y)p(x,y)$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Artinya, f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Selanjutnya, ditunjukkan contoh pemetaan yang bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Contoh 4.2.3. Diberikan fungsi $d^p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ dengan $d^p(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dan p adalah metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in$

$[0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1]$ x $[0,1] \rightarrow [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Andaikan f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 2.2.4, yaitu

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq d^p(x,y) \leq b \end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq |x-y| \leq b \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned}
d^p\big(f(x), f(y)\big) &= \left|\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2 - y^2}{2}\right| \\
&= \left|\frac{(x+y)(x-y)}{2}\right| \\
&= \left|\frac{x+y}{2}\right| |x-y| \\
&= \frac{x+y}{2} |x-y| \\
&\leq \frac{1}{2} |x-y| \\
&= \bar{\alpha}(x,y) |x-y| \\
&= \bar{\alpha}(x,y) d^p(x,y)
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jadi, diperoleh $\frac{x+y}{2} \leq \bar{\alpha}(x, y)$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil sembarang $x, y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 1$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} &= \frac{1+1}{2} \\ &= 1 \\ &\leq \bar{\alpha}(x, y) \\ &= \bar{\alpha}(1,1).\end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x, y) < 1$. Akibatnya, f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

Seperti pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial yang tidak jauh berbeda dengan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik, pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial juga tidak jauh berbeda dengan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik. Dari Teorema 4.1.1, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, sehingga didefinisikan pemetaan Kannan lemah pada (X, d^p) seperti pada Definisi 2.2.6. Begitu pula pada kasus ruang metrik parsial. Karena p adalah metrik parsial pada X, sehingga berdasarkan [2], diperoleh definisi pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial sebagai berikut.

Definisi 4.2.4. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$$

dan

$$p(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[p(x, f(x)) + p(y, f(y))]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari [2], terdapat contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Di bawah ini ditunjukkan contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

Contoh 4.2.5. Diberikan p metrik parsial, dengan $p\colon [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi

$$f\colon [0,1] \to [0,1]$$

dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}\colon [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p(f(x), f(y))}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 4.2.5, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.4, yaitu

$$\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b \end{matrix}\right\} = \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b \end{matrix}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$
\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right\} \\
&\leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[x+y] \\
&= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\begin{array}{c} \max\left\{x, \frac{x^2}{x+1}\right\} \\ + \max\left\{y, \frac{y^2}{y+1}\right\} \end{array}\right] \\
&= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\right] \\
&\leq \frac{1/2}{2}\,[x+y] \\
&= \frac{1}{4}[x+y] \\
&= \frac{1}{4}\left[\max\left\{x, \frac{x^2}{x+1}\right\} + \max\left\{y, \frac{y^2}{y+1}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\right]
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y \in X$. Artinya, f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Selanjutnya, ditunjukkan contoh pemetaan yang bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Contoh 4.2.6. Diberikan d^p metrik, dengan $d^p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x), f(y)\big)}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dengan p metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 4.2.6, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{p(f(x), f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Andaikan f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 2.2.6, yaitu

$$\begin{aligned} \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq d^p(x,y) \leq b \end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq |x-y| \leq b \end{matrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned} d^p\big(f(x), f(y)\big) &= \left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| \\ &= \left|\frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}\right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right|+\left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\left|\frac{x(x+1)-x^2}{x+1}\right| + \left|\frac{y(y+1)-y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right|+\left|y-\frac{y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[d^p\big(x,f(x)\big)+d^p\big(y,f(y)\big)\right]$$
$$\leq \frac{1/2}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right|+\left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right|+\left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{x(x+1)-x^2}{x+1}\right| + \left|\frac{y(y+1)-y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right|+\left|y-\frac{y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[d^p\big(x,f(x)\big)+d^p\big(y,f(y)\big)\right]$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil sembarang $x,y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 0$, maka diperoleh

$$d^p\big(f(1),f(0)\big) = \left|\frac{1^2}{1+1} - 0\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4}$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left|\frac{1}{2}\right|$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[\left|1-\frac{1}{2}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}[|1-f(1)|+|0-f(0)|]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[d^p\big(1,f(1)\big)+d^p\big(0,f(0)\big)\right]$$

sehingga $\frac{1}{2} \leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4}$ atau $2 \leq \bar{\alpha}(1,0)$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x,y) < 1$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Akibatnya, f bukan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

4.3 Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Teorema titik tetap merupakan objek yang dikaji pada ruang metrik parsial sebab dengan mengkaji teorema titik tetap dapat dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial. Melalui teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah, dibuktikan bahwa terdapat titik tetap yang tunggal pada ruang metrik parsial.

Berdasarkan [2], dengan menggunakan p dan d^p yang memberikan analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial seperti pada Teorema 4.1.1, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Sebelum membuktikan teorema titik tetap, dibuktikan beberapa lemma yang dibutuhkan pada proses pembuktian teorema titik tetap tersebut.

Lemma 4.3.1. *Diberikan* (X,p) *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big)\end{bmatrix}\right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. *Jika* $x \in X$ *memenuhi barisan* $\{x_n\}$ *dengan* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, *maka*

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Pertama-tama, diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan

$$x_{n+1} = f(x_n) = f\big(f(x_{n-1})\big) = f\big(f(x)\big) = f(y),$$

maka

$$\begin{aligned} p\big(f(x), f(y)\big) &= p(x_n, x_{n+1}) \\ &= p\big(f(x_{n-1}), f(x_n)\big) \\ &\leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \max\{p(x_{n-1}, x_n), \\ &\quad \frac{1}{2}\left[p\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big) + p\big(x_n, f(x_n)\big)\right]\Big\} \\ &= \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \max\{p(x_{n-1}, x_n), \\ &\quad \tfrac{1}{2}\left[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\right]\Big\} \qquad (4.12) \end{aligned}$$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.12). Untuk membuktikan bahwa setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.12), maka dapat dibagi menjadi dua kasus:

1. Jika $\max\left\{p(x_{n-1},x_n), \frac{1}{2}[p(x_{n-1},x_n)+p(x_n,x_{n+1})]\right\}$ adalah $p(x_{n-1},x_n)$, maka
$$p(x_n,x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)p(x_{n-1},x_n) \quad (4.13)$$
2. Jika $\max\left\{p(x_{n-1},x_n), \frac{1}{2}[p(x_{n-1},x_n)+p(x_n,x_{n+1})]\right\}$ adalah $\frac{1}{2}[p(x_{n-1},x_n)+p(x_n,x_{n+1})]$, maka
$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+1}) &\leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2}[p(x_{n-1},x_n)+p(x_n,x_{n+1})] \\ &= \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2}p(x_{n-1},x_n) \\ &\quad + \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2}p(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$
sehingga
$$1-\frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2}p(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2} p(x_{n-1},x_n)$$
atau
$$p(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2-\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}p(x_{n-1},x_n) \quad (4.14)$$

Dari dua kasus di atas, terlihat bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.13) dan (4.14), sehingga

$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+1}) &\leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}{2-\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)}p(x_{n-1},x_n) \\ &\leq \bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)p(x_{n-1},x_n). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa setiap $n \in \mathbb{N}$,
$$p(x_n,x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1},x_n)p(x_{n-1},x_n)$$
dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1},x_n) \leq 1$. ■

Lemma 4.3.2. *Diberikan* (X,p) *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x, f(x)) \\ +p(y, f(y)) \end{bmatrix}\right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. *Jika* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *barisan pada* X *dengan* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ *dan* $x_n \neq x_{n+1}$, *maka* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergen ke bilangan real* $p = 0$ *dengan kata lain* $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Bukti:

Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dibuktikan bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke bilangan real $p = 0$. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $p > 0$, berdasarkan Lemma 4.3.1, diperoleh

$$0 < p \leq p(x_n, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq p(x_0, x_1)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $a = p$ dan $b = p(x_0, x_1)$, maka

$$\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{matrix}\right\},$$

sehingga

$$\begin{aligned} p &\leq p(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \left(\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{matrix}\right\}\right)^n p(x_0, x_1) \quad (4.15) \end{aligned}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa

$$0 \leq \sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\} < 1.$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{n\to\infty}(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): p \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\})^n = 0,$$

maka satu-satunya yang benar adalah $p = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Terbukti bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$. ■

Lemma 4.3.3. *Diberikan (X,p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1]$ dengan $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \le p(x,y) \le b\} < 1$ untuk setiap $0 \le a \le b$, dan*

$$p\big(f(x),f(y)\big) \le \bar{\alpha}(x,y)\,max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x,f(x)\big) \\ +p\big(y,f(y)\big)\end{bmatrix}\right\}$$

untuk setiap $x,y \in X$. Fungsi f dikatakan memiliki titik tetap $x^* \in X$ jika $p\big(x^*,f(x^*)\big) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$.

Bukti:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap pada (X,p). Dengan kata lain $p(x^*,x^*) = p\big(x^*,f(x^*)\big) = p\big(f(x^*),f(x^*)\big) = 0$. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $p\big(x^*,f(x^*)\big) > 0$. Karena p adalah metrik parsial pada X sehingga p memenuhi (P4), maka diperoleh

$$p\big(x^*,f(x^*)\big) \le p\big(x^*,f(x_n)\big) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ -p\big(f(x_n),f(x_n)\big)$$

sehingga

$$\begin{aligned} p\big(x^*,f(x^*)\big) &\le p\big(x^*,f(x_n)\big) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ &\quad -p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\ &\le p(x^*,x_{n+1}) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ &\le p(x^*,x_{n+1}) + \bar{\alpha}(x_n,x^*) \end{aligned}$$

$$\max\left\{p(x_n, x^*), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x_n, f(x_n)) \\ +p(x^*, f(x^*)) \end{bmatrix}\right\}$$

$$\leq p(x^*, x_{n+1}) + \max\left\{p(x_n, x^*), \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x_n, x_{n+1}) \\ +p(x^*, f(x^*)) \end{bmatrix}\right\} \quad (4.16)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\bar{\alpha}(x_n, x^*) \in [0,1]$. Jika $n \to \infty$, dari (4.16), diperoleh $p(x^*, f(x^*)) \leq \frac{1}{2}p(x^*, f(x^*))$. Namun, $p(x^*, f(x^*)) \leq \frac{1}{2}p(x^*, f(x^*))$ tidak mungkin terpenuhi sebab $p(x^*, f(x^*)) > 0$, sehingga satu-satunya yang benar adalah $p(x^*, f(x^*)) = 0$. Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P3) dan (P2), sehingga diperoleh $p(f(x^*), f(x^*)) = 0$ dan $p(x^*, x^*) = 0$. Karena $p(x^*, x^*) = p(x^*, f(x^*)) = p(f(x^*), f(x^*)) = 0$, maka $x^* = f(x^*)$ sebab p memenuhi (P1).

Terbukti bahwa f memiliki titik tetap $x^* = f(x^*) \in X$. ■

Lemma 4.3.4. *Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1]$ dengan $sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan*

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x, y)\, max\left\{p(x, y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x, f(x)) \\ +p(y, f(y)) \end{bmatrix}\right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi f dikatakan memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ jika terdapat titik tetap yang lain, misal $z \in X$, sedemikian hingga $p(x^*, z) = 0$ atau $z = x^* = f(x^*) \in X$.

Bukti:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$. Dibuktikan dengan kontradiksi, misalkan terdapat titik tetap yang lain dari fungsi f, yaitu $z \in X$. Artinya, $z = f(z)$ dengan $z \neq x^*$ sehingga $p(x^*, z) > 0$, maka diperoleh

$$\bar{\alpha}(x^*, z) \leq \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x^*, z): \\ \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*, z) \leq p(x^*, z) \end{matrix} \right\} < 1.$$

Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P2), sehingga diperoleh

$$p(x^*, x^*) = 0 < p(x^*, z) \text{ dan } p(z, z) < p(x^*, z),$$

maka

$$\begin{aligned} p(x^*, z) &= p\big(f(x^*), f(z)\big) \\ &\leq \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix} \right\} \\ &= \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p(x^*, x^*) + p(z, z)\right] \end{matrix} \right\} \\ &\leq \bar{\alpha}(x^*, z)\, p(x^*, z). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Karena

$$\bar{\alpha}(x^*, z) \leq \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x^*, z): \\ \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*, z) \leq p(x^*, z) \end{matrix} \right\} < 1$$

maka (4.17) menjadi

$$\begin{aligned} p(x^*, z) &= p\big(f(x^*), f(z)\big) \\ &\leq \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix} \right\} \\ &= \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p(x^*, x^*) + p(z, z)\right] \end{matrix} \right\} \\ &\leq \bar{\alpha}(x^*, z)\, p(x^*, z) \end{aligned}$$

$$\leq \sup\left\{\begin{array}{c}\bar{\alpha}(x^*,z): \\ \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*,z) \leq p(x^*,z)\end{array}\right\} p(x^*,z) \quad (4.18)$$

Karena x^* dan z adalah titik tetap dari f, maka $p(x^*,x^*) = p(z,z) = 0$, sehingga (4.18) menjadi

$$\begin{aligned}
p(x^*,z) &= p\big(f(x^*),f(z)\big) \\
&\leq \bar{\alpha}(x^*,z)\max\left\{\begin{array}{c} p(x^*,z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*,f(x^*)\big)+p\big(z,f(z)\big)\right]\end{array}\right\} \\
&= \bar{\alpha}(x^*,z)\max\left\{\begin{array}{c} p(x^*,z), \\ \frac{1}{2}\left[p(x^*,x^*)+p(z,z)\right]\end{array}\right\} \\
&= \bar{\alpha}(x^*,z)\max\{p(x^*,z),0\} \\
&\leq \bar{\alpha}(x^*,z)\,p(x^*,z) \\
&\leq \sup\left\{\begin{array}{c}\bar{\alpha}(x^*,z): \\ \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*,z) \leq p(x^*,z)\end{array}\right\} p(x^*,z).
\end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $p(x^*,z) > 0$ dan $\sup\left\{\bar{\alpha}(x^*,z): \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*,z) \leq p(x^*,z)\right\} < 1$.

Jadi, terbukti bahwa f memiliki titik tetap tunggal, yaitu $z = x^* = f(x^*) \in X$. ∎

Lemma-lemma di atas, selanjutnya digunakan dalam pembuktian Teorema 4.3.5 berikut ini.

Teorema 4.3.5 (Teorema Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial). *Diberikan* $X \neq \emptyset$. *Jika* (X,p) *adalah ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *sehingga*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x, y)\, max \left\{ p(x, y), \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.19)$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* \in X$ dan barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$, sehingga $p(x^*, x^*) = 0$.

Bukti:
Langkah pertama, ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi (4.19). Diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan $x_{n+1} = f(x_n) = f\big(f(x_{n-1})\big) = f\big(f(x)\big) = f(y)$, maka berdasarkan Lemma 4.3.1, diperoleh bahwa $p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)p(x_{n-1}, x_n)$ dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, artinya untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi (4.19). Karena $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, akibatnya barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tidak naik, sehingga barisan tersebut konvergen ke bilangan real $p = \inf\{p(x_{n-1}, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

Langkah kedua, ditunjukkan bahwa barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$. Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dari Lemma 4.3.2, terlihat bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$ dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Langkah ketiga, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p). Terlebih dahulu, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (4.1). Berdasarkan Lemma 4.3.2, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x_{n+1}) = 0$ sebab

$d^p(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (4.20)

Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P2) sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_{n+1}), \tag{4.21}$$

maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$.

d^p adalah metrik sehingga memenuhi (D4). Dari (4.15) dan (4.20), maka untuk $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d^p(x_n, x_{n+k}) &\leq d^p(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d^p(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\
&\leq 2p(x_0, x_1) \\
&\quad \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^n \\
&\quad + \cdots + 2p(x_0, x_1) \\
&\quad \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{n+k-1} \\
&\leq 2p(x_0, x_1) \\
&\quad \sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^t \\
&\leq 2p(x_0, x_1) \\
&\quad \left(\frac{\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^n}{1 - \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}}\right)
\end{aligned}$$

dengan

$$\frac{(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\})^n}{1 - \sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\}} p(x_0, x_1)$$

merupakan jumlahan dari semua suku deret geometri

$$\sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^t p(x_0, x_1)$$

yang memiliki suku awal, yaitu

$$(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\})^n p(x_0,x_1)$$

dan rasionya adalah

$$\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\} < 1).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah keempat, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p). Karena (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Lemma 4.1.3, diperoleh bahwa (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x^*) = 0$ jika dan hanya jika

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \qquad (4.22)$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) = 0$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Dari (4.21), diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$, dan dari definisi d^p pada (4.1), diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$, sehingga (4.22) menjadi $p(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$.

Langkah kelima, dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap pada (X, p). Karena f memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.3, f memiliki titik tetap $x^* \in X$ sedemikian hingga $p(x^*, f(x^*)) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$. Karena f memiliki titik tetap $x^* \in X$, maka barisan

$\{x_n = f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$ atau $p(x^*, x^*) = 0$.

Langkah terakhir, dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ pada (X, p). Karena f memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.4, f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$. ■

Selanjutnya, ditunjukkan contoh Teorema 4.3.5 dengan mendefinisikan pemetaan f pada $[0,1]$ dan p metrik parsial yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Contoh tersebut dapat dilihat di bawah ini.

Contoh 4.3.6. Diberikan $([0,1], p)$ ruang metrik parsial lengkap dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ dengan $\bar{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f memiliki titik tetap tungggal $x^* = 0 \in [0,1]$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Pertama-tama diselidiki bahwa f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada $([0,1], p)$. Dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.1, yaitu

$$\begin{aligned}\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq p(x, y) \leq b\end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq \max\{x, y\} \leq b\}\end{matrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1\end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$
\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\max\{x, y\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\{x, y\} \\
&= \bar{\alpha}(x, y)p(x, y)
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$.

Selanjutnya, diselidiki bahwa f merupakan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$. Dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.4, yaitu

$$
\begin{aligned}
\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq p(x, y) \leq b\end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq \max\{x, y\} \leq b\}\end{matrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$
\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\max\{x, y\} \\
&\leq \frac{1}{4}[x + y] \\
&= \frac{1/2}{2}\left[\max\left\{x, \frac{x}{8}\right\} + \max\left\{y, \frac{y}{8}\right\}\right] \\
&= \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}\left[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\right]
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$.

Karena f merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$, maka dengan menggunakan Teorema 4.3.5, dicari titik tetap dari f, yaitu $x^* \in [0,1]$ dan dibuktikan bahwa x^* bernilai tunggal.

Dari dua penyelidikan sebelumnya, diperoleh bahwa f merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$, artinya terdapat $\bar{\alpha}$ sedemikian hingga

$$\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b\end{matrix}\right\} = \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\max\{x,y\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\left\{\max\{x,y\}, \frac{1}{2}[x+y]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{matrix}\max\{x,y\}, \\ \frac{1}{2}\left[\max\left\{x, \frac{x}{8}\right\} + \max\left\{y, \frac{y}{8}\right\}\right]\end{matrix}\right\} \\
&= \bar{\alpha}(x,y)\max\left\{\begin{matrix}p(x,y), \\ \frac{1}{2}\big[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\big]\end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* \in [0,1]$ dan barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in [0,1]$ untuk setiap $x_0 \in [0,1]$ sehingga $p(x^*, x^*) = 0$, seperti pada Teorema 4.3.5.

Kemudian, dicari $x^* \in [0,1]$ sedemikian hingga barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in [0,1]$ di $([0,1], p)$ untuk setiap $x_0 \in [0,1]$ dan $p(x^*, x^*) = 0$. Untuk $x_0 \in [0,1]$, maka didefinisikan barisan $\{x_n\}$ di [0,1] dengan

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diselidiki bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$.

$$f^1(x_0) = f(x_0) = \frac{x_0}{8}$$
$$f^2(x_0) = f(x_1) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^2$$
$$f^3(x_0) = f(x_2) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$f^n(x_0) = f(x_{n-1}) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^n$$

Ketika $n \to \infty$, maka $x_n = f^n(x_0) \to x^* = 0$.

Karena $x_n = f^n(x_0) \to x^* = 0$, maka $\{x_n\} = \{f^n(x_0)\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen ke titik $x^* = 0 \in [0,1]$ sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = p(x^*, x^*)$, seperti pada Definisi 2.3.3 (i). Karena

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) &= \lim_{n\to\infty} p(f^n(x_0), x^*)\\ &= \lim_{n\to\infty} \max\{f^n(x_0), x^*\}\\ &= \lim_{n\to\infty} \max\left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n, 0\right\}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0}{8}\right)^n$$
$$= 0 \,,$$

maka $p(x^*, x^*) = 0$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$. $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dikatakan barisan Cauchy jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, sesuai dengan Definisi 2.3.3 (ii). Misalkan, $\{x_m\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^m\right\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) &= \lim_{n,m\to\infty} p\big(f^n(x_0), f^m(x_0)\big) \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \max\{f^n(x_0), f^m(x_0)\} \\
&= \lim_{n,m\to\infty} \max\left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n, \left(\frac{x_0}{8}\right)^m\right\} \\
&= 0 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

untuk setiap $x_0 \in [0,1]$, artinya untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, sehingga $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Kemudian, ditunjukkan bahwa $([0,1], p)$ adalah ruang metrik parsial lengkap. $([0,1], p)$ dikatakan ruang metrik parsial lengkap jika barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada $([0,1], p)$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$, sehingga $p(x^*, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, sesuai dengan Definisi 2.3.3 (iii). Diambil sembarang $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ yang konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$. Dari penyelidikan sebelumnya, diperoleh

$\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diselidiki bahwa $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ yang merupakan barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dari penyelidikan sebelumnya, juga diperoleh bahwa $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ konvergen ke titik $x^* = 0 \in [0,1]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $([0,1], p)$ adalah ruang metrik parsial lengkap.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa f memiliki titik tetap, artinya $x^* = f(x^*)$. Dari penyelidikan sebelumnya diperoleh $x^* = 0$ dan $p(x^*, x^*) = 0$, sehingga

$$p\big(x^*, f(x^*)\big) = p\left(x^*, \frac{x^*}{8}\right) = \max\left\{x^*, \frac{x^*}{8}\right\} = x^* = 0$$

dan

$$p\big(f(x^*), f(x^*)\big) = p\left(\frac{x^*}{8}, \frac{x^*}{8}\right) = \max\left\{\frac{x^*}{8}, \frac{x^*}{8}\right\} = \frac{x^*}{8} = 0.$$

Artinya,

$$p(x^*, x^*) = p\big(x^*, f(x^*)\big) = p\big(f(x^*), f(x^*)\big) = 0.$$

Karena p adalah metrik parsial maka p memenuhi (P1). Akibatnya, $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$.

Kemudian, ditunjukkan bahwa titik tetap dari f, yaitu $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$ merupakan titik tetap tunggal. Andaikan terdapat titik tetap yang lain, yakni $z \in [0,1]$ dari $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dengan $z \neq x^* = 0$, artinya $0 < z \leq 1$ sehingga $p(x^*, z) > 0$. Karena x^* dan z merupakan titik tetap-titik tetap dari f maka $x^* = f(x^*)$ dan $z = f(z)$, sehingga

$$
\begin{aligned}
p(x^*, z) &= p\big(f(x^*), f(z)\big) \\
&= \max\{f(x^*), f(z)\} \\
&= \max\left\{\frac{x^*}{8}, \frac{z}{8}\right\} \\
&= \max\left\{0, \frac{z}{8}\right\} \\
&= \frac{z}{8} \\
&\leq \frac{z}{2} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{z, \frac{1}{2}z\right\} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{z, \frac{1}{2}[0+z]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{matrix} \max\{x^*, z\}, \\ \frac{1}{2}\left[\max\left\{x^*, \frac{x^*}{8}\right\} + \max\left\{z, \frac{z}{8}\right\}\right] \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{matrix} \max\{x^*, z\}, \\ \frac{1}{2}[\max\{x^*, f(x^*)\} + \max\{z, f(z)\}] \end{matrix}\right\} \\
&= \bar{\alpha}(x, y)\max\left\{\begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $p(x^*, z) = \max\{x^*, z\} = z > 0$ untuk $z \neq x^* = 0$, maka satu-satunya yang benar adalah $x^* = f(x^*) = z = 0$. Artinya, f memiliki titik tetap tunggal, yaitu $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$.

4.1 Ruang Metrik Parsial

Ruang metrik parsial merupakan salah satu pengembangan dari konsep ruang metrik. Beberapa konsep pada ruang metrik, seperti yang berkaitan dengan konvergensi barisan pada ruang metrik, barisan Cauchy pada ruang metrik serta definisi ruang metrik lengkap dapat dianalogikan ke dalam ruang metrik parsial. Pengertian metrik dan metrik parsial sedikit berbeda, seperti yang telah dijelaskan pada Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.3.1. Konsep ruang metrik parsial yang digagas oleh Matthews [4] memberikan pernyataan bahwa jarak titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol. Hal inilah yang berbeda dengan konsep ruang metrik, bahwa jarak titik ke dirinya sendiri selalu bernilai nol.

Karena terdapat perbedaan antara konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial, maka berdasarkan [4], dapat dibentuk analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Melalui pengkonstruksian fungsi d^p yang dibangun dari metrik parsial p, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 4.1.1. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial. Jika fungsi* $d^p : X \text{ x } X \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$d^p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \tag{4.1}$$

untuk setiap $x, y \in X$*, maka* d^p *adalah metrik pada* X.

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.2.1, jika d^p adalah metrik pada X maka d^p memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in X$. Selanjutnya, dibuktikan bahwa d^p memenuhi keempat syarat tersebut.

(D1) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) dan (P2) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= p(x,y) - p(x,x) + p(x,y) - p(y,y) \\ &= p(x,y) - p(x,x) + p(y,x) - p(y,y) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Jadi, $d^p(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$, artinya d^p memenuhi (D1).

(D2) $(\Longrightarrow)$

Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) dan (P2) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(x,x) \\ &= p(x,y) - p(x,x) + p(x,y) - p(y,y) \\ &= p(x,y) - p(x,x) + p(y,x) - p(y,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$, diperoleh

$$p(x,y) - p(x,x) = 0$$

dan

$$p(y,x) - p(y,y) = 0,$$

artinya $p(x,y) = p(x,x)$ dan $p(y,x) = p(y,y)$ sehingga $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Karena p adalah metrik parsial pada X maka p juga memenuhi (P1) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga diperoleh $x = y$.

$(\Longleftarrow)$

Jika $x = y$, maka

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari kedua bukti tersebut maka d^p memenuhi (D2).

(D3) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P3) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\ &= d^p(y,x) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka d^p memenuhi (D3).

(D4) Karena p adalah metrik parsial pada X maka p memenuhi (P4) seperti pada Definisi 2.3.1, sehingga

$$\begin{aligned} d^p(x,z) &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) \\ &\leq 2\big(p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\big) \\ &\quad -p(x,x) - p(z,z) \\ &= 2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y) \\ &\quad -p(x,x) - p(z,z) \\ &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &\quad +2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z) \\ &= d^p(x,y) + d^p(y,z) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, maka d^p memenuhi (D4).

Terbukti bahwa d^p memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in X$, maka d^p adalah metrik pada X. ■

Dari Teorema 4.1.1, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X dan d^p adalah metrik pada X. Dengan menggunakan p dan d^p, dibentuk lemma-lemma yang menunjukkan analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta analogi antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap.

Lemma 4.1.2. *Diberikan (X,p) ruang metrik parsial dan (X,d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada* (4.1). *Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X,p) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X,d^p).*

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X,p), maka sesuai Definisi 2.3.3 (ii), $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ada dan berhingga. Karena (X,d^p) adalah ruang metrik dengan d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (4.1), maka

$$\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) = 2\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$$

atau

$$2\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) + \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) + \lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m).$$

Karena $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ada dan berhingga, maka $2\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ juga ada dan berhingga, sehingga $\lim\limits_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) + \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n,x_n) + \lim\limits_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ juga ada dan berhingga. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, d^p).

$(\Leftarrow)$

Karena d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (4.1), maka jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), diperoleh

$$\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) = 2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$$

ada dan berhingga. Sehingga, jelas bahwa $2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ ada dan berhingga. Karena $2 \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, maka $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, p). ∎

Lemma 4.1.3 *Diberikan (X, p) ruang metrik parsial dan (X, d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (4.1). (X, p) dikatakan lengkap jika dan hanya jika (X, d^p) lengkap. Sehingga, jika diberikan barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, p) maka untuk $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$ jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$.*

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Jika (X, p) merupakan ruang metrik parsial lengkap, maka sesuai Definisi 2.3.3 (iii), setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, p) konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, d^p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik $x \in X$, artinya (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka $d^p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$.

$(\Longleftarrow)$

Jika (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap dengan d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, d^p) konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $d^p(x, x) = \lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m)$. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (4.1), maka $d^p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik $x \in X$, artinya (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap. Karena (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Definisi 2.3.3 (iii) diperoleh bahwa $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$. ∎

Selanjutnya, melalui pengkonstruksian fungsi p^d yang dibangun dari metrik d, diperoleh bahwa fungsi p^d merupakan metrik parsial pada X, seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 4.1.4. *Diberikan* (X,d) *ruang metrik. Jika fungsi* $p^d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ *dengan*

$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$, *maka* p^d *adalah metrik parsial pada* X.

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.3.1, jika p^d adalah metrik parsial pada X maka p^d memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x, y, z \in X$. Selanjutnya, dibuktikan p^d memenuhi keempat syarat tersebut.

(P1) $(\Longrightarrow)$

Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D2) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga jika $x = y$, maka $d(x,y) = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\ &= \frac{|x| + |y|}{2} \\ &= \frac{|x| + |x|}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2|x|}{2}$$
$$= |x|$$
$$= p^d(x,x) \tag{4.2}$$
dan
$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$
$$= \frac{|x| + |y|}{2}$$
$$= \frac{|y| + |y|}{2}$$
$$= \frac{2|y|}{2}$$
$$= |y|$$
$$= p^d(y,y) \tag{4.3}$$
untuk setiap $x, y \in X$.

Dari (4.2) dan (4.3) diperoleh bahwa
$$p^d(x,y) = p^d(x,x) = p^d(y,y).$$

($\Leftarrow$)

Dari (4.2), diperoleh $|x| = p^d(x,x)$ dan dari (4.3), diperoleh $|y| = p^d(y,y)$. Jika
$$p^d(x,x) = p^d(x,y) = p^d(y,y),$$
maka
$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$
$$= \frac{|x| + |x| + d(x,x)}{2}$$
$$= \frac{|x| + |x|}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2|x|}{2} \\
&= |x| \\
&= p^d(x,x) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
p^d(x,y) &= \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2} \\
&= \frac{|y| + |y| + d(y,y)}{2} \\
&= \frac{|y| + |y|}{2} \\
&= \frac{2|y|}{2} \\
&= |y| \\
&= p^d(y,y) \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y \in X$. Dari (4.4), terlihat bahwa

$$|x| + |y| + d(x,y) = |x| + |x| + d(x,x),$$

sehingga diperoleh

$$|x| - |y| = d(x,y) - d(x,x). \qquad (4.6)$$

Dari (4.5), terlihat bahwa

$$|x| + |y| + d(x,y) = |y| + |y| + d(y,y),$$

sehingga diperoleh

$$|x| - |y| = d(y,y) - d(x,y). \qquad (4.7)$$

Dari (4.6) dan (4.7), diperoleh

$$d(x,y) - d(x,x) = d(y,y) - d(x,y). \qquad (4.8)$$

Karena d adalah metrik pada X, maka jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu bernilai nol, artinya

$$d(x,x) = d(y,y) = 0,$$

sehingga (4.8) menjadi

$$d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y) = 0,$$

dan diperoleh $d(x, y) = 0$. Karena d adalah metrik pada X, maka d memenuhi (D2), sehingga diperoleh $x = y$ untuk setiap $x, y \in X$.

Dari kedua bukti tersebut, terbukti bahwa p^d memenuhi (P1).

(P2) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D1) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga

$$p^d(x, y) = \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2}$$

atau $2p^d(x, y) = |x| + |y| + d(x, y) \geq |x| + |y|$.

Dari (4.4) dan (4.5), diperoleh bahwa $|x| = p^d(x, x) = p^d(y, y) = |y|$, sehingga

$$\begin{aligned} 2p^d(x, y) &\geq |x| + |y| \\ &= p^d(x, x) + p^d(y, y) \\ &= p^d(x, x) + p^d(x, x) \\ &= 2p^d(x, x) \end{aligned}$$

atau $p^d(x, y) \geq p^d(x, x)$ untuk setiap $x, y \in X$, maka p^d memenuhi (P2).

(P3) Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D3) seperti pada Definisi 2.2.1, sehingga

$$\begin{aligned} p^d(x, y) &= \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2} \\ &= \frac{|y| + |x| + d(y, x)}{2} \\ &= p^d(y, x). \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka p^d memenuhi (P3).

(P4) Karena

$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka

$$2p^d(x,y) = |x| + |y| + d(x,y)$$

sehingga $d(x,y) = 2p^d(x,y) - |x| - |y|$.

Dari

$$d(x,y) = 2p^d(x,y) - |x| - |y|, \qquad (4.9)$$

maka dapat diperoleh juga

$$d(y,z) = 2p^d(y,z) - |y| - |z| \qquad (4.10)$$

dan

$$d(x,z) = 2p^d(x,z) - |x| - |z|. \qquad (4.11)$$

Karena d adalah metrik pada X maka d memenuhi (D4) seperti pada Definisi 2.2.1. Substitusi (4.9), (4.10) dan (4.11) ke dalam (D4), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2p^d(x,z) - |x| - |z| &\le 2p^d(x,y) - |x| - |y| \\ &\quad +2p^d(y,z) - |y| - |z| \\ &= 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) \\ &\quad -2|y| - |x| - |z| \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, maka

$$2p^d(x,z) \le 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) - 2|y|.$$

Dari (4.3), $|y| = p^d(y,y)$, sehingga

$$\begin{aligned} 2p^d(x,z) &\le 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) - 2|y| \\ &= 2p^d(x,y) + 2p^d(y,z) - 2p^d(y,y) \end{aligned}$$

atau $p^d(x,z) \le p^d(x,y) + p^d(y,z) - p^d(y,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, artinyap^d memenuhi (P4).

Terbukti bahwa p^d memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x, y, z \in X$, maka p^d adalah metrik parsial pada X. ■

4.2 Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik adalah dua bentuk pemetaan yang merupakan hasil perluasan pemetaan kontraktif pada ruang metrik. Pemetaan kontraktif pada ruang metrik kemudian dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial oleh Matthews [4]. Matthews menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan f jika f merupakan pemetaan kontraktif.

Hasil konstruksi yang dilakukan Matthews diterapkan oleh Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero [2] ke dalam pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial artinya dijamin juga keberadaan dan ketunggalan titik tetap kedua pemetaan tersebut sebab kedua pemetaan tersebut merupakan hasil perluasan pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial. Oleh karena itu, jika pemetaan f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah maka tidak dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap f. Begitu pula jika f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah maka tidak dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap f.

Dari Teorema 4.1.1, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, sehingga didefinisikan pemetaan kontraktif lemah pada (X, d^p) seperti pada Definisi 2.2.4. Begitu pula pada kasus ruang metrik parsial. Dari Teorema 4.1.1, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X, sehingga berdasarkan [2], diperoleh definisi pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial sebagai berikut.

Definisi 4.2.1. *Diberikan* (X,p) *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$$

dan

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y)p(x,y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari [2], terdapat contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Di bawah ini ditunjukkan contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial.

Contoh 4.2.2. Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi

$$f: [0,1] \to [0,1]$$

dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Terlihat bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.1, yaitu

$$\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b \end{matrix}\right\} = \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$p(f(x), f(y)) = p\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$$
$$= \max\left\{\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\max\{x^2, y^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(\max\{x, y\})^2$$
$$\leq \frac{1}{2}\max\{x, y\}$$
$$= \bar{\alpha}(x, y)p(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Artinya, f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Selanjutnya, ditunjukkan contoh pemetaan yang bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Contoh 4.2.3. Diberikan fungsi $d^p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ dengan $d^p(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dan p adalah metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Andaikan f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 2.2.4, yaitu

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \le d^p(x,y) \le b \end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \le |x-y| \le b \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

untuk setiap $0 \le a \le b$, sehingga

$$\begin{aligned}
d^p\big(f(x), f(y)\big) &= \left|\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2 - y^2}{2}\right| \\
&= \left|\frac{(x+y)(x-y)}{2}\right| \\
&= \left|\frac{x+y}{2}\right| |x-y| \\
&= \frac{x+y}{2} |x-y| \\
&\le \frac{1}{2} |x-y| \\
&= \bar{\alpha}(x,y)|x-y| \\
&= \bar{\alpha}(x,y) d^p(x,y)
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jadi, diperoleh $\frac{x+y}{2} \le \bar{\alpha}(x,y)$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil sembarang $x, y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 1$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= \frac{1+1}{2} \\
&= 1 \\
&\le \bar{\alpha}(x,y) \\
&= \bar{\alpha}(1,1).
\end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x,y) < 1$. Akibatnya, f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

Seperti pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial yang tidak jauh berbeda dengan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik, pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial juga tidak jauh berbeda dengan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik. Dari Teorema 4.1.1, diperoleh bahwa d^p adalah metrik pada X, sehingga didefinisikan pemetaan Kannan lemah pada (X, d^p) seperti pada Definisi 2.2.6. Begitu pula pada kasus ruang metrik parsial. Karena p adalah metrik parsial pada X, sehingga berdasarkan [2], diperoleh definisi pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial sebagai berikut.

Definisi 4.2.4. *Diberikan* (X,p) *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$$

dan

$$p(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[p(x, f(x)) + p(y, f(y))]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Dari [2], terdapat contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Di bawah ini ditunjukkan contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial.

Contoh 4.2.5. Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi

$$f: [0,1] \to [0,1]$$

dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \times [0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x), f(y)\big)}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 4.2.5, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.4, yaitu

$$\begin{aligned} \sup\left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b \end{matrix} \right\} &= \sup\left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned} p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right) \\ &= \max\left\{\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right\} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[x+y]$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\begin{array}{c}\max\left\{x,\dfrac{x^2}{x+1}\right\}\\ +\max\left\{y,\dfrac{y^2}{y+1}\right\}\end{array}\right]$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[p\big(x,f(x)\big)+p\big(y,f(y)\big)\right]$$

$$\leq \frac{1/2}{2}[x+y]$$

$$= \frac{1}{4}[x+y]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\max\left\{x,\frac{x^2}{x+1}\right\}+\max\left\{y,\frac{y^2}{y+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[p\big(x,f(x)\big)+p\big(y,f(y)\big)\right]$$

untuk setiap $x, y \in X$. Artinya, f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Selanjutnya, ditunjukkan contoh pemetaan yang bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Contoh 4.2.6. Diberikan d^p metrik, dengan d^p: [0,1] x [0,1] → [0,1] didefinisikan sebagai $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}$: [0,1] x [0,1] → [0,1) dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x),f(y)\big)}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dengan p metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 4.2.6, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x, y) = \frac{p(f(x), f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Andaikan f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 2.2.6, yaitu

$$\begin{aligned}\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq d^p(x, y) \leq b\end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x, y): \\ a \leq |x - y| \leq b\end{matrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1\end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned}d^p\big(f(x), f(y)\big) &= \left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| \\ &= \left|\frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}\right| \\ &\leq \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right] \\ &= \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}\left[\begin{matrix}\left|\frac{x(x+1) - x^2}{x+1}\right| \\ + \left|\frac{y(y+1) - y^2}{y+1}\right|\end{matrix}\right] \\ &= \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}\left[\left|x - \frac{x^2}{x+1}\right| + \left|y - \frac{y^2}{y+1}\right|\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[d^p\big(x, f(x)\big) + d^p\big(y, f(y)\big)\right]$$

$$\leq \frac{1/2}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{x(x+1) - x^2}{x+1}\right| + \left|\frac{y(y+1) - y^2}{y+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left|x - \frac{x^2}{x+1}\right| + \left|y - \frac{y^2}{y+1}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[d^p\big(x, f(x)\big) + d^p\big(y, f(y)\big)\right]$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil sembarang $x, y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 0$, maka diperoleh

$$d^p\big(f(1), f(0)\big) = \left|\frac{1^2}{1+1} - 0\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[\left|1 - \frac{1}{2}\right|\right]$$

$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}[|1 - f(1)| + |0 - f(0)|]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[d^p\big(1, f(1)\big) + d^p\big(0, f(0)\big)\right]$$

sehingga $\frac{1}{2} \leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4}$ atau $2 \leq \bar{\alpha}(1,0)$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x,y) < 1$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Akibatnya, f bukan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

4.3 Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Teorema titik tetap merupakan objek yang dikaji pada ruang metrik parsial sebab dengan mengkaji teorema titik tetap dapat dijamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial. Melalui teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah, dibuktikan bahwa terdapat titik tetap yang tunggal pada ruang metrik parsial.

Berdasarkan [2], dengan menggunakan p dan d^p yang memberikan analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial seperti pada Teorema 4.1.1, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Sebelum membuktikan teorema titik tetap, dibuktikan beberapa lemma yang dibutuhkan pada proses pembuktian teorema titik tetap tersebut.

Lemma 4.3.1. *Diberikan (X,p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1]$ dengan $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max \left\{ p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jika $x \in X$ memenuhi barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, maka

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Pertama-tama, diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan

$$x_{n+1} = f(x_n) = f\big(f(x_{n-1})\big) = f\big(f(x)\big) = f(y),$$

maka

$$\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p(x_n, x_{n+1}) \\
&= p\big(f(x_{n-1}), f(x_n)\big) \\
&\leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \max\Big\{p(x_{n-1}, x_n), \\
&\quad \frac{1}{2}\Big[p\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big) + p\big(x_n, f(x_n)\big)\Big]\Big\} \\
&= \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \max\Big\{p(x_{n-1}, x_n), \\
&\quad \tfrac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})]\Big\} \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dibuktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.12). Untuk membuktikan bahwa setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.12), maka dapat dibagi menjadi dua kasus:

1. Jika $\max\left\{p(x_{n-1}, x_n), \tfrac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})]\right\}$ adalah $p(x_{n-1}, x_n)$, maka
$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n) \qquad (4.13)$$
2. Jika $\max\left\{p(x_{n-1}, x_n), \tfrac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})]\right\}$ adalah $\tfrac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})]$, maka
$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})] \\
&= \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2} p(x_{n-1}, x_n) \\
&\quad + \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2} p(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$
sehingga

$$1 - \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2} p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2} p(x_{n-1}, x_n)$$

atau

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2 - \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)} p(x_{n-1}, x_n) \qquad (4.14)$$

Dari dua kasus di atas, terlihat bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi (4.13) dan (4.14), sehingga

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)}{2 - \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)} p(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n)$$

dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$. ■

Lemma 4.3.2. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X$ x $X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x, y)\, max \left\{ p(x, y), \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ + p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. *Jika* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ *barisan pada* X *dengan* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ *dan* $x_n \neq x_{n+1}$, *maka* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergen ke bilangan real* $p = 0$ *dengan kata lain* $\lim_{n \to \infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Bukti:

Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dibuktikan bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke bilangan real $p = 0$.

Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $p > 0$, berdasarkan Lemma 4.3.1, diperoleh

$$0 < p \leq p(x_n, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq p(x_0, x_1)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $a = p$ dan $b = p(x_0, x_1)$, maka

$$\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq \sup \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{Bmatrix},$$

sehingga

$$\begin{aligned} p &\leq p(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \left(\sup \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{Bmatrix} \right)^n p(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa

$$0 \leq \sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\} < 1.$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{n \to \infty} (\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): p \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\})^n = 0,$$

maka satu-satunya yang benar adalah $p = 0$ dan $\lim_{n \to \infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Terbukti bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$. ■

Lemma 4.3.3. *Diberikan* (X, p) *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $\sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x, y)\, max \left\{ p(x, y), \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ + p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. *Fungsi* f *dikatakan memiliki titik tetap* $x^* \in X$ *jika* $p\big(x^*, f(x^*)\big) = 0$ *sehingga berakibat* $x^* = f(x^*)$.

Bukti:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap pada (X,p). Dengan kata lain $p(x^*,x^*) = p\big(x^*,f(x^*)\big) = p\big(f(x^*),f(x^*)\big) = 0$. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $p\big(x^*,f(x^*)\big) > 0$. Karena p adalah metrik parsial pada X sehingga p memenuhi (P4), maka diperoleh

$$p\big(x^*,f(x^*)\big) \le p\big(x^*,f(x_n)\big) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ -p\big(f(x_n),f(x_n)\big)$$

sehingga

$$\begin{aligned} p\big(x^*,f(x^*)\big) &\le p\big(x^*,f(x_n)\big) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ &\quad -p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\ &\le p(x^*,x_{n+1}) + p\big(f(x_n),f(x^*)\big) \\ &\le p(x^*,x_{n+1}) + \bar{\alpha}(x_n,x^*) \\ &\quad \max\left\{p(x_n,x^*),\frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x_n,f(x_n)\big) \\ +p\big(x^*,f(x^*)\big)\end{bmatrix}\right\} \\ &\le p(x^*,x_{n+1}) \\ &\quad +\max\left\{p(x_n,x^*),\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x_n,x_{n+1}) \\ +p\big(x^*,f(x^*)\big)\end{bmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\bar{\alpha}(x_n,x^*) \in [0,1]$. Jika $n \to \infty$, dari (4.16), diperoleh $p\big(x^*,f(x^*)\big) \le \frac{1}{2}p\big(x^*,f(x^*)\big)$. Namun, $p\big(x^*,f(x^*)\big) \le \frac{1}{2}p\big(x^*,f(x^*)\big)$ tidak mungkin terpenuhi sebab $p\big(x^*,f(x^*)\big) > 0$, sehingga satu-satunya yang benar adalah $p\big(x^*,f(x^*)\big) = 0$. Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P3) dan (P2), sehingga diperoleh $p\big(f(x^*),f(x^*)\big) = 0$ dan $p(x^*,x^*) = 0$. Karena $p(x^*,x^*) = p\big(x^*,f(x^*)\big) = p\big(f(x^*),f(x^*)\big) = 0$, maka $x^* = f(x^*)$ sebab p memenuhi (P1).

Terbukti bahwa f memiliki titik tetap $x^* = f(x^*) \in X$. ■

Lemma 4.3.4. *Diberikan (X,p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1]$ dengan $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max \left\{ p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi f dikatakan memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ jika terdapat titik tetap yang lain, misal $z \in X$, sedemikian hingga $p(x^*, z) = 0$ atau $z = x^* = f(x^*) \in X$.

Bukti:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$. Dibuktikan dengan kontradiksi, misalkan terdapat titik tetap yang lain dari fungsi f, yaitu $z \in X$. Artinya, $z = f(z)$ dengan $z \neq x^*$ sehingga $p(x^*, z) > 0$, maka diperoleh

$$\bar{\alpha}(x^*, z) \leq \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x^*, z): \\ \frac{p(x^*, z)}{2} \leq p(x^*, z) \leq p(x^*, z) \end{matrix} \right\} < 1.$$

Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P2), sehingga diperoleh

$$p(x^*, x^*) = 0 < p(x^*, z) \text{ dan } p(z, z) < p(x^*, z),$$

maka

$$\begin{aligned} p(x^*, z) &= p\big(f(x^*), f(z)\big) \\ &\leq \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$= \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}[p(x^*, x^*) + p(z, z)] \end{matrix} \right\}$$

$$\leq \bar{\alpha}(x^*, z)\, p(x^*, z). \qquad (4.17)$$

Karena

$$\bar{\alpha}(x^*, z) \leq \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x^*, z): \\ \frac{p(x^*, z)}{2} \leq p(x^*, z) \leq p(x^*, z) \end{matrix} \right\} < 1$$

maka (4.17) menjadi

$$p(x^*, z) = p\big(f(x^*), f(z)\big)$$

$$\leq \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix} \right\}$$

$$= \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}[p(x^*, x^*) + p(z, z)] \end{matrix} \right\}$$

$$\leq \bar{\alpha}(x^*, z)\, p(x^*, z)$$

$$\leq \sup \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha}(x^*, z): \\ \frac{p(x^*, z)}{2} \leq p(x^*, z) \leq p(x^*, z) \end{matrix} \right\} p(x^*, z) \qquad (4.18)$$

Karena x^* dan z adalah titik tetap dari f, maka $p(x^*, x^*) = p(z, z) = 0$, sehingga (4.18) menjadi

$$p(x^*, z) = p\big(f(x^*), f(z)\big)$$

$$\leq \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix} \right\}$$

$$= \bar{\alpha}(x^*, z) \max \left\{ \begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}[p(x^*, x^*) + p(z, z)] \end{matrix} \right\}$$

$$= \bar{\alpha}(x^*, z) \max\{p(x^*, z), 0\}$$

$$\leq \bar{\alpha}(x^*, z)\, p(x^*, z)$$

$$\leq \sup\left\{\begin{array}{c}\bar{\alpha}(x^*,z): \\ \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*,z) \leq p(x^*,z)\end{array}\right\} p(x^*,z).$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $p(x^*,z) > 0$ dan $\sup\left\{\bar{\alpha}(x^*,z): \frac{p(x^*,z)}{2} \leq p(x^*,z) \leq p(x^*,z)\right\} < 1$.

Jadi, terbukti bahwa f memiliki titik tetap tunggal, yaitu $z = x^* = f(x^*) \in X$. ∎

Lemma-lemma di atas, selanjutnya digunakan dalam pembuktian Teorema 4.3.5 berikut ini.

Teorema 4.3.5 (Teorema Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial). *Diberikan $X \neq \emptyset$. Jika (X,p) adalah ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga*

$$p\big(f(x),f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x,f(x)\big) \\ +p\big(y,f(y)\big)\end{bmatrix}\right\} \quad (4.19)$$

untuk setiap $x,y \in X$, maka f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* \in X$ dan barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$, sehingga $p(x^*,x^*) = 0$.

Bukti:

Langkah pertama, ditunjukkan bahwa untuk setiap $x,y \in X$ memenuhi (4.19). Diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan $x_{n+1} = f(x_n) = f\big(f(x_{n-1})\big) = f\big(f(x)\big) = f(y)$, maka berdasarkan Lemma 4.3.1, diperoleh bahwa $p(x_n,x_{n+1}) \leq$

$\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)p(x_{n-1}, x_n)$ dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, artinya untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi (4.19). Karena $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, akibatnya barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tidak naik, sehingga barisan tersebut konvergen ke bilangan real $p = \inf\,\{p(x_{n-1}, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

Langkah kedua, ditunjukkan bahwa barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$. Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dari Lemma 4.3.2, terlihat bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$ dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Langkah ketiga, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p). Terlebih dahulu, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (4.1). Berdasarkan Lemma 4.3.2, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x_{n+1}) = 0$ sebab

$$d^p(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1}) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P2) sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_{n+1}), \tag{4.21}$$

maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$.

d^p adalah metrik sehingga memenuhi (D4). Dari (4.15) dan (4.20), maka untuk $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d^p(x_n, x_{n+k}) &\leq d^p(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d^p(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq 2p(x_0, x_1) \\ &\quad \left(\sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{matrix}\right\}\right)^n \\ &\quad + \cdots + 2p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{n+k-1}$$

$$\leq 2p(x_0,x_1) \sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{t}$$

$$\leq 2p(x_0,x_1) \left(\frac{\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{n}}{1-\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}}\right)$$

dengan

$$\frac{(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\})^n}{1-\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\}} p(x_0,x_1)$$

merupakan jumlahan dari semua suku deret geometri

$$\sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{t} p(x_0,x_1)$$

yang memiliki suku awal, yaitu

$$(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\})^n p(x_0,x_1)$$

dan rasionya adalah

$$\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \leq p(x_{n-1},x_n) \leq p(x_0,x_1)\} < 1).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka berdasarkan Lemma 4.1.2, diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah keempat, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p). Karena (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Lemma 4.1.3, diperoleh bahwa (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x^*) = 0$ jika dan hanya jika

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \qquad (4.22)$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m) = 0$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Dari (4.21), diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$, dan dari definisi d^p pada (4.1), diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$, sehingga (4.22) menjadi $p(x^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$.

Langkah kelima, dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap pada (X, p). Karena f memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.3, f memiliki titik tetap $x^* \in X$ sedemikian hingga $p\big(x^*, f(x^*)\big) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$. Karena f memiliki titik tetap $x^* \in X$, maka barisan $\{x_n = f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$ atau $p(x^*, x^*) = 0$.

Langkah terakhir, dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ pada (X, p). Karena f memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.4, f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$. ■

Selanjutnya, ditunjukkan contoh Teorema 4.3.5 dengan mendefinisikan pemetaan f pada $[0,1]$ dan p metrik parsial yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Contoh tersebut dapat dilihat di bawah ini.

Contoh 4.3.6. Diberikan $([0,1], p)$ ruang metrik parsial lengkap dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f memiliki titik tetap tungggal $x^* = 0 \in [0,1]$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Pertama-tama diselidiki bahwa f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada $([0,1], p)$. Dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.1, yaitu

$$\begin{aligned} \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq p(x,y) \leq b \end{matrix}\right\} &= \sup\left\{\begin{matrix} \bar{\alpha}(x,y): \\ a \leq \max\{x,y\} \leq b \end{matrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned} p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\ &= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\max\{x,y\} \\ &\leq \frac{1}{2}\max\{x,y\} \\ &= \bar{\alpha}(x,y)p(x,y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$.

Selanjutnya, diselidiki bahwa f merupakan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$. Dapat ditunjukkan bahwa terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4.2.4, yaitu

$$\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \le p(x,y) \le b\end{matrix}\right\} = \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \le \max\{x,y\} \le b\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$

untuk setiap $0 \le a \le b$, sehingga

$$\begin{aligned}
p\big(f(x), f(y)\big) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\max\{x, y\} \\
&\le \frac{1}{4}[x + y] \\
&= \frac{1/2}{2}\left[\max\left\{x, \frac{x}{8}\right\} + \max\left\{y, \frac{y}{8}\right\}\right] \\
&= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\right]
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$.

Karena f merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$, maka dengan menggunakan Teorema 4.3.5, dicari titik tetap dari f, yaitu $x^* \in [0,1]$ dan dibuktikan bahwa x^* bernilai tunggal.

Dari dua penyelidikan sebelumnya, diperoleh bahwa f merupakan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada $([0,1], p)$, artinya terdapat $\bar{\alpha}$ sedemikian hingga

$$\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \le p(x,y) \le b\end{matrix}\right\} = \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x,y): \\ a \le \max\{x,y\} \le b\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$< 1$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$\begin{aligned}
p(f(x), f(y)) &= p\left(\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right) \\
&= \max\left\{\frac{x}{8}, \frac{y}{8}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\max\{x, y\} \\
&\leq \frac{1}{2}\max\left\{\max\{x, y\}, \frac{1}{2}[x + y]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{array}{c}\max\{x, y\}, \\ \frac{1}{2}\left[\max\left\{x, \frac{x}{8}\right\} + \max\left\{y, \frac{y}{8}\right\}\right]\end{array}\right\} \\
&= \bar{\alpha}(x, y)\max\left\{\begin{array}{c}p(x, y), \\ \frac{1}{2}\left[p(x, f(x)) + p(y, f(y))\right]\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* \in [0,1]$ dan barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in [0,1]$ untuk setiap $x_0 \in [0,1]$ sehingga $p(x^*, x^*) = 0$, seperti pada Teorema 4.3.5.

Kemudian, dicari $x^* \in [0,1]$ sedemikian hingga barisan $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in [0,1]$ di $([0,1], p)$ untuk setiap $x_0 \in [0,1]$ dan $p(x^*, x^*) = 0$. Untuk $x_0 \in [0,1]$, maka didefinisikan barisan $\{x_n\}$ di $[0,1]$ dengan

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diselidiki bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$.

$$f^1(x_0) = f(x_0) = \frac{x_0}{8}$$

$f^2(x_0) = f(x_1) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^2$

$f^3(x_0) = f(x_2) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^3$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$f^n(x_0) = f(x_{n-1}) = \left(\frac{x_0}{8}\right)^n$

Ketika $n \to \infty$, maka $x_n = f^n(x_0) \to x^* = 0$.

Karena $x_n = f^n(x_0) \to x^* = 0$, maka $\{x_n\} = \{f^n(x_0)\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen ke titik $x^* = 0 \in [0,1]$ sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) = p(x^*, x^*)$, seperti pada Definisi 2.3.3 (i). Karena

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(x_n, x^*) &= \lim_{n\to\infty} p(f^n(x_0), x^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \max\{f^n(x_0), x^*\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \max\left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n, 0\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0}{8}\right)^n \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

maka $p(x^*, x^*) = 0$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$. $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dikatakan barisan Cauchy jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, sesuai dengan Definisi 2.3.3 (ii). Misalkan, $\{x_m\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^m\right\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) &= \lim_{n,m\to\infty} p\big(f^n(x_0), f^m(x_0)\big)\\ &= \lim_{n,m\to\infty} \max\{f^n(x_0), f^m(x_0)\}\\ &= \lim_{n,m\to\infty} \max\left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n, \left(\frac{x_0}{8}\right)^m\right\}\\ &= 0\\ &< \infty\end{aligned}$$

untuk setiap $x_0 \in [0,1]$, artinya untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, sehingga $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Kemudian, ditunjukkan bahwa $([0,1], p)$ adalah ruang metrik parsial lengkap. $([0,1], p)$ dikatakan ruang metrik parsial lengkap jika barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada $([0,1], p)$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$, sehingga $p(x^*, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, sesuai dengan Definisi 2.3.3 (iii). Diambil sembarang $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ yang konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$. Dari penyelidikan sebelumnya, diperoleh $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ adalah barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diselidiki bahwa $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ yang merupakan barisan Cauchy pada $([0,1], p)$ konvergen ke titik $x^* \in [0,1]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dari penyelidikan sebelumnya, juga diperoleh bahwa $\{x_n\} = \left\{\left(\frac{x_0}{8}\right)^n\right\}$ konvergen ke titik $x^* = 0 \in [0,1]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $([0,1], p)$ adalah ruang metrik parsial lengkap.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa f memiliki titik tetap, artinya $x^* = f(x^*)$. Dari penyelidikan sebelumnya diperoleh $x^* = 0$ dan $p(x^*, x^*) = 0$, sehingga

$$p\big(x^*, f(x^*)\big) = p\left(x^*, \frac{x^*}{8}\right) = \max\left\{x^*, \frac{x^*}{8}\right\} = x^* = 0$$

dan

$$p\big(f(x^*), f(x^*)\big) = p\left(\frac{x^*}{8}, \frac{x^*}{8}\right) = \max\left\{\frac{x^*}{8}, \frac{x^*}{8}\right\} = \frac{x^*}{8} = 0.$$

Artinya,

$$p(x^*, x^*) = p\big(x^*, f(x^*)\big) = p\big(f(x^*), f(x^*)\big) = 0.$$

Karena p adalah metrik parsial maka p memenuhi (P1). Akibatnya, $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$.

Kemudian, ditunjukkan bahwa titik tetap dari f, yaitu $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$ merupakan titik tetap tunggal. Andaikan terdapat titik tetap yang lain, yakni $z \in [0,1]$ dari $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dengan $z \neq x^* = 0$, artinya $0 < z \leq 1$ sehingga $p(x^*, z) > 0$. Karena x^* dan z merupakan titik tetap-titik tetap dari f maka $x^* = f(x^*)$ dan $z = f(z)$, sehingga

$$\begin{aligned}
p(x^*, z) &= p\big(f(x^*), f(z)\big) \\
&= \max\{f(x^*), f(z)\} \\
&= \max\left\{\frac{x^*}{8}, \frac{z}{8}\right\} \\
&= \max\left\{0, \frac{z}{8}\right\} \\
&= \frac{z}{8} \\
&\leq \frac{z}{2} \\
&= \frac{1}{2}\max\left\{z, \frac{1}{2}z\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\max\left\{z, \frac{1}{2}[0+z]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{matrix} \max\{x^*, z\}, \\ \frac{1}{2}\left[\max\left\{x^*, \frac{x^*}{8}\right\} + \max\left\{z, \frac{z}{8}\right\}\right] \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\max\left\{\begin{matrix} \max\{x^*, z\}, \\ \frac{1}{2}[\max\{x^*, f(x^*)\} + \max\{z, f(z)\}] \end{matrix}\right\}$$

$$= \bar{\alpha}(x, y)\max\left\{\begin{matrix} p(x^*, z), \\ \frac{1}{2}\left[p\big(x^*, f(x^*)\big) + p\big(z, f(z)\big)\right] \end{matrix}\right\}$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $p(x^*, z) = \max\{x^*, z\} = z > 0$ untuk $z \neq x^* = 0$, maka satu-satunya yang benar adalah $x^* = f(x^*) = z = 0$. Artinya, f memiliki titik tetap tunggal, yaitu $x^* = f(x^*) = 0 \in [0,1]$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Samet, Bessem, Calogero V, Francesca V. 2013. **From Metric Spaces to Partial Metric Spaces**. Fixed Point Theory and Aplications 2013, 2013:5, 1-11.

[2] Alghamdi, Maryam A, Naseer S, Oscar V. 2012. **On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces**. Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:175, 1-25.

[3] Kreyszig, E. 1978. **Introductory Functional Analysis with Aplication**. John Wiley and Sons, Inc.Canada, 30, 300.

[4] Matthews, SG. 1994. **Partial Metric Topology**. Annals of the New York Academy of Sciences, 183 - 197.

[5] Dugundji, J dan A. Granas. 1978. **Weakly Contractive Maps and Elementary Domain Invariance Theorem***. Bull. Greek Math. Soc. 19, 141-151.

[6] Kannan, R. 1968. **Some Results On Fixed Points**. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Vol. 60, 71-76.

[7] Ariza-Ruiz, D dan Antonio Jiménez-Melado. 2010. **A Continuation Method for Weakly Kannan Maps**. Fixed Point Theory and Applications, Volume 2010, Article ID 321594, 1-12.

Biodata Penulis

Annisa Rahmita Soemarsono atau biasa dipanggil Annisa, lahir di Surabaya, 6 Agustus 1994. Penulis telah menempuh pendidikan di SD Negeri Kapasari VIII Surabaya, SMP Negeri 9 Surabaya dan SMA Negeri 2 Surabaya.

Penulis yang gemar menulis cerita dan membaca novel, buku-buku psikologi serta majalah-majalah arsitektur ini sedang menempuh pendidikan Strata-1 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). Bidang minat yang sedang ditekuni penulis saat ini adalah Analisis dan Aljabar.

Penulis juga terlibat dalam organisasi baik di dalam lingkup jurusan Matematika ITS maupun di luar jurusan Matematika ITS. Dalam lingkup jurusan Matematika ITS, penulis pernah menjadi staff departemen Sains dan Teknologi Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (SAINSTEK HIMATIKA ITS) serta menjadi sekretaris departemen Sains, Terapan dan Keprofesian (SAINSTEK) HIMATIKA ITS. Sedangkan, untuk lingkup di luar jurusan Matematika ITS, penulis menjadi panitia dalam kegiatan yang diselenggarakan oleh Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) ITS, seperti Generasi Integralistik (GERIGI) ITS dan kegiatan-kegiatan lainnya.

Saran dan kritik untuk tugas akhir ini dapat dikirimkan ke penulis melalui email penulis, yaitu arahmita@yahoo.com.