DISERTASI - KS 186613

MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION*
(Studi Kasus: Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu di Pulau Jawa)

SARNI MANIAR BERLIANA
06211660017001

Promotor
Dr. Purhadi, M.Sc.

Co-Promotor
Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si.

Program Doktor
Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2022

LEMBAR PENGESAHAN

Disertasi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar
Doktor (Dr.)
di
Program Doktor Departemen Statistika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
Sarni Maniar Berliana
NRP. 06211660017001
Tanggal Ujian: 11 Februari 2022
Periode Wisuda: Maret 2022

Disetujui oleh:
Pembimbing

1. Dr. Purhadi, M.Sc. .....
   NIP. 19620204 198701 1 001
2. Dr. Sutikno, S.Si., M.Si. .....
   NIP. 19710313 199702 1 001
3. Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si. .....
   NIP. 19750115 199903 2 003

Penguji

1. Dr. Sarpono, S.Si., M.Sc. .....
   NIP. 19690828 199211 1 001
2. Dr. Muhammad Mashuri, M.T. .....
   NIP. 19620408 198701 1 001
3. Jerry Dwi Trijoyo Purnomo, S.Si, M.Si., Ph.D. .....
   NIP 19810223 200812 1 003
4. Irhamah, S.Si., M.Si., Ph.D. .....
   NIP. 19750115 199903 2 003

Kepala Departemen Statistika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Dra. Kartika Fithriasari, M.Si.
19691212 199303 2 002

MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION* (Studi Kasus: Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu di Pulau Jawa)

Nama	:	Sarni Maniar Berliana
NRP	:	06211660017001
Promotor	:	Dr. Purhadi, M.Sc.
Co-Promotor	:	Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
		Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan *model multivariate generalized Poisson regression* (MGPR) dengan memasukkan *exposure* dalam model dan kovariansi didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas. *Exposure* digunakan untuk memperhitungkan ukuran populasi yang berbeda dari setiap unit lokasi supaya mencerminkan intensitas suatu kejadian yang diteliti, sedangkan pendefinisian kovariansi sebagai fungsi variabel bebas bertujuan untuk menghasilkan kovariansi yang lebih fleksibel. Model ini kemudian disebut sebagai model MGPR modifikasi. Selanjutnya, model MGPR modifikasi tersebut dikembangkan menjadi model *geographically weighted multivariate generalized Poisson regression* (GWMGPR) untuk memperhitungkan variasi spasial dalam memodelkan hubungan antara variabel bebas dengan variabel respon. Penaksiran parameter dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dan diselesaikan dengan algoritma Newton-Raphson. Beberapa pengujian hipotesis parameter model MGPR modifikasi dan GWMGPR dilakukan dengan menggunakan metode *likelihood ratio test* (LRT). Model MGPR modifikasi dan GWMGPR diterapkan dengan menggunakan tiga variabel respon, disebut sebagai model *trivariate generalized Poisson regression* (TGPR) untuk meneliti faktor-faktor yang memengaruhi kematian kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa dengan unit analisis kabupaten/kota. Ukuran *exposure* untuk jumlah kematian bayi, anak, dan ibu, masing-masing adalah jumlah kelahiran hidup, jumlah penduduk usia 1–4 tahun, dan jumlah wanita hamil. Model GWTGPR menghasilkan AICc sebesar 3.001,654, lebih kecil dari pada AICc model TGPR awal dan modifikasi, di mana masing-masing adalah 3.007,890 dan 3.007,893. *Standard error* penaksir parameter model TGPR modifikasi relatif lebih kecil dibandingkan dengan *standard error* penaksir model TGPR awal. Ini menunjukkan bahwa GWTGPR adalah model terbaik dan model TGPR modifikasi relatif lebih baik dari pada model TGPR awal.

Kata Kunci: *Geographically weighted regression*, kesehatan ibu dan anak, *Multivariate generalized Poisson regression*, heterogenitas spasial.

GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION MODEL (Case Study: Infant, Child, and Maternal Mortality Modeling in Java Island)

Name	:	Sarni Maniar Berliana
NRP	:	06211660017001
Promotor	:	Dr. Purhadi, M.Sc.
Co-Promotor	:	Dr. Sutikno, S.Si., M.Si.
		Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

This study aims to develop a multivariate generalized Poisson regression (MGPR) model by including exposure in the model and the covariance is defined as a function of independent variables. Exposure is used to consider the different size of population of each location unit in order to reflect the intensity of an event being studied, while the definition of covariance as a function of independent variables is to produce a more flexible covariance. The model is then referred to as the modified MGPR model. Furthermore, the modified MGPR model was developed into a geographically weighted multivariate generalized Poisson regression (GWMGPR) model to take into account spatial variation in modelling the relationship between independent variables and response variables. The parameter estimation is carried out using the maximum likelihood estimation (MLE) method and solved by the Newton-Raphson algorithm. Several hypothesis testing of modified MGPR and GGMGPR model parameters were carried out by applying the likelihood ratio test (LRT) method. The modified MGPR and GWMGPR models are then applied using three response variables, called as trivariate generalized Poisson regression (TGPR) model to examine the factors that influence infant, child, and maternal mortality in Java with regency/municipality as analysis units. The measure of the exposures for the number of infant, child and maternal mortality are the number of live births, the number of population under five years old, and the number of pregnant women, respectively. The GWTGPR model yields an AICc of 3.001,654, which is smaller than the AICc of the original and modified TGPR models, which are 3.007,890 and 3.007,893, respectively. The standard error of the estimators of the modified TGPR model is relatively smaller than the standard error of the estimators of the TGPR model. This shows that GWTGPR is the best model and the modified TGPR model is relatively better than the original TGPR model.

Key words: Geographically weighted regression, Maternal and child health, Multivariate generalized Poisson regression, Spatial heterogeneity.

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan seluruh kasih, hikmat, dan berkat, sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi dengan judul Model *Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson Regression* dengan studi kasus Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu di Pulau Jawa. Disertasi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Doktor pada Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis juga menyadari bahwa melalui bimbingan, arahan, kerjasama, motivasi, bantuan, serta doa dari berbagai pihak, disertasi ini dapat diselesaikan. Oleh karena itu penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Kepala Badan Pusat Statistik dan Kepala Pusdiklat BPS, yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas kepada penulis untuk melanjutkan studi ke jenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
2. Bapak Dr. Hamonangan Ritonga, M.Sc. (alm.) atas kepercayaannya kepada penulis untuk melanjutkan jenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
3. Ibu Dr. Erni Tri Astuti, M.Math. sebagai Direktur Politeknik Statistika STIS, beserta jajarannya atas dukungan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
4. Rektor ITS dan Dekan FSAD yang telah memfasilitasi proses belajar dan penelitian disertasi.
5. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc., Bapak Dr. Sutikno, S.Si., M.Si., dan Ibu Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si., sebagai pembimbing yang dengan sabar telah banyak memberi arahan, saran, dan motivasi dalam penyusunan dan penyelesaian disertasi.
6. Bapak Dr. Muhammad Mashuri, M.T., Bapak Jerry Dwi Trijoyo Purnomo, S.Si, M.Si., Ph.D., dan Ibu Irhamah, S.Si., M.Si., Ph.D. sebagai Tim Penilai

dan Penguji Internal yang banyak memberikan saran dan masukan dalam perbaikan disertasi.

7. Bapak Dr. Sarpono, S.Si., M.Sc., Direktur Pengembangan Metodologi Sensus dan Survei Badan Pusat Statistik, sebagai Penguji Eksternal yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan pendapat guna penyempurnaan disertasi.
8. Ibu Dr. Kartika Fithriasari, M.Si. selaku Kepala Departemen Statistika, Ibu Santi Wulan Purnami, M.Si., Ph.D. selaku Sekretaris Departemen I (Bidang Akademik, Kemahasiswaan, Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat) dan Ibu Dr. Vita Ratnasari, M.Si selaku Sekretaris Departemen II (Bidang Sumber Daya Keuangan, Sumber Daya Manusia, dan Sarana Prasarana) yang telah memberikan sarana dan prasarana selama proses pendidikan dan penelitian disertasi.
9. Bapak Dr. rer. pol. Dedy Dwi Prastyo, ST, M.Si. sebagai Ketua Program Studi Pascasarjana yang tak lelah memberikan dukungan dan semangat kepada penulis selama menempuh pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
10. Bapak Prof. Dr. rer. pol. Heri Kuswanto, M.Si. sebagai dosen wali yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
11. Bapak Anton Sumitro, Ibu Agatha Patria Putri, dan seluruh staf/karyawan di Departemen Statistika ITS Surabaya yang telah memberikan dukungan, kemudahan serta fasilitas kepada penulis selama studi.
12. Anakku terkasih Nancy Ester Angelica atas kebesaran hatinya mendukung penulis untuk melanjutkan pendidikan dan atas kesabarannya sampai penulis menyelesaikan pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
13. Bapak M. Nababan dan Ibu J. H. Tampubolon, selaku kedua orang tua penulis, keempat adik penulis (Risma Nila, Ear Marison, Helma Ramot Uhum, dan Mutiara), Ibu S. Pardede selaku Tante penulis, dan Bapak H. Tampubolon selaku Tulang penulis, beserta keluarga besar Nababan dan Tampubolon atas dukungan moral dan tenaga kepada penulis selama menempuh pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.

14. Bapak Dendi Romadhon, S.Si., MSE untuk dukungannya kepada penulis selama menempuh pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya.
15. Bapak Dr. Achmad Syahrul Choir, SST, M.Si. yang telah sangat banyak membantu penulis dalam program komputasi sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi.
16. Bapak Dr. Rindang Bangun Prasetyo, SST, M.Si., Ibu Retnaningsih, S.Si., M.E., Ibu Lia Yuliana, S.Si., M.T., Ibu Efri Diah Utami, SST., M.Stat., dan Ibu Dr. Rita Yuliana, S.Si., MSE untuk diskusi dan bantuan yang diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan Program Doktor Statistika ITS di Surabaya.
17. Ibu Yuli Cahya Ningrum, A.md. Stat., S.Sos., sebagai fasilitator antara penulis dengan Pusdiklat BPS guna kelancaran penyelesaian pendidikan Program Doktor Statistika ITS di Surabaya.
18. Seluruh rekan mahasiswa Program Doktor Statistika ITS yang telah bersedia membantu, berdiskusi dan berjuang bersama-sama dalam menyelesaikan studi.
19. Semua pihak yang telah banyak membantu dan tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Akhirnya penulis berharap semoga disertasi ini dapat memberikan sumbangan untuk menambah wawasan keilmuan. Penulis menyadari bahwa tulisan dalam disertasi ini masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran untuk kesempurnaan disertasi ini sangat diharapkan.

Surabaya, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

Lembar Pengesahan i
Abstrak iii
Abstract v
Kata Pengantar vii
Daftar Isi xi
Daftar Tabel xv
Daftar Gambar xvii
Daftar Simbol dan Singkatan xix
BAB 1 Pendahuluan 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Perumusan Masalah 12
1.3 Tujuan Penelitian 13
1.4 Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian 14
1.5 Batasan Masalah 17
BAB 2 Tinjauan Pustaka 19
2.1 Model Regresi *Generalized* Poisson 19
2.1.1 Model Regresi *Generalized* Poisson Univariat (GPR) 20
2.1.1.1 Penaksiran Parameter Model GPR 22
2.1.1.2 Pengujian Parameter Model GPR 23
2.1.2 Model Regresi *Generalized* Poisson Bivariat (BGPR) 24
2.1.2.1 Penaksiran Parameter Model BGPR 27
2.1.2.2 Pengujian Parameter Model BGPR 30
2.1.3 Model Regresi *Generalized* Poisson Multivariat (MGPR) 31
2.1.3.1 Penaksiran Parameter Model MGPR 34
2.1.3.2 Pengujian Parameter Model MGPR 35
2.2 Geographically Weighted Regression (GWR) 36
2.2.1 Geographically Weighted Generalized Poisson Regression (GWGPR) 37

2.2.1.1 Penaksiran Parameter Model GWGPR 37
2.2.1.2 Pengujian Parameter Model GWGPR 39
2.2.2 Geographically Weighted Bivariate Generalized Poisson Regression (GWBGPR) 42
2.2.2.1 Penaksiran Parameter Model GWBGPR 43
2.2.2.2 Pengujian Parameter Model GWBGPR 45
2.3 Distribusi Penaksir *Maximum Likelihood* 48
2.4 Efek Spasial 49
2.4.1 Dependensi Spasial 50
2.4.2 Heterogenitas Spasial 51
2.4.3 Pembobot Spasial 52
2.5 Kesehatan Ibu dan Anak 54
2.5.1 Kematian Bayi dan Anak 56
2.5.2 Kematian Ibu 58
2.5.3 Determinan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu 60
BAB 3 Metode Penelitian 63
3.1 Tahapan Pengembangan Teori 63
3.1.1 Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Model MGPR Modifikasi 64
3.1.2 Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Model GWMGPR 67
3.2 Penelitian Aplikatif 70
3.2.1 Sumber Data 70
3.2.2 Gambaran Umum Pulau Jawa 71
3.2.3 Variabel Penelitian 73
3.2.4 Hubungan antara Variabel-variabel Penelitian dalam Model 75
3.2.5 Tahapan Analisis Data 76
BAB 4 Multivariate Generalized Poisson Regression Modifikasi 79
4.1 Model MGPR Modifikasi 79
4.2 Penaksiran Parameter Model MGPR Modifikasi 81

4.3 Pengujian Hipotesis Serentak Parameter Model MGPR Modifikasi 83
4.3.1 Pengujian Serentak Parameter β_{lk} dan β_{lmk} 84
4.3.2 Pengujian Serentak Parameter β_{lk} 92
4.3.3 Pengujian Serentak Parameter β_{lmk} 98
4.4 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter Model MGPR Modifikasi 104
4.4.1 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter β_{lk} 104
4.4.2 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter β_{lmk} 106
4.4.3 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter φ_l 107
BAB 5 Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson Regression 111
5.1 Model GWMGPR 111
5.2 Penaksiran Parameter Model GWMGPR 112
5.3 Pengujian Hipotesis Serentak Parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ Model GWMGPR 116
5.4 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ Model GWMGPR 124
BAB 6 Penerapan Model MGPR Modifikasi dan GWMGPR pada Data Kematian Bayi, Anak, dan Ibu 127
6.1 Deskripsi Data Penelitian 127
6.2 Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu dengan Model TGPR Modifikasi 134
6.3 Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu dengan Model GWTGPR 144
BAB 7 Kesimpulan dan Saran 153
7.1 Kesimpulan 153
7.2 Saran 156
Daftar Pustaka 159

Daftar Riwayat Hidup 169
Lampiran 1 Tabel Data Penelitian 171
Lampiran 2 Turunan Kedua Fungsi Likelihood: TGPR Modifikasi 173
Lampiran 3 Turunan Kedua Fungsi Likelihood Terboboti: GWTGPR 185
Lampiran 4 Matriks Hessian: TGPR Modifikasi 191
Lampiran 5 Matriks Hessian Per Lokasi: GWTGPR 193
Lampiran 6 Jumlah Parameter Efektif Model GWTGPR 195
Lampiran 7 Validasi Turunan Parsial Pertama 201
Lampiran 8 Validasi Turunan Parsial Kedua 203
Lampiran 9 Uji Heterogenitas dan Dependensi Spasial 205
Lampiran 10 Penaksir Parameter dan Signifikansi Parameter Model GWTGPR 207
Lampiran 11 Matrix Plot Antara Variabel Respon dan Variabel Bebas 237
Lampiran 12 Coding Model TGPR dan GWTGPR 239
Lampiran 13 Naskah Prosiding – MGPR Modifikasi 243
Lampiran 14 Naskah Artikel Mathematics – GWMGPR 255

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Perbandingan Penelitian Sebelum dan Penelitian yang Akan Dilakukan 16
Tabel 2.1 Determinan Sosial Kesehatan 55
Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian 70
Tabel 3.2 Definisi Operasional Variabel Penelitian 73
Tabel 6.1 Nilai Minimum, Maksimum, Mean, dan Standar Deviasi dari Variabel-variabel Penelitian 128
Tabel 6.2 Nilai Korelasi Antarvariabel Respon dan Variabel Bebas 132
Tabel 6.3 Nilai VIF untuk Masing-masing Variabel Bebas 133
Tabel 6.4 Penaksir Parameter Model TGPR Awal untuk Kematian Bayi, Kematian Anak dan Kematian Ibu 139
Tabel 6.5 Penaksir Parameter Model TGPR Modifikasi untuk Kematian Bayi, Kematian Anak dan Kematian Ibu 142
Tabel 6.6 Pengelompokan Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dengan Model GWTGPR 148
Tabel 6.7 Penaksir Parameter dan Signifikansi Parameter Model GWTGPR, Kota Surabaya dan Kuningan 152

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Peta Posisi Kegiatan Penelitian 15

Gambar 2.1 Bagan Kematian Bayi, Anak, dan Balita 56

Gambar 2.2 Kerangka Pikir Teoretis Kelangsungan Hidup Anak 57

Gambar 2.3 Determinan Sosial Kesehatan Ibu 59

Gambar 2.4 Kerangka Konseptual Determinan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu 62

Gambar 3.1 Wilayah Administratif Kabupaten/Kota dan Titik Koordinat Kantor Bupati/Wali Kota di Pulau Jawa Tahun 2019 72

Gambar 6.1 Persebaran Jumlah Kematian Bayi di Pulau Jawa Tahun 2019 129

Gambar 6.2 Persebaran Tingkat Kematian Bayi di Pulau Jawa Tahun 2019 129

Gambar 6.3 Persebaran Jumlah Kematian Anak di Pulau Jawa Tahun 2019 130

Gambar 6.4 Persebaran Tingkat Kematian Anak di Pulau Jawa Tahun 2019 130

Gambar 6.5 Persebaran Jumlah Kematian Ibu di Pulau Jawa Tahun 2019 131

Gambar 6.6 Persebaran Tingkat Kematian Ibu di Pulau Jawa Tahun 2019 131

Gambar 6.7 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan terhadap Kematian Ibu di Pulau Jawa 149

DAFTAR SIMBOL DAN SINGKATAN

Simbol	Pengertian
α	Taraf signifikansi
β_{lk}	Parameter model regresi untuk variabel respon ke$-l$ dan variabel bebas ke$-k$
β_{lmk}	Parameter model regresi untuk kovariansi antara variabel respon ke$-l$ dan variable respon ke$-m$ dan variabel bebas ke$-k$
$\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$	Parameter model regresi untuk variabel respon ke$-l$ dan variabel bebas ke$-k$ pada lokasi ke$-i$
λ	Parameter *generalized* Poisson
ϕ	Parameter dispersi GPD klasik
φ	Parameter dispersi GPD terbatas (RGPD)
γ_{lm}	Parameter kovariansi antara variabel respon ke$-l$ dan ke$-m$
ρ_{lm}	Koefisien korelasi antara variabel respon ke$-l$ dan ke$-m$
μ	Parameter *mean* (rata-rata)
σ^2	Parameter variansi
Ω	Ruang parameter di bawah populasi
Ω_1	Ruang parameter di bawah populasi untuk model MGPR modifikasi
Ω_2	Ruang parameter di bawah populasi untuk model GWMGPR
ω	Ruang parameter di bawah H_0 untuk model MGPR modifikasi
ω_1	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk} dan β_{lmk}
ω_2	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk}
ω_3	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak β_{lmk}
ω_4	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis parsial β_{lk}

ω_5	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak β_{lmk}
ω_6	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak φ_l
ϖ	Ruang parameter di bawah H_0 untuk model GWMGPR
ϖ_1	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis serentak $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$
ϖ_2	Ruang parameter di bawah H_0 untuk pengujian hipotesis parsial $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$
a_1	Jumlah parameter di bawah populasi model MGPR modifikasi
a_2	Jumlah parameter di bawah populasi model GWMGPR
b_1	Jumlah parameter di bawah H_0 (ω_1) model MGPR modifikasi
b_2	Jumlah parameter di bawah H_0 (ω_2) model MGPR modifikasi
b_3	Jumlah parameter di bawah H_0 (ω_3) model MGPR modifikasi
$\mathfrak{b}_1$	Jumlah parameter di bawah H_0 (ϖ_1) model GWMGPR
b_i	*Bandwidth* lokasi ke $-i$
d_{ij}	Jarak Euclidean antara lokasi ke $-i$ dan lokasi ke $-j$
g	Jumlah variabel respon/dependen
$\mathbf{g}$	Vektor gradien
$\mathbf{g}_i$	Vektor gradien pada observasi ke $-i$
h	Iterasi ke $-h$
i	Indeks observasi/lokasi ke $-i$
j	Indeks observasi/lokasi ke $-j$
k	Indeks variabel bebas ke $-k$; $k = 1, 2, ..., p$
l	Indeks variabel respon ke $-l$
m	Indeks variabel respon ke $-m$ di mana $l < m$
n	Ukuran sampel
p	Jumlah variabel bebas (kovariat)
q_{il}	Ukuran *exposure* untuk variabel respon ke $-l$ pada lokasi ke $-i$

r	Batasan (*constraint*) dalam model MGPR dan GWMGPR
$\mathbf{u}_i$	Vektor koordinat bujur (*longitude*) dan lintang (*latitude*) lokasi ke$-i$
v_1	Jumlah parameter efektif model GWGPR
v_2	Jumlah parameter efektif model GWTGPR
w_{ij}	Nilai pembobot lokasi ke$-i$ dan lokasi ke$-j$
$\mathbf{x}_i$	Vektor variabel bebas untuk amatan/lokasi ke$-i$
z	Pemisalan dalam model MGPR dan GWMGPR
G_{11}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk} dan β_{lmk}
G_{12}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk}
G_{13}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis serentak β_{lmk}
G_{14}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis parsial β_{lk}
G_{15}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis parsial β_{lmk}
G_{16}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis parsial φ_l
G_{21}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis serentak $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$
G_{22}^2	Statistik uji untuk pengujian hipotesis parsial $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$
$\mathbf{H}$	Matriks Hessian
$\mathbf{I}$	Matriks Informasi
$\mathbf{J}$	Matriks OPG (*outer product of gradient*)
Q_1	Fungsi *ln-likelihood* di bawah populasi untuk model MGPR modifikasi
Q_2	Pemisalan dalam Q_1
$Q_{1\omega_1}$	Fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 (ω_1) untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk} dan β_{lmk} pada model MGPR modifikasi
$Q_{2\omega_1}$	Pemisalan dalam $Q_{1\omega_1}$
$Q_{1\omega_2}$	Fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 (ω_2) untuk pengujian hipotesis serentak β_{lk} pada model MGPR modifikasi
$Q_{2\omega_2}$	Pemisalan dalam $Q_{1\omega_2}$

$Q_{1\omega_3}$	Fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 (ω_3) untuk pengujian hipotesis serentak β_{lmk} pada model MGPR modifikasi
$Q_{2\omega_3}$	Pemisalan dalam $Q_{1\omega_3}$
Q_3	Fungsi *ln-likelihood* di bawah populasi untuk lokasi ke $-i$ pada model GWMGPR
$\mathbb{Q}_3$	Fungsi *ln-likelihood* terboboti di bawah populasi untuk lokasi ke $-i$ pada model GWMGPR
$Q_{3\varpi_1}$	Fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 (ϖ_1) lokasi ke $-i$ untuk pengujian hipotesis serentak $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ pada model GWMGPR
$\mathbb{Q}_{3\varpi_1}$	Fungsi *ln-likelihood* terboboti di bawah H_0 (ϖ_1) lokasi ke $-i$ untuk pengujian hipotesis serentak $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ pada model GWMGPR
Q_4	Pemisalan dalam Q_3
$\mathbb{Q}_4$	Pemisalan dalam $\mathbb{Q}_3$
$Q_{4\varpi_1}$	Pemisalan dalam $Q_{3\varpi_1}$
$\mathbb{Q}_{4\varpi_1}$	Pemisalan dalam $\mathbb{Q}_{3\varpi_1}$
$\mathbf{S}$	*Hat matrix*
$\mathbf{W}_{n\times n}$	Matriks pembobot
$\mathbf{Y}_{n\times g}$	Matriks variabel respon
$\mathbf{X}_{n\times(p+1)}$	Matriks variabel bebas

Singkatan	**Kepanjangan**
AIC	*Akaike Information Criterion*
AICc	*Corrected AIC*
BGPD	*Bivariate generalized Poisson distribution*
BGPR	*Bivariate generalized Poisson regression*
GP	*Generalized Poisson*
GPD	*Generalized Poisson distribution*
GPR	*Generalized Poisson regression*

GWBGPR	*Geographically weighted bivariate generalized Poisson regression*
GWLR	*Geographically weighted logistic regression*
GWR	*Geographically weighted regression*
GWGPR	*Geographically weighted generalized Poisson regression*
GWMGPR	*Geographically weighted multivariate generalized Poisson regression*
GWMPR	*Geographically weighted multivariate Poisson regression*
GWPR	*Geographically weighted Poisson regression*
GWTGPR	*Geographically weighted trivariate generalized Poisson regression*
MDGs	*Millenium development goals*
MGPD	*Multivariate generalized Poisson distribution*
MGPR	*Multivariate generalized Poisson regression*
MPD	*Multivariate Poisson distribution*
MPR	*Multivariate Poisson regression*
OPG	*Outer product gradient*
PD	*Poisson distribution*
PR	*Poisson regession*
SDGs	*Sustainable development goals*
SDKI	Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia
STBM	Sanitasi Total Berbasis Masyarakat
SUPAS	Survei Penduduk Antar-Sensus
SUSENAS	Survei Sosial Ekonomi Nasional
TGPR	*Trivariate generalized Poisson regression*
TTU	Tempat-tempat umum
U5MR	*Under-five mortality rate*
VIF	*Variance-Inflating Factor*

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah kematian merupakan isu menarik untuk diteliti meskipun secara global tingkat kematian menunjukkan penurunan sebagai dampak semakin membaiknya pembangunan di bidang kesehatan. Seiring dengan tujuan umum ketiga dari tujuan pembangunan berkelanjutan atau *sustainable development goals* (SDGs) sebagai kelanjutan dari *millenium development goals* (MDGs) untuk periode tahun 2015–2030 adalah menjamin hidup sehat dan mempromosikan kesejahteraan untuk semua umur maka, berkaitan dengan kesehatan ibu dan anak, diharapkan bahwa pada tahun 2030 secara global rasio kematian maternal (RKM) adalah kurang dari 70 kematian per 100.000 kelahiran hidup dan kematian neonatal menjadi kurang dari 12 kematian per 1.000 kelahiran hidup serta kematian di bawah lima tahun (*under-five mortality* - U5MR) menjadi kurang dari 25 per kematian per 1.000 kelahiran hidup (United Nations Development Programme, 2016).

Tingkat kematian di Indonesia telah menunjukkan penurunan sebagai hasil perbaikan bidang kesehatan. Secara nasional, kondisi terkini berdasarkan hasil Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI) tahun 2017, angka kematian bayi (IMR) adalah 24 kematian per 1.000 kelahiran hidup. Sementara itu, berdasarkan sumber data yang sama, angka kematian anak dan balita, masing-masing adalah 8 kematian per 1.000 anak 1-4 tahun dan 32 kematian per 1.000 anak 0-4 tahun (BPS; BKKBN; Kemenkes; ICF International, 2018). Indikator tingkat kematian lainnya, yaitu rasio kematian maternal (RKM) 305 kematian per 100.000 kelahiran hidup berdasarkan hasil Survei Penduduk Antar-Sensus (SUPAS) 2015 (Badan Pusat Statistik, 2016). Terlihat bahwa indikator kesehatan ibu dan anak di Indonesia belum mencapai target tujuan ketiga SDGs sehingga pemerintah Indonesia masih harus bekerja lebih keras lagi untuk pencapaian tujuan ketiga SDGs tersebut khususnya untuk RKM.

Tingkat kematian jauh dari homogen secara spasial. Variasi geografis untuk angka kematian telah berulang kali diteliti dan dibuktikan pada skala

geografis yang sangat berbeda, seperti level nasional, perkotaan/perdesaan, dan sebagainya (De Castro, 2007; Martinez-Beneito dkk., 2021). Hal ini disebabkan karena faktor risiko kematian bervariasi menurut wilayah, misalnya suatu wilayah mengalami kesulitan untuk mengakses fasilitas/layanan kesehatan dibandingkan dengan wilayah lainnya karena terletak di wilayah terpencil atau terisolir.

Variasi angka kematian ini juga terjadi di Indonesia. Jika dianalisis menurut provinsi di Indonesia, maka tingkat kematian di Indonesia sangat bervariasi. Sebagai wilayah yang relatif lebih maju, provinsi di wilayah Indonesia bagian barat memiliki tingkat kematian bayi dan anak relatif lebih rendah dibandingkan dengan provinsi di wilayah bagian timur Indonesia. Sebagai contoh, provinsi di Papua, Maluku, dan Sulawesi memiliki tingkat kematian bayi dan U5MR relatif lebih tinggi dibandingkan dengan provinsi di Pulau Jawa (BPS; BKKBN; Kemenkes; ICF International, 2018). Sementara itu, tingkat kematian ibu menurut provinsi, terlebih lagi menurut kabupaten/kota, belum tersedia datanya.

Meskipun tingkat kematian bayi dan anak pada provinsi di Pulau Jawa secara umum relatif lebih rendah dibandingkan dengan provinsi di luar Pulau Jawa, namun tetap terdapat variasi angka kematian menurut geografis wilayah Pulau Jawa. Tingkat kematian bayi dan U5MR relatif lebih tinggi di Banten dan Jawa Timur dibandingkan dengan provinsi lainnya di Pulau Jawa, bahkan angkanya di atas rata-rata angka kematian bayi dan U5MR nasional. Berkaitan dengan target SDGs, terdapat tiga provinsi di Pulau Jawa yang telah mencapai target U5MR, yaitu DI Yogyakarta, Jawa Tengah, dan DKI Jakarta, sedangkan Jawa Timur, Jawa Barat, dan Banten belum mencapai target U5MR SDGs (BPS; BKKBN; Kemenkes; ICF International, 2018). Selain itu, hasil Sensus Penduduk menunjukkan bahwa lebih dari separuh penduduk Indonesia tinggal di pulau ini, sehingga analisis kematian di Pulau Jawa menarik dan perlu untuk dilakukan.

Dinas Kesehatan mempublikasikan data jumlah kematian bayi, anak, dan ibu menurut provinsi di seluruh Indonesia setiap tahun. Data yang dipublikasikan oleh Dinas Kesehatan ini berbeda dengan data tingkat kematian yang dipublikasikan oleh Badan Pusat Statistik (BPS). BPS mempublikasikan angka atau tingkat kematian berdasarkan teknik penghitungan secara tidak langsung (*indirect method*) sementara Dinas Kesehatan mempublikasikan data kematian dalam bentuk

jumlah atau banyaknya kejadian kematian (*count*). Penghitungan tingkat kematian secara langsung (*direct method*) dilakukan dengan cara membagi jumlah kematian (bayi, anak, atau ibu) dalam satu tahun dengan jumlah kelahiran dalam periode yang sama dikalikan dengan suatu konstanta, umumnya 1000. Meskipun demikian, tingkat kematian dengan metode langsung tidak pernah dipublikasikan mengingat kualitas pelaporan data berkaitan dengan peristiwa kelahiran, kematian, atau perpindahan relatif kurang baik.

Data dari Dinas Kesehatan setiap provinsi di Pulau Jawa menunjukkan adanya disparitas jumlah kematian bayi, anak, dan ibu menurut provinsi di Pulau Jawa. Jumlah minimum kejadian kematian bayi, anak, dan ibu tahun 2019 adalah nol, sedangkan jumlah maksimum masing-masing kejadian adalah 328, 64, dan 72 kematian. Jumlah kematian di Provinsi Jawa Barat, Jawa Tengah, dan Jawa Timur jauh lebih besar dibandingkan dengan jumlah kematian di provinsi lainnya. Namun, harus diperhatikan bahwa ketiga provinsi ini merupakan provinsi besar dengan jumlah penduduk yang lebih banyak, sehingga analisis data kematian dari sisi jumlah dapat menyesatkan. Oleh karena itu, jumlah kematian tersebut perlu dikontrol dengan suatu ukuran, misalnya jumlah kelahiran, untuk memperhitungkan perbedaan ukuran populasi setiap wilayah.

Rata-rata kejadian kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa, masing-masing adalah 106,16; 13,08; dan 16,56 kematian dengan variansi masing-masing adalah 4.291,95; 126,63; dan 166,94. Hal ini menunjukkan bahwa kejadian kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa mengalami overdispersi, yaitu variansi data lebih besar dari pada rata-rata. Selanjutnya, berdasarkan statistik uji Bartlett, kejadian kematian bayi, anak, dan ibu signifikan saling berkorelasi pada taraf signifikansi 5%. Sementara itu, secara teoretis, kejadian kematian bayi, anak dan ibu saling berkaitan, mengingat ketiga kejadian ini merupakan luaran (*outcome*) akhir dari kesehatan masyarakat sebagai dampak dari sistem kesehatan (Muldoon dkk., 2011; Heiman dan Artiga, 2015).

Kematian bayi, anak, dan ibu umum digunakan sebagai indikator standar kemajuan suatu wilayah, terutama di bidang kesehatan. Kelangsungan hidup bayi dan anak sangat dipengaruhi oleh faktor ibu (Mosley dan Chen, 1984) dan terdapat banyak faktor yang dapat dilakukan secara simultan dan komprehensif untuk

mencegah kematian ibu (McCarthy dan Maine, 1992; United Nations Development Programme, 2011). Kesehatan ibu memiliki memiliki konsekuensi yang luas bagi kesehatan anak-anaknya, keluarga, dan masyarakat juga. Sebagai contoh, promosi penolong persalinan oleh tenaga kesehatan terlatih pada saat melahirkan bertujuan untuk memastikan ibu tetap hidup yang pada gilirannya berkaitan dengan perawatan pascapersalinan untuk ibu dan bayi baru lahir dan kelangsungan hidup mereka selanjutnya.

Kelangsungan hidup bayi dan anak dipengaruhi oleh kelangsungan hidup ibu, salah satunya dalam hal pemberian ASI eksklusif pada enam bulan pertama dan pemberian ASI lanjutan sampai dengan anak berumur dua tahun. Pemberian ASI (eksklusif) bermanfaat dalam memberikan imunitas, menurunkan risiko infeksi, dan memberikan gizi pada bayi dan anak (Institute of Medicine, 1990; Smith dkk., 2003). United Nations Children's Fund (1998) membuat kerangka berpikir konseptual bagaimana kesehatan ibu dapat menyebabkan anak mengalami kekurangan gizi, disabilitas dan kematian. Salah satu faktor penyebabnya adalah kurangnya praktik maternal dalam penyediaan asupan gizi yang cukup sehingga menyebabkan anak mengalami kekurangan gizi, disabilitas, bahkan kematian.

Beberapa penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa kelangsungan hidup anak yang berasal dari ibu yang sama dapat memengaruhi kelangsungan hidup anak berikutnya (Alam dan David, 1998; Boerma dan Bicego, 1992; Gubhaju, 1985; Srivastava dkk., 2021). Mekanisme kaitan antara kematian bayi dan anak dimungkinkan karena (1) anak yang dilahirkan dari ibu yang sama berarti memiliki faktor risiko ibu yang sama (*maternal nutritional depletion*), (2) kompetisi antar-anak khususnya jika sumber daya dalam keluarga terbatas, dan (3) transmisi penyakit infeksi dari anak sebelumnya ke anak/kelahiran selanjutnya. Penjelasan ini memberikan argumentasi bahwa kejadian kematian bayi, anak, dan ibu perlu dianalisis secara multivariat dikarenakan lebih dari dua variabel dan saling berhubungan.

Penelitian berkaitan dengan determinan kesehatan ibu dan anak telah banyak dilakukan, beberapa diantaranya adalah oleh Martin, Trussell, Salvail, dan Shah (1983), Hobcraft (1984), Hay (1999), Wahab (2001), Koblinsky (2003), Ronsmans dkk. (2009), Shrestha (2010), Mellington dan Cameron (1999), dan

Muldoon, Galway, Nakajima, Kanters, Hogg, Bendavid, dan Mills (2011). Secara umum, analisis kejadian kematian dalam penelitian-penelitian tersebut bersifat deskriptif, dimodelkan secara univariat dan bersifat aspasial. Penelitian mengenai determinan kematian secara multivariat dan spasial diantaranya adalah oleh Triyanto, Purhadi, Otok, dan Purnami (2015); Dewi, Purhadi, Sutikno dan Purnami (2017); dan Purhadi, Sutikno, Berliana, dan Setiawan (2021).

Beberapa pemodelan yang relevan untuk variabel respon berupa data jumlah atau data cacah (*count*) diantaranya adalah menggunakan model regresi berdasarkan distribusi Poisson, *generalized* Poisson, binomial negatif, atau *zero inflated* Poisson (ZIP). Regresi Poisson digunakan untuk memodelkan data cacah (*count*) yang berdistribusi Poisson dengan variabel respon merupakan bilangan bulat positif, yaitu berupa banyaknya suatu kejadian (*event*) dalam suatu interval waktu (Winkelmann, 2008; Cameron dan Trivedi, 2013). Salah satu ciri khas distribusi Poisson adalah adanya asumsi ekuidispersi, yaitu bahwa rata-rata sampel sama dengan variansi sampel. Jika variansi sampel lebih besar dari pada rata-rata sampel disebut overdispersi dan disebut underdispersi jika sebaliknya. Distribusi binomial negatif dapat mengakomodasi kasus overdispersi, distribusi *generalized* Poisson mengakomodasi jenis dispersi apapun, sementara distribusi ZIP digunakan untuk data cacah dengan jumlah nol berlebihan.

Secara umum, model regresi dapat dilakukan secara univariat atau multivariat. Model regresi univariat merupakan model regresi dengan satu variabel respon, sedangkan model regresi multivariat merupakan model regresi dengan dua variabel respon atau lebih yang saling berkorelasi. Winkelmann (2008) membahas pengembangan model regresi univariat Poisson ke model regresi multivariat Poisson, khususnya untuk distribusi bivariat Poisson yang banyak diaplikasikan dalam model ekonometrika. Kocherlakota dan Kocherlakota (1992) membahas secara komprehensif beberapa teknik memperoleh distribusi bivariat Poisson, salah satunya adalah metode reduksi trivariat yang digunakan oleh Jung dan Winkelmann (1993), Kocherlakota dan Kocherlakota (2001), dan Karlis dan Ntzoufras (2003). Kelemahan dari metode reduksi trivariat dalam membentuk fugsi peluang bersama adalah bahwa korelasi antarvariabel respon harus positif (Famoye, 2010). Jung dan Winkelmann (1993) menghasilkan model yang mirip dengan *seemingly unrelated*

Poisson regression model (SUPREME) seperti yang diperoleh oleh King (1989). Kocherlakota dan Kocherlakota (2001), melakukan penaksiran koefisien regresi dengan metode penaksiran *maximum likelihood* yang diselesaikan dengan metode iterasi Newton-Raphson, sementara itu Karlis dan Ntzoufras (2003) menggunakan algoritma *expectation-maximization* (EM) untuk memperoleh penaksir *maximum likelihood*.

Penerapan model regresi Poisson membutuhkan pemenuhan asumsi ekuidispersi di mana asumsi ini sangat sulit terpenuhi pada aplikasi dengan menggunakan data riil. Pelanggaran terhadap asumsi tersebut menyebabkan penaksir parameter yang bias dan pengambilan kesimpulan yang menyesatkan (McLachlan dan Peel, 2000). Model alternatif untuk mengatasi kasus overdispersi umumnya berupa model regresi *mixture-Poisson*, seperti *Poisson-Inverse Gaussian*, *Poisson log-normal*, dan *Poisson-gamma* (binomial negatif) (Denuit dkk., 2007). Ketiga model ini banyak diaplikasikan pada kasus aktuaria. Sementara itu, beberapa model alternatif untuk data cacah yang memperhitungkan overdispersi atau underdispersi diantaranya adalah *generalized event count model*, *double Poisson distribution*, *gamma count distribution*, dan *generalized Poisson distribution* (Consul dan Jain, 1973; Winkelmann, 2008). Dari keempat distribusi yang mengakomodasi overdispersi dan underdispersi ini, tidak dapat serta-merta ditentukan distribusi mana yang lebih baik, karena masing-masing distribusi memiliki kelemahan, seperti rentang observasi pada *generalized event count model* dan *generalized Poisson distribution* tergantung pada nilai parameter untuk kasus underdispersi, moment pertama *double Poisson distribution* tidak *closed form*, dan fungsi *gamma count distribution* tidak dapat dinyatakan dalam formula sederhana (Famoye, 2010; Winkelmann, 2008). Dalam perkembangan selanjutnya, distribusi *generalized* Poisson paling banyak diteliti sifat dan propertinya (Consul dan Shoukri, 1984; Consul dan Shoukri, 1985; Consul dan Famoye, 1988; Consul dan Famoye, 1992; Famoye, 1993) serta dikembangkan dan dimodifikasi menjadi model regresi baik univariat, bivariat, maupun multivariat, seperti yang dilakukan oleh Wang dan Famoye (1997), Yang (2009), Zamani dan Ismail (2012) dan Zamani, dkk. (2016).

Generalized Poisson distribution (GPD), sebagai salah satu distribusi alternatif untuk data cacah, diperkenalkan oleh Consul dan Jain (1973) sebagai bentuk terbatas distribusi *generalized negative binomial* (GNB). Ketika parameter-parameter GNB didefinisikan sedemikian rupa maka GNB yang dihasilkan merupakan distribusi Poisson dengan dua parameter di mana salah satunya merupakan parameter dispersi. Dengan adanya parameter dispersi tersebut maka GPD dapat mengakomodasi overdispersi atau underdispersi pada distribusi Poisson. GPD hasil Consul dan Jain (1973) ini kemudian dimodifikasi oleh Consul dan Shoukri (1985) untuk mengatasi kekurangan model pada kasus underdispersi. Selanjutnya, Lerner (1997) dan Tuenter (2000) membuktikan beberapa sifat GPD yang dihasilkan Consul dan Jain (1973), seperti GPD sebagai ukuran peluang dan distribusi peluang.

Seperti halnya model regresi Poisson standar, maka model regresi berdasarkan GPD juga dapat dilakukan secara univariat maupun multivariat. Model yang dihasilkan tersebut, ternyata sesuai untuk diaplikasikan pada data berdistribusi Poisson, binomial, dan binomial negatif. Consul dan Famoye (1992) mendefinisikan model regresi berdasarkan GPD untuk menduga variabel respon yang dipengaruhi oleh satu atau lebih kovariat. Yang, Hardin, dan Addy (2009) menyebut model regresi yang dihasilkan ini sebagai model GPR klasik (GP-I). Penaksiran parameter diperoleh dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dan metode moment. Model GPR yang dihasilkan akan sama dengan model regresi Poisson standar ketika asumsi ekuidispersi terpenuhi.

Wang dan Famoye (1997) mendefinisikan model GPR berdasarkan *restricted* GPD dalam Consul (1989) dan Famoye (1993). *Restricted* GPD diperoleh dengan melakukan transformasi parameter dispersi pada GPD hasil Consul dan Famoye (1992). Untuk selanjutnya, pada penelitian ini, GPD hasil Consul dan Famoye (1992) disebut sebagai GPD klasik. *Restricted* GPD tersebut diaplikasikan oleh Wang dan Famoye (1997) untuk menganalisis keputusan fertilitas rumah tangga di mana data fertilitas yang digunakan mengalami underdispersi sehingga tidak tepat jika menggunakan model regresi binomial negatif. Berdasarkan nilai *Akaike Information Criterion* atau AIC (Akaike, 1973) dan koefisien determinasi semu (Merkle dan Zimmermann, 1992), model GPR memberikan hasil lebih baik

dibandingkan model regresi Poisson standar. Yang dkk. (2009) menyebut model regresi yang dihasilkan ini sebagai model GP-II. Dengan menggunakan model GPR yang sama pada data kecelakaan, Famoye, Wulu, dan Singh (2004) memperoleh kesimpulan serupa, yaitu bahwa ketika terjadi overdispersi maka model GPR lebih baik daripada model regresi Poisson standar. Sementara itu, pada kasus overdispersi, maka model GPR sama baiknya dengan model regresi binomial negatif. Namun, jika jenis dispersi tidak diketahui, maka pilihan lebih baik adalah menggunakan model GPR karena lebih fleksibel (Famoye dkk., 2004).

Pengembangan GPD univariat menjadi GPD bivariat (BPGD) dilakukan oleh Famoye dan Consul (1995) menggunakan metode reduksi trivariat berdasarkan GPD oleh Consul (1989), dan Consul dan Famoye (1992). Penaksiran parameter BPGD diperoleh dengan metode moment dan teknik *maximum likelihood*. Metode moment tersebut digunakan untuk menentukan nilai dugaan awal parameter pada metode MLE. Model BGPD ini memiliki enam parameter dan memiliki kelemahan, yaitu hanya memperbolehkan korelasi positif sebagai konsekuensi penerapan metode reduksi trivariat dalam pembentukan BGPD. Sementara itu, dengan BGPD yang sama, Vernic (1997) membahas beberapa sifat distribusi BGPD, seperti fungsi pembangkit peluang, fungsi pembangkit moment, dan moment serta distribusi marginal.

Selanjutnya, Famoye (2010) mendefinisikan BGPD alternatif dengan struktur korelasi yang lebih fleksibel berdasarkan *restricted* GPD oleh Consul (1989) dan Famoye (1993). Pembentukan BGPD ini mengikuti cara kerja Lakshminarayana, Pandit, dan Rao (1999) dalam membentuk distribusi bivariat Poisson (BPD), yaitu sebagai perkalian marginal Poisson dengan suatu faktor pengali. BGPD yang dihasilkan oleh Famoye (2010) tersebut merupakan perkalian *restricted* GPD univariat dengan suatu faktor pengali. Berdasarkan uji Vuong (Vuong, 1989) dan uji Clarke (Clarke, 2007) untuk kebaikan model, model BGPR yang dihasilkan berdasarkan BGPD ini memiliki performa lebih baik daripada model regresi binomial negatif bivariat (BNBR) jika kedua variabel respon berkorelasi positif. Namun, karena BGPR dapat menangani underdispersi maka BGPR merupakan model yang sebaiknya dipertimbangkan pertama kali (Famoye, 2012).

Aplikasi BGPD dengan melibatkan kovariat dilakukan oleh Zamani, Faroughi, dan Ismail (2016) dengan mendefinisikan model regresi yang lebih umum (BGPR-P), yaitu suatu model yang menyarangkan (*nested*) model Poisson dan *generalized Poisson* tipe 1 (BGPR-1) dan tipe 2 (BGPR-2) sehingga dari *likelihood ratio test* (LRT) dapat diketahui model yang terbaik, apakah BGPR-1 atau BGPR-2. Model BGPR-P diturunkan dari model GPR-P oleh Zamani dan Ismail (2012). Model GPR-1 merupakan modifikasi model GPR oleh Consul (1989) dan Consul dan Famoye (1992), sedangkan model GPR-2 berdasarkan model yang diaplikasikan oleh Wang dan Famoye (1997). Model BGPR-1 dan 2 diturunkan dengan menggunakan pendekatan Lakshminarayana dkk. (1999) dalam memperoleh BPD. Perbedaan antara BGPR-1 dan BGPR-2 adalah pada hubungan antara rata-rata dan variansi. Pada model BGPR-1, hubungannya adalah linier sementara pada BGPR-2, hubungannya adalah kubik.

Dengan teknik yang sama ketika memperoleh BGPD, Vernic (2000) menurunkan *multivariate generalized Poisson distribution* (MGPD), yaitu dengan metode reduksi multivariat sebagai pengembangan dari metode reduksi trivariat. Pengembangan model *generalized Poisson* (GP) untuk lebih dari dua dimensi juga dilakukan oleh Famoye, Okafor, dan Adamu (2011) dan Famoye (2015) dengan menghasilkan model *multivariate generalized Poisson regression* (MGPR) berdasarkan MGPD. MGPD tersebut diperoleh dengan prosedur yang sama ketika memperoleh BGPD (Famoye, 2010), yaitu sebagai perkalian marginal univariat GP dengan suatu faktor pengali di mana GPD yang digunakan adalah *restricted* GPD dalam Consul (1989). Beberapa sifat MGPD ini adalah mengakomodasi arah korelasi apapun, mengakomodasi tipe dipersi apapun, parameter korelasi dan dispersi terpisah, serta memiliki mean dan variansi *closed form* (Famoye, 2015).

Unit analisis untuk penerapan MGPD maupun MGPR di atas umumnya individu seperti penduduk usia lanjut, wanita, pasien, tim sepak bola, atau rumah tangga, dan sebagainya. Berbeda halnya ketika unit analisis yang digunakan adalah lokasi. *Tobler's First Law* menyatakan bahwa segala sesuatu saling berhubungan, namun yang berdekatan akan lebih berkaitan dari pada yang berjauhan (Tobler, 1970). Dengan demikian, ketika unit analisis yang digunakan merupakan lokasi,

maka pengaruh spasial perlu diperhitungkan dalam memodelkan hubungan antara variabel bebas terhadap variabel respon.

Umumnya, jika data sampel mengandung unsur lokasi atau spasial maka ada dua kemungkinan isu yang muncul, yaitu dependensi spasial atau heterogenitas spasial (Anselin, 1988). Dependensi spasial terjadi ketika observasi di suatu titik dalam ruang (*space*) tergantung pada observasi di titik lainnya dalam ruang tersebut. Sementara itu, heterogenitas spasial terjadi ketika terdapat variasi antar-observasi karena pengaruh lokasi. Kedua isu ini muncul ketika data dikumpulkan menurut unsur lokasi atau spasial seperti provinsi, kabupaten/kota, kecamatan, desa, dan lain sebagainya. Fotheringham, Brundson, dan Charlton (2002) menyatakan jika pemodelannya tidak disesuaikan untuk mencerminkan pengaruh spasial yang mungkin terjadi maka model regresi yang dihasilkan dapat menyebabkan interpretasi yang menyesatkan. Ilustrasi sederhana berkaitan hal ini adalah *Simpson's paradox*, yaitu hasil yang terbalik ketika sekelompok data dianalisis secara terpisah dan kemudian digabung.

Salah satu metode statistik yang umum digunakan untuk memperhitungkan faktor spasial adalah *geographically weighted regression* (GWR) yang diusulkan oleh Fotheringham dkk. (2002). Model GWR memperhitungkan hubungan antara variabel respon dan variabel bebas bervariasi antarlokasi sehingga penaksir setiap hubungan dalam model tersebut bukan berupa rata-rata global seperti pada regresi linier biasa. Model GWR pada suatu lokasi diperoleh dengan menggunakan data lokasi yang berdekatan dan diboboti berdasarkan jarak setiap lokasi yang berdekatan tersebut dari titik regresi.

Beberapa penelitian yang menggunakan model GWR univariat berdasarkan distribusi normal diantaranya adalah Bascuñán dan Quezada (2016) menggunakan model GWR dengan variabel respon akses ke rumah sakit umum, Fotheringham, Kelly, dan Charlton (2012) menggunakan model GWR dengan variabel respon persentase perubahan jumlah penduduk Irlandia periode 1841-1851, Lin dan Wen, (2011) menggunakan model GWR dengan variabel respon insiden penyakit demam berdarah, Zhao dan Park (2004) menggunakan model GWR dengan variabel respon rata-rata tingkat kemacetan harian per tahun. Sementara itu, Nakaya, Fotheringham, Brunsdon, dan Charlton (2005)

menggunakan model GWR berdasarkan distribusi Poisson (model GWPR) dan semi-parametrik GWPR dengan variabel respon jumlah kematian pada usia kerja, sedangkan Rodrigues, de la Riva, dan Fotheringham (2014) menggunakan model GWR berdasarkan distribusi logistik (model GWLR) dengan variabel respon kebakaran hutan tingkat tinggi atau rendah.

Model GWR untuk respon mulitivariat dilakukan oleh Triyanto dkk. (2015) dengan membangun model GWR berdasarkan distribusi Poisson dan diaplikasikan pada kasus kesehatan anak dengan tiga variabel respon, yaitu jumlah anak dengan berat badan di bawah garis merah, jumlah anak dengan malnutrisi, dan jumlah kematian anak. Sementara itu, Suyitno, Purhadi, Sutikno dan Irhamah (2016) membagun model GWR berdasarkan distribusi Weibull dengan tiga variabel respon berkaitan dengan indikator pencemaran air, yaitu *biochemical oxygen demand* (BOD), *chemical oxygen demand* (COD) and *dissolved oxygen* (DO). Selain itu, Dewi dkk. (2017), membangun model GWR berdasarkan distribusi binomial negatif dengan dua variabel respon, yaitu jumlah kematian ibu dan kematian bayi.

Triyanto dkk. (2015) mengembangkan suatu model regresi spasial untuk dua atau lebih variabel respon cacah yang saling berkorelasi dan bergantung pada karakteristik lokasi yang diamati, yaitu model *Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression* (GWMPR). Model GWMPR tersebut dibangun menggunakan MPD dengan memperhitungkan *exposure* dan mengasumsikan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. Dari model ini, *standard error* parameter yang dihasilkan relatif lebih kecil dibandingkan dengan model yang tidak memasukkan *exposure* dan kovariansi konstan.

Model MPR dengan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas juga dilakukan oleh Karlis dan Meligkotsidou (2005), yaitu kovariansi antarvariabel responnya diasumsikan tidak konstan untuk memperoleh kovariansi lebih fleksibel dan lebih masuk akal dalam aplikasinya. Sebagai contoh, pada pembelian produk yang berbeda, adalah wajar untuk mengasumsikan bahwa setiap pasangan produk yang berbeda memiliki kovariansi yang berbeda karena sifat intrinsik dari produk ini daripada mengasumsikan bahwa semua pasangan memiliki kovariansi yang sama.

Komponen *exposure* perlu dimasukkan dalam model jika unit analisis yang digunakan memiliki ukuran populasi yang berbeda. Ermawati, Purhadi, dan Rahayu (2022) memasukkan *exposure* dalam pemodelan *bivariate zero-inflated Poisson inverse Gaussian regression* (BZIPIGR). Hasil penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa model dengan memasukkan *exposure* memiliki *sum square error* (SSE) dan *root mean square error* (RMSE) lebih kecil dari pada model tanpa *exposure*.

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya berkaitan dengan asumsi pada distribusi Poisson, model GWMPR juga mengasumsikan ekuidispersi pada data, sehingga dibutuhkan model regresi spasial alternatif untuk menangani data yang mengalami overdispersi atau underdispersi. Model alternatif tersebut adalah *geographically weighted multivariate generalized Poisson regression* (GWMGPR).

1.2 Perumusan Masalah

Masalah kesehatan, khususnya mengenai kematian bayi, anak, dan ibu adalah saling berkaitan satu dengan yang lainnya sehingga perlu dianalisis secara serentak melalui pemodelan secara multivariat. Kemudian, adanya ketidakmerataan angka kematian bayi, anak, dan ibu menurut wilayah kabupeten/kota di Pulau Jawa sebagai akibat ketidakmerataan akses fasilitas/layanan kesehatan maka dibutuhkan model regresi yang memperhitungkan heterogenitas spasial dalam memodelkan hubungan antara variabel bebas dan variabel respon. Selanjutnya, utuk mengontrol ukuran populasi yang berbeda pada setiap wilayah penelitian, maka suatu ukuran *exposure* perlu dimasukkan dalam model regresi. Ukuran e*xposure* dalam penelitian ini adalah populasi yang berisiko mengalami kejadian kematian yang diteliti. Dengan demikian, ukuran *exposure* untuk kematian bayi, anak, dan ibu secara berturut-turut adalah jumlah kelahiran, jumlah anak umur 1–4 tahun, dan jumlah wanita hamil. Terakhir, berkaitan dengan sifat intrinsik kejadian kematian, kovariansi didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas untuk memperoleh kovariansi yang lebih fleksibel.

Model multivariat terkini untuk data cacah yang dapat menangani overdispersi atau underdispersi adalah model MGPR oleh Famoye (2015), namun

model ini tidak memperhitungkan efek spasial dalam mengukur hubungan antara variabel respon dan variabel bebasnya, tidak memasukkan *exposure*, dan kovariansi tidak didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas. Berdasarkan kondisi ini, maka permasalahan pertama dalam penelitian ini adalah bagaimana memodifikasi model MGPR degan memasukkan *exposure* dan kovariansi didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas.

Sebelumnya, Purhadi dkk. (2021) membangun model GWBGPR yang sudah mengakomodasi efek spasial dalam memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel bebas, namun, model ini terbatas untuk dua variabel respon, tidak memasukkan ukuran *exposure*, dan kovariansi konstan. Sementara itu, model GWMPR yang dibangun oleh Triyanto dkk. (2015) tidak dapat mengakomodasi kasus overdispersi atau underdispersi. Dengan demikian, permasalahan kedua dalam penelitian ini adalah bagaimana membangun model yang mengakomodasi kasus overdispersi dan underdispersi serta memperhitungkan efek spasial dalam pemodelannya.

Selanjutnya, model yang diperoleh diaplikasikan menggunakan data riil untuk mengetahui faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu di kabupaten/kota di Pulau Jawa. Oleh karena itu, permasalahan selanjutnya adalah bagaimana evaluasi terhadap model yang dihasilkan untuk mengetahui model terbaik dalam menjelaskan faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan penaksir dan statistik uji parameter model MGPR dengan memperhitungkan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas.
2. Mendapatkan penaksir parameter dan statistik uji model GWMGPR dengan memperhitungkan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas.

3. Mendapatkan model terbaik faktor-faktor yang memengaruhi jumlah kematian bayi, jumlah kematian anak, dan jumlah kematian ibu di Pulau Jawa dengan model MGPR dan GWMGPR.

1.4 Orisinalitas dan Kontribusi Penelitian

Penelitian ini membangun model regresi multivariat untuk data cacah dengan tipe dispersi apapun dan memperhitungkan efek spasial, *exposure*, dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. Skema dan posisi penelitian tentang model regresi yang di bangun tersebut disajikan pada Gambar 1.2.

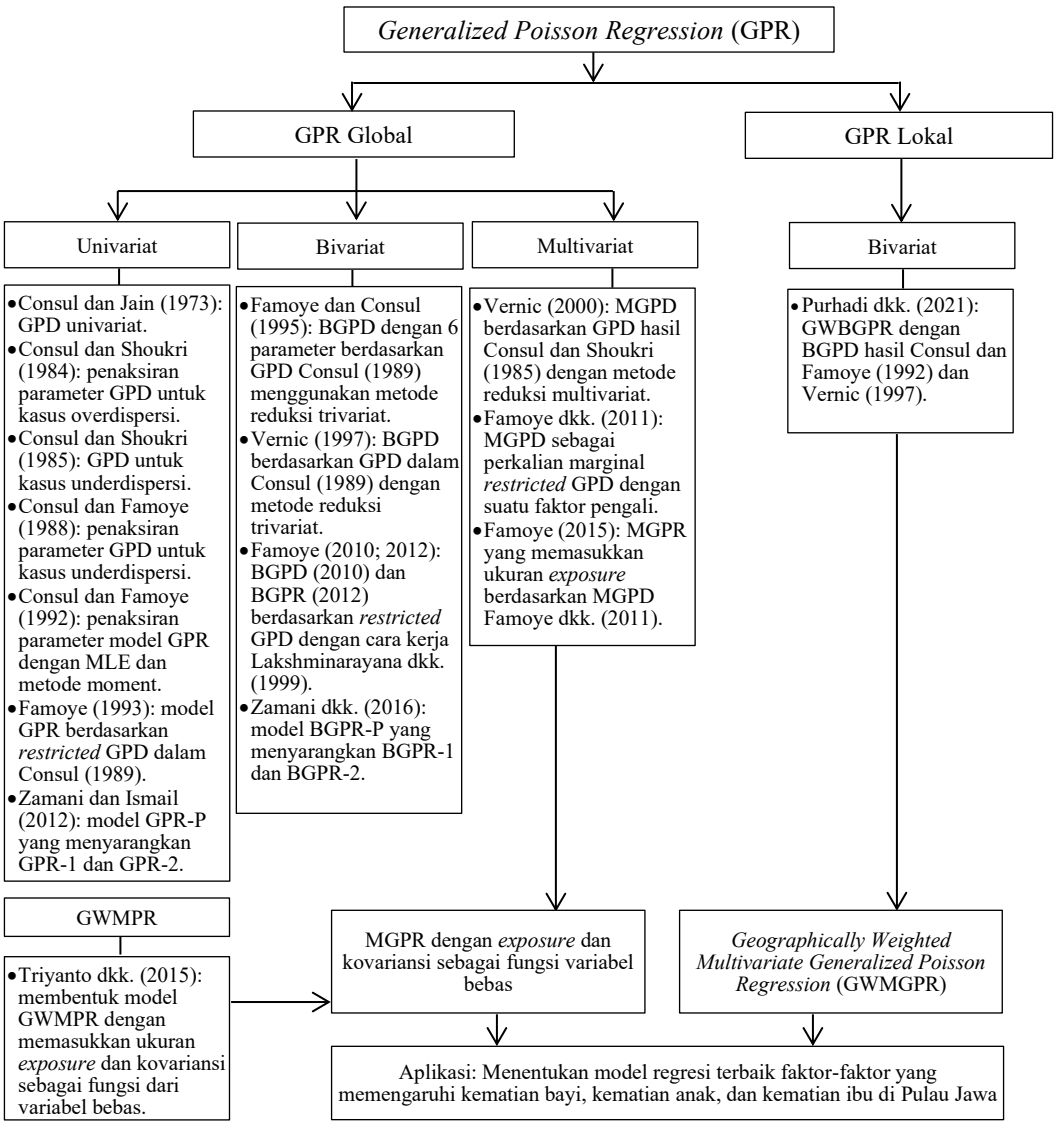
Model regresi akhir yang dihasilkan adalah GWMGPR dengan terlebih dahulu melakukan kombinasi tiga penelitian sebelumnya, yaitu oleh Famoye (2015), Triyanto dkk. (2015), dan Purhadi dkk. (2021). Model MGPR oleh Famoye (2015) dimodifikasi dengan memasukkan *exposure* dalam model dan kovariansi didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas. Selanjutnya, model MGPR yang dihasilkan dikembangkan menjadi model GWMGPR untuk memperhitungkan efek spasial dalam mengukur hubungan antara variabel respon dan variabel bebas.

Model GWMGPR dapat dikatakan sebagai perluasan dari model GWBGPR oleh Purhadi dkk. (2021) dalam hal jumlah variabel respon dalam model. Kedua model ini memiliki perbedaan mendasar dalam teknik pembentukan fungsi peluang bersama, yaitu bahwa BGPD pada model BGPR oleh Purhadi dkk. (2021) dibentuk melalui teknik metode reduksi trivariat menggunakan GPD klasik (Consul dan Famoye, 1992). Sementara itu, fungsi peluang bersama MGPD oleh Famoye (2015) sebagai dasar model MGPR yang dikembangkan dalam penelitian ini diperoleh menggunakan *restricted* GPD (Famoye, 1993). Ringkasan perbandingan model regresi penelitian sebelumnya dengan model regresi dalam penelitian ini disajikan pada Tabel 1.1.

Orisinalitas penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bentuk penaksir dan statistik uji parameter model MGPR dengan memperhitungkan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas.
2. Bentuk penaksir parameter dan statistik uji model GWMGPR dengan memperhitungkan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas.

3. Bentuk program untuk mendapatkan nilai penaksir parameter dan nilai statistik uji hipotesis model MGPR dan GWMGPR.
4. Model terbaik faktor-faktor yang memengaruhi jumlah kematian bayi, jumlah kematian anak, dan jumlah kematian ibu di Pulau Jawa dengan pendekatan model MGPR dan GWMGPR.



Gambar 1.1 Peta Posisi Kegiatan Penelitian

Tabel 1.1 Perbandingan Penelitian Sebelumnya dan Penelitian yang Dilakukan

Penelitian sebelumnya	Penelitian yang dilakukan	Keterbaruan
Famoye (2015) - MGPR berdasarkan *restricted* GPD. - MGPD dibentuk dengan cara Lakshminarayana dkk. (1999). - Tanpa *exposure*. - Kovariansi konstan. - Iterasi Newton-Raphson.	- MGPR berdasarkan *restricted* GPD. - MGPD dibentuk dengan cara Lakshminarayana dkk. (1999). - Memasukkan *exposure*. - Kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. - Iterasi Newton-Raphson.	Model MGPR dan GWMGPR dengan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas.
Triyanto dkk. (2015) - GWMPR. - MPD dibentuk dengan metode reduksi m-variat. - Memasukkan *exposure*. - Kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. - Iterasi Newton-Raphson.	- GWMGPR. - MGPD dibentuk dengan cara Lakshminarayana, dkk. (1999). - Memasukkan *exposure*. - Kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. - Iterasi Newton-Raphson.	
Purhadi dkk. (2021) - GWBGPR dengan GPD klasik. - BGPD dibentuk dengan metode reduksi trivariat. - Tanpa *exposure*. - Kovariansi konstan. - Iterasi Newton-Raphson.	- GWMGPR dengan *restricted* GPD. - MGPD dibentuk dengan cara Lakshminarayana dkk. (1999). - Memasukkan *exposure*. - Kovariansi sebagai fungsi variabel bebas. - Iterasi Newton-Raphson.	

Kontribusi penelitian ini adalah pengembangan metode statistika, yaitu model MGPR modifikasi dan GWMGPR, khususnya penaksiran parameter dan statistik uji, algoritma program untuk penaksiran parameter dan uji hipotesis, serta implementasi model MGPR modifikasi dan GWMGPR dalam bidang kesehatan. Hasil penelitian ini juga bermanfaat untuk memberikan rekomendasi kebijakan kepada instansi pemerintah khususnya Kementerian Kesehatan RI dan Dinas Kesehatan pada wilayah penelitian untuk peningkatan kesehatan ibu dan anak di wilayah masing-masing.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Koordinat lokasi untuk wilayah penelitian adalah pusat pemerintahan kabupaten/kota (koordinat kantor wali kota/bupati) dengan pertimbangan bahwa pusat pemerintahan biasanya menjadi pusat fasilitas dan layanan publik sehingga relevan sebagai titik pusat untuk mengukur jarak antarlokasi yang berperan dalam penghitungan pembobot spasial.
2. Model MGPR dan GWMGPR diaplikasikan dengan tiga variabel respon (model trivariat).
3. Variabel bebas dipilih sesuai ketersediaan data dengan mengacu pada kerangka pikir yang digunakan.
4. Data yang digunakan adalah tahun 2019 sebagai data terkini yang lengkap tersedia untuk setiap provinsi di Pulau Jawa.
5. *Corrected Akaike Information Criterion* (AICc) digunakan sebagai ukuran untuk evaluasi model.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini terdiri atas dua bagian, yaitu tinjauan statistika dan tinjauan non-statistika. Tinjauan statistika membahas teori-teori statistika yang berkaitan dengan pembentukan model GWMGPR, sedangkan tinjauan non-statistika membahas tentang kerangka pikir teoretis berkaitan dengan faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, kematian anak dan kematian ibu.

2.1 Model Regresi *Generalized* Poisson

Distribusi Poisson merupakan salah satu distribusi dari variabel random diskrit yang merupakan pendekatan dari distribusi binomial untuk ukuran populasi yang besar. Beberapa karakteristik dari percobaan yang mengikuti sebaran distribusi Poisson adalah (1) peluang munculnya suatu kejadian dari sejumlah besar percobaan adalah kecil, (2) percobaan diamati pada suatu interval waktu tertentu, (3) kejadiannya termasuk ke dalam *counting process* atau termasuk ke dalam lingkup proses stokastik, dan (4) percobaan merupakan perulangan dari kejadian yang mengikuti sebaran distribusi binomial (Cameron dan Trivedi, 2013).

Beberapa kejadian yang dapat dimodelkan sebagai distribusi Poisson diantaranya adalah jumlah dering telepon dalam satu jam, jumlah bola lampu yang rusak dalam periode waktu tertentu, jumlah kriminalitas dalam satu bulan, jumlah kematian karena AIDS di Indonesia, jumlah kelahiran dalam setahun, jumlah kematian bayi di Indonesia, dan lain sebagainya. Jumlah kejadian dalam suatu rentang waktu atau pada cakupan wilayah tertentu dipengaruhi oleh suatu besaran yang disebut dengan *exposure*. Sebagai contoh, jumlah kelahiran dalam satu tahun di suatu wilayah dipengaruhi oleh jumlah wanita usia subur di wilayah tersebut, sementara jumlah kematian bayi dalam suatu periode dipengaruhi oleh jumlah kelahiran yang terjadi dalam periode yang sama. Dengan demikian, model Poisson yang dihasilkan perlu memperhitungkan kuantitas *exposure* tersebut.

Salah satu karakteristik distribusi Poisson adalah ekuidispersi, yaitu suatu kondisi di mana nilai rata-rata dan variansi variabel respon adalah sama. Jika variansi lebih besar daripada rata-rata maka disebut overdispersi dan disebut underdispersi jika sebaliknya. Model distribusi *generalized* Poisson dapat menangani ketiga kasus tersebut. Sampai saat ini terdapat dua jenis model GPD, yaitu GPD klasik oleh Consul dan Famoye (1992) dan *restricted* GPD oleh Famoye (1993).

2.1.1 Model Regresi *Generalized* Poisson Univariat (GPR)

Variabel random diskrit Y berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika dan hanya jika memiliki fungsi peluang sebagai berikut ini (Cameron dan Trivedi, 2013)

$$P(\mathrm{Y}=y|\lambda)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}, & y=0,1,2,\ldots,\ \ \lambda>0\\ 0\ \ , & y \text{ yang lain.}\end{cases} \tag{2.1}$$

Rata-rata, variansi, dan fungsi pembangkit moment dari variabel random Y, masing-masing adalah

$E(Y)=\lambda$, $Var(Y)=\lambda$, dan $M_y(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$.

Distribusi Poisson pada (2.1) hanya memiliki satu parameter saja, yaitu λ, sementara itu, distribusi *generalized Poisson* (GPD) memiliki satu parameter tambahan untuk mengakomodasi dispersi. Fungsi peluang GPD adalah sebagai berikut (Consul dan Jain, 1973; Consul, 1989; Consul dan Famoye, 1992)

$$P_y(y,\lambda,\phi)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda+\phi y)^{y-1}\ e^{-\lambda-\phi y}}{y!}; & y=0,1,2,\ldots\\ 0 & ;\text{ untuk } y>s \text{ ketika } \phi<0,\end{cases} \tag{2.2}$$

dengan $\lambda>0$ dan ϕ adalah parameter dispersi di mana $\max(-1,-\lambda/s)\le\phi<1$ dan s adalah bilangan bulat positif terbesar untuk $\lambda+\phi s>0$ ketika $\phi<0$. Rata-rata dan variansi distribusi ini adalah

$E(Y)=\lambda(1-\phi)^{-1}$ dan $Var(Y)=\lambda(1-\phi)^{-3}=\kappa E(Y)$.

Komponen $\kappa = 1/(1-\phi)^2$ berperan sebagai faktor dispersi. Fungsi GPD pada (2.2) akan disederhanakan menjadi fungsi distribusi Poisson ketika $\phi = 0$. Model GPD mengalami overdispersi ketika $\phi > 0$ dan underdispersi ketika $\phi < 0$. Dengan *log link*

$$\ln \frac{\lambda_i}{1-\phi} = \sum_{k=0}^{p} x_{ik}\beta_k ,$$

di mana x_{ik} adalah observasi ke-i dari variabel bebas ke-k, p adalah jumlah variabel bebas dalam model, dan β_k parameter regresi ke-k, model regresi berdasarkan GPD klasik pada (2.2) adalah

$$P(Y = y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \phi) = \left((1-\phi)\mu_i + \phi y_i\right)^{y_i - 1} \frac{(1-\phi)\mu_i}{y_i!} \exp\left(-(1-\phi)\mu_i - \phi y_i\right),$$

dengan $y_i = 0,1,2,...$ dan rata-rata serta variansi sebagai berikut

$$E(Y_i | \mathbf{x_i}) = \mu_i = q_i \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right),$$

dan

$$Var(Y_i | \mathbf{x}_i) = \kappa\mu_i ,$$

di mana

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},$$

dan q_i adalah *exposure* pada observasi ke$-i$ (seperti interval waktu, jumlah penduduk, atau luas wilayah).

Famoye (1993) mentransformasi $\phi = \varphi\lambda$ pada persamaan (2.2) sehingga ϕ proporsional terhadap λ. Hal ini menyebabkan parameter ϕ menjadi terbatasi (*restricted*) dan menghasilkan fungsi peluang GPD terbatas (*restricted* GPD)

$$P_y(y, \lambda, \varphi) = \frac{(1+\varphi y)^{y-1} \lambda^y e^{-\lambda(1+\varphi y)}}{y!}; \; y = 0,1,2,..., \tag{2.3}$$

dengan $\max\left(-1/\lambda, -1/s\right) < \varphi < 1/\lambda$ dan s adalah bilangan bulat positif terbesar di mana $1+\varphi s > 0$ ketika $\varphi < 0$. $P_y\left(Y=y\right)=0$ untuk $y > s$ ketika $\varphi<0$. Rata-rata dan variansi dari distribusi ini masing-masing adalah

$$E\left(Y\right)=\lambda\left(1-\varphi\lambda\right)^{-1} \text{ dan } Var\left(Y\right)=\lambda\left(1-\varphi\lambda\right)^{-3}. \tag{2.4}$$

Ketika $\phi = 0$ pada (2.2) atau $\varphi = 0$ pada (2.3) maka GPD direduksi menjadi Poisson.

Model GPR berdasarkan GPD terbatas pada (2.3) adalah

$$P\left(Y_i = y_i \middle| \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \varphi\right) = \left(\frac{\mu_i}{1+\varphi\mu_i}\right)^{y_i} \frac{\left(1+\varphi y_i\right)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i\left(1+\varphi y_i\right)}{1+\varphi\mu_i}\right), \tag{2.5}$$

di mana $y_i = 0,1,2,...$ dengan rata-rata dan variansi sebagai berikut

$$E\left(Y_i \middle| \mathbf{x}_i\right) = \mu_i = q_i \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right),$$

dan

$$Var\left(Y_i \middle| \mathbf{x}_i\right) = \mu_i\left(1+\varphi\mu_i\right)^2.$$

2.1.1.1 Penaksiran Parameter Model GPR

Penaksiran parameter pada model GPR pada persamaan (2.5) dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Fungsi *likelihood* untuk persamaan (2.5) adalah

$$L(\mu,\varphi) = \prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\mu_i}{1+\varphi\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\varphi y_i)^{(y_i-1)}}{y_i!} \exp\left(\frac{-\mu_i(1+\varphi y_i)}{1+\varphi\mu_i}\right)\right], \tag{2.6}$$

dan fungsi *ln-likelihood* dari persamaan (2.6) adalah

$$\begin{aligned}\ln L(\mu,\varphi) = \sum_{i=1}^{n}\Bigg[& y_i \ln\left(\frac{\mu_i}{1+\varphi\mu_i}\right) + \left(y_i-1\right)\ln\left(1+\varphi y_i\right) \\ & -\ln\left(y_i!\right) - \frac{\mu_i\left(1+\varphi y_i\right)}{1+\varphi\mu_i}\Bigg],\end{aligned} \tag{2.7}$$

dengan

$$\mu_i = q_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}). \tag{2.8}$$

Penaksiran parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan φ diperoleh dengan mengambil turunan parsial pertama persamaan (2.7) terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dan φ seperti berikut

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\varphi)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(y_i - \mu_i)\mathbf{x}_i}{(1+\varphi\mu_i)^2} \right], \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\mu_i y_i}{1+\varphi\mu_i} + \frac{(y_i - 1)y_i}{(1+\varphi y_i)} - \frac{\mu_i(y_i - \mu_i)}{(1+\varphi\mu_i)^2} \right], \tag{2.10}$$

dengan μ_i sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\beta}$ yang didefinisikan pada (2.8).

Persamaan (2.9) dan (2.10) menghasilkan persamaan yang membutuhkan penyelesaian secara numerik seperti iterasi Newton-Raphson dengan persamaan di bawah ini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}\right), \tag{2.11}$$

dengan vektor parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad \hat{\varphi}\right]^T$ di mana $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dan $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ masing-masing adalah matriks Hessian dan vektor gradien.

2.1.1.2 Pengujian Parameter Model GPR

Pengujian parameter model GPR dilakukan menggunakan metode MLRT dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0,\ k = 1,2,\ldots,p$

dengan statistik uji

$$G^2 = -2\ln\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right),$$

di mana $L(\Omega)$ adalah fungsi *ln-likelihood* di bawah populasi $\left(\Omega = \{\boldsymbol{\beta},\varphi\}\right)$ dan $L(\omega)$ adalah fungsi *ln-likelihood* di bawah $H_0\left(\omega = \{\beta_0\}\right)$. Tolak H_0 jika $G^2 > \chi^2_{p,\alpha}$.

Apabila keputusan pengujian secara serentak adalah tolak H_0 maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial untuk

mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh yang signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0 : \beta_k = 0,\ k = 1, 2, ..., p$

$H_1 : \beta_k \neq 0.$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_k}{se\left(\hat{\beta}_k\right)} \sim Z_{\alpha/2}, \tag{2.12}$$

dengan $se\left(\hat{\beta}_k\right) = \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\beta}_k\right)}$ di mana nilai $\hat{Var}\left(\hat{\beta}_k\right)$ diperoleh dari elemen diagonal utama ke-$l+1$ matriks variansi-kovariansi yang secara umum didefinisikan sebagai $\mathrm{Cov}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = -\left(\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$. Daerah penolakan H_0 adalah $\left|Z_{hit}\right| > Z_{\alpha/2}$ dengan α adalah taraf signifikansi (Pawitan, 2001).

2.1.2 Model Regresi *Generalized* Poisson Bivariat (BGPR)

Berdasarkan GPD pada (2.2) Famoye dan Consul (1995) dan Vernic (1997) mendefinisikan *bivariate* GPD (BGPD) dengan metode reduksi trivariat. Misalkan $Z_0, Z_1,$ dan Z_2 adalah variabel random independen dengan parameter masing-masing $\left(\lambda_0, \phi_0\right), \left(\lambda_1, \phi_1\right),$ dan $\left(\lambda_2, \phi_2\right)$. Suatu vektor random $\left(Y_1, Y_2\right)$ dikatakan berdistribusi GPD bivariat (BGPD) jika $Y_1 = Z_0 + Z_1$ dan $Y_2 = Z_0 + Z_2$. Fungsi peluang $p\left(y_1, y_2\right) = P\left(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\right)$ dari $\left(Y_1, Y_2\right)$ adalah

$$p\left(y_1, y_2\right) = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - y_1\phi_1 - y_2\phi_2} \sum_{a=0}^{l^*} K_1 K_2, \tag{2.13}$$

di mana $a = Z_0$, $l^* = \min\left(y_1, y_2\right)$, dan

$$K_1 = \frac{\left(\lambda_1 + \left(y_1 - a\right)\phi_1\right)^{y_1 - a - 1}}{\left(y_1 - a\right)!} e^{a\left(-\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right)}, \tag{2.14}$$

$$K_2 = \frac{\left(\lambda_2 + \left(y_2 - a\right)\phi_2\right)^{y_2 - a - 1}}{\left(y_2 - a\right)!} \frac{\left(\lambda_0 + a\phi_0\right)^{a-1}}{a!}. \tag{2.15}$$

Rata-rata dan variansi marginal dari (2.13) adalah sebagai berikut

$$E\left(Y_l\right)=\lambda_l\left(1-\phi_l\right)^{-1}+\lambda_0\left(1-\phi_0\right)^{-1},$$
$$Var\left(Y_l\right)=\lambda_l\left(1-\phi_l\right)^{-3}+\lambda_0\left(1-\phi_0\right)^{-3},\ l=1,2.$$

Distribusi peluang pada (2.13) direduksi menjadi distribusi Poisson bivariat ketika $\phi_0=\phi_1=\phi_2=0$. Koefisien korelasi ρ antara variabel random Y_1 dan Y_2 pada model (2.13) adalah

$$\rho=\lambda_0\left[\left(\lambda_1\left(1-\phi_1\right)^{-3}\left(1-\phi_0\right)^{3}+\lambda_0\right)\left(\lambda_2\left(1-\phi_2\right)^{-3}\left(1-\phi_0\right)^{3}+\lambda_0\right)\right]^{-1/2},$$

Variabel random Y_1 dan Y_2 adalah independen ketika $\lambda_0=0$, yaitu ketika $\rho=0$.

Sementara itu, berdasarkan *restricted* GPD pada (2.3) dan dengan menggunakan pendekatan yang sama seperti Lakshminarayana dkk. (1999) dan sebelumnya diulas oleh Lee (1996), Famoye (2010) mendefinisikan BGPD sebagai perkalian marginal *generalized* Poisson univariat dengan suatu faktor pengali, yaitu

$$P\left(y_1,y_2\right)=\prod_{l=1}^{2}\left[\frac{\left(\lambda_l\right)^{y_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\lambda_l\left(1+\varphi_l y_l\right)\right]\right]$$
$$\times\left[1+\gamma\prod_{l=1}^{2}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\right],\quad y_1,y_2=0,1,2,\ldots. \tag{2.16}$$

Untuk menjamin distribusi marginal pada (2.16) adalah GPD, maka dibutuhkan $z_l=E\left(e^{-Y_l}\right)=\mathrm{e}^{\lambda_l\left(r_l-1\right)}$ di mana $\ln r_l-\varphi_l\,\lambda_l\left(r_l-1\right)+1=0,\ l=1,2$. Distribusi marginal $Y_l,\ l=1,2$ adalah GPD dengan rata-rata dan variansi adalah

$$\mu_l=\frac{\lambda_l}{1-\varphi_l\ \lambda_l},$$
$$\sigma_l^2=\frac{\lambda_l}{\left(1-\varphi_l\ \lambda_l\right)^3}.$$

Kovariansi dan koefisien korelasi antara Y_1 dan Y_2 adalah

$$\sigma_{12}=\gamma\left(z_{11}-z_1\mu_1\right)\left(z_{22}-z_2\mu_2\right),$$
$$\rho_{12}=\frac{\gamma\left(z_{11}-z_1\mu_1\right)\left(z_{22}-z_2\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}, \tag{2.17}$$

dengan

$$z_{ll} = E\left(Y_l\, e^{-Y_l}\right) = \lambda_l \left(1-\varphi_l \lambda_l r_l\right)^{-1} e^{\lambda_l (1+\varphi_l)(r_l-1)-1},$$

dan

$$\ln r_l - \varphi_l \lambda_l \left(r_l - 1\right) + 1 = 0,\ l = 1,2.$$

Koefisien korelasi pada (2.17) dapat bernilai positif, nol atau negatif, tergantung pada nilai parameter faktor pengali γ.

Misalkan Y_{il} adalah variabel respon dan $\mathbf{x}_i^T$ adalah vektor kovariat. Dengan menggunakan rata-rata marginal dari distribusi pada (2.16), yaitu $E\left(Y_{il}\,|x_i\right) = \mu_l\left(x_i\right)$ dan menuliskannya sebagai fungsi kovariat, diperoleh

$$\frac{\lambda_l}{1-\varphi_l \lambda_l} = \mu_{il}\left(x_i\right) \text{ atau } \lambda_l = \frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l \mu_{il}},\ l = 1,2, \tag{2.18}$$

Dengan mensubstitusikan hasil (2.18) pada BGPD di (2.16), model BGPR dituliskan sebagai berikut ini, Famoye (2012)

$$P\left(y_{i1}, y_{i2}\right) = \prod_{l=1}^{2}\left[\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l \mu_{il}}\right)^{y_{il}} \frac{\left(1+\varphi_l y_{il}\right)^{y_{il}-1}}{y_{il}!} \exp\left(\frac{-\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l \mu_{il}}\right)\right]$$
$$\times\left[1+\gamma \prod_{l=1}^{2}\left(e^{-y_{il}-z_{il}}\right)\right], \tag{2.19}$$

di mana

$$z_{il} = \exp\left(\mu_{il}\left(r_l - 1\right)/\left(1+\varphi_l \mu_{il}\right)\right), \tag{2.20}$$

dengan

$$\ln\left(r_l\right) - \left(\varphi_l \mu_{il}\left(r_l - 1\right)/\left(1+\varphi_l \mu_{il}\right)\right) + 1 = 0,\ l = 1,2.$$

Ketika $\gamma = 0$, pasangan Y_{i1} dan Y_{i2} adalah independen. Ketika $\gamma > 0$, model BGPR di (2.19) memiliki korelasi positif dan ketika $\gamma < 0$, model BGPR memiliki korelasi negatif. Jika $\varphi_l = 0$, model BGPR direduksi menjadi model BPR dan tidak ada dispersi. Ketika $\varphi_l > 0$ terdapat overdispersi dan ketika $\varphi_l < 0$ terdapat underdispersi.

Rata-rata dan variansi marginal Y_{il} masing-masing adalah

$$E\left(Y_{il}\left|\mathbf{x}_i\right.\right)=\mu_{il},$$
$$Var\left(Y_{il}\left|\mathbf{x}_i\right.\right)=\mu_{il}\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2.$$

Model BGPR dengan *exposure* $\left(q_{il}\right)$ adalah

$$\mu_{il}=q_{il}\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l\right)=q_{il}\exp\left(\beta_{l0}+\beta_{l1}x_{i1}+\beta_{l2}x_{i2}+...+\beta_{lp}x_{ip}\right),$$
$$i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2;\ k=1,2,\ldots,p \tag{2.21}$$

sehingga persamaan (2.18) dapat ditulis sebagai

$$\lambda_{il}=\frac{q_{il}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l}}{1+\varphi_l q_{il}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l}},\quad l=1,2$$

dengan

$$\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\beta}_l=\begin{bmatrix}\beta_{l0} & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lp}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}. \tag{2.23}$$

Koefisien korelasi antara Y_{i1} dan Y_{i2} yang dinyatakan dalam μ_{il} adalah

$$\rho_{Y_{i1}Y_{i2}}=\frac{\gamma\left(z_{11}-z_1\mu_{i1}\right)\left(z_{22}-z_2\mu_{i2}\right)}{\sqrt{\mu_{i1}\mu_{i2}}\left(1+\varphi_1\mu_{i1}\right)\left(1+\varphi_2\mu_{i2}\right)},\quad i=1,2,\ldots,n,$$

dengan

$$z_{ll}=E\left(Y_{il}\ e^{-Y_{il}}\right)=\frac{\mu_{il}}{1-\varphi_l\mu_{il}\left(r_l-1\right)}\exp\left(\frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l\right)\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}-1\right),$$

dan

$$\ln r_l-\frac{\varphi_l\mu_{il}\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}+1=0.$$

2.1.2.1 Penaksiran Parameter Model BGPR

Penaksiran parameter model BGPR berdasarkan (2.13) dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Kemudian untuk mendapatkan penaksiran parameter yang konvergen digunakan metode iterasi Newton Raphson. Metode MLE memaksimumkan fungsi *likelihood* dari *bivariate generalized Poisson*, yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\lambda_0, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \phi_1, \phi_2, \phi_0)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_0 \lambda_{i1} \lambda_{i2} \exp\left(-(\lambda_0 + \lambda_{i1} + \lambda_{i2}) - y_{i1}\phi_1 - y_{i2}\phi_2\right) \sum_{a=0}^{l^*} K_1 K_2 , \tag{2.24}$$

di mana $l^* = \min(y_{i1}, y_{i2})$, K_1 dan K_2 masing-masing seperti pada persamaan (2.14) dan (2.15).

Dengan mensubstitusikan

$$\lambda_{il} + \lambda_0 = e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l} , \tag{2.25}$$

ke dalam persamaan (2.24), maka didapatkan fungsi *likelihood*

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_0 \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right) \exp(-d_1 + d_2) W_i ,$$

di mana

$$d_1 = \left(\lambda_0 + \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1\right) - \lambda_0\right)\right),$$

$$d_2 = \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1\right) - \lambda_0\right) - y_{i1}\phi_1 - y_{i2}\phi_2,$$

$$W_i = \sum_{a=0}^{l^*} W_{i1} W_{i2},$$

$$W_{i1} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right) + (y_{i1} - a)\right)^{y_{i1} - a - 1}}{(y_{i1} - a)!} \exp\left(a\left(-\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right)\right),$$

dan

$$W_{i2} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right) + (y_{i2} - a)\right)^{y_{i2} - a - 1}}{(y_{i2} - a)!} \frac{(\lambda_0 + a\phi_0)^{a-1}}{a!} ,$$

sehingga diperoleh fungsi logaritma natural *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta})$ adalah sebagai berikut

$$Q = \ln L(\lambda_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \phi_1, \phi_2, \phi_0) = \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right) - n\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_0\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_0\right) - \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\phi_1 - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\phi_2 + \sum_{i=1}^{n} \ln W_i, \tag{2.26}$$

Untuk mendapatkan taksiran parameter model BGPR, maka fungsi persamaan (2.26) diturunkan terhadap masing-masing parameternya dan disamakan

dengan nol (syarat perlu). Persamaan turunan pertama dari fungsi logaritma natural *likelihood* pada (2.26) terhadap λ_0 adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_0} = -\frac{n}{\lambda_0} - n - 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_0},$$

Dengan cara yang sama, persamaan turunan pertama dari fungsi *ln-likelihood* pada (2.26) terhadap lima parameter lainnya, yaitu $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \phi_1, \phi_2, \phi_0$ disajikan sebagai berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \mathbf{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi_1} = -\sum_{i=1}^{n} y_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \phi_1},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi_2} = -\sum_{i=1}^{n} y_{i1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \phi_2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i} \frac{\partial W_i}{\partial \phi_0}.$$

Metode MLE di atas tidak menghasilkan penyelesaian analitik sehingga estimator diperoleh melalui proses iterasi secara numerik menggunakan algoritma Newton-Raphson dengan rumusan umum seperti pada persamaan (2.11) di atas dengan syarat perlu bahwa turunan pertama fungsi *ln-likelihood* pada persamaan (2.26) terhadap masing-masing paramaternya sama dengan nol dan dengan syarat cukup bahwa turunan keduanya kurang dari nol.

Penaksiran parameter model BGPR berdasarkan distribusi BGPD pada (2.16) dengan metode MLE menghasilkan fungsi *ln-likelihood* seperti berikut ini

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{2} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l \mu_{il}} \right) + \left(y_{il} - 1 \right) \ln\left(1 + \varphi_l y_{il} \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(y_{il}! \right) - \frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l \mu_{il}} \right) + \ln\left(1 + \gamma \sum_{l=1}^{2} \left(e^{-y_{il}} - z_{il} \right) \right) \right] \qquad (2.27)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \gamma)$, μ_{il} didefinisikan pada (2.21) dan z_{il} seperti yang dinyatakan pada (2.20). Turunan parsial pertama persamaan (2.27) terhadap vektor parameter $\boldsymbol{\theta}$ adalah

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_{il} - \mu_{il})\mathbf{x}_i}{(1+\varphi_l \ \mu_{il})^2} + \frac{\partial Q_a / \partial \boldsymbol{\beta}_l}{1+Q_a} \right),$$

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\mu_{il} y_{il}}{1+\varphi_l \mu_{il}} + \frac{(y_{il}-1)\, y_{il}}{(1+\varphi_l y_{il})} - \frac{\mu_{il}(y_{il} - \mu_{il})}{(1+\varphi_l \mu_{il})^2} + \frac{\partial Q_a / \partial \varphi_l}{1+Q_a} \right),$$

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sum_{l=1}^{2} \left(e^{-y_{il}} - z_{il} \right)}{(1+Q_a)} \right),$$

dengan

$$Q_a = \gamma \sum_{l=1}^{2} \left(e^{-y_{il}} - z_{il} \right),$$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} = -\gamma \sum_{l<m}^{g} \frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l},$$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial \varphi_l} = -\gamma \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l},$$

di mana

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} = \frac{z_{il}(r_l - 1)\mu_{il}\mathbf{x}_i}{(1+\varphi_l \mu_{il})(1+\varphi_l \mu_{il} - \varphi_l \mu_{il} r_l)},$$

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l} = \frac{z_{il}(r_l - 1)^2 \mu_{il}^2}{(1+\varphi_l \mu_{il})(1+\varphi_l \mu_{il} - \varphi_l \mu_{il} r_l)}.$$

2.1.2.2 Pengujian Parameter Model BGPR

Pengujian parameter model BGPR pada (2.25) dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis

$H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = ... = \beta_{lp} = 0; \quad l = 1, 2;$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk} \neq 0;\ l = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, p.$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$G^2 = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = 2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right),$$

di mana $L(\hat{\Omega})$ dan $L(\hat{\omega})$ masing-masing adalah fungsi *ln-likelihood* untuk model di bawah populasi dan untuk model di bawah H_0. Daerah penolakan H_0 adalah $G^2 > \chi^2_{(\alpha,v)}$ dengan v adalah jumlah parameter di bawah populasi dikurangi dengan jumlah parameter di bawah H_0. Apabila tolak H_0 maka terdapat variabel bebas yang berpengaruh terhadap variabel respon dengan α adalah taraf signifikansi.

Apabila keputusan pengujian secara serentak adalah tolak H_0 maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh yang signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0 : \beta_{lk} = 0$

$H_1 : \beta_{lk} \neq 0$ dengan $l = 1, 2$ dan $k = 1, 2, ..., p$.

Statistik uji yang digunakan adalah

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_{lk}}{se\left(\hat{\beta}_{lk}\right)} \sim Z_{\alpha/2}, \tag{2.28}$$

dengan $se\left(\hat{\beta}_{lk}\right) = \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\beta}_{lk}\right)}$ di mana nilai $\hat{Var}\left(\hat{\beta}_{lk}\right)$ diperoleh dari elemen diagonal utama ke-$l+1$ matriks variansi-kovariansi yang secara umum didefinisikan sebagai $\text{Cov}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = -\left(\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)$. Daerah penolakan H_0 adalah $\left|Z_{hit}\right| > Z_{\alpha/2}$ dengan α adalah taraf signifikansi (Pawitan, 2001).

2.1.3 Model Regresi *Generalized* Poisson Multivariat (MGPR)

Dengan cara yang sama dalam memperoleh BGPD, yaitu dengan metode reduksi trivariat, Vernic (2000) menurunkan GPD $g-$dimensi dengan menggunakan $(g+1)$ variabel random GP independen, $Z_l \sim GPD\left(\lambda_l, \phi_l\right)$ dengan fungsi peluang seperti pada (2.2) dengan $l = 0, 1, ..., g$. Misalkan

$Y_1 = Z_0 + Z_1,\ \ Y_2 = Z_0 + Z_2\ \ , ...,\ \ Y_g = Z_0 + Z_g$

maka $\left(Y_1,...,Y_g\right) \sim MGP_g\left(\Lambda,\Phi\right)$ dengan $\Lambda = \left(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_g\right)$ dan $\Phi = \left(\phi_0,\phi_1,...,\phi_g\right)$. Vernic (2000) menyebut metode ini sebagai metode reduksi multivariat (*multivariate reduction method*) sebagai perluasan dari metode reduksi trivariat.

Peluang bersama dari $\left(Y_1,...,Y_g\right)$ adalah

$$\begin{aligned} p\left(y_1,...,y_g\right) &= P\left(X_1 = x_1,...,X_g = x_g\right) \\ &= \sum_{a=0}^{l^*} f_1\left(y_1 - a\right) ... f_g\left(y_g - a\right) f_0\left(a\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

dengan f_l adalah fungsi peluang dari variabel random Z_l, $a = Z_0$, dan $l^* = \min\left(y_1,...,y_g\right)$. Dengan menggunakan (2.2) dalam (2.29), peluang bersama dari $\left(Y_1,...,Y_g\right)$ adalah

$$\begin{aligned} p\left(y_1,...,y_g\right) &= \left(\prod_{m=0}^{g} \lambda_m\right) \exp\left(\sum_{m=0}^{g} \lambda_m - \sum_{m=0}^{g} y_m \phi_m\right) \\ &= \sum_{a=0}^{l^*} \left(\prod_{m=1}^{g} \frac{\left(\lambda_m + \left(y_m - a\right)\phi_m\right)^{y_m - a - 1}}{\left(y_m - a\right)!}\right) \\ &= \frac{\left(\lambda_0 + a\phi_0\right)^{a-1}}{a!} \exp\left(a\left(\sum_{m=1}^{g} \phi_m - \phi_0\right)\right), \end{aligned}$$

di mana $y_1,...,y_g = 0,1,2,...$ dan $0! = 1$ dengan rata-rata dan variansi

$E\left(Y_l\right) = \lambda_l\left(1-\phi_l\right)^{-1} + \lambda_0\left(1-\phi_0\right)^{-1}$,

$Var\left(Y_l\right) = \lambda_l\left(1-\phi_l\right)^{-3} + \lambda_0\left(1-\phi_0\right)^{-3}$, $l = 1,2,...,g$.

Bentuk alternatif MGPD berdasarkan *restricted* GPD pada (2.3) yang diperoleh dengan teknik yang sama dalam memperoleh BGPD pada (2.16) adalah sebagai berikut ini (Famoye, 2015)

$$\begin{aligned} P\left(y_1,\ldots,y_g\right) &= \prod_{l=1}^{g} \left[\frac{\left(\lambda_l\right)^{y_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l - 1}}{y_l!} \exp\left[-\lambda_l\left(1+\varphi_l y_l\right)\right]\right] \\ &\times \left[1 + \sum_{l<m}^{g} \gamma_{lm}\left(e^{-y_l} - z_l\right)\left(e^{-y_m} - z_m\right)\right], \end{aligned} \tag{2.30}$$

dengan $z_l = E\left(e^{-Y_l}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_l(r_l-1)}$ di mana $\ln r_l - \varphi_l\,\lambda_l\left(r_l-1\right)+1=0,\ l=1,2,\ldots,g$ dan $y_1, y_2, \ldots, y_g = 0,1,2,\ldots$. Distribusi marginal Y_l adalah GPD pada (2.3) dengan rata-rata dan variansi seperti pada (2.4). Model (2.30) direduksi menjadi BGPD ketika $g=2$ dan direduksi menjadi MPD ketika $\varphi_l = 0$. Variabel y_l mengalami dispersi ketika $\varphi_l \neq 0$, yaitu underdispersi ketika $\varphi_l < 0$ dan overdispersi ketika $\varphi_l > 0$. Variabel y_l dan y_m berkorelasi ketika $\gamma_{lm} \neq 0$, yaitu berkorelasi negatif atau positif, masing-masing ketika $\gamma_{lm} < 0$ atau $\gamma_{lm} > 0$.

Rata-rata dan variansi marginal dari MGPD pada (2.30) adalah

$$\mu_l = \frac{\lambda_l}{1-\varphi_l\ \lambda_l}, \tag{2.31}$$

$$\sigma_l^2 = \frac{\lambda_l}{\left(1-\varphi_l\ \lambda_l\right)^3}.$$

Kovariansi dan koefisien korelasi antara dua variabel, masing-masing adalah

$$\sigma_{lm} = \gamma_{lm}\left(z_{ll} - z_l\mu_l\right)\left(z_{mm} - z_m\mu_m\right),\quad l,m=1,2,\ldots,g \text{ dan } l<m,$$

$$\rho_{lm} = \frac{\sigma_{lm}}{\sigma_l\sigma_m} = \frac{\gamma_{lm}\left(z_{ll} - z_l\mu_l\right)\left(z_{mm} - z_m\mu_m\right)}{\sigma_l\sigma_m}$$

dengan $z_{ll} = E\left(Y_l\, e^{-Y_l}\right) = \lambda_l\left(1-\varphi_l\lambda_l r_l\right)e^{\lambda_l(1+\varphi_l)(r_l-1)-1}$ dan r_l adalah akar dari $\ln r_l - \varphi_l\,\lambda_l\left(r_l-1\right)+1=0$.

Dengan mensubstitusikan (2.31) ke dalam (2.30) diperoleh

$$P\left(y_1,\ldots,y_g\right) = \prod_{l=1}^{g}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l-1}}{y_l\,!}\exp\left(-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)\right)\right]$$
$$\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right], \tag{2.32}$$

maka model MGPR dengan *exposure* dapat ditulis sebagai

$$\mu_{il} = q_{il}\ e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l},\quad l=1,2,\ldots,g \tag{2.33}$$

di mana $\mathbf{x}_i$ dan $\boldsymbol{\beta}_l$ masing-masing didefinisikan pada (2.22) dan (2.23). Famoye (2015) menyarankan γ_{lm} dinyatakan sebagai koefisien korelasi ρ_{lm} karena koefisien korelasi terletak antara –1 dan +1, yaitu

$$\gamma_{lm} = \frac{\rho_{lm}\ \sigma_l\ \sigma_m}{\left(z_{ll} - z_l\mu_l\right)\left(z_{mm} - z_m\mu_m\right)}.$$

2.1.3.1 Penaksiran Parameter Model MGPR

Misalkan terdapat n vektor independen $\left(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ig}\right)$ di mana vektor ke$-i$ memenuhi model MGPR pada (2.32), maka fungsi logaritma natural dari *likelihood*, $\ln L\left(\mu;\mathbf{y}\right) = \ln L\left(\mu,\varphi,\gamma;\mathbf{y}\right)$ untuk model MGPR adalah sebagai berikut ini

$$\ln L\left(\mu;\mathbf{y}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l y_{il}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right) + \ln\left[1+Q_b\right]\right] \tag{2.34}$$

dengan $Q_b = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right)$ dan $z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right)$.

Dengan mengambil turunan parsial pertama dari persamaan (2.34) terhadap masing-masing parameter di mana μ_{il} didefinisikan pada (2.33), diperoleh

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial\boldsymbol{\beta}_l} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{il}-\mu_{il}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2} + \frac{1}{1+Q_b}\frac{\partial Q_b}{\partial\boldsymbol{\beta}_l}\right), \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial\varphi_l} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{il}y_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}} + \frac{\left(y_{il}-1\right)y_{il}}{\left(1+\varphi_l y_{il}\right)} - \frac{\mu_{il}\left(y_{il}-\mu_{il}\right)}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2} + \frac{1}{1+Q_b}\frac{\partial Q_b}{\partial\varphi_l}\right), \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \ln L(\cdot)}{\partial\gamma_{lm}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_{l<m}^{g}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right)}{\left(1+Q_b\right)}\right). \tag{2.37}$$

Pada persamaan (2.35), $\partial Q_b / \partial\boldsymbol{\beta}_l$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial Q_b}{\partial\boldsymbol{\beta}_l} = -\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_{il}} - z_{im}\right)\frac{\partial z_{il}}{\partial\boldsymbol{\beta}_l} - \sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right)\frac{\partial z_{im}}{\partial\boldsymbol{\beta}_l}$$

dengan

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} = \frac{z_{il}\left(r_l - 1\right)\mu_{il}\mathbf{x}_i^T}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\mu_{il}-\varphi_l\mu_{il}r_l\right)}.$$

Pada persamaan (2.36), $\partial Q_b / \partial \varphi_l$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial Q_b}{\partial \varphi_l} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{lm}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l}$$

dengan

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l} = \frac{z_{il}\left(r_l - 1\right)^2 \mu_{il}^2}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\mu_{il}-\varphi_l\mu_{il}r_l\right)}.$$

Jumlah parameter dalam model MGPR adalah $\left(p+2\right)g + g\left(g-1\right)/2$, sehingga akan terdapat $\left(p+1\right)g$ persamaan dari (2.35), g persamaan dari (2.36), dan $g\left(g-1\right)/2$ dari (2.37). Persamaan (2.35) sampai dengan (2.37) tidak menghasilkan penyelesaian analitik sehingga penaksir parameter diperoleh melalui proses iterasi secara numerik seperti algoritma Newton-Raphson dengan rumusan umum pada persamaan (2.11).

2.1.3.2 Pengujian Parameter Model MGPR

Pengujian parameter model MGPR pada (2.32) dilakukan dengan metode MLRT dengan hipotesis

$H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = ... = \beta_{lp} = 0; \quad l = 1,2,\ldots,g;\ k = 1,2,\ldots,p$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk} \neq 0$.

Himpunan parameter di bawah populasi adalah $\Omega = \left\{\boldsymbol{\beta}_{lk}, \varphi_l, \gamma_{lm}\right\}$ dan himpunan parameter di bawah H_0 adalah $\omega = \left\{\boldsymbol{\beta}_{l0}\right\}$.

Statistik uji yang digunakan adalah

$$G^2 = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = 2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right).$$

Daerah penolakan H_0 adalah $G^2 > \chi^2_{\alpha,v}$ dengan v adalah jumlah parameter di bawah populasi dikurangi dengan jumlah parameter di bawah H_0. Apabila tolak H_0

maka terdapat variabel bebas yang berpengaruh terhadap variabel respon dengan α adalah taraf signifikansi. Pengujian parameter MGPR secara parsial mengikuti distribusi Z seperti pada persamaan (2.28) (Pawitan, 2001).

2.2 Geographically Weighted Regression (GWR)

Dalam banyak bidang penelitian, seperti geografi, ekonomi, lingkungan hidup dan kesehatan, data yang digunakan pada umumnya berkaitan dengan lokasi geografis di mana data tersebut diamati. Tipe data seperti ini disebut sebagai data spasial. Pada awalnya, Brunsdon dkk. (1996; 1998) mengembangkan metode analisis data spasial yang disebut *geographically weighted regression* (GWR), yaitu suatu teknik untuk mengeksplorasi nonstasionaritas spasial suatu model regresi untuk data spasial sehingga koefisien dalam model regresi bervariasi secara spasial.

Model umum GWR dinyatakan sebagai berikut ini (Fotheringham dkk., 2002)

$$y_i = \beta_0(\mathbf{u}_i) + \sum_{k=1}^{p} \beta_k(\mathbf{u}_i) x_{ik} + \varepsilon_i;\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.38}$$

dengan

y_i = nilai pengamatan variabel respon pada lokasi ke $-i$

x_{ik} = nilai pengamatan variabel bebas ke $-k$ pada lokasi ke $-i$

$\beta_0(\mathbf{u}_i)$ = *intercept* model regresi GWR pada lokasi ke $-i$

$\beta_k(\mathbf{u}_i)$ = koefisien model regresi GWR pada lokasi ke $-i$

ε_i = *error* berdistribusi normal dengan $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$

$\mathbf{u}_i$ = vektor koordinat lintang dan bujur lokasi ke $-i$.

Persamaan (2.38) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) + \varepsilon_i;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

dengan

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{pi} \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},$$

$$\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i) = \left[\beta_0(\mathbf{u}_i) \quad \beta_1(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \beta_p(\mathbf{u}_i)\right].$$

Parameter dalam model GWR ditaksir secara lokal dengan pendekatan *weighted least square* (WLS). Pembobot untuk setiap lokasi $(\mathbf{u}_i)$ ditetapkan sebagai fungsi jarak dari $(\mathbf{u}_i)$ ke lokasi lainnya di mana observasi dikumpulkan. Misalkan pembobot lokasi $(\mathbf{u}_i)$ adalah $w_j(\mathbf{u}_i)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$ maka parameter pada lokasi ke $-i$ ditaksir dengan meminimumkan

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\mathbf{u}_i)\varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j(\mathbf{u}_i)\left(y_j - \mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\right)^2.$$

Berdasarkan teori WLS, penaksir parameter model GWR yang tak bias dan konsisten adalah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\mathbf{y}$$

dengan matriks pembobot

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{Diag}\left[w_1(\mathbf{u}_i) \quad w_2(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad w_n(\mathbf{u}_i)\right].$$

2.2.1 Geographically Weighted Generalized Poisson Regression (GWGPR)

GWGPR merupakan bentuk lokal dari model GPR, artinya adalah bahwa model GWGPR menghasilkan penaksir parameter yang bersifat lokal untuk setiap titik pengamatan (lokasi). Model GWGPR dituliskan sebagai

$$E(y_i) = \mu(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)) = \exp(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)); \quad i=1,2,...,n. \tag{2.39}$$

2.2.1.1 Penaksiran Parameter Model GWGPR

Penaksiran parameter model GWGPR dengan metode MLE diperoleh dengan membentuk fungsi *ln-likelihood* pada (2.7) untuk setiap lokasi. Fungsi *ln-likelihood* untuk lokasi ke $i = 1,2,\ldots,n$ dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ln L\left(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_i), i = 1,2,\ldots,n\right) = \sum_{i=1}^{n}\Bigg[& y_i \ln\left(\frac{\mu_i(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_i(\mathbf{u}_i)}\right) \\ & + (y_i - 1)\ln\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)y_i\right) \\ & - \ln(y_i!) - \frac{\mu_i(\mathbf{u}_i)\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)y_i\right)}{1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_i(\mathbf{u}_i)}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dalam model GWPR, koefisien regresi memiliki nilai yang berbeda-beda untuk setiap wilayah yang menunjukkan sifat lokal dari model. Untuk memperoleh penaksiran parameter parameter pada lokasi ke $-i$ diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya lokasi ke $-j$) dengan pembobot w_{ij} di mana penentuan pembobot optimum disajikan pada Subbab 2.4.3. Fungsi *ln-likelihood* lokasi ke $-i$ pada persamaan (2.40) dapat dituliskan kembali sebagai fungsi *ln-likelihood* terboboti untuk lokasi ke $-i$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ln L\left(\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\right)=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\Bigg[& y_j \ln\left(\frac{\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) \\ & +\left(y_j-1\right)\ln\left(1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)y_j\right) \\ & -\ln\left(y_j!\right)-\frac{\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)y_j\right)}{1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)}\Bigg],\end{aligned} \tag{2.41}$$

dengan $\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)=\exp\left(\mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$.

Turunan parsial pertama dari fungsi *ln-likelihood* terboboti pada (2.41) terhadap setiap parameter adalah sebagai berikut ini

$$\frac{\partial \ln L\left(\mu\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right)}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(y_j-\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^2}\right)w_{ij}, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L\left(\mu\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}{\partial \varphi\left(\mathbf{u}_i\right)}=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\Bigg[& -\frac{\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)y_j}{1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_i\left(\mathbf{u}_i\right)}+\frac{\left(y_j-1\right)y_j}{\left(1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)y_j\right)} \\ & -\frac{\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\left(y_j-\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}{\left(1+\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.43}$$

Persamaan (2.42) dan (2.43) merupakan persamaan implisit sehingga penyelesaiannya membutuhkan iterasi numerik seperti iterasi Newton-Raphson yang dinyatakan sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right) \tag{2.44}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)=\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\varphi}\left(\mathbf{u}_i\right)\right]^T$ dan matriks Hessian

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\partial\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)} & \dfrac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\partial\varphi(\mathbf{u}_i)} \\ \text{simetris} & \dfrac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right)}{\partial\varphi^2(\mathbf{u}_i)} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)}.$$

Turunan parsial kedua dari fungsi *ln-likelihood* terboboti pada (2.41) terhadap setiap parameter adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\partial\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)}=-\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[\frac{\mu_j(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)^2}\times\left(1+\frac{2\varphi(\mathbf{u}_i)\left(y_j-\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)}{1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_j(\mathbf{u}_i)}\right)\right], \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi\right)}{\partial\varphi^2(\mathbf{u}_i)}=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[\frac{\mu_j^2(\mathbf{u}_i)y_j}{\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)^2}+\frac{\left(y_j-1\right)y_j^2}{\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)y_j\right)^2}+\frac{2\mu_j^2(\mathbf{u}_i)\left(y_j-\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)^3}\right], \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(\mu(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\partial\varphi(\mathbf{u}_i)}=-\sum_{j=1}^{n}\left[w_{ij}\frac{2\left(y_j-\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)\mu_j(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi(\mathbf{u}_i)\mu_j(\mathbf{u}_i)\right)^3}\right]. \tag{2.47}$$

Iterasi pada (2.44) berhenti apabila nilai $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right\|\le\varepsilon$, dengan ε merupakan suatu nilai yang sangat kecil.

2.2.1.2 Pengujian Parameter Model GWGPR

Hipotesis untuk mengetahui signifikansi koefisien parameter model GWMGPR dinyatakan sebagai

$H_0:\beta_1(\mathbf{u}_i)=\beta_2(\mathbf{u}_i)=...=\beta_p(\mathbf{u}_i)=0;$

$H_1:$ paling sedikit ada satu $\beta_k(\mathbf{u}_i)\neq 0;\ i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,p$.

Langkah pertama pengujian parameter model GWGPR adalah membuat fungsi *ln-likelihood* di bawah populasi $\Omega=\left\{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_i)\right\}$ dan fungsi *ln-likelihood*

di bawah H_0 $\omega = \{\beta_0(\mathbf{u}_i)\}$. Kedua fungsi *ln-likelihood* tersebut dimaksimumkan kemudian dicari rasio keduanya untuk memperoleh statistik uji

$$G^2 = -2\ln\left(\frac{L^*(\hat{\omega})}{L^*(\hat{\Omega})}\right) = -2\left(\ln L^*(\hat{\omega}) - \ln L^*(\hat{\Omega})\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \chi^2_{(a-b)}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_i)\}$, a adalah jumlah parameter di bawah populasi dan b adalah jumlah parameter di bawah H_0. Tolak H_0 jika $G^2 > \chi^2_{(\alpha,a-b)}$. Ini artinya terdapat variabel bebas yang berpengaruh terhadap variabel respon pada taraf signifikansi α.

Dalam model GPR banyaknya parameter secara otomatis menjadi banyaknya parameter efektif dalam model. Namun demikian, untuk model GWGPR, dikarenakan adanya kemungkinan kesamaan sebagian parameter suatu lokasi dengan lokasi lain maka tidak semua parameter menjadi parameter efektif dalam model. Sampai saat ini, belum ada metode untuk menghitung kontribusi $\varphi(\mathbf{u}_i)$ terhadap jumlah parameter efektif dalam model, sehingga parameter φ didefinisikan sebagai parameter global untuk penyederhanaan. Sementara itu, dengan menggunakan metode yang dikembangkan oleh Nakaya (2005) untuk model GWPR, kontribusi $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ terhadap jumlah parameter efektif dalam model GWGPR diuraikan di bawah ini.

Penaksir parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} - \left[-\sum_{j=1}^{n}\left(w_{ij}\frac{\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\varphi\left(y_j-\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}}\right)\right)\right]^{-1}$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\left(w_{ij}\frac{\left(y_j-\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{\mu}_j(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right)^2}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} + \left[\sum_{j=1}^{n} \left(w_{ij} \frac{\hat{y}_j^{(h)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}} \right) \right) \right]^{-1}$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \left(w_{ij} \frac{\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{x}_j w_{ij}\, \hat{y}_j^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}} \right) \mathbf{x}_j^T \right) \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{w_{ij}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{x}_j w_{ij}\, \hat{y}_j^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}} \right) \mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} \right) \right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{x}_j w_{ij}\, \hat{y}_j^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}} \right) \mathbf{x}_j^T \right) \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{x}_j w_{ij} \hat{y}_j^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}} \right) \left(\mathbf{x}_j^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} + \frac{\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)}{\hat{y}_j^{(h)}} \frac{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)} + 2\hat{\varphi}\left(y_j - \hat{y}_j^{(h)}\right)} \right) \right) \right],$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}(\mathbf{u}_i)^{(h)}\, \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}(\mathbf{u}_i)^{(h)}\, \mathbf{z}(\mathbf{u}_i)^{(h)} \tag{2.48}$$

dengan

$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)$ adalah matriks pembobot ukuran $n \times n$ untuk lokasi i

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}_i) = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{i2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{in} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$\mathbf{A}(\mathbf{u}_i)^{(h)}$ adalah matriks pembobot varians untuk lokasi i pada iterasi ke$-h$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_i)^{(h)} = \begin{bmatrix} a_{i1}^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{i2}^{(h)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{in}^{(h)} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$a_{ij}^{(h)} = \frac{\hat{y}_j^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}\left(y_j-\hat{y}_j^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}}\right), \tag{2.49}$$

dan $\mathbf{z}(\mathbf{u}_i)^{(h)}$ adalah *adjusted vector* dari variabel respon pada iterasi ke$-h$

$$\mathbf{z}(\mathbf{u}_i)^{(h)} = \mathbf{x}_j^T\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} + \frac{\left(y_j-\hat{y}_j^{(h)}\right)}{a_{ij}^{(h)}\left(1+\hat{\varphi}\hat{y}_j^{(h)}\right)^2}. \tag{2.50}$$

Banyaknya parameter efektif model GWGPR adalah

$$v_1 = v_{11} + v_{12} \tag{2.51}$$

di mana v_{11} dan v_{12} masing-masing adalah jumlah efektif parameter karena $\boldsymbol{\beta}$ dan φ. Mengikuti metode yang dikembangkan oleh Nakaya (2005), v_{11} diperoleh dari *trace* matriks $\mathbf{S}$ di mana elemen-elemennya adalah

$$s_j = \mathbf{x}_j\left(\mathbf{X}^T\,\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_i)\,\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\,\mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_i) \tag{2.52}$$

dengan $\mathbf{x}_j$ adalah baris ke$-j$ matriks $\mathbf{X}$. Karena tidak ada variasi spatial untuk φ maka kontribusi φ pada jumlah parameter efektif dalam model adalah satu, yaitu $v_{12} = 1$.

2.2.2 Geographically Weighted Bivariate Generalized Poisson Regression (GWBGPR)

Model GWBGPR merupakan perluasan dari model BGPR di mana dalam penaksiran parameternya mempertimbangkan aspek spasial, yaitu dengan menggunakan matriks pembobot spasial (Purhadi dkk., 2021). Model GWBGPR berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.25) dapat dituliskan sebagai berikut

$$(Y_{i1}, Y_{i2}) \sim BGP\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \lambda_1(\mathbf{u}_i), \lambda_2(\mathbf{u}_i)\right)$$

$$\left(\lambda_{il}(\mathbf{u}_i) + \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) = e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)};\quad l = 1,2;\quad i = 1,2,\ldots,n$$

dengan $\mathbf{x}_i$ seperti pada (2.22) dan

$$\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i) = \left[\beta_{l0}(\mathbf{u}_i)\quad \beta_{l1}(\mathbf{u}_i)\quad \ldots\quad \beta_{lp}(\mathbf{u}_i)\right]^T_{n(p+1)\times 1};\ l = 1,2\,.$$

2.2.2.1 Penaksiran Parameter Model GWBGPR

Penaksiran parameter GWBGPR pada bagian ini berdasarkan BGPD pada (2.13), tanpa *exposure* dan kovariansi merupakan konstanta, sehingga model (2.13) dengan memperhitungkan efek spasial dapat dinyatakan dalam fungsi probabilitas sebagai berikut

$$P(y_{i1}, y_{i2}) = \lambda_0(\mathbf{u}_i)\lambda_{i1}(\mathbf{u}_i)\lambda_{i2}(\mathbf{u}_i)\ R \sum_{a=0}^{l^*} STUV \tag{2.53}$$

dengan $l^* = \min(y_{i1}, y_{i2})$,

$$R = \exp\left(-\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + \lambda_{i1}(\mathbf{u}_i) + \lambda_{i2}(\mathbf{u}_i)\right) - y_{i1}\phi_1(\mathbf{u}_i) - y_{i2}\phi_2(\mathbf{u}_i)\right),$$

$$S = \frac{\left(\lambda_{i1}(\mathbf{u}_i) + (y_{i1} - a)\phi_1(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i1}-a-1}}{(y_{i1} - a)!},$$

$$T = \frac{\left(\lambda_{i2}(\mathbf{u}_i) + (y_{i2} - a)\phi_2(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i2}-a-1}}{(y_{i2} - a)!},$$

$$U = \frac{\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + a\phi_0(\mathbf{u}_i)\right)^{a-1}}{a!}, \text{ dan}$$

$$V = \exp\left(a\left(\phi_1(\mathbf{u}_i) + \phi_2(\mathbf{u}_i) - \phi_0(\mathbf{u}_i)\right)\right).$$

Penaksiran parameter GWBGPR dilakukan dengan metode MLE. Oleh karena itu, langkah selanjutnya adalah membuat fungsi *likelihood* dari persamaan (2.53) seperti di bawah ini

$$L(\cdot) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_0(\mathbf{u}_i)\lambda_{i1}(\mathbf{u}_i)\lambda_{i2}(\mathbf{u}_i)\ R \sum_{a=0}^{l^*} STUV\ , \tag{2.54}$$

kemudian membentuk fungsi *ln-likelihood* dari (2.54) dan disimbolkan sebagai Q_c seperti di bawah ini

$$Q_c = \ln(L(\cdot)). \tag{2.55}$$

Pada model GWBGPR, faktor yang diperhatikan sebagai pembobot adalah faktor geografis dari tiap titik-titik pengamatan (daerah). Tentunya setiap daerah memiliki faktor geografis yang berbeda-beda, sehingga hal ini menunjukkan bahwa setiap daerah memiliki sifat lokal pada model GWBGPR. Dengan

mensubstitusikan persamaan (2.25) ke dalam persamaan (2.55) dan mengalikannya dengan pembobot geografis w_{ij} untuk masing-masing lokasi, diperoleh

$$\begin{aligned}
Q_c^* &= \sum_{j=1}^{n} \ln \lambda_0(\mathbf{u}_i)\, w_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) w_{ij} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right)\left(w_{ij}\right) - n\lambda_0(\mathbf{u}_i)\, w_{ij} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) w_{ij} + \sum_{i^*=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) w_{ij} \\
&- \sum_{j=1}^{n} y_{j1}\phi_1(\mathbf{u}_i)\, w_{ij} - \sum_{j=1}^{n} y_{j2}\phi_2(\mathbf{u}_i)\, w_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \ln C_j\, w_{ij}, \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

di mana C_j adalah

$$C_j = \sum_{a=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} C_{j1} C_{j2},$$

$$C_{j1} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + \left(y_{j1} - a\right)\alpha_1(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i1}-a-1}}{\left(y_{j1} - a\right)!} \times \exp\left[a\left(\phi_1(\mathbf{u}_i) + \phi_2(\mathbf{u}_i) - \phi_0(\mathbf{u}_i)\right)\right],$$

$$C_{j2} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + \left(y_{j2} - a\right)\phi_2(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{j2}-a-1}}{\left(y_{j2} - a\right)!} \times \frac{\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + a\phi_0(\mathbf{u}_i)\right)^{a-1}}{a!},$$

dengan w_{ij} adalah pembobot geografis yang didefinisikan oleh suatu fungsi jarak d_{ij} antara titik pusat lokasi i dan titik pusat lokasi j. Untuk mendapatkan penaksir parameter model GWBGPR pada masing-masing lokasi, maka fungsi pada persamaan (2.56) diturunkan masing-masing terhadap parameternya.

Penaksiran parameter GWBGPR dengan menggunakan iterasi Newton Raphson adalah sebagai berikut ini. Pertama adalah menentukan nilai taksiran awal $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(0)}$ dengan formula sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(h)}\right), \qquad (2.57)$$

dengan

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) = \left[\lambda_0(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i) \quad \phi_0(\mathbf{u}_i) \quad \phi_1(\mathbf{u}_i) \quad \phi_2(\mathbf{u}_i)\right]_{n(2p+6)\times 1}^T.$$

Selanjutnya, membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right)$

$$\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)=\left(\frac{\partial Q_c^*}{\partial \lambda_0^*}\ \frac{\partial Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^*}\ \frac{\partial Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^*}\ \frac{\partial Q_c^*}{\partial \phi_1^*}\ \frac{\partial Q_c^*}{\partial \phi_2^*}\ \frac{\partial Q_c^*}{\partial \phi_0^*}\right)^T_{(2p+6)\times 1},$$

$$\underset{(2p+6)(2p+6)}{\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^{*2}} & & & \text{simetris} & & \\ \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^* \partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T}} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T} \partial \boldsymbol{\beta}_1^*} & & & & \\ \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^* \partial \boldsymbol{\beta}_2^{*T}} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T} \partial \boldsymbol{\beta}_2^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \partial \boldsymbol{\beta}_2^*} & & & \\ \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^* \partial \phi_1^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T} \partial \phi_1^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \partial \phi_1^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_1^{*2}} & & \\ \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^* \partial \phi_2^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T} \partial \phi_2^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \partial \phi_2^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_1^* \partial \phi_2^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_2^{*2}} & \\ \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \lambda_0^* \partial \phi_0^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^{*T} \partial \phi_0^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^{*T} \partial \phi_0^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_1^* \partial \phi_0^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_2^* \partial \phi_0^*} & \frac{\partial^2 Q_c^*}{\partial \phi_0^{*2}} \end{bmatrix}, \qquad (2.58)$$

dengan $\lambda_0^* = \lambda_0\left(\mathbf{u}_i\right)$, $\boldsymbol{\beta}_1^{*T} = \boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)$, $\boldsymbol{\beta}_2^{*T} = \boldsymbol{\beta}_2^T\left(\mathbf{u}_i\right)$, $\phi_1^* = \phi_1\left(\mathbf{u}_i\right)$, $\phi_2^* = \phi_2\left(\mathbf{u}_i\right)$, dan $\phi_0^* = \phi_0\left(\mathbf{u}_i\right)$.

Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(0)}$ dimasukkan ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$, sehingga diperoleh vektor gradien $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^{(0)}$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^{(0)}$. Mulai dari $h=0$ dilakukan iterasi pada persamaan (2.57). Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke $-h$. Iterasi akan berhenti apabila nilai $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right\| \le \varepsilon$, dengan ε merupakan suatu nilai yang sangat kecil.

2.2.2.2 Pengujian Parameter Model GWBGPR

Fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model GWBGPR pada persamaan (2.53) adalah $L(\hat{\Omega})$ dan $L(\hat{\omega})$. $L(\hat{\Omega})$ merupakan nilai *likelihood* maksimum untuk model dengan melibatkan variabel bebas dan $L(\hat{\omega})$ adalah nilai *likelihood* maksimum untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel bebas.

Metode yang digunakan untuk pengujian serentak parameter pada model GWBGPR adalah *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

Pengujian serentak parameter model GWBGPR dilakukan untuk mengetahui signifikansi parameter β secara bersama-sama dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0 : \beta_{l1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{l2}(\mathbf{u}_i) = ... = \beta_{lp}(\mathbf{u}_i) = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i) \neq 0;\ i = 1,2,\ldots,n;\ k = 1,2,\ldots,p;\ l = 1,2.$

Fungsi *likelihood* dibawah populasi $L(\Omega)$ sebagai berikut

$$L\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i), \phi_1(\mathbf{u}_i), \phi_2(\mathbf{u}_i), \phi_0(\mathbf{u}_i); i = 1,2,\ldots,n\right) =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_0(\mathbf{u}_i)\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right]\left[e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right]$$
$$\exp\left\{-\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right)\right) y_{i1}\phi_1(\mathbf{u}_i) - y_{i2}\phi_2(\mathbf{u}_i)\right\} C_i,$$

dengan C_i adalah

$$C_i = \sum_{a=0}^{l^*} C_{i1} C_{i2},$$

$$C_{i1} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + (y_{i1} - a)\phi_1(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i1}-a-1}}{(y_{i1} - a)!} \times e^{a\left(\phi_1(\mathbf{u}_i) + \phi_2(\mathbf{u}_i) - \phi_0(\mathbf{u}_i)\right)},$$

$$C_{i2} = \frac{\left(\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + (y_{i2} - a)\phi_2(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i2}-a-1}}{(y_{i2} - a)!} \times \frac{\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + a\phi_0(\mathbf{u}_i)\right)^{a-1}}{a!},$$

dan

$$\begin{aligned}
\ln L^*(\Omega) = &\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_0(\mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) - n\lambda_0(\mathbf{u}_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) \\
&- \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\phi_1(\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\phi_2(\mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln C_i,
\end{aligned}$$

dengan $\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i), \phi_1(\mathbf{u}_i), \phi_2(\mathbf{u}_i), \phi_0(\mathbf{u}_i)\right)$ merupakan nilai penaksir parameter yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi Newton Raphson. Sementara itu, fungsi *ln-likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel bebas dibentuk pada himpunan dibawah H_0 disebut sebagai $L^*(\omega)$. Fungsi *likelihood* dibawah H_0 adalah sebagai berikut.

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_0^*(u_i, v_i)\left[e^{\beta_{1.0}(u_i,v_i)} - \lambda_0^*(u_i, v_i)\right]\left[e^{\beta_{2.0}(u_i,v_i)} - \lambda_0^*(u_i, v_i)\right]$$
$$e^{\left(-\left(\lambda_0^*(u_i,v_i)+\left(e^{\beta_{1.0}(u_i,v_i)}-\lambda_0^*(u_i,v_i)\right)+\left(e^{\beta_{2.0}(u_i,v_i)}-\lambda_0^*(u_i,v_i)\right)y_{1i}\phi_1(u_i,v_i)-y_{2i}\phi_2(u_i,v_i)\right)C_{i.0}\right.},$$

dengan $C_{i.0}$ adalah

$$C_{i.0} = \sum_{a=0}^{l^*} C_{i1.0} C_{i2.0}$$

$$C_{i1.0} = \frac{\left(\left(e^{\beta_{1.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + (y_{i1} - a)\phi_1(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i1}-a-1}}{(y_{i1} - a)!} \times e^{a\left(\phi_1(\mathbf{u}_i)+\phi_2(\mathbf{u}_i)-\phi_0(\mathbf{u}_i)\right)},$$

$$C_{2i.0} = \frac{\left(\left(e^{\beta_{2.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + (y_{i2} - a)\phi_2(\mathbf{u}_i)\right)^{y_{i2}-a-1}}{(y_{i2} - a)!} \frac{\left(\lambda_0(\mathbf{u}_i) + a\phi_0(\mathbf{u}_i)\right)^{a-1}}{a!},$$

sehingga fungsi *ln-likelihood* dibawah H_0 menjadi

$$\begin{aligned}
\ln L^*(\omega) = &\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_0(\mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\beta_{1.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\beta_{2.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) - n\lambda_0(\mathbf{u}_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{1.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{\beta_{2.0}(\mathbf{u}_i)} - \lambda_0(\mathbf{u}_i)\right) \\
&- \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\phi_1(\mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}\phi_2(\mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln C_{i.0}.
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan penaksiran parameter untuk $\lambda_0(\mathbf{u}_i), \beta_{1.0}(\mathbf{u}_i)$, $\beta_{2.0}(\mathbf{u}_i), \phi_1(\mathbf{u}_i), \phi_2(\mathbf{u}_i), \phi_0(\mathbf{u}_i)$ maka dapat dilakukan perhitungan untuk memperoleh statistik uji dengan persamaan

$$-2\ln\left(\frac{L^*(\hat{\omega})}{L^*(\hat{\Omega})}\right) > -2\ln k,$$

sehingga didapatkan

$$G^2 = -2\ln\left(\frac{L^*(\hat{\omega})}{L^*(\hat{\Omega})}\right) = -2\left(\ln L^*(\hat{\omega}) - \ln L^*(\hat{\Omega})\right) \xrightarrow{asym} \chi^2_v,$$

dengan v adalah jumlah parameter di bawah populasi dikurangi jumlah parameter di bawah H_0. Tolak H_0 jika $G^2 > \chi^2_{\alpha,v}$. Artinya terdapat variabel bebas yang berpengaruh terhadap variabel respon pada taraf signifikansi α.

2.3 Distribusi Penaksir *Maximum Likelihood*

Metode *maximum likelihood estimation* (MLE) merupakan metode yang umum digunakan dalam penaksiran parameter. Pada bagian ini dikemukakan sifat-sifat penaksir MLE. Dimisalkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah penaksir *maximum likelihood* dari $\boldsymbol{\theta}$ dengan $\boldsymbol{\theta}_w$ adalah parameter yang sebenarnya. Di bawah kondisi reguler dan jika fungsi *likelihood* mencapai maksimumnya pada $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, maka penaksir *maximum likelihood* mempunyai sifat-sifat asimtotik sebagai berikut.

i) Konsisten

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_w\right| > \varepsilon\right) = 0, \text{ untuk } \varepsilon.$$

ii) Normalitas asimtotik

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{asym} N\left(\boldsymbol{\theta}_\omega, \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)$$

di mana

$$\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\left.\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

dengan $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah matriks informasi Fisher (Pawitan, 2001). Penaksir *maximum likelihood* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah tak bias asimtotik, yaitu

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right) = \boldsymbol{\theta}_\omega,$$

dengan varians-kovarians asimtotik

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right) = \mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right).$$

iii) Invarian

Distribusi asimtotik dari *maximum likelihood* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dinyatakan dalam suatu teorema, yaitu bahwa hasil-hasil berikut ini adalah ekuivalen (Pawitan, 2001)

a. $\mathbf{I}^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{a_1}\right)$ dengan $\mathbf{I}_{a_1}$ adalah matriks identitas berukuran a_1.

b. $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{d} \chi^2_{a_1}$

dengan $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ adalah matriks informasi Fisher.

2.4 Efek Spasial

Pemodelan pada data spasial dapat dikelompokkan berdasarkan tipe data spasial yang digunakan, yaitu spasial titik dan spasial area. Masing-masing tipe data spasial tersebut dapat dikelompokkan lagi berdasarkan jenis data yang digunakan, yaitu *cross sectional* dan *time-series*. Efek spasial pada data dapat berupa *error* yang saling berkorelasi (dependensi spasial) maupun keragaman spasial antarlokasi (heterogenitas spasial).

Keragaman spasial umumnya mengacu pada distribusi proses atau peristiwa yang tidak merata di wilayah yang luas, sedangkan ketergantungan spasial mengacu pada proses yang menciptakan kelompok/klaster kejadian, dan sebagainya. Artinya, heterogenitas spasial menggambarkan wilayah yang tidak merata dan ketergantungan spasial mengacu pada kejadian lokal yang tidak independen dan saling berdekatan. Heterogenitas spasial bertujuan untuk mengetahui apakah intensitas terjadinya suatu peristiwa berdistribusi secara merata di seluruh wilayah, sedangkan dependensi spasial untuk mengetahui apakah intensitas di suatu lokasi memengaruhi intensitas di lokasi tetangga. Selanjutnya, jika suatu wilayah memiliki heterogenitas spasial, hal ini mungkin akibat ketergantungan spasial. Pemodelan data spasial selalu melibatkan matriks pembobot spasial.

2.4.1 Dependensi Spasial

Dependensi spasial dapat diketahui dengan melakukan beberapa jenis pengujian seperti: *lagrange multiplier*, Wald, *likelihood ratio* dan Moran's I. Pengujian yang sering digunakan adalah statistik Moran's I yang menunjukkan ukuran korelasi antarpengamatan di lokasi yang berbeda.

Ukuran Moran's I dinyatakan sebagai berikut (Anselin, 1995)

$$I = \frac{(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})}{(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})}$$

dengan

$\mathbf{y}$ = vektor observasi y

$\bar{\mathbf{y}}$ = vektor rata-rata observasi y

$\mathbf{W}$ = matriks pembobot spasial terstandardisasi

Matriks pembobot yang digunakan merupakan matriks pembobot berdasarkan batas, yaitu berdasarkan hubungan persinggungan (*contiguity*), di mana matriks pembobot spasial

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } i \text{ dan } j \text{ bersinggungan} \\ 0, \text{ jika } i \text{ dan } j \text{ tidak bersinggungan.} \end{cases}$$

Lokasi i dan j dikatakan bersinggungan jika sisi kedua lokasi bersinggungan (*rook criterion*), atau jika sudut kedua lokasi bersinggungan (*bishop criterion*), atau jika sisi dan atau sudut kedua lokasi bersinggungan (*queen criterion*).

Rentang nilai Moran's I adalah $-1 \le I \le 1$, di mana $I = -1$ artinya terdapat dispersi sempurna (*perfect dispersion*) dan $I = 1$ artinya terdapat korelasi sempurna (*perfect correlation*). Nilai $I = 0$ menunjukkan pola spasial acak. Signifikansi Moran's I dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan normal dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0 : y$ independen secara spasial
$H_1 : y$ tidak independen secara spasial.

Statistik uji Moran's I dinyatakan dengan

$$Z_I = \frac{\hat{I} - E(\hat{I})}{\sqrt{Var(\hat{I})}},$$

dengan

$$E(\hat{I}) = -\frac{1}{n-1},$$

$$Var(\hat{I}) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3S_3^2}{(n^2-1)S_3^2} - \left(E(\hat{I})\right)^2,$$

di mana

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(w_{ij} + w_{ji}\right)^2,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_{ji}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(w_{i\bullet} + w_{\bullet i}\right)^2 \text{ dengan } w_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij},$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}.$$

Kriteria pengambilan keputusan, tolak H_0 jika $\left|Z_{I(hitung)}\right| > Z_{\alpha/2}$.

2.4.2 Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial pada data dapat diuji dengan hipotesis sebagai berikut ini

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = \sigma$ (tidak terdapat heterogenitas spasial)

H_1 : minimal ada satu $\sigma_i \neq \sigma$; $i = 1, 2, ..., n$

(terdapat heterogenitas spasial).

Hipotesis di atas diuji menggunakan pendekatan *Breusch-Pagan test* untuk kasus univariat yang dilandasi oleh *multiplier test* sebagaimana dinyatakan dalam Gujarati (2004), yaitu dengan melakukan uji serentak untuk model regresi

$$y_{il} = \beta_{l0} + \beta_{l1}x_{i1} + \beta_{l2}x_{i2} + \ldots + \beta_{lp}x_{ip} + \varepsilon_{il}, \quad i = 1, 2, ..., n;\ l = 1, 2, ..., g$$

dengan regresi *auxiliary*

$$\hat{\varepsilon}_{il}^2 = \delta_{l0} + \delta_{l1}x_{i1} + \delta_{l2}x_{i2} + \ldots + \delta_{lp}x_{ip}.$$

Rumusan hipotesis untuk uji Breusch-Pagan tersebut adalah sebagai berikut

$H_0 : \delta_{l1} = \delta_{l2} = \ldots = \delta_{lp} = 0,\ l = 1, 2, \ldots, g$

H_1 : paling sedikit ada satu $\delta_{lk} \neq 0;\ k = 1, 2, ..., p$.

Di bawah uji H_0, uji memberikan indikasi tidak ada heterogenitas spasial pada data. Statistik uji yang digunakan adalah

$$BP = n\ R_e^2 \tag{2.59}$$

dengan R_e^2 adalah koefisien determinasi dari regresi *auxiliary*. Statistik uji BP mengikuti distribusi χ_p^2 dengan p menyatakan banyaknya variabel bebas.

Dengan menggunakan analog statistik uji pada (2.59) untuk kasus multivariat, maka perlu didefinisikan terlebih dahulu R^2 untuk mengukur asosiasi antara $y_1, y_2, \ldots, y_g$ dan $x_1, x_2, \ldots, x_p$, yaitu (Rencher, 2002)

$$R_M^2 = \frac{\left|\mathbf{S}_{yx}\mathbf{S}_{xx}^{-1}\mathbf{S}_{xy}\right|}{\left|\mathbf{S}_{yy}\right|}$$

dengan R_M^2 adalah R^2 untuk kasus multivariat dan

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{yy} & \mathbf{S}_{yx} \\ \mathbf{S}_{xy} & \mathbf{S}_{xx} \end{bmatrix}.$$

Ketika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ berdistribusi bivariat normal maka statistik uji akan mengikuti distribusi t dengan derajat bebas $n-2$ (Rencher dan Scaalje, 2008).

2.4.3 Pembobot Spasial

Pembobot memiliki peranan penting pada data spasial, karena nilai suatu pembobot merupakan perwakilan dari lokasi di mana masing-masing data diambil. Informasi mengenai suatu lokasi dapat direpresentasikan oleh sebuah titik koordinat, seperti garis lintang dan garis bujur. Berdasarkan informasi spasial tersebut dapat diperhitungkan jarak titik koordinat antar lokasi sehingga diharapkan kekuatan dari dependensi spasial akan menurun dengan adanya jarak tersebut. Lokasi yang berdekatan seharusnya menunjukkan hubungan kemiripan, begitu juga sebaliknya. Lokasi yang berjauhan juga memperlihatkan adanya keragaman spasial.

Keragaman spasial antara lokasi yang satu dengan lokasi yang lain ditunjukkan dengan adanya matriks pembobot **W** yang isian selnya merupakan fungsi dari jarak *Euclidian* antarlokasi. Pembentukan fungsi pembobot dari jarak *Euclidian* salah satunya dapat menggunakan fungsi kernel (*kernel function*). Fungsi

pembobot **W** yang digunakan merupakan fungsi kontinu dari jarak *Euclidian* karena diskontinuitas pembobot menyebabkan parameter yang dihasilkan dapat berubah secara drastis ketika lokasi pengamatan berubah.

Terdapat beberapa matriks pembobot yang dapat digunakan, salah satunya adalah *fixed kernel Gaussian* (Fotheringham dkk., 2002), yaitu

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right) \tag{2.60}$$

di mana b adalah *bandwidth* yang merupakan parameter non-negatif. Nilai pembobot dari suatu data akan mendekati satu jika jaraknya berdekatan dan akan semakin mendekati nol jika jaraknya semakin jauh.

Fungsi pembobot lainnya adalah *fixed kernel bi-square* dengan rumusan

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right)^2 & ; \text{ untuk } d_{ij} < b \\ 0 & ; \text{ untuk } d_{ij} \text{ lainnya} \end{cases} \tag{2.61}$$

merupakan fungsi pembobot kontinu, mendekati fungsi bobot Gaussian sampai dengan jarak b dari titik regresi dan selanjutnya diberi bobot nol untuk titik data dengan jarak lebih besar dari b.

Selain kedua fungsi pembobot di atas, terdapat fungsi pembobot a*daptive kernel Gaussian* dan *adaptive kernel bi-square*. Perbedaan kedua fungsi ini dengan dua fungsi di atas sebelumnya adalah bahwa fungsi kernel *Gaussian* dan *bi-square* merupakan fungsi kernel *fixed*, yaitu fungsi kernel dengan *bandwidth* yang sama di setiap lokasi. Fungsi kernel adaptif merupakan fungsi kernel yang memiliki *bandwidth* yang berbeda pada setiap lokasi pengamatan. Fungsi *adaptive kernel Gaussian* dan fungsi *adaptive kernel bi-square* masing-masing disajikan pada persamaan berikut ini

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right) \tag{2.62}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right)^2 & ;\text{untuk } d_{ij} \le b_i \\ 0 & ;\text{ untuk } d_{ij} > b_i \end{cases} \tag{2.63}$$

dengan

$$d_{ij} = \sqrt{\left(u_{1i} - u_{1j}\right)^2 + \left(u_{2i} - u_{2j}\right)^2}$$

di mana d_{ij} adalah jarak *Euclidian* antara lokasi ke-i dan lokasi ke- j, sedangkan b_i adalah *bandwidth* lokasi ke-i yang merupakan radius suatu lingkaran di mana titik data yang berada dalamnya diperhitungkan dalam membentuk model lokasi ke-i .

Pemodelan *geographically weighted* lebih sensitif dalam hal pemilihan *bandwidth* dibandingkan dengan pemilihan pembobot yang digunakan. Besar kecilnya *bandwidth* yang digunakan berpengaruh pada ketepatan model yang berkaitan dengan variansi dan bias dari penaksir yang dihasilkan (Fotheringham dkk., 2002). Oleh karena itu, *bandwidth* optimum diperlukan untuk mengatur besar kecilnya variansi dan bias tersebut (Nakaya dkk., 2005). Pemilihan *bandwidth* optimum dapat dilakukan dengan metode *generalized* c*ross validation* (GCV). Skor GCV didefinisikan oleh persamaan berikut

$$GCV = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_i(b)\right)^T\left(y_i - y_i(b)\right)}{\left(n - v_1\right)^2} \tag{2.64}$$

dengan $\hat{y}_i(b)$ adalah vektor prediksi y_i untuk *bandwidth* b dan v_1 adalah banyaknya parameter efektif dalam model. *Bandwidth* optimum adalah *bandwidth* dengan nilai *GCV* terkecil.

2.5 Kesehatan Ibu dan Anak

Salah satu tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu, baik secara global (model MGPR) maupun secara lokal (model GWMGPR). Oleh karena itu, perlu dijabarkan kerangka berpikir teoretis berkaitan dengan kematian bayi, anak dan ibu didukung oleh penelitian-penelitian empiris sebelumnya sebagai dasar pemilihan variabel-

variabel bebas dalam pemodelan yang dimaksud. Dengan demikian, variabel-variabel bebas yang akan dicakup dalam model MGPR dan GWMGPR layak digunakan karena telah sesuai dengan kerangka berpikir teoretisnya.

Tabel 2.1 Determinan Sosial Kesehatan

Stabilitas ekonomi	**Lingkungan**	**Pendidikan**	**Makanan**	**Konteks komunitas dan sosial**	**Sistem pelayanan kesehatan**
Pekerjaan	Perumahan	Melek huruf	Kelaparan	Integrasi sosial	Cakupan kesehatan
Pendapatan	Transportasi	Bahasa	Makanan sehat	Keterlibatan dalam komunitas	Ketersediaan pelayanan
Pengeluaran	Keamanan	Pendidikan masa kecil		Dukungan sistem	Kompetensi linguistik dan budaya penyedia pelayanan kesehatan
Hutang	Taman	Pelatihan		Diskriminasi	Kualitas kesehatan
Tagihan medis	Taman bermain				
Dukungan	*Walkability*				
***Outcame* kesehatan:** **Kematian, morbiditas, harapan hidup, pengeluaran, status kesehatan, keterbatasan fungsional**					

Sumber: Heiman dan Artiga (2015)

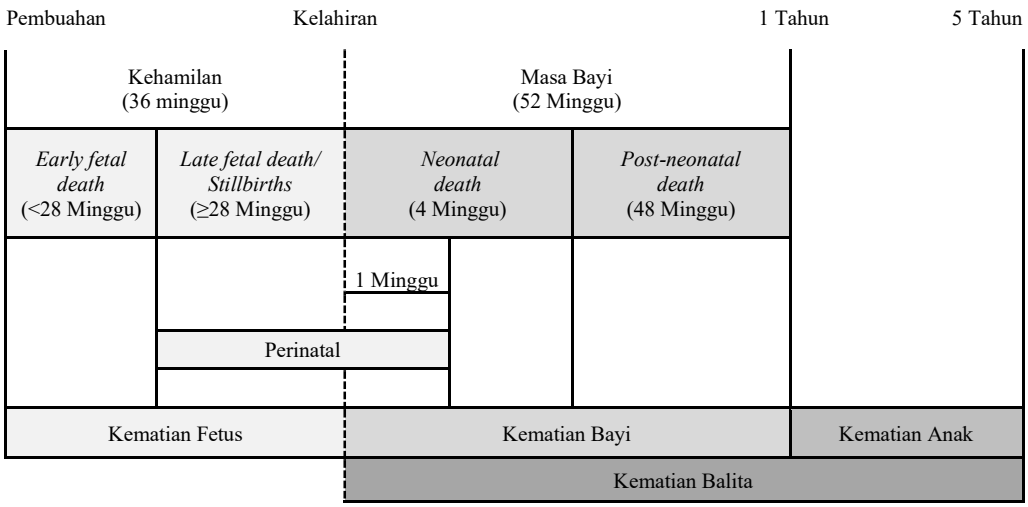
Di bagian ini diuraikan beberapa kerangka berpikir teoretis berkaitan dengan kematian bayi, anak, dan ibu. Kerangka berpikir oleh (Heiman dan Artiga (2015) menyajikan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kondisi kesehatan secara umum, sedangkan kerangka berpikir oleh Mosley dan Chen (1984) menyajikan faktor-faktor yang memengaruhi kelangsungan hidup anak, dan kerangka berpikir oleh *United Nations Development Programme* (2011) menyajikan faktor-faktor yang memengaruhi kesehatan ibu.

Peningkatan kesehatan ibu, bayi, dan anak merupakan salah satu tujuan penting yang ingin dicapai oleh pemerintah Indonesia. Kesehatan mereka menentukan kesehatan generasi berikutnya dan dapat memprediksi tantangan masalah kesehatan di masa depan untuk keluarga, masyarakat, dan sistem pelayanan kesehatan. Berdasarkan kondisi suatu kehamilan dapat diidentifikasi risiko kesehatan seorang wanita sehingga dapat bermanfaat untuk mencegah masalah kesehatan selanjutnya untuk wanita dan anaknya. Risiko kematian ibu dan anak dapat dikurangi dengan peningkatan pemeriksaan sebelum kehamilan dan selama kehamilan. Bayi yang dilahirkan dengan sehat, identifikasi awal dan

perawatan kesehatan saat bayi dapat mencegah kematian atau disabilitas dan memampukan anak-anak untuk mencapai potensi maksimal mereka.

2.5.1 Kematian Bayi dan Anak

World Health Organization mendefinisikan kematian sebagai suatu peristiwa menghilangnya semua tanda-tanda kehidupan secara permanen, yang bisa terjadi setiap saat setelah kelahiran hidup. Lahir hidup (*live birth*) adalah peristiwa keluarnya hasil konsepsi dari rahim seorang ibu secara lengkap tanpa memandang lamanya kehamilan dan setelah perpisahan tersebut terjadi; hasil konsepsi bernafas dan mempunyai tanda-tanda hidup lainnya, seperti denyut jantung, denyut tali pusat, atau gerakan-gerakan otot, tanpa memandang apakah tali pusat sudah dipotong atau belum. Lahir hidup berbeda dengan lahir mati. Lahir mati (*fetal death*) adalah peristiwa menghilangnya tanda-tanda kehidupan dari hasil konsepsi sebelum hasil konsepsi tersebut dikeluarkan dari rahim ibunya (World Health Organization, 2019).



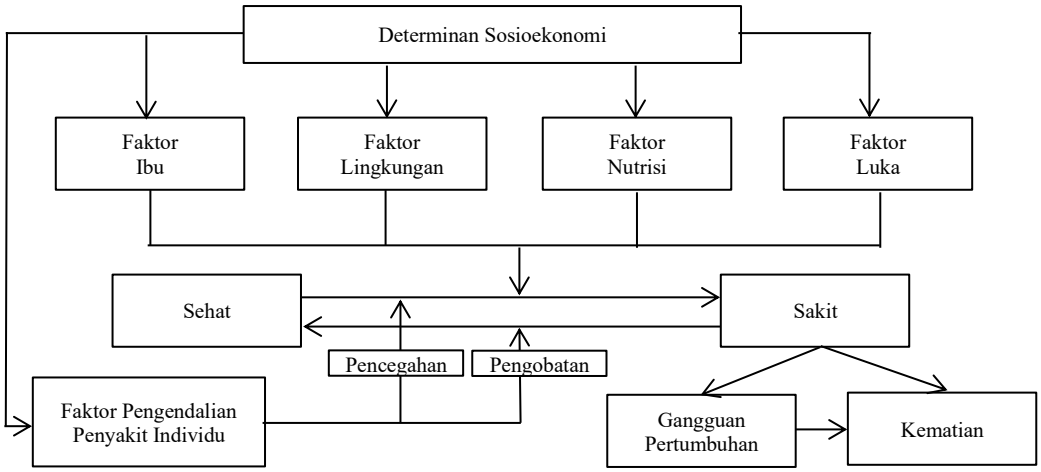
Sumber: Rowland (2003)

Gambar 2.1 Bagan Kematian Bayi, Anak, dan Balita

Pada Gambar 2.1 disajikan bagan kematian bayi, anak, dan balita sejak pembuahan sampai dengan hasil pembuahan tersebut lahir. Kematian bayi (*infant mortality*) adalah bayi lahir hidup yang meninggal sebelum berumur tepat satu

tahun. Kematian bayi dibedakan menjadi (1) kematian perinatal, yaitu kematian yang terjadi pada bayi meninggal sebelum berusia satu minggu, termasuk di dalamnya lahir mati (*stillbirth*); (2) kematian neonatal, yaitu kematian yang terjadi pada bayi sebelum berumur 28 hari; dan (3) kematian post-neonatal, yaitu kematian yang terjadi pada bayi yang berumur antara 28 hari sampai sebelum satu tahun (United Nations Children's Fund, 2015). Angka kematian bayi adalah jumlah kematian bayi berumur dibawah satu tahun per 1.000 kelahiran hidup pada satu tahun tertentu. Dengan demikian, besaran angka kematian bayi disumbang oleh kematian neonatal dan postneonatal.

Angka kematian anak (*child mortality*) adalah kematian anak berusia 1-4 tahun selama satu tahun tertentu per 1.000 anak umur yang sama pada pertengahan tahun itu. Sementara itu, angka kematian balita (*under-five mortality*) adalah jumlah kematian anak berusia 0-4 tahun selama satu tahun tertentu per 1.000 anak umur yang sama pada pertengahan tahun itu. Dengan demikian, angka kematian balita mencakup kematian bayi, sedangkan kematian anak tidak (United Nations, 1990).



Sumber: Mosley dan Chen (1984)

Gambar 2.2 Kerangka Pikir Teoretis Kelangsungan Hidup Anak

Kerangka berpikir analitis mengenai determinan kematian bayi dan anak disajikan pada Gambar 2.2, yaitu suatu kerangka berpikir oleh Mosley dan Chen (1984). Kerangka berpikir ini ditujukan untuk penelitian tingkat lanjut mengenai

kebijakan sosial dan intervensi medis untuk peningkatan kelangsungan hidup anak. Kerangka pikir teoretis dalam penelitian kelangsungan hidup anak bertujuan untuk memperjelas pemahaman tentang faktor-faktor di dalam keluarga yang berkaitan dengan kesehatan anak untuk merumuskan kebijakan dan strategi di bidang kesehatan.

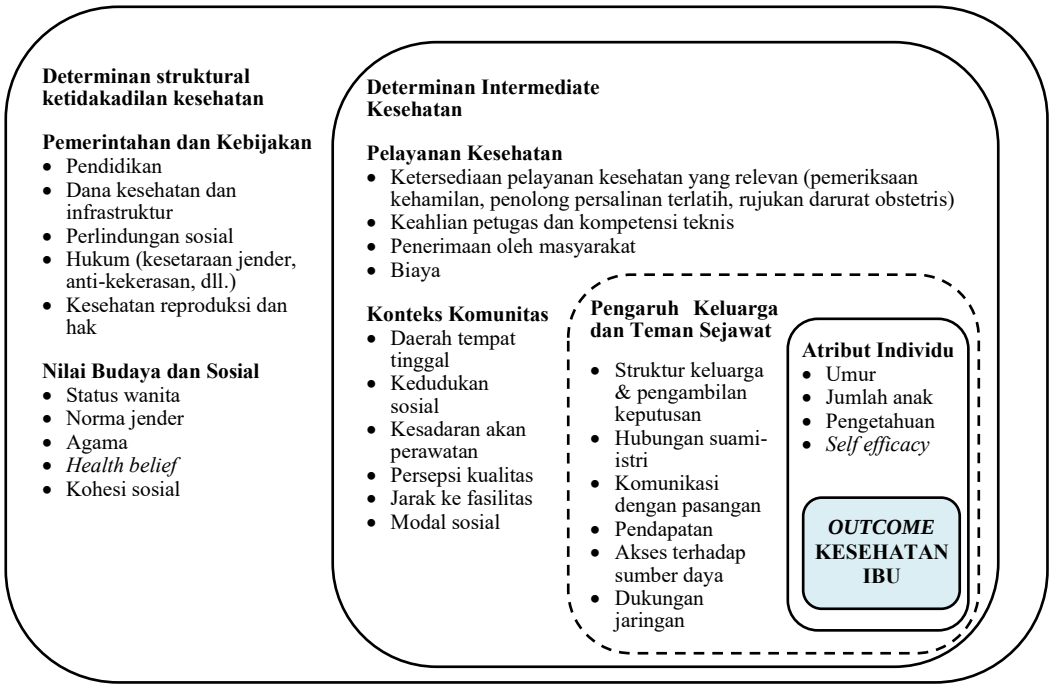
Berdasarkan kerangka pikir tersebut semua determinan sosioekonomi bekerja melalui determinan antara (*proximate determinants* atau *intermediate variables*) dalam memengaruhi kematian bayi dan anak. Determinan sosioekonomi dikelompokkan menjadi tiga kelompok, yaitu variabel (1) level individu, seperti produktivitas individu, tradisi/norma/sikap; (2) variabel level rumah tangga, seperti pendapatan; dan (3) variabel level komunitas, seperti kondisi lingkungan, ekonomi, politik, dan sistem kesehatan. Sementara itu, determinan antara dikelompokkan menjadi lima, yaitu (1) faktor ibu seperti tingkat pendidikan, jumlah paritas, umur, dan lainnya; (2) faktor lingkungan, seperti kondisi air, makanan, udara, serangga pembawa penyakit; (3) faktor nutrisi, seperti pemberian ASI, pola pemberian makan, kekurangan kalori, protein, vitamin, mineral, dan lainnya; (4) faktor luka, seperti kecelakaan baik yang disengaja maupun tidak; dan (5) faktor pengendalian penyakit individu, berupa tindakan pencegahan dan pengobatan, seperti pemberian imunisasi atau vaksin dan pemeriksaan kehamilan (Mosley dan Chen, 1984).

2.5.2 Kematian Ibu

Kematian ibu adalah kematian perempuan pada saat hamil atau kematian dalam kurun waktu 42 hari sejak terminasi kehamilan tanpa memandang lamanya kehamilan atau tempat persalinan, yakni kematian yang disebabkan karena kehamilannya atau pengelolaannya (dari kematian obstetrik langsung atau tidak langsung), tetapi bukan disebabkan karena kecelakaan atau disengaja (World Health Organization, 2015).

Sebagian besar kematian ibu terjadi selama persalinan dan dalam beberapa hari pertama setelah persalinan. Hal ini membuat periode persalinan dan 24 jam pertama setelah persalinan merupakan waktu yang sangat penting untuk mengidentifikasi adanya komplikasi sehingga dapat di tangani lebih cepat untuk mencegah kematian ibu. Cara terbaik mencegah kematian ibu adalah dengan

memastikan bahwa penolong persalinan adalah tenaga kesehatan profesional, seperti dokter, perawat, atau bidan. Idealnya, setiap wanita melahirkan di fasilitas kesehatan untuk mempermudah penanganan jika terjadi komplikasi. Untuk komplikasi yang tidak dapat ditangani, rujukan ke fasilitas kesehatan pada level lebih tinggi juga diperlukan untuk penanganan komplikasi obstetrik. Baik persalinan di rumah maupun di fasilitas kesehatan, diperlukan rujukan darurat obstetrik dan tepat waktu ke tingkat perawatan obstetrik yang lebih tinggi untuk komplikasi. Selain itu, semua ibu baru harus dipantau dalam beberapa hari pertama setelah kelahiran, terutama kemungkinan tanda-tanda perdarahan.



Sumber: *United Nations Development Programme* (2011)

Gambar 2.3 Determinan Sosial Kesehatan Ibu

Pada Gambar 2.3 disajikan kerangka berpikir untuk menganalisis determinan sosial dan struktural kematian dan kesakitan ibu. Kesehatan ibu berkaitan dengan kesehatan secara umum, tingkat pembangunan, dan hak asasi manusia. Ketidaksetaraan kesehatan ibu antar dan dalam negara sebenarnya mencerminkan perbedaan kebijakan dalam bidang kesehatan. Stratifikasi penduduk

menurut kategori sosial, biasanya berdasarkan status ekonomi, ras atau etnis, dan jenis kelamin serta karakteristik berdasarkan hirarki pekerjaan, status migrasi, dan orientasi seksual memengaruhi sumber daya, kemampuan, dan akses mereka terhadap pelayanan kesehatan. Penduduk yang berada pada kelompok bawah biasanya tidak memiliki akses dan sumber daya yang setara sehingga mengakibatkan luaran (*outcome*) kesehatan yang berbeda dengan kelompok lainnya. Ketidakadilan kesehatan (*health inequties*) ini mencerminkan kebijakan sosial pada level lokal, nasional, dan global yang berdampak pada.

Selain dipengaruhi oleh faktor struktural, kematian ibu juga dipengaruhi oleh determinan antara (*intermediate determinants*). Determinan antara tersebut berada pada level komunitas, keluarga dan individu. Faktor individu seperti umur, paritas, pengetahuan mengenai pelayanan kesehatan, riwayat kehamilan sebelumnya, dan sebagainya; faktor keluarga, seperti status ekonomi, akses terhadap sumber daya, status perkawinan; faktor komunitas, seperti daerah tempat tinggal, ketersediaan pelayanan kesehatan, jarak ke fasilitas kesehatan, posisi sosial (kelas, kasta, etnis), dan modal sosial. Kotak dengan garis putus-putus pada Gambar 2.3 bertujuan untuk menekankan bahwa posisi wanita dan kondisinya dalam keluarga dan masyarakat sangat menentukan determinan kematian ibu khususnya berkaitan dengan kematian menurut jender spesifik.

2.5.3 Determinan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu

Inti dari *outcome* kesehatan ibu adalah kematian ibu. Sebagian besar penyebab kematian ibu sebenarnya dapat dicegah, yaitu perdarahan, hipertensi dalam kehamilan (HDK), infeksi, partus lama/macet, dan abortus (United Nations Development Programme, 2011). Khan, Wojdyla, Say, Gülmezoglu, dan Van Look (2006), dan Say, Chou, Gemmill, Tunçalp, Moller, Daniels, Gülmezoglu, Temmerman, dan Alkema (2014) menyatakan bahwa penyebab utama kematian secara global adalah perdarahan, hipertensi dan sepsis. Sementara itu, kematian ibu di Indonesia masih didominasi oleh tiga penyebab utama kematian, yaitu perdarahan, HDK, dan infeksi (Kementerian Kesehatan RI, 2016).

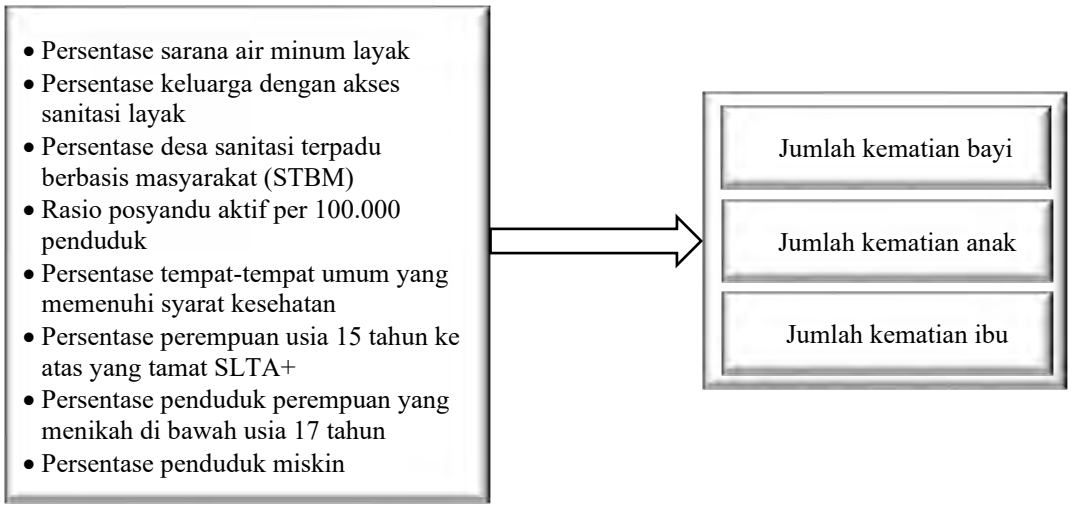
Kontribusi penyebab kematian ibu di atas dapat dikurangi jika diikuti dengan penanganan yang cepat dan biasanya *outcome* dari faktor risiko tersebut

diperburuk karena penanganan yang terlambat. Keterlambatan penanganan juga dapat disebabkan karena kesulitan mengakses fasilitas kesehatan, terutama untuk wilayah-wilayah perdesaan atau terpencil. Perbedaan dalam pemanfaatan fasilitas kesehatan juga disebabkan karena faktor status sosio-ekonomi. Faktor lainnya adalah meskipun pasien sudah berada di fasilitas kesehatan namun kekurangan petugas kesehatan yang berkualitas dan minimnya persediaan obat-obatan dapat berkontribusi terhadap kematian ibu (Thaddeus dan Maine, 1994).

Kematian ibu dapat memengaruhi kesehatan dan kesejahteraan anak melalui beberapa faktor, seperti anak-anak tanpa ibu cenderung kurang memperoleh perawatan sehari-hari, seperti nutrisi kurang baik, tidak higinis, atau kurang dalam perawatan kesehatan. Seperti halnya pada kematian ibu, penelitian pada 117 negara dengan tingkat ekonomi tinggi, sedang, dan rendah, angka kematian bayi cenderung lebih rendah seiring dengan meningkatnya pendapatan (Zakir dan Wunnava, 1999). Pendapatan akan menjamin pemenuhan kebutuhan nutrisi anak dan kebutuhan lainnya.

Kelangsungan hidup anak setelah usia satu tahun akan meningkatkan peluang anak mencapai umur dewasa, namun hal ini tidak berlaku untuk semua anak. Faktor-faktor yang memengaruhi kelangsungan hidup anak saling berkaitan dengan faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi meskipun dengan besaran kontribusi yang berbeda. Sebagai contoh, faktor-faktor seperti umur ibu, berat badan saat lahir, dan pemberian ASI lebih kuat pengaruhnya terhadap kematian bayi namun dirasakan kurang untuk kematian anak. Sebaliknya, kematian anak lebih besar dipengaruhi oleh kualitas pelayanan kesehatan, nutrisi, ketersediaan air bersih, pendidikan ibu, bias jender, faktor lingkungan dan lain sebagainya (Seipel, 1996).

Berdasarkan uraian di atas, banyak faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu. Kejadian kematian tersebut tidak disebabkan oleh satu variabel tunggal namun turut dipengaruhi variabel-variabel lainnya. Dengan pertimbangan ketersediaan data terkini, maka variabel-variabel yang akan dimasukkan ke dalam model MGPR dan GWMGPR pada penelitian ini, digambarkan dalam kerangka konseptual penelitian pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Kerangka Konseptual Determinan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu

Faktor ibu (atribut individu ibu), seperti tingkat pendidikan perempuan (persentase perempuan dengan pendidikan tamat SLTA ke atas) dan usia kawin pertama wanita (persentase perempuan yang menikah pertama kali di bawah umur 17 tahun); faktor lingkungan (pelayanan kesehatan dan konteks komunitas), seperti sanitasi lingkungan (persentase rumah sehat dan persentase tempat-tempat umum yang memenuhi syarat kesehatan), ketersediaan fasilitas kesehatan (rasio posyandu per 100.000 penduduk); faktor pengendalian penyakit individu (persentase rumah tangga yang berperilaku hidup bersih dan sehat dan persentase penduduk dengan akses berkelanjutan terhadap air minum yang layak). Sementara itu, faktor ekonomi (seperti persentase penduduk miskin pada suatu wilayah) berperan sebagai determinan sosioekonomi level komunitas.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan tahapan penelitian untuk mencapai tujuan penelitian, yaitu memperoleh penaksir parameter dan statistik uji pengujian hipotesis serentak parameter model MGPR modifikasi dan model GWMGPR dan penerapan kedua model regresi tersebut. Bab ini dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama berkaitan dengan pengembangan teori dalam membangun model MGPR modifikasi dan model GWMGPR, masing-masing meliputi tahapan penaksiran parameter dan penentuan statistik uji. Bagian kedua berkaitan dengan penerapan kedua model regresi hasil pengembangan teori untuk pemodelan faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, ibu, dan anak di Pulau Jawa.

3.1 Tahapan Pengembangan Teori

Pada penelitian ini dilakukan modifikasi model *multivariate generalized Poisson regression* (MGPR) hasil Famoye (2015), yaitu dengan memasukkan *exposure* dalam model MGPR dan mendefinisikan kovariansi antarvariabel respon sebagai fungsi variabel bebas. Selanjutnya, model MGPR modifikasi tersebut dikembangkan lebih lanjut menjadi model *geographically weighted multivariate generalized Poisson regression* (GWMGPR). Adapun metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur, dengan cara menggabung berbagai penelitian ilmiah, baik yang telah dipublikasikan pada forum ilmiah atau dalam buku maupun artikel ilmiah.

Kajian literatur dalam penelitian ini dimulai dengan membandingkan berbagai model distribusi *generalized* Poisson multivariat dan selanjutnya dipilih model yang dibentuk mengikuti prosedur kerja Lakshminarayana dkk. (1999) dengan fungsi peluang bersama pada (2.30). Kajian teoretis selanjutnya mengenai regresi *generalized* Poisson yang memuat heterogenitas spasial, yaitu model GWGPR pada (2.39). Model univariat yang ada dikembangkan untuk kasus multivariat menggunakan model MGPR modifikasi. Di bawah ini diuraikan

penaksiran parameter dan penentuan statistik uji untuk model MGPR modifikasi dan GWMGPR yang dihasilkan.

3.1.1 Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Model MGPR Modifikasi

Di bawah ini diuraikan tahapan penaksiran parameter dan statistik uji model MGPR dengan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas, selanjutnya disebut sebagai model MGPR modifikasi. Langkah-langkah penaksiran parameter model MGPR modifikasi dengan metode MLE adalah sebagai berikut ini.

1. Membentuk model MGPR dengan *exposure* dan mendefinisikan kovariansi antar-variabel respon sebagai fungsi variabel bebas berdasarkan MGPD pada (2.30).
2. Membuat fungsi likelihood model MGPR modifikasi

   $$L\left(\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(y_i \middle| \boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right).$$

3. Membuat fungsi *ln-likelihood* model MGPR modifikasi

   $$\ln L\left(\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln p\left(y_i \middle| \boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right)$$

4. Memaksimumkan fungsi *ln-likelihood*, yaitu dengan memperoleh penyelesaian dari $\ln L\left(\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right)$ terhadap setiap parameter model dan disamakan dengan nol.
5. Menentukan penaksiran parameter menggunakan iterasi Newton Raphson.
   a. Menentukan nilai awal untuk masing-masing parameter.
   b. Memperoleh vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)$ dengan elemen vektor diperoleh dari turunan pertama fungsi *ln-likelihood* terhadap masing-masing parameter model.
   c. Memperoleh matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_1^{(h)}\right)$.
   d. Melakukan proses iterasi Newton Raphson.

      $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right).$$

   e. Iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Penentuan nilai statistik uji untuk pengujian hipotesis secara serentak dan secara parsial parameter model MGPR modifikasi dilakukan dengan menggunakan metode *likelihood ratio test* (LRT). Adapun tahapan untuk menentukan statistik uji dan distribusinya adalah sebagai berikut ini.

a. Pengujian hipotesis serentak parameter model MGPR modifikasi

1. Mendefinisikan hipotesis untuk menguji parameter model MGPR modifikasi secara serentak

   $H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = ... = \beta_{lp} = \beta_{lm1} = \beta_{lm2} = ... = \beta_{lmp} = 0;$
   $l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m;$
   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk} \neq 0$ atau $\beta_{lmk} \neq 0;$
   $l = 1, 2, \ldots, g;\ l < m;\ k = 1, 2, \ldots, p.$

2. Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

   $\Omega_1 = \{\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m\}$ dengan $\mathbf{y} \sim MGP(\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm})$.

3. Membuat fungsi *likelihood* dibawah populasi

   $$L(\Omega_1) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}).$$

4. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi

   $$L(\hat{\Omega}_1) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \underset{\Omega_1}{maks}\, L(\Omega_1).$$

5. Menentukan himpunan parameter dibawah H_0

   $\omega_1 = \{\beta_{\omega_1 l0}, \varphi_{\omega_1 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_1 lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m\}$ dengan

   $\mathbf{y} \sim MGP(\beta_{\omega_1 l}, \varphi_{\omega_1 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_1 lm})$.

6. Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0

   $$L(\omega_1) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y}_i | \beta_{\omega_1 l}, \varphi_{\omega_l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_1 lm}).$$

7. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0

   $$L(\hat{\omega}_1) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}) = \underset{\omega_1}{maks}\, L(\omega_1).$$

8. Menentukan statistik uji

   $$G_{11}^2 = 2\left(\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2})\right).$$

9. Menentukan distribusi G_{11}^2.

10. Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

b. Pengujian hipotesis parsial parameter model MGPR modifikasi

1. Mendefinisikan hipotesis untuk pengujian hipotesis parameter model MGPR modifikasi secara parsial

   $H_0 : \beta_{l^*k} = 0$

   $H_1 : \beta_{l^*k} \neq 0$.

2. Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

   $\Omega_1 = \{\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m\}$ dengan $\mathbf{y} \sim MGP(\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm})$.

3. Membuat fungsi *likelihood* dibawah populasi

   $$L(\Omega_1) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}).$$

4. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi

   $$L(\hat{\Omega}_1) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \underset{\Omega_1}{maks}\, L(\Omega_1).$$

5. Menentukan himpunan parameter dibawah H_0

   $\omega_4 = \{\beta_{\omega_4 l0}, \beta_{\omega_4 l1}, \ldots, \beta_{\omega_4 l^*(k-1)}, \beta_{\omega_4 l^*(k+1)}, \ldots, \beta_{\omega_4 lk}, \varphi_{\omega_4 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_4 lm}\}$ dengan

   $l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m$, di mana $\mathbf{y} \sim MGP(\beta_{\omega_4 l}, \varphi_{\omega_4 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_4 lm})$.

6. Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0

   $$L(\omega_4) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y}_i | \beta_{\omega_4 l}, \varphi_{\omega_4}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_4 lm}).$$

7. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0

   $$L(\hat{\omega}_4) = L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4 2}) = \underset{\omega_4}{maks}\, L(\omega_4).$$

8. Menentukan statistik uji

   $$G_{14}^2 = 2\left(\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4 2})\right).$$

9. Menentukan distribusi G_{14}^2.

10. Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

3.1.2 Penaksiran Parameter dan Statistik Uji Model GWMGPR

Di bawah ini diuraikan tahapan penaksiran parameter dan statistik uji model GWMGPR berdasarkan MGPR modifikasi. Langkah-langkah penaksiran parameter model GWMGPR dengan metode MLE adalah sebagai berikut ini.

1. Membentuk model GWMGPR berdasarkan MGPR modifikasi.
2. Membuat fungsi *likelihood* lokasi ke $-i$ model GWMGPR

   $$L\left(\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi_l,\boldsymbol{\beta}_{lm}\right)=\prod_{j=1}^{n}p\left(y_j\left|\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi_l,\boldsymbol{\beta}_{lm}\right.\right).$$

3. Membuat fungsi *ln-likelihood* lokasi ke $-i$ model GWMGPR

   $$\ln L\left(\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi_l,\boldsymbol{\beta}_{lm}\right)=\sum_{j=1}^{n}\ln p\left(y_j\left|\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi_l,\boldsymbol{\beta}_{lm}\right.\right)$$

4. Menentukan pembobot lokasi ke $-i$ dengan lokasi ke $-j$, $i,j=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$ yang didefinisikan sebagai berikut ini

   $$w_{ij}=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right)$$

   dengan $d_{ij}=\sqrt{\left(u_{1i}-u_{1j}\right)^2+\left(u_{2i}-u_{2j}\right)^2}$. Sementara itu, *bandwidth* optimum ditentukan berdasarkan nilai GCV terkecil seperti yang didefinisikan pada (2.64).
5. Menentukan fungsi *ln-likelihood* terboboti model GWMGPR, yaitu

   $$\mathbb{Q}_3=w_{ij}\ln\left(L\left(\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right),\varphi_l,\boldsymbol{\beta}_{lm};l,m=1,2\ldots,g;l<m\right)\right).$$

6. Memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* terboboti, yaitu dengan memperoleh penyelesaian dari $\mathbb{Q}_3$ terhadap setiap parameter model dan disamakan dengan nol.
7. Menentukan penaksiran parameter menggunakan iterasi Newton Raphson.
   a. Menentukan nilai awal untuk masing-masing parameter.
   b. Memperoleh vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ dengan elemen vektor diperoleh dari turunan pertama fungsi *ln-likelihood* terboboti terhadap masing-masing parameter model.
   c. Memperoleh matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_2^{(h)}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$.

d. Melakukan proses iterasi Newton Raphson

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right).$$

e. Iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h+1)}(\mathbf{u}_i) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Penentuan nilai statistik uji untuk pengujian hipotesis secara serentak dan secara parsial parameter model GWMGPR dilakukan dengan menggunakan metode *likelihood ratio test* (LRT). Adapun tahapan untuk menentukan statistik uji dan distribusinya adalah sebagai berikut ini.

a. Pengujian hipotesis serentak parameter model GWMGPR

1. Mendefinisikan hipotesis untuk menguji parameter model GWMGPR secara serentak

   $H_0 : \beta_{l1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{l2}(\mathbf{u}_i) = ... = \beta_{lp}(\mathbf{u}_i) = 0;\ l = 1,2,\ldots,g;\ i = 1,2,\ldots,n;$

   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i) \neq 0;\ \ k = 1,2,\ldots,p.$

2. Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

   $\Omega_2 = \left\{\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}; l,m = 1,2,\ldots,g; l < m; i = 1,2,\ldots,n\right\}$ dengan

   $\mathbf{y} \sim MGP\left(\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right).$

3. Membuat fungsi *likelihood* dibawah populasi

   $$L(\Omega_2) = \prod_{i=1}^{n} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right).$$

4. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi

   $$L\left(\hat{\Omega}_2\right) = L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \underset{\Omega_2}{maks}\, L(\Omega_2).$$

5. Menentukan himpunan parameter dibawah H_0

   $\varpi_1 = \left\{\beta_{\varpi_1 l0}, \varphi_{\varpi_1 l}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}; l,m = 1,2,\ldots,g; l < m\right\}$ dengan

   $\mathbf{y} \sim MGP\left(\beta_{\varpi_1 l}, \varphi_{\varpi_1 l}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}\right).$

6. Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0

   $$L(\varpi_1) = \prod_{i=1}^{n} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\varpi_1 l}, \varphi_{\varpi_l}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_l lm}\right).$$

7. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0

$$L(\hat{\varpi}_1) = L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}\right) = \underset{\varpi_1}{maks}\, L(\varpi_1).$$

8. Menentukan statistik uji

$$G_{21}^2 = 2\left(\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}\right)\right).$$

9. Menentukan distribusi G_{21}^2.

10. Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

b. Pengujian hipotesis parsial parameter model GWMGPR

1. Mendefinisikan hipotesis untuk pengujian hipotesis parameter model GWMGPR modifikasi secara parsial

$$H_0 : \beta_{l^* k}\left(\mathbf{u}_j\right) = 0$$
$$H_1 : \beta_{l^* k}\left(\mathbf{u}_j\right) \neq 0 .$$

2. Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

$\Omega_2 = \left\{\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l, \gamma_{lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m; i = 1, 2, \ldots, n\right\}$ dengan

$\mathbf{y} \sim MGP\left(\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l, \gamma_{lm}\right)$.

3. Membuat fungsi *likelihood* dibawah populasi

$$L(\Omega_2) = \prod_{i=1}^{n} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \boldsymbol{\beta}_l, \left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l, \boldsymbol{\beta}_{lm}\right).$$

4. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi

$$L\left(\hat{\Omega}_2\right) = L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \underset{\Omega_2}{maks}\, L(\Omega_2).$$

5. Menentukan himpunan parameter dibawah H_0

$\varpi_2 = \left\{\beta_{\varpi_2 l0}\left(\mathbf{u}_i\right), \beta_{\varpi_2 l1}\left(\mathbf{u}_i\right), \ldots, \beta_{\varpi_2 l^*(k-1)}\left(\mathbf{u}_j\right), \beta_{\varpi_2 l^*(k+1)}\left(\mathbf{u}_j\right), \ldots, \beta_{\varpi_2 lk}\left(\mathbf{u}_i\right),\right.$

$\left.\varphi_{\varpi_2 l}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_2 lm}\right\}$ dengan $l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m;\ i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$, di mana

$\mathbf{y} \sim MGP\left(\beta_{\varpi_2 l}\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_{\varpi_2 l}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_2 lm}\right)$.

6. Membuat fungsi *likelihood* di bawah H_0

$$L(\varpi_2) = \prod_{i=1}^{n} p\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\varpi_2 l}\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_{\varpi_2}, \boldsymbol{\beta}_{\varpi_2 lm}\right).$$

7. Menentukan maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0

$$L\left(\hat{\varpi}_2\right) = L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2 2}\right) = \underset{\varpi_2}{maks}\, L\left(\varpi_2\right).$$

8. Menentukan statistik uji

$$G_{22}^2 = 2\left(\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2 2}\right)\right).$$

9. Menentukan distribusi G_{22}^2.
10. Menentukan daerah kritis pengujian hipotesis.

3.2 Penelitian Aplikatif

Aplikasi dalam penelitian ini adalah membuat model regresi untuk menganalisis faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak dan ibu di Pulau Jawa. Analisis tersebut menggunakan model MGPR modifikasi dan model GWMGPR yang dibangun.

3.2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder dari publikasi BPS hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) dan publikasi profil kesehatan menurut provinsi di Pulau Jawa oleh Dinas Kesehatan pada tahun 2019. Unit pengamatan sebanyak 119 daerah tingkat dua yang terdiri dari 85 kabupaten dan 34 kota yang tersebar di 6 provinsi di Pulau Jawa. Struktur data dalam penelitian ini disajikan pada Tabel 3.1 dan Lampiran 1.

Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian

Wilayah	Letak Geografis Wilayah		Variabel Respon			Variabel Bebas					
	Bujur	Lintang	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	…	X_k	…	X_8
1	u_{11}	u_{21}	$Y_{1.1}$	$Y_{2.1}$	$Y_{3.1}$	$X_{1.1}$	$X_{2.1}$	…	$X_{k.1}$	…	$X_{8.1}$
2	u_{12}	u_{22}	$Y_{1.2}$	$Y_{2.2}$	$Y_{3.2}$	$X_{1.2}$	$X_{2.2}$	…	$X_{k.2}$	…	$X_{8.2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i	u_{1i}	u_{2i}	$Y_{1.i}$	$Y_{2.i}$	$Y_{3.i}$	$X_{1.i}$	$X_{2.i}$	…	$X_{k.i}$	…	$X_{8.i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
119	$u_{1.119}$	$u_{2.119}$	$Y_{1.119}$	$Y_{2.119}$	$Y_{3.119}$	$X_{1.119}$	$X_{2.119}$	…	$X_{k.119}$	…	$X_{8.119}$

Susenas adalah survei berskala nasional yang dilaksanakan setiap tahun di seluruh provinsi di Indonesia dengan ukuran sampel 300.000 rumah tangga. Data yang dihasilkan cukup representatif untuk disajikan sampai dengan tingkat

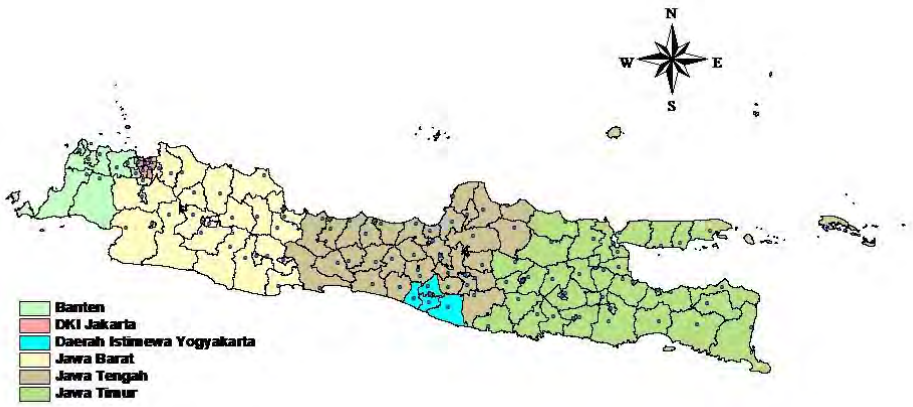
kabupaten/kota namun tidak dapat dibedakan menurut daerah tempat tinggal (perkotaan/perdesaan). Pengumpulan data dari rumah tangga terpilih dilakukan melalui wawancara tatap muka antara pencacah dengan responden. Untuk pertanyaan-pertanyaan dalam kuesioner yang ditujukan kepada individu diusahakan agar individu yang bersangkutan yang menjadi responden.

Publikasi Profil Kesehatan Provinsi merupakan publikasi tahunan oleh Dinas Kesehatan Provinsi yang bersesuaian. Sumber data untuk penyusunan profil kesehatan adalah catatan kegiatan Puskesmas; catatan kegiatan rumah sakit; catatan kegiatan yang dilakukan oleh dinas kesehatan; dokumen BPS, BKKBN, Bappeda, Dinas Pendidikan, dan institusi terkait; dan dokumen hasil survei lainnya. Periode data yang disajikan dalam Profil Kesehatan adalah periode Januari sampai dengan Desember tahun profil. Dengan demikian, misal, Profil Kesehatan Provinsi X Tahun 2019 berisi data informasi tahun 2019.

Data untuk penyusunan profil kesehatan dikumpulkan dengan dua cara, yaitu secara pasif dan secara aktif. Secara pasif artinya petugas pengelola data di Dinas Kesehatan menunggu laporan dari Puskesmas, dari seksi-seksi Dinas Kesehatan, dan dari rumah sakit. Secara aktif artinya petugas pengelola data di Dinas Kesehatan berupaya aktif mengumpulkan data ke Puskesmas, rumah sakit, dan instansi terkait.

3.2.2 Gambaran Umum Pulau Jawa

Pulau Jawa merupakan salah satu dari lima pulau besar di Indonesia yang terdiri dari enam provinsi, yaitu DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, DI Yogyakarta, Jawa Timur, dan Banten. Secara geografis, Pulau Jawa terletak di 7°30’5,99” Lintang Selatan dan 111°15’28,20” Bujur Timur. Tiga provinsi, yaitu Provinsi DI Yogyakarta, DKI Jakarta, dan Banten memiliki jumlah daerah administratif tingkat dua kurang dari 10, masing-masing adalah 5, 6, dan 8 daerah tingkat dua. Sementara itu, Provinsi Jawa Barat, Jawa Tengah, dan Jawa Timur merupakan tiga provinsi besar di Pulau Jawa dengan jumlah daerah administratif tingkat dua masing-masing adalah 27, 35, dan 38 daerah administratif. Peta 119 wilayah administratif beserta titik koordinat Kantor Bupati atau Wali Kota di Pulau Jawa disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Wilayah Administratif Kabupaten/Kota dan Titik Koordinat Kantor Bupati/Wali Kota di Pulau Jawa Tahun 2019

Jumlah penduduk Indonesia berdasarkan hasil Sensus Penduduk 2020 adalah 270,20 juta jiwa di mana 151,60 juta jiwa (56,10%) diantaranya tinggal di Pulau Jawa. Jumlah penduduk tertinggi berdasarkan Sensus Penduduk 2020 tercatat di Provinsi Jawa Barat (48,27 juta), diikuti oleh Jawa Timur (40,67 juta), dan Jawa Tengah (36,52 juta). Sementara itu, jumlah penduduk di tiga provinsi lainnya di Pulau Jawa, yaitu Banten, DKI Jakarta, dan DI Yogyakarta, secara berturut-turut adalah 11,90 juta, 10,56 juta, dan 3,67 juta.

Karakteristik sosial-ekonomi masing-masing provinsi di Pulau Jawa bervariasi. Hasil SUSENAS 2019 menunjukkan bahwa tiga provinsi, yaitu DKI Jakarta, DI Yogyakarta, dan Banten, memiliki persentase penduduk yang tamat SLTA ke atas lebih besar dari pada persentase nasional (33,16%), masing-masing 58,82%, 46,32%, dan 35,47%. Dari sumber data yang sama diperoleh bahwa persentase penduduk miskin di provinsi-provinsi di Pulau Jawa berkisar antara 3,47% (DKI Jakarta) sampai dengan 11,70% (DI Yogyakarta) di mana persentase penduduk miskin secara nasional adalah 9,41%. Sementara itu, terdapat tiga provinsi yang memiliki persentase wanita pernah kawin dengan umur kawin pertamanya kurang dari 16 tahun lebih rendah dari pada persentase secara nasional (15,48%), yaitu DKI Jakarta (7,32%), DI Yogyakarta (7,89%), dan Banten (15,20%). Tiga provinsi lainnya memiliki persentase yang lebih tinggi dari pada persentase nasional, dengan persentase tertinggi di Jawa Timur (20,64%).

Berdasarkan publikasi Profil Kesehatan 2019, beberapa indikator kesehatan berkaitan dengan kesehatan lingkungan menunjukkan angka yang relatif bervariasi antarprovinsi di Pulau Jawa, terutama persentase desa sanitasi total berbasis masyarakat (STBM), di mana Jawa Timur mencatat hanya 2,8% dan yang tertinggi dilaporkan oleh Banten (41,99%) dan DI Yogyakarta (41,1%). Sementara itu, lebih dari separuh keluarga di masing-masing provinsi di Pulau Jawa memiliki akses sanitasi layak, yaitu jamban sehat, di mana persentase tertinggi dilaporkan oleh DI Yogyakarta (100%) dan terendah dilaporkan oleh Banten (65,1%).

Terdapat tiga provinsi dengan sarana air minum layak di atas 75%, yaitu Jawa Tengah (85,8%), Banten (82,8%), dan Jawa Timur (79,5%). Persentase tempat-tempat umum (TTU) yang memenuhi sarana kesehatan dilaporkan sangat baik di DI Yogyakarta (91,1%) dan terendah di Jawa Timur (13,8%). Indikator berkaitan dengan fasilitas kesehatan pada level terendah di masyarakat, yaitu rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk dilaporkan tertinggi di Jawa Tengah (104,37), diikuti oleh DI Yogyakarta (94,59%), dan Jawa Timur (93,54%), sedangkan provinsi lainnya di Pulau Jawa melaporkan angka jauh lebih rendah.

3.2.3 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari 3 variabel respon dan 8 variabel bebas. Definisi operasional setiap variabel respon dan bebas disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Definisi Operasional Variabel Penelitian

Simbol	Variabel	Definisi Operasional	Sumber Data
Variabel respon			
Y_1	Jumlah kematian bayi	Jumlah bayi usia 0-11 bulan yang meninggal dalam satu tahun kalender (Rowland, 2003).	Dinas Kesehatan
Y_2	Jumlah kematian anak	Jumlah anak umur 1-4 tahun yang meninggal dalam satu tahun (Irawan dkk., 2016).	Dinas Kesehatan
Y_3	Jumlah kematian ibu	Jumlah ibu yang meninggal pada saat hamil, bersalin, atau masa nifas dalam satu tahun kalender (Rowland, 2003).	Dinas Kesehatan

Tabel 3.2 (Lanjutan)

Simbol	Variabel	Definisi Operasional	Sumber Data
Exposure			
q_1	Jumlah kelahiran	Jumlah kelahiran di sini adalah jumlah kelahiran hidup selama satu tahun kalender (Rowland, 2003).	Dinas Kesehatan
q_2	Jumlah anak	Anak di sini adalah penduduk umur 1-4 tahun (Irawan dkk., 2016).	Dinas Kesehatan
q_3	Jumlah ibu hamil	Ibu hamil adalah seseorang wanita yang mengandung dimulai dari konsepsi sampai lahirnya janin.	Dinas Kesehatan
Variabel bebas			
X_1	Persentase sarana air minum memenuhi syarat	Sarana air minum memenuhi syarat adalah sarana air bersih yang telah memenuhi persyaratan baik biologis, kimia dan fisik (Permenkes).	Dinas Kesehatan
X_2	Persentase keluarga dengan akses terhadap fasilitas sanitasi yang layak (jamban sehat)	Sanitasi layak apabila fasilitas sanitasi yang digunakan memenuhi syarat kesehatan antara lain dilengkapi dengan leher angsa, tanki septik/ Sistem Pengolahan Air Limbah (SPAL) yang digunakan sendiri atau bersama.	Dinas Kesehatan
X_3	Persentase desa STBM	Desa STBM (Sanitasi Total Berbasis Masyarakat) adalah desa yang telah mencapai 100% penduduk melaksanakan 5 pilar STBM, yaitu tidak buang air besar (BAB) sembarangan, mencuci tangan pakai sabun, mengelola air minum dan makanan yang aman, mengelola sampah dengan benar, mengelola limbah cair rumah tangga dengan aman melalui pemberdayaan masyarakat dengan metode pemicuan.	Dinas Kesehatan
X_4	Rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk	Rasio posyandu purnama atau mandiri (sudah dapat melaksanakan kegiatan lebih dari 8 kali per tahun, dengan rata-rata kader sebanyak 5 orang atau lebih, cakupan kelima kegiatannya lebih dari 50%, mampu menyelenggarakan program tambahan, serta telah memperoleh sumber pembiayaan dari dana sehat yang dikelola oleh masyarakat) per 100.000 penduduk.	Dinas Kesehatan
X_5	Persentase tempat-tempat umum yang memenuhi syarat kesehatan	Tempat-tempat umum (TTU) adalah atau sarana yang diselenggarakan pemerintah/swasta atau perorangan yang digunakan untuk kegiatan bagi masyarakat yang meliputi: sarana kesehatan (rumah sakit, puskesmas), sarana sekolah (SD/MI, SLTP/MTs, SLTA/MA), dan hotel (bintang dan non bintang). TTU sehat adalah TTU yang memenuhi standar berdasarkan peraturan perundangan yang berlaku.	Dinas Kesehatan

Tabel 3.2 (Lanjutan)

Simbol	Variabel	Definisi Operasional	Sumber Data
X_6	Persentase perempuan usia 15 tahun ke atas yang tamat SLTA	Persentase penduduk perempuan berusia 15 tahun ke atas dengan jenjang pendidikan teringgi yang ditamatkan adalah SLTA ditandai dengan sertifikat/ijazah.	BPS
X_7	Persentase perempuan yang menikah di bawah usia 17 tahun	Persentase perempuan yang tercatat menikah di bawah usia 17 tahun.	BPS
X_8	Persentase penduduk miskin	Persentase penduduk yang rata-rata pengeluaran perkapitanya di bawah garis kemiskinan.	BPS
Letak geografis lokasi ke-i			
u_{1i}	Bujur (*longitude*) kantor bupati/wali kota ke-i		
u_{2i}	Lintang (*latitude*) kantor bupati/wali kota ke-i		

3.2.4 Hubungan antara Variabel-variabel Penelitian dalam Model

Berdasarkan definisi operasional variabel pada Tabel 3.2, maka hubungan antara variabel bebas dan variabel respon dalam penelitian ini secara umum dapat disajikan dalam model global dan model lokal. Adapun model secara global yang terbentuk dalam penelitian ini adalah $E\left(Y_{il}\,|\mathbf{x}_i\right) = \mu_{il} = q_{il}\, e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l}$, $l = 1,2,3$; $k = 0,1,2,\ldots,8$; $i = 1,2,\ldots 119$, yaitu

$$E\left(Y_{i1}\right) = q_{il} \exp\left(\beta_{10} + \beta_{11}X_{i1} + \beta_{12}X_{i2} + \ldots + \beta_{18}X_{i8}\right),$$

$$E\left(Y_{i2}\right) = q_{il} \exp\left(\beta_{20} + \beta_{21}X_{i1} + \beta_{22}X_{i2} + \ldots + \beta_{28}X_{i8}\right),$$

$$E\left(Y_{i3}\right) = q_{il} \exp\left(\beta_{30} + \beta_{31}X_{i1} + \beta_{32}X_{i2} + \ldots + \beta_{38}X_{i8}\right),$$

di mana β_{lk} merupakan koefisien regresi yang menunjukkan besarnya pengaruh variabel bebas X_k terhadap variabel respon Y_l.

Kovariansi antarvariabel respon sebagai fungsi variabel bebas adalah $\gamma_{ilm} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{lm}$ dengan $\boldsymbol{\beta}_{lm} = \left[\beta_{lm0} \quad \beta_{lm1} \quad \beta_{lm2} \quad \cdots \quad \beta_{lm8}\right]_{9\times 1}^T$, $l,m = 1,2,3;\ l < m;$ $k = 0,1,2,\ldots,8$; dan $i = 1,2,\ldots,119$; sehingga

$$\gamma_{i12} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{12} = \beta_{120} + \beta_{121} X_{i1} + \beta_{122} X_{i2} + \ldots + \beta_{128} X_{i8},$$

$$\gamma_{i13} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{13} = \beta_{130} + \beta_{131} X_{i1} + \beta_{132} X_{i2} + \ldots + \beta_{138} X_{i8},$$

$$\gamma_{i23} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{23} = \beta_{230} + \beta_{231} X_{i1} + \beta_{232} X_{i2} + \ldots + \beta_{238} X_{i8},$$

di mana β_{lmk} merupakan koefisien regresi yang menunjukkan besarnya pengaruh variabel bebas X_k terhadap kovariansi antara variabel respon Y_l dan Y_m.

Model GWMGPR yang dihasilkan dalam penelitian ini adalah $E\left(Y_{il} \middle| \mathbf{x}_i\right) = \mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{il}\, e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)}$, $l = 1,2,3;\ i = 1,2,\ldots,119$, yaitu

$$E\left(Y_{i1}\right) = q_{il} \exp\left(\beta_{10}\left(\mathbf{u}_i\right) + \beta_{11}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i1} + \beta_{12}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i2} + \ldots + \beta_{18}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i8}\right),$$

$$E\left(Y_{i2}\right) = q_{il} \exp\left(\hat{\beta}_{20}\left(\mathbf{u}_i\right) + \hat{\beta}_{21}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i1} + \hat{\beta}_{22}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_{28}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i8}\right),$$

$$E\left(Y_{i3}\right) = q_{il} \exp\left(\hat{\beta}_{30}\left(\mathbf{u}_i\right) + \hat{\beta}_{31}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i1} + \hat{\beta}_{32}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_{38}\left(\mathbf{u}_i\right) X_{i8}\right),$$

dengan $\beta_{lk}\left(\mathbf{u}_i\right)$ merupakan koefisien regresi yang menunjukkan besarnya pengaruh variabel bebas X_k terhadap variabel respon Y_l pada lokasi ke$-i$. Contoh interpretasi untuk X_1 pada lokasi ke$-i$ adalah kenaikan 1 unit X_1 akan menyebabkan kenaikan rata-rata kejadian Y_1 sebesar $e^{\hat{\beta}_{11}(\mathbf{u}_i)}$ kali, kenaikan rata-rata kejadian Y_2 sebesar $e^{\hat{\beta}_{21}(\mathbf{u}_i)}$ kali, dan kenaikan rata-rata kejadian Y_3 sebesar $e^{\hat{\beta}_{31}(\mathbf{u}_i)}$ kali.

3.2.5 Tahapan Analisis Data

Tahapan penelitian untuk memperoleh model regresi terbaik dari faktor-faktor yang memengaruhi kematian bayi, anak dan ibu di Pulau Jawa adalah sebagai berikut ini.

a. Membuat analisis deskriptif antara variabel bebas dengan variabel respon berupa rata-rata, variansi, matriks korelasi, tabel, dan peta.
b. Menguji korelasi untuk variabel respon dengan *Bartlett's test of sphericity*.
c. Melakukan pemeriksaan multikolinieritas pada variabel bebas berdasarkan nilai *Variance-Inflating Factor* (VIF).

d. Memodelkan data dengan model MGPR modifikasi dengan langkah-langkah meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis seperti telah diuraikan pada bagian sebelumnya.
e. Melakukan interpretasi dan analisis dari model MGPR modifikasi yang diperoleh.
f. Melakukan uji heterogenitas spasial menggunakan uji Breusch-Pagan dengan statistik uji pada (2.59).
g. Memodelkan data dengan model GWMGPR dengan langkah-langkah meliputi penaksiran parameter dan pengujian hipotesis seperti telah diuraikan pada bagian sebelumnya.
h. Melakukan interpretasi dan analisis dari model GWMGPR yang diperoleh.
i. Menghitung AICc model MGPR modifikasi dan GWMGPR serta memperhatikan *standard error* penaksir dari masing-masing model untuk mengetahui model yang lebih baik.

BAB 4
MULTIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION MODIFIKASI

Pada bab ini diuraikan mengenai penaksiran parameter dan pengujian hipotesis model *Multivariate Generalized Poisson Regression* (MGPR) dengan *exposure* dan kovariansi sebagai fungsi dari variabel bebas yang selanjutnya disebut sebagai model MGPR modifikasi. Seperti telah diuraikan di pendahuluan bahwa *exposure* digunakan untuk memperhitungkan ukuran populasi yang berbeda dari setiap unit lokasi supaya mencerminkan intensitas suatu kejadian yang diteliti. Jika *exposure* tidak diperhitungkan maka ukuran populasi di setiap lokasi diasumsikan sama di mana pada kenyataannya tidak demikian. Sementara itu, pendefinisian kovariansi sebagai fungsi variabel bebas adalah untuk menghasilkan kovariansi yang lebih fleksibel.

Bagian ini dimulai dari Subbab 4.1 mengenai pendefinisian model MGPR modifikasi. Selanjutnya, di Subbab 4.2 diuraikan mengenai penaksiran parameter model MGPR modifikasi. Bagian selanjutnya merupakan pembahasan mengenai pengujian hipotesis parameter model MGPR modifikasi baik secara serentak maupun secara parsial, masing-masing pada Subbab 4.3 dan Subbab 4.4. Penaksiran parameter dan pengujian hipotesis serentak parameter model MGPR modifikasi sudah dipublikasikan pada prosiding AIP tahun 2019 dengan judul *Multivariate Generalized Poisson Regression Model With Exposure and Correlation as a Function of Covariates: Parameter Estimation and Hypothesis Testing* (Lampiran 13).

4.1 Model MGPR Modifikasi

Model MGPR modifikasi merupakan pengembangan dari model MGPR yang dibangun oleh Famoye (2015) seperti yang dinyatakan dalam persamaan (2.32), yaitu

$$P\left(y_1,\ldots,y_g\right)=\prod_{l=1}^{g}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)\right]\right]$$
$$\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right], \tag{4.1}$$

dengan

$$z_l=\exp\left(\frac{\mu_l\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\mu_l}\right),$$

dan

$$\ln\left(r_l\right)-\frac{\varphi_l\mu_l\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\mu_l}+1=0.$$

Pada model ini, $\mu_l=\exp\left(\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_l\right)$ dengan $\mathbf{x}$ adalah vektor variabel bebas dan kovariansi antara variabel respon y_l dan y_m, yaitu γ_{lm} adalah konstan.

Modifikasi model MGPR adalah dengan memasukkan *exposure* pada μ_l dan mendefinisikan kovariansi $\left(\gamma_{lm}\right)$ sebagai fungsi variabel bebas pada persamaan (4.1) untuk pengamatan ke $-i$, yaitu

$$\mu_{il}=q_{il}\ \exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l\right), \tag{4.2}$$

$$\gamma_{ilm}=\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{lm}, \tag{4.3}$$

dengan q_{il} adalah *exposure* untuk variabel respon l observasi i, $\mathbf{x}_i$ adalah vektor kovariat atau variabel bebas, $\boldsymbol{\beta}_l$ adalah vektor parameter model MGPR untuk variabel respon ke $-l$, serta $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ adalah vektor parameter model MGPR untuk kovariansi variabel respon y_l dan y_m, seperti dinyatakan berikut ini

$$\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},\quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\beta}_l=\begin{bmatrix}\beta_{l0} & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lp}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},\quad l=1,2,\ldots,g,$$

$$\boldsymbol{\beta}_{lm}=\begin{bmatrix}\beta_{lm0} & \beta_{lm1} & \beta_{lm2} & \cdots & \beta_{lmp}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1},\quad l,m=1,2,\ldots,g;\quad l<m.$$

4.2 Penaksiran Parameter Model MGPR Modifikasi

Penaksiran parameter model MGPR modifikasi dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Metode MLE merupakan metode yang umum digunakan untuk penaksiran parameter. Prinsip metode MLE adalah bahwa *likelihood* maksimum dari suatu penaksir $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ memaksimumkan fungsi *ln-likelihood*-nya. *Likelihood* maksimum suatu penaksir diperoleh dengan menyamakan dengan nol gradien fungsi *ln-likelihood* tersebut. Misalkan diberikan n sampel random $\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dari variabel random $\mathbf{y} \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma}\right)$ dengan

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} & \cdots & y_{ig} \end{bmatrix}_{g\times 1}^T, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_l & \cdots & \mu_g \end{bmatrix}_{g\times 1}^T, \quad l = 1, 2, \ldots, g,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{lm} & \cdots & \gamma_{g(g-1)} \end{bmatrix}_{(g-1)g/2\times 1}^T, \quad l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m.$$

Fungsi *likelihood* berkenaan dengan persamaan (4.1) dan dengan memperhatikan (4.2) dan (4.3) adalah

$$L\left(\Omega_1\right) = L\left(\mu_l, \varphi_l, \gamma_{lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(\mathbf{y}_i\right). \tag{4.4}$$

Jika $Q_1 = \ln\left(L\left(\mu_l, \varphi_l, \gamma_{lm}; l, m = 1, 2, \ldots, g; l < m\right)\right)$ maka fungsi *ln-likelihood* persamaan (4.4) dapat ditulis sebagai

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l \mu_{il}} \right) + \left(y_{il} - 1\right) \ln\left(1 + \varphi_l y_{il}\right) - \ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l \mu_{il}} \right) + \ln\left(1 + Q_2\right) \right], \tag{4.5}$$

dengan

$$Q_2 = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm} \left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right), \tag{4.6}$$

$$z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l \mu_{il}} \right),$$

$$\ln\left(r_l\right)-\frac{\varphi_l\mu_{il}\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}+1=0\,,$$

di mana μ_{il} dan γ_{ilm} masing-masing didefinisikan pada (4.2) dan (4.3).

Misalkan $\boldsymbol{\theta}_1=\left[\boldsymbol{\beta}_1^T \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{\beta}_g^T \;\; \varphi_1 \;\; \ldots \;\; \varphi_g \;\; \boldsymbol{\beta}_{12}^T \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^T\right]^T$ merupakan vektor parameter pada persamaan (4.5) dengan ukuran $\left(gp+g+p+3\right)g/2\times 1$. Untuk memaksimumkan fungsi *ln-likelihood*, Q_1 diturunkan terhadap $\boldsymbol{\theta}_1$ dan disamakan dengan nol. Adapun turunan parsial pertama Q_1 terhadap masing-masing parameter adalah sebagai berikut ini

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_l}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{il}-\mu_{il}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_l\;\mu_{il}\right)^2}+\frac{\partial Q_2/\partial \boldsymbol{\beta}_l}{1+Q_2}\right), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_l}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{il}y_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}+\frac{\left(y_{il}-1\right)y_{il}}{\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}-\frac{\mu_{il}\left(y_{il}-\mu_{il}\right)}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2}+\frac{\partial Q_2/\partial \varphi_l}{1+Q_2}\right), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}}\right), \tag{4.9}$$

dengan μ_{il} dan Q_2 masing-masing dinyatakan pada (4.2) dan (4.6) di mana

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l}=-\sum_{l<m}^{g}\gamma_{ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right)\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l}\,, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_l}=-\sum_{l<m}^{g}\gamma_{ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right)\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l}\,, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}}&=\sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{ilm}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}}\left(e^{-y_{il}}-z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right)\right)\\&=\mathbf{x}_i\left(e^{-y_{il}}-z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right),\end{aligned} \tag{4.12}$$

serta

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l}=\frac{z_{il}\;\mathbf{x}_i\;\mu_{il}\left(r_l-1\right)}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\;\mu_{il}-\varphi_l\;\mu_{il}\;r_l\right)},$$

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l}=\frac{z_{il}\;\mu_{il}^2\left(r_l-1\right)^2}{\left(1+\varphi_l\;\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\;\mu_{il}-\varphi_l\;\mu_{il}\;r_l\right)}.$$

Gradien Q_1 terhadap masing-masing parameter pada persamaan (4.7) sampai dengan persamaan (4.9) merupakan sistem persamaan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu dibutuhkan algoritma iterasi numerik untuk mendapatkan penaksir tersebut. Algoritma ini dimulai dengan mengasumsikan suatu nilai awal dari parameter yang tidak diketahui dan prosesnya berlanjut secara iteratif sampai suatu kriteria konvergen terpenuhi. Penelitian ini menerapkan algoritma Newton Raphson dengan formula sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right), \tag{4.13}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right) = \left[\left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right]^T \quad \cdots \quad \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_g^T}\right]^T \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_g} \quad \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]^T \quad \cdots \quad \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^T}\right]^T\right]_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}},$$

dengan elemen vektor seperti pada persamaan (4.7) sampai dengan persamaan (4.9) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)$ merupakan matriks Hessian. Jumlah seluruh parameter dalam model MGPR modifikasi, dinotasikan dengan a_1, adalah $(gp+g+p+3)g/2$ parameter. Ukuran matriks $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ yang diperoleh adalah $\left[(gp+g+p+3)g/2\right]\times$ $\left[(gp+g+p+3)g/2\right]$.

Proses iterasi Newton Raphson pada (4.13) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(0)} = \left[\left[\boldsymbol{\beta}_1^{T(0)}\right]^T \quad \cdots \quad \left[\boldsymbol{\beta}_g^{T(0)}\right]^T \quad \varphi_1^{(0)} \quad \cdots \quad \varphi_g^{(0)} \quad \left[\boldsymbol{\beta}_{12}^{T(0)}\right]^T \quad \cdots \quad \left[\boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^{T(0)}\right]^T\right]^T$$

di mana nilai awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_l^{T(0)}$ diperoleh dari nilai koefisien regresi model regresi Poisson univariat, sedangkan nilai awal $\hat{\varphi}_l^{(0)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{lm}^{T(0)}$ adalah nol. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

4.3 Pengujian Hipotesis Serentak Parameter Model MGPR Modifikasi

Pada bagian ini dibahas tentang penentuan statistik uji beserta distribusinya untuk pengujian parameter secara serentak model MGPR modifikasi.

Pengujian parameter secara serentak digunakan untuk menentukan signifikansi koefisien regresi dalam model secara bersama-sama. Ada tiga jenis pengujian serentak yang dibahas pada bagian ini, yaitu pengujian parameter β_{lk} dan β_{lmk} secara bersama-sama, pengujian serentak parameter β_{lk}, dan pengujian serentak parameter β_{lmk}. Kedua pengujian terakhir dilakukan ketika pengujian pertama menghasilkan tolak hipotesis nol.

4.3.1 Pengujian Serentak Parameter β_{lk} dan β_{lmk}

Hipotesis untuk pengujian parameter β_{lk} dan β_{lmk} secara serentak dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = \ldots = \beta_{lp} = \beta_{lm1} = \beta_{lm2} = \ldots = \beta_{lmp} = 0; \\ &\quad l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m; \\ &H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{lk} \neq 0 \text{ atau } \beta_{lmk} \neq 0;\ k = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Prosedur klasik untuk menetapkan daerah kritis pengujian hipotesis seperti yang dinyatakan pada (4.14) adalah berdasarkan rasio *likelihood*, yaitu dengan menghitung rasio dari nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah hipotesis nol $\left(L(\omega_1)\right)$ dibagi dengan nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi $\left(L(\Omega_1)\right)$. Metode ini disebut dengan metode *likelihood ratio test* (LRT).

Nilai maksimum $L(\Omega_1)$ merupakan nilai maksimum fungsi *likelihood* yang dinyatakan pada (4.4). Tahapan selanjutnya adalah menghitung nilai maksimum $L(\omega_1)$. Langkah pertama untuk memperoleh nilai maksimum $L(\omega_1)$ dalam menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada (4.14) adalah dengan menetapkan ruang parameter di bawah H_0, $\omega_1 = \{\beta_{\omega_1 l0}, \varphi_{\omega_1 l}, \beta_{\omega_1 lm0};\ l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m\}$. Persamaan (4.1) di bawah H_0 menjadi

$$p(\mathbf{y}) = \prod_{l=1}^{g} \left[\left(\frac{\mu_{\omega_1 l}}{1 + \varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 l}} \right)^{y_l} \frac{\left(1 + \varphi_{\omega_1 l} y_l\right)^{y_l - 1}}{y_l!} \exp\left[-\frac{\mu_{\omega_1 l}}{1 + \varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 l}} \left(1 + \varphi_{\omega_1 l} y_l\right) \right] \right]$$
$$\times \left[1 + \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_1 lm} \left(e^{-y_l} - z_{\omega_1 l}\right)\left(e^{-y_m} - z_{\omega_1 m}\right) \right],$$

dengan

$$z_{\omega_1 l} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_1 l}\left(r_{\omega_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 l}}\right),$$

dan

$$\ln\left(r_{\omega_1 l}\right) - \frac{\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 l}\left(r_{\omega_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 l}} + 1 = 0.$$

Model MGPR modifikasi di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\mu_{\omega_1 il} = q_{il}\ \exp\left(\beta_{\omega_1 l0}\right), \tag{4.15}$$

dan

$$\gamma_{\omega_1 ilm} = \beta_{\omega_1 lm0}. \tag{4.16}$$

Fungsi *likelihood* di ruang ω_1 dinyatakan sebagai berikut

$$L\left(\omega_1\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\omega_1 l0}, \varphi_{\omega_1 l}, \beta_{\omega_1 lm0}; l, m = 1,2,...,g; l < m\right). \tag{4.17}$$

Misalkan $Q_{1\omega_1} = \ln L\left(\omega_1\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\omega_1 l0}, \varphi_{\omega_1 l}, \beta_{\omega_1 lm0}; l, m = 1,2,...,g; l < m\right)$ maka fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$Q_{1\omega_1} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\mu_{\omega_1 il}}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\varphi_{\omega_1 l}y_{il}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\mu_{\omega_1 il}\left(1+\varphi_{\omega_1 l}y_{il}\right)}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}}\right) + \ln\left(1+Q_{2\omega_1}\right)\right],$$

dengan

$$Q_{2\omega_1} = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{\omega_1 ilm}\left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_1 im}\right), \tag{4.18}$$

dengan

$$z_{\omega_1 il} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_1 il}\left(r_{\omega_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}}\right),$$

$$\ln\left(r_{\omega_1 l}\right)-\frac{\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}\left(r_{\omega_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}}+1=0,$$

di mana $\mu_{\omega_1 il}$ dan $\gamma_{\omega_1 ilm}$ masing-masing seperti yang dinyatatan pada (4.15) dan (4.16).

Langkah selanjutnya adalah mendapatkan turunan pertama $Q_{1\omega_1}$ terhadap masing-masing parameter. Misalkan vektor parameter di bawah H_0 adalah $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}=\left[\beta_{\omega_1 10}\ \ \cdots\ \ \beta_{\omega_1 g0}\ \ \varphi_{\omega_1 1}\ \ \cdots\ \ \varphi_{\omega_1 g}\ \ \beta_{\omega_1 120}\ \ \cdots\ \ \beta_{\omega_1 (g-1)g0}\right]^T$, maka turunan parsial pertama $Q_{1\omega_1}$ terhadap masing-masing parameter dalam vektor parameter $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}$ adalah

$$\frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 l0}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{il}-\mu_{\omega_1 il}\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il}\right)^2}+\frac{\partial Q_{2\omega_1}/\partial \beta_{\omega_1 l0}}{1+Q_{2\omega_1}}\right), \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \varphi_{\omega_1 l}}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{\omega_1 il}y_{il}}{1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}}+\frac{\left(y_{il}-1\right)y_{il}}{\left(1+\varphi_{\omega_1 l}y_{il}\right)}-\frac{\mu_{\omega_1 il}\left(y_{il}-\mu_{\omega_1 il}\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}\right)^2}+\frac{\partial Q_{2\omega_1}/\partial \varphi_{\omega_1 l}}{1+Q_{2\omega_1}}\right), \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 lm0}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+Q_{2\omega_1}}\frac{\partial Q_{2\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 lm0}}\right), \tag{4.21}$$

di mana $\mu_{\omega_1 il}$ dan $Q_{2\omega_1}$ masing-masing dinyatakan pada (4.15) dan (4.18) dengan

$$\frac{\partial Q_{2\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 l0}}=-\sum_{l<m}^{g}\gamma_{\omega_1 ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{\omega_1 im}\right)\frac{\partial z_{\omega_1 il}}{\partial \beta_{\omega_1 l0}}, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial Q_{2\omega_1}}{\partial \varphi_{\omega_1 l}}=-\sum_{l<m}^{g}\gamma_{\omega_1 ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{\omega_1 im}\right)\frac{\partial z_{\omega_1 il}}{\partial \varphi_{\omega_1 l}}, \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{2\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 lm0}}&=\sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{\omega_1 ilm}}{\partial \beta_{\omega_1 lm0}}\left(e^{-y_{il}}-z_{\omega_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{\omega_1 im}\right)\right)\\&=\left(e^{-y_{il}}-z_{\omega_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{\omega_1 im}\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

dan

$$\frac{\partial z_{\omega_1 il}}{\partial \beta_{\omega_1 l0}}=\frac{z_{\omega_1 il}\ \mu_{\omega_1 il}\left(r_{\omega_1 l}-1\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_1 l}\mu_{\omega_1 il}\right)\left(1+\varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il}-\varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il}\ r_{\omega_1 l}\right)},$$

$$\frac{\partial z_{\omega_1 il}}{\partial \varphi_{\omega_1 l}} = \frac{z_{\omega_1 il}\ \mu_{\omega_1 il}^2 \left(r_{\omega_1 l} - 1\right)^2}{\left(1 + \varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il}\right)\left(1 + \varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il} - \varphi_{\omega_1 l}\ \mu_{\omega_1 il}\ r_{\omega_1 l}\right)}.$$

Persamaan (4.19) sampai dengan (4.21) merupakan sistem persamaan yang tidak *closed-form* sehingga iterasi numerik Newton Raphson diterapkan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan formula sebagai berikut ini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right) \tag{4.25}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right) = \left[\frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 10}} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 g0}} \quad \frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \varphi_{\omega_1 1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \varphi_{\omega_1 g}} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 120}} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \beta_{\omega_1 (g-1)g0}}\right]^T_{\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}}$$

di mana elemen-elemen vektor didefinisikan pada (4.19) sampai dengan (4.21) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right)$ merupakan matriks Hessian. Total parameter dalam ruang parameter di bawah hipotesis nol$\left(\omega_1\right)$, dinotasikan dengan b_1, adalah sebanyak $\left(g+3\right)g/2$ parameter. Ukuran matriks $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}\right)$ adalah $\left[\left(g+3\right)g/2\right] \times \left[\left(g+3\right)g/2\right]$.

Proses iterasi Newton Raphson pada (4.25) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}^{(0)} = \left[\beta_{\omega_1 10}^{(0)} \quad \cdots \quad \beta_{\omega_1 g0}^{(0)} \quad \varphi_{\omega_1 1}^{(0)} \quad \cdots \quad \varphi_{\omega_1 g}^{(0)} \quad \beta_{\omega_1 120}^{(0)} \quad \cdots \quad \beta_{\omega_1 (g-1)g0}^{(0)}\right]^T,$$

dengan $\hat{\beta}_{\omega_1 l0}^{(0)}$ diperoleh dari model regresi Poisson univariat tanpa variabel bebas, sedangkan $\hat{\varphi}_{\omega_1 l}^{(0)}$ dan $\hat{\beta}_{\omega_1 lm0}^{(0)}$ adalah sama dengan nol. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}^{(h)}\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi $\alpha \in \left(0,1\right)$ untuk model MGPR modifikasi dengan hipotesis pada (4.14) didefinisikan sebagai berikut

$$\Lambda_{11} = \frac{maks\ L\left(\omega_1\right)}{maks\ L\left(\Omega_1\right)} < \mathrm{k}_\alpha, \tag{4.26}$$

dengan k_α merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung α dengan $0 \le \mathsf{k}_\alpha \le 1$, $L(\Omega_1)$ dan $L(\omega_1)$ masing-masing dinyatakan pada (4.4) dan (4.17). Persamaan (4.26) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G_{11}^2 &= -\ln\left(\Lambda_{11}^2\right) = -2\ln\left(\Lambda_{11}\right) \\ &= 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_1\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Distribusi dari statistik uji G_{11}^2 pada persamaan (4.27) dituliskan dalam Teorema berikut ini.

Teorema 4.1

Pada pengujian serentak parameter model MGPR, jika Ω_1 adalah himpunan parameter di bawah populasi, ω_1 adalah himpunan parameter di bawah H_0 dan suatu hipotesis yang dinyatakan pada (4.14), maka statistik uji untuk pengujian hipotesis pada (4.14) adalah $G_{11}^2 = -2\ln\left(\Lambda_{11}\right) = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_1\right)\right]$ yang berdistribusi $\chi^2_{(g+1)gp/2}$.

Bukti

Misalkan penaksir MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}\right]^T,$$

di mana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11} = \left[\hat{\beta}_{l1} \quad \hat{\beta}_{l2} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{lp} \quad \hat{\beta}_{lm1} \quad \hat{\beta}_{lm2} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{lmp}; \quad l, m = 1, 2, \dots, g; \, l < m\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12} = \left[\hat{\beta}_{10} \quad \hat{\beta}_{20} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{g0} \quad \hat{\varphi}_1 \quad \dots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\beta}_{120} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{(g-1)g0}\right]^T,$$

sedangkan penaksir MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}\right]^T,$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1((g+1)gp/2\times 1)} = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2((g+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\beta}_{\omega_1 10} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega_1 g0} \quad \hat{\varphi}_{\omega_1 1} \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_{\omega_1 g} \quad \hat{\beta}_{\omega_1 120} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega_1 (g-1)g0}\right]^T,$$

maka hipotesis pada (4.14) dapat dituliskan sebagai

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_{11} = \boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\theta}_{11} \neq \boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}.$$

Statistik uji G_{11}^2 yang dinyatakan pada (4.27) dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} G_{11}^2 &= 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right)\right] \\ &= 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)\right] - 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right) - \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Misalkan $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right) = \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)$, maka fungsi $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)$ dapat didekati oleh ekspansi Taylor dengan rumus umum seperti di bawah ini

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + 1/2\, f''(x)(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^n(x)(\Delta x)^n.$$

Dalam prakteknya, ekspansi Taylor yang digunakan hanya sampai dengan turunan kedua dan mengabaikan komponen pada orde yang lebih tinggi, sehingga diperoleh

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + 1/2\, f''(x)(\Delta x)^2 + \text{komponen orde lebih tinggi.}$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor derajat dua di sekitar $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ diperoleh

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right) \approx \ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) + \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - 1/2\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right),$$

di mana

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \left.\frac{\partial \ell\left(\boldsymbol{\theta}_1\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1}\right|_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1},$$

dan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = -\left.\frac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\theta}_1\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1 \partial \boldsymbol{\theta}_1^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1}.$$

Karena $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)=\mathbf{0}$, sehingga diperoleh

$$2\left[\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)-\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)\right]\approx\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)^T\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right). \tag{4.29}$$

Sementara itu, jika fungsi $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)$ didekati oleh ekspansi Taylor derajat dua di sekitar $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}$ diperoleh

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)\approx\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right)+\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right)-1/2\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right)+\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right),$$

atau dapat ditulis

$$2\left[\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}\right)-\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)\right]\approx\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)^T\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right). \tag{4.30}$$

Berdasarkan persamaan (4.29) dan (4.30), statistik uji pada persamaan (4.28) dapat ditulis sebagai

$$G_{11}^2\approx\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)^T\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)-\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)^T\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right). \tag{4.31}$$

Misalkan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)=\begin{bmatrix} I_{11[(g+1)gp/2\times(g+1)gp/2]} & I_{12[(g+1)gp/2\times(g+3)g/2]} \\ I_{21[(g+3)g/2\times(g+1)gp/2]} & I_{22[(g+3)g/2\times(g+3)g/2]} \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)=\begin{bmatrix} I^{11}_{(g+1)gp/2\times(g+1)gp/2} & I^{12}_{(g+1)gp/2\times(g+3)g/2} \\ I^{21}_{(g+3)g/2\times(g+1)gp/2} & I^{22}_{(g+3)g/2\times(g+3)g/2} \end{bmatrix},$$

dan berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan $\boldsymbol{\theta}_{11}=\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}$, dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}$ maka diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}-I^{21}\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right), \tag{4.32}$$

atau dengan memperhatikan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (4.32) dapat ditulis

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}+I_{22}^{-1}I_{21}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right). \tag{4.33}$$

Pada pengujian hipotesis di bawah H_0, karena $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)=\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{12}\right)$ dan memperhatikan persamaan (4.33), yaitu

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{12}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}-\boldsymbol{\theta}_{12}+I_{22}^{-1}I_{21}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right),$$

maka

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1}\right)=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{12}\right)^T I_{22}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{12}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}-\boldsymbol{\theta}_{12}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}I_{12}I_{22}^{-1}I_{21} & I_{12}\\ I_{21} & I_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}-\boldsymbol{\theta}_{12}\end{bmatrix}.$$

Statistik uji G_{11}^2 pada persamaan (4.31) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}G_{11}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right)^T\left(I_{11}-I_{12}I_{22}^{-1}I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right)\\ &=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right)^T\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Memperhatikan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3, maka distribusi dari partisi parameter adalah

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{11}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{12}-\boldsymbol{\theta}_{12}\end{bmatrix}\overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0},\mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_1\right)\equiv\begin{bmatrix}I^{11} & I^{12}\\ I^{21} & I^{22}\end{bmatrix}\right),$$

sehingga diperoleh

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{11}\right)\overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0},I^{11}\right),$$

$$\left(I^{11}\right)^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{11}\right)\overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0},I_{(g+1)gp/2}\right),$$

$$G_{11}^2=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right)^T\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{11}-\boldsymbol{\theta}_{1\omega_1 1}\right)\overset{a}{\sim}\chi^2_{(g+1)gp/2} \quad \blacksquare$$

Daerah kritis uji diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.26) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(\Lambda_{11}<\mathsf{k}_\alpha;\omega_1\right)\\ &= P\left(-2\ln\Lambda_{11}>-2\ln\mathsf{k}_\alpha;\omega_1\right)\\ &= P\left(G_{11}^2>c_1;\omega_1\right),\ \text{dengan } c_1=-2\ln\mathsf{k}_\alpha\\ &= P\left(G_{11}^2>\chi^2_{\alpha,(g+1)gp/2}\right).\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.26), daerah kritis uji serentak untuk pengujian hipotesis pada (4.14) adalah H_0 ditolak ketika $G_{11}^2>\chi^2_{\alpha,(g+1)gp/2}$.

4.3.2 Pengujian Serentak Parameter β_{lk}

Hipotesis untuk pengujian parameter β_{lk} secara serentak dinyatakan sebagai

$H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = ... = \beta_{lp} = 0;\ l = 1, 2, \ldots, g;\ l < m;$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lk} \neq 0.$ (4.35)

Daerah kritis pengujian hipotesis diperoleh dengan menggunakan teknik *likelihood ratio test*, yaitu rasio antara nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0, $L(\omega_2)$, dengan nilai maksimum fungsi *likelihood* pada populasi, $L(\Omega_1)$. Nilai maksimum $L(\Omega_1)$ merupakan nilai maksimum fungsi *likelihood* yang dinyatakan pada (4.4). Sementara itu, penghitungan nilai $L(\omega_2)$ diuraikan di bawah ini.

Ruang parameter di bawah H_0 didefinisikan sebagai $\omega_2 = \left\{\beta_{\omega_2 l0}, \varphi_{\omega_2 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 lm};\ l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m\right\}$, sehingga persamaan (4.1) di bawah H_0 menjadi

$$p(\mathbf{y}) = \prod_{l=1}^{g} \left[\left(\frac{\mu_{\omega_2 l}}{1 + \varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 l}} \right)^{y_l} \frac{\left(1 + \varphi_{\omega_2 l} y_l\right)^{y_l - 1}}{y_l\,!} \exp\left(-\frac{\mu_{\omega_2 l}}{1 + \varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 l}} \left(1 + \varphi_{\omega_2 l} y_l\right) \right) \right]$$
$$\times \left[1 + \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_2 lm} \left(e^{-y_l} - z_{\omega_2 l}\right)\left(e^{-y_m} - z_{\omega_2 m}\right) \right],$$

dengan

$$z_{\omega_2 l} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_2 l}\left(r_{\omega_2 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 l}} \right),$$

dan

$$\ln\left(r_{\omega_2 l}\right) - \frac{\varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 l}\left(r_{\omega_2 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 l}} + 1 = 0.$$

Model MGPR modifikasi di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\mu_{\omega_2 il} = q_{il}\ \exp\left(\beta_{\omega_2 l0}\right), \tag{4.36}$$

dan

$$\gamma_{\omega_2 ilm} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 lm}. \tag{4.37}$$

Fungsi *likelihood* di ruang ω_2 dinyatakan sebagai berikut

$$L(\omega_2) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\omega_2 l0}, \varphi_{\omega_2 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 lm}; l, m = 1, 2, ..., g; l < m\right). \tag{4.38}$$

Misalkan $Q_{1\omega_2} = \ln L(\omega_2) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\omega_2 l0}, \varphi_{\omega_2 l}, \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 lm}; l, m = 1, 2, ..., g; l < m\right)$ maka fungsi ln-*likelihood* di bawah hipotesis nol dinyatakan sebagai

$$Q_{1\omega_2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{\omega_2 il}}{1 + \varphi_{\omega_2 l} \mu_{\omega_2 il}} \right) + (y_{il} - 1) \ln\left(1 + \varphi_{\omega_2 l} y_{il}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{\omega_2 il}\left(1 + \varphi_{\omega_2 l} y_{il}\right)}{1 + \varphi_{\omega_2 l} \mu_{\omega_2 il}} \right) + \ln\left(1 + Q_{2\omega_2}\right) \right],$$

dengan

$$Q_{2\omega_2} = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_2 ilm} \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_2 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_2 im}\right),$$

$$z_{\omega_2 il} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_2 il}\left(r_{\omega_2 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_2 l} \mu_{\omega_2 il}} \right),$$

$$\ln\left(r_{\omega_2 l}\right) - \frac{\varphi_{\omega_2 l} \mu_{\omega_2 il}\left(r_{\omega_2 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_2 l} \mu_{\omega_2 il}} + 1 = 0,$$

di mana $\mu_{\omega_2 il}$ dan $\gamma_{\omega_2 ilm}$ masing-masing seperti yang dinyatatan pada (4.36) dan (4.37).

Langkah selanjutnya adalah mendapatkan turunan pertama $Q_{1\omega_2}$ terhadap masing-masing parameter. Misalkan vektor parameter di bawah H_0 adalah $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 2} = \left[\beta_{\omega_2 10} \quad \cdots \quad \beta_{\omega_2 g0} \quad \varphi_{\omega_2 1} \quad \cdots \quad \varphi_{\omega_2 g} \quad \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 12}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 (g-1)g}^T\right]^T$, maka turunan parsial pertama $Q_{1\omega_2}$ terhadap masing-masing parameter dalam vektor parameter $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 2}$ adalah

$$\frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \beta_{\omega_2 l0}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{il} - \mu_{\omega_2 il}\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il}\right)^2} + \frac{\partial Q_{2\omega_2} / \partial \beta_{\omega_2 l0}}{1+Q_{2\omega_2}} \right), \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \varphi_{\omega_2 l}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{\omega_2 il} y_{il}}{1+\varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 il}} + \frac{\left(y_{il}-1\right) y_{il}}{\left(1+\varphi_{\omega_2 l} y_{il}\right)} - \frac{\mu_{\omega_2 il}\left(y_{il} - \mu_{\omega_2 il}\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 il}\right)^2} + \frac{\partial Q_{2\omega_2} / \partial \varphi_{\omega_2 l}}{1+Q_{2\omega_2}} \right), \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 lm}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+Q_{2\omega_2}} \frac{\partial Q_{2\omega_2}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 lm}} \right), \tag{4.41}$$

di mana $\mu_{\omega_2 il}$ dinyatakan pada (4.36) dengan

$$\frac{\partial Q_{2\omega_2}}{\partial \beta_{\omega_2 l0}} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_2 ilm}\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_2 im}\right) \frac{\partial z_{\omega_2 il}}{\partial \beta_{\omega_2 l0}}, \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial Q_{2\omega_2}}{\partial \varphi_{\omega_2 l}} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_2 ilm}\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_2 im}\right) \frac{\partial z_{\omega_2 il}}{\partial \varphi_{\omega_2 l}}, \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{2\omega_2}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 lm}} &= \sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{\omega_2 ilm}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 lm}} \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_2 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_2 im}\right) \right) \\ &= \mathbf{x}_i \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_2 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_2 im}\right), \end{aligned} \tag{4.44}$$

dan

$$\frac{\partial z_{\omega_2 il}}{\partial \beta_{\omega_2 l0}} = \frac{z_{\omega_2 il}\ \mu_{\omega_2 il}\left(r_{\omega_2 l}-1\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 il}\right)\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il} - \varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il}\ r_{\omega_2 l}\right)},$$

$$\frac{\partial z_{\omega_2 il}}{\partial \varphi_{\omega_2 l}} = \frac{z_{\omega_2 il}\ \mu^2_{\omega_2 il}\left(r_{\omega_2 l}-1\right)^2}{\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il}\right)\left(1+\varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il} - \varphi_{\omega_2 l}\ \mu_{\omega_2 il}\ r_{\omega_2 l}\right)}.$$

Persamaan (4.39) sampai dengan (4.41) merupakan sistem persamaan yang tidak *closed-form* sehingga iterasi numerik Newton Raphson diterapkan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan formula sebagai berikut ini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h+1)}_{1\omega_2 2} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{1\omega_2 2} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{1\omega_2 2}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{1\omega_2 2}\right) \tag{4.45}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{1\omega_2 2}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{1\omega_2 2}\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 2}\right) = \left[\frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \beta_{\omega_2 10}} \ \cdots\ \frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \beta_{\omega_2 g0}}\ \ \frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \varphi_{\omega_2 1}} \ \cdots\ \frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \varphi_{\omega_2 g}} \ \cdots\ \left[\frac{\partial Q_{1\omega_2}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 12}}\right]^T \ \cdots\ \left[\frac{\partial Q_{1\omega_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}^T_{\omega_2 (g-1)g}}\right]^T \right]^T$$

di mana elemen-elemen vektor didefinisikan pada (4.39) sampai dengan (4.41) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2}^{(h)}\right)$ adalah matriks Hessian. Total parameter dalam ruang parameter di bawah H_0, (ω_2), dinotasikan dengan b_2, adalah $(gp+g-p+3)g/2$ parameter. Ukuran matriks $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 2}\right)$ adalah $\left[(gp+g-p+3)g/2\right]\times\left[(gp+g-p+3)g/2\right]$.

Proses iterasi Newton Raphson pada (4.45) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 2}^{(0)} = \left[\beta_{\omega_2 10}^{(0)} \quad \cdots \quad \beta_{\omega_2 g0}^{(0)} \quad \varphi_{\omega_2 1}^{(0)} \quad \cdots \quad \varphi_{\omega_2 g}^{(0)} \quad \boldsymbol{\beta}_{\omega_2 12}^{T(0)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_{\omega_1(g-1)g}^{T(0)}\right]^T$$

dengan $\hat{\beta}_{\omega_2 l0}^{(0)}$ diperoleh dari model regresi Poisson univariat tanpa variabel bebas, sedangkan $\hat{\varphi}_{\omega_2 l}^{(0)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_1 lm}^{T(0)}$ adalah sama dengan nol. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2}^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2}^{(h)}\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi $\alpha \in (0,1)$ untuk model MGPR modifikasi dengan hipotesis pada (4.35) didefinisikan sebagai berikut

$$\Lambda_{12} = \frac{maks\ L(\omega_2)}{maks\ L(\Omega_1)} < \mathsf{k}_\alpha, \tag{4.46}$$

di mana k_α merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung α dengan $0 \le \mathsf{k}_\alpha \le 1$, $L(\Omega_1)$ dan $L(\omega_2)$ masing-masing dinyatakan pada (4.4) dan (4.38). Persamaan (4.46) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G_{12}^2 &= -\ln\left(\Lambda_{12}^2\right) = -2\ln\left(\Lambda_{12}\right) \\ &= 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_2\right)\right). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Distribusi dari statistik uji G_{12}^2 pada persamaan (4.47) dituliskan dalam Teorema berikut ini.

Teorema 4.2

Pada pengujian serentak parameter model MGPR, jika Ω_1 adalah himpunan parameter di bawah populasi, ω_2 adalah himpunan parameter di bawah H_0 dan suatu hipotesis yang dinyatakan pada (4.35), maka statistik uji untuk

pengujian hipotesis pada (4.35) adalah $G_{12}^2 = -2\ln\left(\Lambda_{12}\right) = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_2\right)\right]$ yang berdistribusi χ_{gp}^2.

Bukti

Misalkan penaksir MLE pada populasi untuk pengujian hipotesis (4.35) dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{14}\right]^T,$$

di mana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} = \left[\hat{\beta}_{l1} \quad \hat{\beta}_{l2} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{lp}; \quad l = 1, 2, \ldots, g\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{14} = \left[\hat{\beta}_{10} \quad \hat{\beta}_{20} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{g0} \quad \hat{\varphi}_1 \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T\right]^T,$$

sedangkan penaksir MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2}\right]^T,$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1(gp\times 1)} = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2((gp+g-p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\beta}_{\omega_2 10} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega_2 g0} \quad \hat{\varphi}_{\omega_2 1} \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_{\omega_2 g} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_2 12}^T \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_2 (g-1)g}^T\right]^T,$$

maka hipotesis pada (4.35) dapat dituliskan sebagai

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_{13} = \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\theta}_{13} \neq \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}.$$

Analog dengan pembuktian Teorema 4.1, statistik uji G_{12}^2 yang dinyatakan pada (4.47) dapat diuraikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
G_{12}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2}\right) - \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2}\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right),
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I_{11[gp \times gp]} & I_{12[gp \times (gp+g-p+3)g/2]} \\ I_{21[(gp+g-p+3)g/2 \times gp]} & I_{22[(gp+g-p+3)g/2 \times (gp+g-p+3)g/2]} \end{bmatrix},
$$

dan

$$
\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I^{11}_{gp \times gp} & I^{12}_{gp \times (gp+g-p+3)g/2} \\ I^{21}_{(gp+g-p+3)g/2 \times gp} & I^{22}_{(gp+g-p+3)g/2 \times (gp+g-p+3)g/2} \end{bmatrix}.
$$

Memperhatikan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3, maka distribusi dari partisi parameter adalah

$$
\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{13} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{14} - \boldsymbol{\theta}_{14} \end{bmatrix} \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_1\right) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix}\right),
$$

sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{13}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I^{11}\right), \\
&\left(I^{11}\right)^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{13}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I_{gp}\right), \\
&G_{12}^2 = \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{13} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_2 1}\right) \overset{a}{\sim} \chi^2_{gp} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.46) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\Lambda_{13} < \mathsf{k}_\alpha; \omega_2\right) \\
&= P\left(-2\ln\Lambda_{13} > -2\ln\mathsf{k}_\alpha; \omega_2\right) \\
&= P\left(G_{12}^2 > c_2; \omega_2\right), \text{ dengan } c_2 = -2\ln\mathsf{k}_\alpha \\
&= P\left(G_{12}^2 > \chi^2_{\alpha,gp}\right).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (4.46), daerah kritis uji serentak untuk pengujian hipotesis pada (4.35) adalah H_0 ditolak ketika $G_{12}^2 > \chi^2_{\alpha,gp}$.

4.3.3 Pengujian Serentak Parameter β_{lmk}

Hipotesis untuk pengujian parameter β_{lmk} secara serentak dinyatakan sebagai

$H_0 : \beta_{lm1} = \beta_{lm2} = ... = \beta_{lmp} = 0;\ l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m;$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{lmk} \neq 0.$ (4.48)

Daerah kritis pengujian hipotesis diperoleh dengan menggunakan teknik *likelihood ratio test*, yaitu rasio antara nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0, $L(\omega_3)$, dengan nilai maksimum fungsi *likelihood* pada populasi, $L(\Omega_1)$. Nilai maksimum $L(\Omega_1)$ merupakan nilai maksimum fungsi *likelihood* yang dinyatakan pada (4.4). Sementara itu, penghitungan nilai $L(\omega_3)$ diuraikan di bawah ini.

Ruang parameter di bawah H_0 didefinisikan sebagai $\omega_3 = \left\{\boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}, \varphi_{\omega_3 l}, \beta_{\omega_3 lm0};\ l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m\right\}$, sehingga persamaan (4.1) di bawah H_0 menjadi

$$p(\mathbf{y}) = \prod_{l=1}^{g} \left[\left(\frac{\mu_{\omega_3 l}}{1 + \varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 l}} \right)^{y_l} \frac{\left(1 + \varphi_{\omega_3 l} y_l\right)^{y_l - 1}}{y_l!} \exp\left(-\frac{\mu_{\omega_3 l}}{1 + \varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 l}} \left(1 + \varphi_{\omega_3 l} y_l\right) \right) \right]$$
$$\times \left[1 + \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_3 lm} \left(e^{-y_l} - z_{\omega_3 l}\right)\left(e^{-y_m} - z_{\omega_3 m}\right) \right],$$

dengan

$$z_{\omega_3 l} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_3 l}\left(r_{\omega_3 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 l}} \right),$$

dan

$$\ln\left(r_{\omega_3 l}\right) - \frac{\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 l}\left(r_{\omega_3 l} - 1\right)}{1 + \varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 l}} + 1 = 0\,.$$

Model MGPR modifikasi di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\mu_{\omega_3 il} = q_{il}\ \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}\right), \tag{4.49}$$

dan

$$\gamma_{\omega_3 ilm} = \beta_{\omega_3 lm0}\,. \tag{4.50}$$

Fungsi *likelihood* di ruang ω_3 dinyatakan sebagai berikut

$$L(\omega_3) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \,\middle|\, \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}, \varphi_{\omega_3 l}, \beta_{\omega_3 lm0}; l, m = 1,2,...,g\,; l < m\right). \tag{4.51}$$

Misalkan $Q_{1\omega_3} = \ln L(\omega_3) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \,\middle|\, \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}, \varphi_{\omega_3 l}, \beta_{\omega_3 lm0}; l, m = 1,2,...,g\,; l < m\right)$ maka fungsi ln-*likelihood* di bawah hipotesis nol dinyatakan sebagai

$$Q_{1\omega_3} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{\omega_3 il}}{1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}} \right) + (y_{il}-1)\ln\left(1+\varphi_{\omega_3 l} y_{il}\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{\omega_3 il}\left(1+\varphi_{\omega_3 l} y_{il}\right)}{1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}} \right) + \ln\left(1+Q_{2\omega_3}\right) \right],$$

dengan

$$Q_{2\omega_3} = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_3 ilm} \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_3 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_3 im}\right), \tag{4.52}$$

$$z_{\omega_3 il} = \exp\left(\frac{\mu_{\omega_3 il}\left(r_{\omega_3 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}} \right),$$

$$\ln\left(r_{\omega_3 l}\right) - \frac{\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}\left(r_{\omega_3 l}-1\right)}{1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}} + 1 = 0\,,$$

di mana $\mu_{\omega_3 il}$ dan $\gamma_{\omega_3 ilm}$ masing-masing seperti yang dinyatatan pada (4.49) dan (4.50).

Langkah selanjutnya adalah mendapatkan turunan pertama $Q_{1\omega_3}$ terhadap masing-masing parameter. Misalkan vektor parameter di bawah H_0 adalah $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 2} = \left[\boldsymbol{\beta}_{\omega_3 1}^T \;\cdots\; \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 g}^T \;\; \varphi_{\omega_3 1} \;\cdots\; \varphi_{\omega_3 g} \;\; \beta_{\omega_3 120} \;\cdots\; \beta_{\omega_3 12(g-1)g}\right]^T$, maka turunan parsial pertama $Q_{1\omega_3}$ terhadap masing-masing parameter dalam vektor parameter $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 2}$ adalah

$$\frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{il} - \mu_{\omega_3 il}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il}\right)^2} + \frac{\partial Q_{2\omega_3} / \partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}}{1+Q_{2\omega_3}} \right), \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \varphi_{\omega_3 l}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{\omega_3 il} y_{il}}{1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}} + \frac{\left(y_{il}-1\right) y_{il}}{\left(1+\varphi_{\omega_3 l} y_{il}\right)} - \frac{\mu_{\omega_3 il}\left(y_{il}-\mu_{\omega_3 il}\right)}{\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}\right)^2} + \frac{\partial Q_{2\omega_3} / \partial \varphi_{\omega_3 l}}{1+Q_{2\omega_3}} \right), \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \beta_{\omega_3 lm0}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+Q_{2\omega_3}} \frac{\partial Q_{2\omega_3}}{\partial \beta_{\omega_3 lm0}} \right), \tag{4.55}$$

dengan $\mu_{\omega_3 il}$ dan $Q_{2\omega_3}$ masing-masing dinyatakan pada (4.49) dan (4.52), di mana

$$\frac{\partial Q_{2\omega_3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_3 ilm}\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_3 im}\right)\frac{\partial z_{\omega_3 il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}}, \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial Q_{2\omega_3}}{\partial \varphi_{\omega_3 l}} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega_3 ilm}\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_3 im}\right)\frac{\partial z_{\omega_3 il}}{\partial \varphi_{\omega_3 l}}, \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{2\omega_3}}{\partial \beta_{\omega_3 lm0}} &= \sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{\omega_3 ilm}}{\partial \beta_{\omega_3 lm0}} \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_3 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_3 im}\right) \right) \\ &= \left(e^{-y_{il}} - z_{\omega_3 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega_3 im}\right),\end{aligned} \tag{4.58}$$

dan

$$\frac{\partial z_{\omega_3 il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l}} = \frac{z_{\omega_3 il}\ \mu_{\omega_3 il}\left(r_{\omega_3 l}-1\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\mu_{\omega_3 il}\right)\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il} - \varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il}\ r_{\omega_3 l}\right)},$$

$$\frac{\partial z_{\omega_3 il}}{\partial \varphi_{\omega_3 l}} = \frac{z_{\omega_3 il}\ \mu_{\omega_3 il}^2\left(r_{\omega_3 l}-1\right)^2}{\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il}\right)\left(1+\varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il} - \varphi_{\omega_3 l}\ \mu_{\omega_3 il}\ r_{\omega_3 l}\right)}.$$

Persamaan (4.53) sampai dengan (4.55) merupakan sistem persamaan yang tidak *closed-form* sehingga iterasi numerik Newton Raphson diterapkan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan formula sebagai berikut ini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)}\right), \tag{4.59}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_2 2}^{(h)}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)}\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}\right) = \left[\left[\frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 l1}^T}\right]^T \ \cdots\ \left[\frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 lp}^T}\right]^T \ \frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \varphi_{\omega_3 1}}\ \cdots\ \frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \varphi_{\omega_3 g}}\ \cdots\ \frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \beta_{\omega_3 120}}\ \cdots\ \frac{\partial Q_{1\omega_3}}{\partial \beta_{\omega_3 (g-1)g}} \right]^T$$

di mana elemen-elemen vektor didefinisikan pada (4.53) sampai dengan (4.55) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)}\right)$ adalah matriks Hessian. Total parameter dalam ruang parameter di bawah H_0, (ω_3), dinotasikan dengan b_3, adalah $(g+2p+3)g/2$ parameter. Matriks $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 2}\right)$ berukuran $\left[(g+2p+3)g/2\right]\times\left[(g+2p+3)g/2\right]$.

Proses iterasi Newton Raphson pada (4.59) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 2}^{(0)} = \left[\boldsymbol{\beta}_{\omega_3 1}^{T(0)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_{\omega_3 g}^{T(0)} \quad \varphi_{\omega_3 1}^{(0)} \quad \cdots \quad \varphi_{\omega_3 g}^{(0)} \quad \beta_{\omega_3 120} \quad \cdots \quad \beta_{\omega_3 (g-1) g 0}\right]^T,$$

di mana nilai awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_3 l}^{T(0)}$ diperoleh dari model regresi Poisson univariat, sedangkan $\hat{\varphi}_{\omega_3 l}^{(0)}$ dan $\hat{\beta}_{\omega_3 lm0}^{(0)}$ adalah sama dengan nol. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}^{(h)}\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi $\alpha \in (0,1)$ untuk model MGPR modifikasi dengan hipotesis pada (4.48) didefinisikan sebagai berikut

$$\Lambda_{13} = \frac{maks\ L(\omega_3)}{maks\ L(\Omega_1)} < \mathsf{k}_\alpha, \tag{4.60}$$

di mana k_α merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung α dengan $0 \le \mathsf{k}_\alpha \le 1$, $L(\Omega_1)$ dan $L(\omega_3)$ masing-masing dinyatakan pada persamaan (4.4) dan (4.51). Persamaan (4.60) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G_{13}^2 &= -\ln\left(\Lambda_{13}^2\right) = -2\ln\left(\Lambda_{13}\right) \\ &= 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_3\right)\right). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Distribusi dari statistik uji G_{13}^2 pada persamaan (4.61) dituliskan dalam Teorema berikut ini.

Teorema 4.3

Pada pengujian serentak parameter model MGPR, jika Ω_1 adalah himpunan parameter di bawah populasi, ω_3 adalah himpunan parameter di bawah H_0 dan suatu hipotesis yang dinyatakan pada (4.48), maka statistik uji untuk

pengujian hipotesis pada (4.48) adalah $G_{13}^2 = -2\ln\left(\Lambda_{13}\right) = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_3\right)\right]$ yang berdistribusi $\chi^2_{(g-1)gp/2}$.

Bukti

Misalkan penaksir MLE pada populasi untuk pengujian hipotesis (4.48) dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{16}\right]^T,$$

di mana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} = \left[\hat{\beta}_{lm1} \quad \hat{\beta}_{lm2} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{lmp}; \quad l,\, m = 1,2,\ldots,g;\, l < m\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{16} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T \quad \hat{\varphi}_1 \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\beta}_{120} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{(g-1)g0}\right]^T,$$

sedangkan penaksir MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2}\right]^T,$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1((g-1)gp/2\times 1)} = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3 2((g+2p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_3 1}^T \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\omega_3 g}^T \quad \hat{\varphi}_{\omega_3 1} \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_{\omega_3 g} \quad \hat{\beta}_{\omega_3 120} \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega_3 (g-1)g0}\right]^T,$$

maka hipotesis pada (4.35) dapat dituliskan sebagai

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_{15} = \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\theta}_{15} \neq \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}.$$

Analog dengan pembuktian Teorema 4.1, statistik uji G_{13}^2 yang dinyatakan pada (4.61) dapat diuraikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
G_{13}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3}\right) - \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_3} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3}\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right) \\
&= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right),
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I_{11[(g-1)gp/2 \times (g-1)gp/2]} & I_{12[(g-1)gp/2 \times (g+2p+3)g/2]} \\ I_{21[(g+2p+3)g/2 \times (g-1)gp/2]} & I_{22[(g+2p+3)g/2 \times (g+2p+3)g/2]} \end{bmatrix},
$$

dan

$$
\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I^{11}_{(g-1)gp/2 \times (g-1)gp/2} & I^{12}_{(g-1)gp/2 \times (g+2p+3)g/2} \\ I^{21}_{(g+2p+3)g/2 \times (g-1)gp/2} & I^{22}_{(g+2p+3)g/2 \times (g+2p+3)g/2} \end{bmatrix}.
$$

Memperhatikan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3, maka distribusi dari partisi parameter adalah

$$
\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{15} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{16} - \boldsymbol{\theta}_{16} \end{bmatrix} \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_1\right) \equiv \begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix}\right),
$$

sehingga diperoleh

$$
\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{15}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I^{11}\right),
$$

$$
\left(I^{11}\right)^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{15}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I_{(g-1)gp/2}\right),
$$

$$
G_{13}^2 = \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{15} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_3 1}\right) \overset{a}{\sim} \chi^2_{(g-1)gp/2} \quad \blacksquare
$$

Daerah kritis uji serentak diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.61) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\Lambda_{15} < \mathsf{k}_\alpha; \omega_3\right) \\
&= P\left(-2\ln\Lambda_{15} > -2\ln\mathsf{k}_\alpha; \omega_3\right) \\
&= P\left(G_{13}^2 > c_3; \omega_3\right), \text{ dengan } c_3 = -2\ln\mathsf{k}_\alpha \\
&= P\left(G_{13}^2 > \chi^2_{\alpha,(g-1)gp/2}\right).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (4.61), daerah kritis uji serentak untuk pengujian hipotesis pada (4.48) adalah H_0 ditolak ketika $G_{13}^2 > \chi^2_{\alpha,(g-1)gp/2}$.

4.4 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter Model MGPR Modifikasi

Pada bagian ini dibahas statistik uji beserta distribusinya untuk pengujian parameter secara parsial model MGPR modifikasi. Pengujian parameter secara parsial digunakan untuk menentukan signifikansi koefisien regresi β_{lk} dan β_{lmk} dalam model secara individual. Selain itu, pengujian parsial juga dilakukan untuk menentukan signifikansi parameter dispersi φ_l .

4.4.1 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter β_{lk}

Pengujian hipotesis parsial ini untuk mengetahui signifikansi parameter β_{lk} $\left(l = 1,2,\ldots,g;\ l < m; k = 1,2,\ldots,p\right)$ terhadap model secara individual. Formulasi pengujian hipotesis secara parsial, misalnya untuk $l = l^*$, dituliskan sebagai berikut

$$H_0 : \beta_{l^*k} = 0$$
$$H_1 : \beta_{l^*k} \neq 0 \,. \tag{4.62}$$

Berkenaan dengan hipotesis (4.62), dimisalkan estimator MLE dari parameter model MGPR modifikasi dibawah populasi dan di bawah H_0 masing-masing dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T \quad \hat{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T\right]^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4 2((gp+g+p+3)g/2-1\times 1)} = \left[\hat{\beta}_{\omega_4 l0} \quad \hat{\beta}_{\omega_4 l1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_4 l^*(k-1)} \quad \hat{\beta}_{\omega_4 l^*(k+1)} \quad \cdots \right.$$
$$\left. \hat{\beta}_{\omega_4 lp} \quad \hat{\varphi}_{\omega_4 1} \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_{\omega_4 l} \quad \hat{\beta}_{\omega_4 lm0} \quad \hat{\beta}_{\omega_4 lm1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_4 lmp}\right]^T. \tag{4.63}$$

Dengan mengikuti tahapan pembuktian Teorema 4.1, estimator di bawah populasi dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{18}\right]^T,$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} = \left[\hat{\beta}_{l^*k}\right],$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{18} = \Big[\hat{\beta}_{l0} \quad \hat{\beta}_{l1} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{l^*(k-1)} \quad \hat{\beta}_{l^*(k+1)} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{lp}$$
$$\hat{\varphi}_1 \quad \dots \quad \hat{\varphi}_l \quad \hat{\beta}_{lm0} \quad \hat{\beta}_{lm1} \quad \dots \quad \hat{\beta}_{lmp} \Big]^T,$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4 2} \right]^T,$$

di mana $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1} = [0]$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_4 2}$ seperti yang dinyatakan pada (4.63), sehingga diperoleh statistik uji *likelihood ratio* untuk menguji hipotesis (4.62), yaitu

$$\begin{aligned} G_{14}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1}\right) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_4 1}\right), \end{aligned} \tag{4.64}$$

dengan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I_{11[1\times 1]} & I_{12[1\times(gp+g+p+3)g/2-1]} \\ I_{21[(gp+g+p+3)g/2-1\times 1]} & I_{22[g(gp+g+p+3)g/2-1\times(gp+g+p+3)g/2-1]} \end{bmatrix}, \tag{4.65}$$

dan

$$\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right) = \begin{bmatrix} I_{1\times 1}^{11} & I_{1\times(gp+g+p+3)g/2-1}^{12} \\ I_{(gp+g+p+3)g/2-1\times 1}^{21} & I_{(gp+g+p+3)g/2-1\times(gp+g+p+3)g/2-1}^{22} \end{bmatrix}. \tag{4.66}$$

Berdasarkan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3 dan memerhatikan persamaan (4.64) dengan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{17}$ hanya memiliki satu elemen, yaitu β_{l^*k}, maka statistik uji untuk hipotesis pada (4.62) dapat dituliskan sebagai

$$G_{14}^2 = \frac{\hat{\beta}_{l^*k}^2}{\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}\right)} \sim \chi_1^2, \tag{4.67}$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat persamaan (4.67), sehingga diperoleh statistik uji

$$Z_{14} = \frac{\hat{\beta}_{l^*k}}{\sqrt{\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}\right)}} \sim N(0,1),$$

dengan $\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}\right)$ diperoleh dari elemen diagonal yang bersesuaian dari matriks $\left[\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\right]^{-1}$. Daerah kritis dari pengujian hipotesis (4.62) adalah tolak H_0 ketika $\left|Z_{14}\right| > Z_{\alpha/2}$.

4.4.2 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter β_{lmk}

Pengujian hipotesis parsial ini untuk mengetahui signifikansi parameter β_{lmk} $\left(l = 1,2,\ldots,g;\ l < m; k = 1,2,\ldots,p\right)$ terhadap model secara individual. Formulasi pengujian hipotesis secara parsial, misalnya untuk $l = l^*$, dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{l^*mk} = 0 \\ &H_1 : \beta_{l^*mk} \neq 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Berkenaan dengan hipotesis (4.68), dimisalkan estimator MLE dari parameter model MGPR modifikasi dibawah populasi dan di bawah H_0 masing-masing dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T \quad \hat{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T\right]^T,$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_5 2((gp+g+p+3)g/2-1\times 1)} = \Big[&\hat{\beta}_{\omega_5 l0} \quad \hat{\beta}_{\omega_5 l1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_5 lp} \quad \hat{\varphi}_{\omega_5 1} \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_{\omega_5 l} \\ &\hat{\beta}_{\omega_5 lm0} \quad \hat{\beta}_{\omega_5 lm1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_5 l^* m(k-1)} \quad \hat{\beta}_{\omega_5 l^* m(k+1)} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_5 lmp}\Big]^T. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Dengan mengikuti tahapan pembuktian Teorema 4.1, estimator di bawah populasi dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{110}\right]^T,$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} = \left[\hat{\beta}_{l^*mk}\right],$$

dan

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{110} = \Big[&\hat{\beta}_{l0} \quad \hat{\beta}_{l1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{lp} \quad \hat{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_l \\ &\hat{\beta}_{lm0} \quad \hat{\beta}_{lm1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{l^* m(k-1)} \quad \hat{\beta}_{l^* m(k+1)} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{lmp}\Big]^T, \end{aligned}$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_5} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_5 2}\right]^T,$$

di mana $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1} = [0]$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_5 2}$ seperti yang dinyatakan pada (4.69), sehingga diperoleh statistik uji *likelihood ratio* untuk menguji hipotesis (4.68), yaitu

$$\begin{aligned} G_{15}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1}\right) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_5 1}\right), \end{aligned} \tag{4.70}$$

dengan $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ dan $\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ masing-masing dinyatakan pada (4.65) dan (4.66).

Berdasarkan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3 dan memerhatikan persamaan (4.70) dengan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{19}$ hanya memiliki satu elemen, yaitu $\beta_{l^* mk}$, maka statistik uji untuk hipotesis pada (4.68) dapat dituliskan sebagai

$$G_{15}^2 = \frac{\hat{\beta}_{l^* mk}^2}{\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^* mk}\right)} \sim \chi_1^2, \tag{4.71}$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat persamaan (4.71), sehingga diperoleh statistik uji

$$Z_{15} = \frac{\hat{\beta}_{l^* mk}}{\sqrt{\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^* mk}\right)}} \sim N(0,1),$$

dengan $\hat{\text{var}}\left(\hat{\beta}_{l^* mk}\right)$ diperoleh dari elemen diagonal yang bersesuaian dari matriks $\left[\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)\right]^{-1}$. Daerah kritis dari pengujian hipotesis (4.68) adalah tolak H_0 ketika $|Z_{15}| > Z_{\alpha/2}$.

4.4.3 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter φ_l

Pengujian hipotesis parsial ini untuk mengetahui signifikansi parameter φ_l $\left(l = 1,2,\ldots,g;\ l < m; k = 1,2,\ldots,p\right)$ terhadap model secara individual.

Formulasi pengujian hipotesis secara parsial, misalnya untuk $l = l^*$, dituliskan sebagai berikut

$$H_0 : \varphi_{l^*} = 0$$
$$H_1 : \varphi_{l^*} \neq 0 \,. \tag{4.72}$$

Berkenaan dengan hipotesis (4.72), dimisalkan estimator MLE dari parameter model MGPR modifikasi dibawah populasi dan di bawah H_0 masing-masing dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T \quad \hat{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_g \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T\right]^T,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_6 2((gp+g+p+3)g/2-1\times 1)} = \left[\hat{\beta}_{\omega_6 l0} \quad \hat{\beta}_{\omega_6 l1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_6 lp} \quad \hat{\varphi}_{\omega_6 1} \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_{\omega_6 l^*} \right.$$
$$\left. \cdots \quad \hat{\varphi}_{\omega_6 l} \quad \hat{\beta}_{\omega_6 lm0} \quad \hat{\beta}_{\omega_6 lm1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{\omega_6 lmp}\right]^T. \tag{4.73}$$

Dengan mengikuti tahapan pembuktian Teorema 4.1, estimator di bawah populasi dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1((gp+g+p+3)g/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{112}\right]^T,$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} = \left[\hat{\varphi}_{l^*}\right],$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{112} = \left[\hat{\beta}_{l0} \quad \hat{\beta}_{l1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{lp} \quad \hat{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \hat{\varphi}_l \quad \hat{\beta}_{lm0} \quad \hat{\beta}_{lm1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_{lmp}\right]^T,$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_6} = \left[\boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_6 2}\right]^T,$$

di mana $\boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1} = [0]$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_6 2}$ seperti yang dinyatakan pada (4.73), sehingga diperoleh statistik uji *likelihood ratio* untuk menguji hipotesis (4.72), yaitu

$$G_{16}^2 \approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1}\right)$$
$$= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111} - \boldsymbol{\theta}_{1\omega_6 1}\right). \tag{4.74}$$

dengan $\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ dan $\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ masing-masing dinyatakan pada (4.65) dan (4.66).

Berdasarkan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3 dan memerhatikan persamaan (4.74) dengan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{111}$ hanya memiliki satu elemen, yaitu $\hat{\varphi}_{l^*}$, maka statistik uji untuk hipotesis pada (4.72) dapat dituliskan sebagai

$$G_{16}^2 = \frac{\hat{\varphi}_{l^*}^2}{\hat{\text{var}}\left(\hat{\varphi}_{l^*}\right)} \sim \chi_1^2, \tag{4.75}$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat persamaan (4.75), sehingga diperoleh statistik uji

$$Z_{16} = \frac{\hat{\varphi}_{l^*}}{\sqrt{\hat{\text{var}}\left(\hat{\varphi}_{l^*}\right)}} \sim N(0,1),$$

dengan $\hat{\text{var}}\left(\hat{\varphi}_{l^*}\right)$ diperoleh dari elemen diagonal yang bersesuaian dari matriks $\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$. Daerah kritis dari pengujian hipotesis (4.72) adalah tolak H_0 ketika $|Z_{16}| > Z_{\alpha/2}$.

BAB 5
GEOGRAPHICALLY WEIGHTED MULTIVARIATE GENERALIZED POISSON REGRESSION

Pada bab ini dijabarkan penaksiran parameter dan pengujian hipotesis model *Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson* (GWMGPR) sebagai pengembangan dari model MGPR modifikasi. Subbab 5.1 berisi pendefinisian model GWMGPR berdasarkan model MGPR modifikasi. Penaksiran parameter model GWMGPR disajikan pada Subbab 5.2. Subbab selanjutnya berkaitan dengan pengujian hipotesis untuk model GWMGPR. Pada Subbab 5.3 sampai dengan Subbab 5.4 diuraikan pengujian hipotesis parameter model GWMGPR secara serentak dan parsial. Penaksiran parameter dan pengujian hipotesis serentak parameter model GWMGPR sudah dipublikasikan pada jurnal *Mathematics* tahun 2020 dengan judul *Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson Regression* (Lampiran 14).

5.1 Model GWMGPR

Model GWMGPR merupakan pengembangan model GWBGPR pada Subbab 2.2.2 seperti halnya pengembangan model GPR menjadi *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR) oleh Nakaya dkk. (2005) dan pengembangan model MPR menjadi menjadi *Geographically Weighted Multivariate Poisson Regression* (GWMPR) oleh Triyanto dkk. (2015). Ide dasar dari model GWMGPR adalah menggunakan pendekatan spasial titik dengan mempertimbangkan faktor letak geografi yang disajikan sebagai vektor koordinat dua dimensi (lintang dan bujur).

Dalam model GWMGPR, variabel respon $Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots, Y_{il}$ diprediksi oleh variabel bebas $\mathbf{x}_i$ yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi di mana data tersebut diamati. Jika diberikan n sampel random $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$,

$i = 1,2,\ldots,n$ dari variabel random $\mathbf{y}_i \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ di mana $\mathbf{u}_i = \left(u_{1i}, u_{2i}\right)$ merupakan vektor koordinat dua dimensi (bujur dan lintang) pada lokasi i, maka model GWMGPR berdasarkan MGPR pada (4.2) dapat dituliskan sebagai

$$\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{il} \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)\right), \tag{5.1}$$

$$\gamma_{ilm}\left(\mathbf{u}_i\right) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right), \tag{5.2}$$

di mana q_{il} adalah *exposure* untuk variabel respon l lokasi ke$-i$ dengan

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}^T; \; i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right) = \begin{bmatrix} \beta_{l0}\left(\mathbf{u}_i\right) & \beta_{l1}\left(\mathbf{u}_i\right) & \beta_{l2}\left(\mathbf{u}_i\right) & \cdots & \beta_{lp}\left(\mathbf{u}_i\right) \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}^T; \; l = 1,2,\ldots,g,$$

$$\boldsymbol{\beta}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right) = \begin{bmatrix} \beta_{lm0}\left(\mathbf{u}_i\right) & \beta_{lm1}\left(\mathbf{u}_i\right) & \cdots & \beta_{lmp}\left(\mathbf{u}_i\right) \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}^T; \; l,m = 1,2,\ldots,g; \; l < m.$$

5.2 Penaksiran Parameter Model GWMGPR

Penaksiran parameter model GWMGPR dilakukan dengan metode MLE, yaitu dengan memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* suatu penaksir $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)$. *Likelihood* maksimum suatu penaksir diperoleh dengan menyamakan dengan nol gradien fungsi *ln-likelihood* tersebut. Misalkan diberikan n sampel random $\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$ dari variabel random $\mathbf{y} \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ maka fungsi *likelihood* lokasi ke$-i$ berkenaan dengan persamaan (4.1) adalah

$$\begin{aligned} L\left(\Omega_2\right) &= L\left(\mu_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right), \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right); i = 1,2,\ldots,n; \; l,m = 1,2\ldots,g; \; l < m\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left[\prod_{l=1}^{g} \left(\left(\frac{\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)} \right)^{y_{il}} \frac{\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right) y_{il}\right)^{y_{il}-1}}{y_{il}!} \right.\right. \\ &\qquad \left. \exp\left(-\frac{\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)} \left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right) y_{il}\right) \right) \right) \\ &\qquad \left. \times \left(1 + \sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right) \right) \right], \end{aligned} \tag{5.3}$$

dengan

$$z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)}{1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} \right), \tag{5.4}$$

$$\ln(r_l) - \frac{\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)}{1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} + 1 = 0,$$

di mana $\mu_{il}(\mathbf{u}_i)$ dan $\gamma_{ilm}(\mathbf{u}_i)$ masing-masing dinyatakan pada (5.1) dan (5.2).

Jika Q_3 merupakan fungsi *ln-likelihood* dari persamaan (5.3) Q_3 dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} Q_3 &= \ln\left(L\left(\boldsymbol{\mu}_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\gamma}_{lm}(\mathbf{u}_i);\ i = 1,2,\ldots,n;\ l,m = 1,2\ldots,g;\ l < m\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} \right) + (y_{il} - 1)\ln\left(1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i) y_{il}\right) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)\left(1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i) y_{il}\right)}{1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} \right) + \ln(1 + Q_4) \right], \end{aligned} \tag{5.5}$$

dengan

$$Q_4 = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right),$$

di mana z_{il} didefinisikan pada (5.4).

Pada model GWMGPR, faktor letak geografis memiliki nilai yang berbeda untuk setiap wilayah yang menunjukkan sifat lokal dari model. Oleh karena itu untuk menentukan penaksir parameter pada lokasi ke$-i$ diperlukan informasi dari lokasi yang lain (misalnya dari lokasi ke$-j$) dengan pembobot w_{ij}. Fotheringham dkk. (2002) menyatakan bahwa penentuan *bandwidth* optimum lebih sensitif dibandingkan pemilihan pembobot yang digunakan, maka penelitian ini menerapkan fungsi pembobot *fixed kernel Gaussian* yang disajikan pada persamaan (2.60) dengan pertimbangan terkait komputasi. Kandidat *bandwidth* dalam penelitian merupakan jarak antarlokasi, yaitu dimulai dari jarak maksimum sampai dengan jarak minimum. *Bandwidth* optimum ditentukan berdasarkan nilai *generalized cross validation* (GCV) minimum, yang disajikan pada persamaan (2.64).

Berdasarkan nilai pembobot optimum yang diperoleh, maka fungsi *ln-likelihood* lokasi ke$-i$ dari persamaan (5.5) dapat dituliskan sebagai fungsi *ln-likelihood* terboboti sebagai berikut

$$\mathbb{Q}_3 = \ln\left(L\left(\boldsymbol{\mu}_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right); l, m = 1, 2 \ldots, g; l < m\right)\right) w_{ij}$$

$$\mathbb{Q}_3 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{jl}\ln\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\left(y_{jl}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\left(y_{jl}!\right)-\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\ln\left(1+\mathbb{Q}_4\right)\right]w_{ij}, \tag{5.6}$$

dengan

$$\mathbb{Q}_4 = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{jlm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{jl}}-z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}}-z_{jm}\right), \tag{5.7}$$

$$z_{jl} = \exp\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right), \tag{5.8}$$

$$\ln\left(r_l\right)-\frac{\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}+1=0, \tag{5.9}$$

di mana

$$\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{jl}\ \exp\left(\mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)\right), \tag{5.10}$$

$$\gamma_{jlm}\left(\mathbf{u}_i\right) = \mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right). \tag{5.11}$$

Misalkan vektor parameter untuk lokasi ke$-i$ dari model GWMGPR pada (5.1) dinyatakan sebagai berikut

$$\boldsymbol{\theta}_2\left(\mathbf{u}_i\right) = \left[\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\beta}_g^T\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \varphi_1\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \ldots\ \ \varphi_g\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \boldsymbol{\beta}_{12}^T\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^T\left(\mathbf{u}_i\right)\right]^T,$$

maka penaksiran parameter dengan MLE dilakukan dengan memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* terboboti pada persamaan (5.6). Untuk memaksimumkan fungsi *ln-likelihood*, $\mathbb{Q}_3$ diturunkan terhadap $\boldsymbol{\theta}_2\left(\mathbf{u}_i\right)$ dan disamakan dengan nol. Adapun turunan parsial pertama $\mathbb{Q}_3$ terhadap masing-masing parameter adalah sebagai berikut ini

$$\frac{\partial\mathbb{Q}_3}{\partial\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{jl}-\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^2}+\frac{\partial\mathbb{Q}_4/\partial\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\right)w_{ij}, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\, y_{jl}}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)} + \frac{(y_{jl}-1)\, y_{jl}}{\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\, y_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)} \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\left(y_{jl}-\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_4 / \partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)}{1+\mathbb{Q}_4} \right) w_{ij}\,, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial \mathbb{Q}_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij}\,, \tag{5.14}$$

dengan $\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)$ dan $\mathbb{Q}_4$ masing-masing dinyatakan pada (5.10) dan (5.7), di mana

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{jlm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right) \frac{\partial z_{jl}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)}\,, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_4}{\partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{jlm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right) \frac{\partial z_{jl}}{\partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)}\,, \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{jlm}(\mathbf{u}_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}(\mathbf{u}_i)} \left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right) \right)$$
$$= \mathbf{x}_j \left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right), \tag{5.17}$$

dan

$$\frac{\partial z_{jl}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{jl}\ \mathbf{x}_j\ \mu_{jl}(r_l - 1)}{\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\, r_l\right)}\,,$$

$$\frac{\partial z_{jl}}{\partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{jl}\ \mu_{jl}^2(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)^2}{\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\, r_l\right)}\,,$$

dengan z_{jl} dan r_l masing-masing dinyatakan pada (5.8) dan (5.9).

Turunan parsial $\mathbb{Q}_3$ terhadap masing-masing parameter pada (5.12) sampai dengan (5.14) merupakan sistem persamaan yang tidak *closed form* sehingga MLE tidak menghasilkan penyelesaian analitik. Oleh karena itu dibutuhkan iterasi numerik untuk mendapatkan penaksir tersebut. Penelitian ini menerapkan algoritma Newton Raphson dengan formula sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right), \tag{5.18}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor penaksir parameter lokasi ke$-i$ pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ adalah vektor gradien lokasi ke$-i$ pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)=\left[\left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \cdots \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \varphi_1(\mathbf{u}_i)} \cdots \frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \varphi_g(\mathbf{u}_i)} \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \cdots \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T\right]^T,$$

dengan elemen vektor seperti pada (5.12) sampai dengan (5.14) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ adalah matriks Hessian. Jumlah seluruh parameter dalam model MGPR modifikasi, dinotasikan dengan a_2, adalah $(gp+g+p+3)gn/2$ parameter. Matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2(\mathbf{u}_i)\right)$ berukuran $\left[(gp+g+p+3)gn/2\right]\times\left[(gp+g+p+3)gn/2\right]$.

Proses iterasi Newton Raphson pada (5.18) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_2^{(0)}(\mathbf{u}_i)=\left[\boldsymbol{\beta}_1^{T(0)}(\mathbf{u}_i) \;\cdots\; \boldsymbol{\beta}_g^{T(0)}(\mathbf{u}_i) \;\; \varphi_1^{(0)}(\mathbf{u}_i) \;\cdots\; \varphi_g^{(0)}(\mathbf{u}_i) \;\; \boldsymbol{\beta}_{12}^{T(0)}(\mathbf{u}_i) \;\cdots\; \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^{T(0)}(\mathbf{u}_i)\right]^T,$$

di mana nilai awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}_l^{T(0)}(\mathbf{u}_i)$ diperoleh dari model regresi Poisson univariat, sedangkan $\hat{\varphi}_l^{(0)}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{lm}^{T(0)}(\mathbf{u}_i)$ adalah sama dengan nol. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h+1)}(\mathbf{u}_i)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right\|\le\varepsilon$ di mana $\varepsilon=10^{-12}$. Proses ini dilakukan untuk $i=1,2,\ldots,n$.

5.3 Pengujian Hipotesis Serentak Parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ Model GWMGPR

Pada bagian ini dibahas tentang penentuan statistik uji beserta distribusinya untuk pengujian parameter secara serentak model GWMGPR pada (5.1). Pengujian parameter secara serentak digunakan untuk menentukan signifikansi koefisien regresi $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ dalam model secara bersama-sama.

Hipotesis untuk pengujian parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ secara serentak dinyatakan sebagai

$$H_0 : \beta_{l1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{l2}(\mathbf{u}_i) = ... = \beta_{lp}(\mathbf{u}_i) = 0;\ i = 1,2,\ldots,n;\ l = 1,2,\ldots,g$$
$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{lk}(\mathbf{u}_i) \neq 0. \tag{5.19}$$

Untuk menetapkan daerah kritis pengujian hipotesis pada (5.19) diperlukan statistik uji yang diperoleh dengan metode LRT, yaitu dengan menghitung rasio dari nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah H_0, $(L(\varpi_1))$, dibagi dengan nilai maksimum fungsi *likelihood* di bawah populasi $(L(\Omega_2))$.

Nilai maksimum $L(\Omega_2)$ merupakan nilai maksimum fungsi *likelihood* yang dinyatakan pada (5.5). Tahapan selanjutnya adalah menghitung nilai maksimum $L(\varpi_1)$. Langkah pertama untuk memperoleh nilai maksimum $L(\varpi_1)$ dalam menentukan daerah kritis dari pengujian hipotesis pada (5.19) adalah dengan menetapkan ruang parameter di bawah H_0, $\varpi_1 = \{\beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i);$ $l,m = 1,2,\ldots,g;\ l < m\}$. Fungsi *likelihood* di ruang ϖ_1 dinyatakan sebagai berikut

$$L(\varpi_1) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i);\ l,m = 1,2,...,g;\ l < m\right). \tag{5.20}$$

Misalkan $Q_{3\varpi_1} = \ln L(\varpi_1)$ maka fungsi *ln-likelihood* di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} Q_{3\varpi_1} &= \sum_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \middle| \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i);\ l,m = 1,2,...,g;\ l < m\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)}\right) + (y_{il}-1)\ln\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)y_{il}\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)y_{il}\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)}\right) + \ln\left(1+Q_{4\varpi_1}\right)\right], \end{aligned}$$

dengan

$$Q_{4\varpi_1} = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\varpi_1 ilm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}} - z_{\varpi_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\varpi_1 im}\right),$$

$$z_{\varpi_1 il} = \exp\left(\frac{\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)\left(r_{\varpi_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 il}(\mathbf{u}_i)}\right),$$

$$\ln\left(r_{\varpi_1 l}\right)-\frac{\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_{\varpi_1 l}-1\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)}+1=0\,.$$

Model GWMGPR untuk lokasi $-i$ di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\mu_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)=q_{il}\ \exp\left(\beta_{\varpi_1 l0}\left(\mathbf{u}_i\right)\right),$$

dan kovariansi antar variabel respon di bawah H_0 dinyatakan sebagai

$$\gamma_{\varpi_1 ilm}\left(\mathbf{u}_i\right)=\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}\left(\mathbf{u}_i\right).$$

Misalkan vektor penaksir MLE dari parameter di bawah H_0 adalah

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 2}\left(\mathbf{u}_i\right)=\Big[&\beta_{\varpi_1 10}\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \cdots\ \ \beta_{\varpi_1 g0}\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \varphi_{\varpi_1 1}\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \cdots\\ &\varphi_{\varpi_1 g}\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 12}^T\left(\mathbf{u}_i\right)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 (g-1)g}^T\left(\mathbf{u}_i\right)\Big]^T.\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan penaksir parameter pada lokasi ke $-i$, diperlukan informasi dari lokasi ke $-j$ dengan pembobot w_{ij}, sehingga *ln-likelihood* terboboti dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{Q}_{3\varpi_1}=w_{ij}\ln L\left(\varpi_1\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_{3\varpi_1}=\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\sum_{l=1}^{g}\Bigg(&y_{jl}\ln\left(\frac{\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\left(y_{jl}-1\right)\ln\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)\\ &-\ln\left(y_{jl}!\right)-\frac{\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\Bigg)+\ln\left(1+\mathbb{Q}_{4\varpi_1}\right)\Bigg]w_{ij},\end{aligned}$$

dengan

$$\mathbb{Q}_{4\varpi_1}=\sum_{l<m}^{g}\gamma_{\varpi_1 jlm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{jl}}-z_{\varpi_1 jl}\right)\left(e^{-y_{jm}}-z_{\varpi_1 jm}\right),\tag{5.21}$$

$$\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)=q_{jl}\ \exp\left(\beta_{\varpi_1 l0}\left(\mathbf{u}_i\right)\right),\tag{5.22}$$

$$\gamma_{\varpi_1 jlm}\left(\mathbf{u}_i\right)=\mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}\left(\mathbf{u}_i\right),\tag{5.23}$$

di mana

$$z_{\varpi_1 jl}=\exp\left(\frac{\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right),$$

$$\ln\left(r_l\right)-\frac{\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l-1\right)}{1+\varphi_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{\varpi_1 jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}+1=0\cdot$$

Turunan parsial pertama $\mathbb{Q}_{3\varpi_1}$ terhadap masing-masing parameter dalam vektor parameter $\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i)$ adalah

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{jl} - \mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}/\partial \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i)}{1+\mathbb{Q}_{4\varpi_1}} \right) w_{ij}, \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i) y_{jl}}{1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)} + \frac{(y_{jl}-1) y_{jl}}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i) y_{jl}\right)} \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\left(y_{il} - \mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}/\partial \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)}{1+\mathbb{Q}_{4\varpi_1}} \right) w_{ij}, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\mathbb{Q}_{4\omega_1}} \frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i)} \right), \tag{5.26}$$

dengan $\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)$ dan $\mathbb{Q}_{4\varpi_1}$ masing-masing dinyatakan pada (5.22) dan (5.21) di mana

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}}{\partial \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i)} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\varpi_1 jlm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\varpi_1 jm}\right) \frac{\partial z_{\varpi_1 jl}}{\partial \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i)}, \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}}{\partial \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\varpi_1 jlm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\varpi_1 jm}\right) \frac{\partial z_{\varpi_1 jl}}{\partial \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)}, \tag{5.28}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{4\varpi_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial \gamma_{\varpi_1 jlm}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 lm}(\mathbf{u}_i)} \left(e^{-y_{jl}} - z_{\varpi_1 jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\varpi_1 jm}\right) \right)$$
$$= \mathbf{x}_j \left(e^{-y_{jl}} - z_{\varpi_1 jl}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\varpi_1 jm}\right), \tag{5.29}$$

dan

$$\frac{\partial z_{\varpi_1 jl}}{\partial \beta_{\varpi_1 l0}(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{\varpi_1 jl}\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)} \frac{\left(r_{\varpi_1 l}-1\right)}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\, r_{\varpi_1 l}\right)},$$

$$\frac{\partial z_{\varpi_1 jl}}{\partial \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{\varpi_1 jl}\mu^2_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\right)} \frac{\left(r_{\varpi_1 l}-1\right)^2}{\left(1+\varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_{\varpi_1 l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\varpi_1 jl}(\mathbf{u}_i)\, r_{\varpi_1 l}\right)}.$$

Persamaan (5.24) sampai dengan (5.26) merupakan sistem persamaan yang tidak *closed-form* sehingga iterasi numerik Newton Raphson diterapkan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan formula sebagai berikut ini

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h+1)}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i)\right), \tag{5.30}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}^{(h)}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor penaksir parameter lokasi ke$-i$ pada iterasi ke$-h$ dan $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ adalah vektor gradien lokasi ke$-i$ pada iterasi ke$-h$

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}(\mathbf{u}_i)\right)=\left[\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \beta_{\varpi_1 10}(\mathbf{u}_i)} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \beta_{\varpi_1 g0}(\mathbf{u}_i)} \quad \frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \varphi_{\varpi_1 1}(\mathbf{u}_i)} \quad \cdots \right.$$
$$\left. \frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \varphi_{\varpi_1 g}(\mathbf{u}_i)} \quad \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 12}(\mathbf{u}_i)}\right]^T \quad \cdots \quad \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_{3\varpi_1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 (g-1)g}(\mathbf{u}_i)}\right]^T\right]^T,$$

di mana elemen-elemen vektor didefinisikan pada (5.24) sampai dengan (5.26) dan $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ adalah matriks Hessian untk lokasi ke$-i$. Total parameter dalam ruang parameter ϖ_1, dinotasikan dengan $\mathfrak{b}_1$, adalah $(gp+g-p+3)gn/2$ parameter.

Proses iterasi Newton Raphson pada (5.30) dimulai dengan menentukan nilai awal vektor parameter

$$\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 2}^{(0)}(\mathbf{u}_i)=\left[\beta_{\varpi_1 10}^{(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \quad \beta_{\varpi_1 g0}^{(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \varphi_{\varpi_1 1}^{(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \cdots \right.$$
$$\left. \varphi_{\varpi_1 g}^{(0)}(\mathbf{u}_i) \quad \left[\boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 12}^{(0)}(\mathbf{u}_i)\right]^T \quad \cdots \quad \left[\boldsymbol{\beta}_{\varpi_1 (g-1)g}^{(0)}(\mathbf{u}_i)\right]^T\right]^T,$$

dengan $\hat{\beta}_{\varpi_1 l0}^{(0)}(\mathbf{u}_i)$, $\hat{\varphi}_{\varpi_1 l}^{(0)}(\mathbf{u}_i)$, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\varpi_1 lm}^{T(0)}(\mathbf{u}_i)$ diperoleh dari model MGPR modifikasi. Proses iterasi dihentikan ketika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}^{(h+1)}(\mathbf{u}_i)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right\| \le \varepsilon$ di mana $\varepsilon = 10^{-12}$.

Daerah kritis uji LRT dengan tingkat signifikansi $\alpha \in (0,1)$ untuk model GWMGPR dengan hipotesis pada (5.19) didefinisikan sebagai berikut

$$\Lambda_{21}=\frac{maks\ L(\varpi_1)}{maks\ L(\Omega_2)}<\mathsf{k}_\alpha, \tag{5.31}$$

di mana k_α merupakan suatu konstanta yang nilainya tergantung α dengan $0 \le \mathsf{k}_\alpha \le 1$, $L(\Omega_2)$ dan $L(\varpi_1)$ masing-masing dinyatakan pada (5.3) dan (5.20). Persamaan (5.31) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G_{21}^2 &= -\ln\left(\Lambda_{21}^2\right) = -2\ln\left(\Lambda_{21}\right) \\ &= 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_2\right) - \ln L\left(\hat{\varpi}_1\right)\right). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Distribusi dari statistik uji G_{21}^2 pada persamaan (5.32) dituliskan dalam Teorema berikut ini.

Teorema 5.1

Pada pengujian serentak parameter model GWMGPR, Jika Ω_2 adalah himpunan parameter di bawah populasi, ϖ_1 adalah himpunan parameter di bawah H_0 dan suatu hipotesis yang dinyatakan pada (5.19), maka statistik uji untuk pengujian hipotesis pada (5.19) adalah $G_{21}^2 = -2\ln\left(\Lambda_{21}\right) = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_2\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_1\right)\right]$ yang berdistribusi χ_{gpn}^2.

Bukti

Misalkan penaksir MLE pada populasi dari pengujian hipotesis dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2((gp+g+p+3)gn/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}\right]^T$$

di mana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21} = \left[\hat{\beta}_{l1}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\beta}_{l2}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{lp}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad l = 1,2,\ldots,g\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22} = \left[\hat{\beta}_{10}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{g0}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\varphi}_1\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_g\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T\left(\mathbf{u}_i\right)\right]^T,$$

sedangkan penaksir MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dipartisi sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1} = \left[\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}\right]^T,$$

di mana

$$\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1(gpn\times 1)} = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]^T,$$

dan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2((gp+g-p+3)gn/2\times 1)} = \left[\hat{\beta}_{\varpi_1 10}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\varpi_1 g0}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\varphi}_{\varpi_1 1}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \right.$$
$$\left. \hat{\varphi}_{\varpi_1 g}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \hat{\beta}_{\varpi_1 120}\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\varpi_1 (g-1)g0}\left(\mathbf{u}_i\right)\right]^T,$$

maka hipotesis pada (5.19) dapat dituliskan sebagai

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_{21} = \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\theta}_{21} \neq \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}.$$

Statistik uji G_{21}^2 yang dinyatakan pada (5.32) dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} G_{21}^2 &= 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right)\right] \\ &= 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)\right] - 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right) - \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Misalkan $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right) = \ln L\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)$, maka fungsi $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)$ dapat didekati oleh ekspansi Taylor derajat dua di sekitar $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ sebagai berikut

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right) \approx \ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) + \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - 1/2\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right),$$

di mana

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \left.\frac{\partial \ell\left(\boldsymbol{\theta}_2\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_2}\right|_{\boldsymbol{\theta}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2},$$

dan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = -\left.\frac{\partial^2 \ell\left(\boldsymbol{\theta}_2\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}_2 \partial \boldsymbol{\theta}_2^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2}.$$

Karena $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh

$$2\left[\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)\right] \approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right). \tag{5.34}$$

Sementara itu, jika fungsi $\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)$ didekati oleh ekspansi Taylor derajat dua di sekitar $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1\omega_1}$ diperoleh

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right) \approx \ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right) + \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right) - 1/2\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right) + \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right),$$

atau dapat ditulis

$$2\left[\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}\right) - \ell\left(\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)\right] \approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right). \tag{5.35}$$

Berdasarkan persamaan (5.34) dan (5.35), statistik uji pada persamaan (5.33) dapat ditulis sebagai

$$G_{21}^2 \approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right) - \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)^T \mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right). \tag{5.36}$$

Misalkan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)=\begin{bmatrix} I_{11[gpn\times gpn]} & I_{12[gpn\times(gp+g-p+3)gn/2]} \\ I_{21[(gp+g-p+3)gn/2\times gpn]} & I_{22[(gp+g-p+3)gn/2\times(gp+g-p+3)gn/2]} \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)=\begin{bmatrix} I^{11}_{gpn\times gpn} & I^{12}_{gpn\times(gp+g-p+3)gn/2} \\ I^{21}_{(gp+g-p+3)gn/2\times gpn} & I^{22}_{(gp+g-p+3)gn/2\times(gp+g-p+3)gn/2} \end{bmatrix},$$

dan berdasarkan sifat distribusi bersyarat, jika diberikan $\boldsymbol{\theta}_{21}=\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}$, dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}$ maka diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}-I^{21}\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right), \tag{5.37}$$

atau dengan memperhatikan formula dari invers suatu partisi matriks, persamaan (5.37) dapat ditulis

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}+I_{22}^{-1}I_{21}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right). \tag{5.38}$$

Pada pengujian hipotesis di bawah H_0, karena $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)=\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{22}\right)$ dan memperhatikan persamaan (5.38), yaitu

$$\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{22}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}-\boldsymbol{\theta}_{22}+I_{22}^{-1}I_{21}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right),$$

maka

$$\begin{aligned}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)^T\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1}\right)&=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{22}\right)^T I_{22}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_1 2}-\boldsymbol{\theta}_{22}\right)\\ &=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}-\boldsymbol{\theta}_{22}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} I_{12}I_{22}^{-1}I_{21} & I_{12}\\ I_{21} & I_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}-\boldsymbol{\theta}_{22}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Statistik uji G_{21}^2 pada persamaan (5.36) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}G_{21}^2&\approx\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right)^T\left(I_{11}-I_{12}I_{22}^{-1}I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right)\\ &=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right)^T\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right).\end{aligned} \tag{5.39}$$

Memperhatikan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3, maka distribusi dari partisi parameter adalah

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{21}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22}-\boldsymbol{\theta}_{22}\end{bmatrix}\overset{a}{\sim}N\left(\mathbf{0},\mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}_2\right)\equiv\begin{bmatrix} I^{11} & I^{12}\\ I^{21} & I^{22}\end{bmatrix}\right),$$

sehingga diperoleh

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{21}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I^{11}\right),$$

$$\left(I^{11}\right)^{-1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{21}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{0}, I_{gpn}\right),$$

$$G_{21}^{2}=\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right)^{T}\left(I^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{21}-\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_1 1}\right) \overset{a}{\sim} \chi_{gpn}^{2} \quad \blacksquare$$

Daerah kritis uji diperoleh dengan memperhatikan persamaan (5.31) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(\Lambda_{21}<\mathsf{k}_{\alpha};\varpi_1\right)\\ &= P\left(-2\ln\Lambda_{21}>-2\ln\mathsf{k}_{\alpha};\varpi_1\right)\\ &= P\left(G_{21}^{2}>\mathfrak{c}_1;\varpi_1\right),\ \text{dengan } \mathfrak{c}_1=-2\ln\mathsf{k}_{\alpha}\\ &= P\left(G_{21}^{2}>\chi_{\alpha,gpn}^{2}\right). \qquad (5.40)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (5.40), daerah kritis uji serentak untuk pengujian hipotesis pada (5.19) adalah H_0 ditolak ketika $G_{21}^{2}>\chi_{\alpha,gpn}^{2}$.

Dalam model MGPR banyaknya parameter secara otomatis menjadi banyaknya parameter efektif dalam model. Namun demikian, untuk model GWMGPR, dikarenakan adanya kemungkinan kesamaan sebagian parameter suatu lokasi dengan lokasi lain maka tidak semua parameter menjadi parameter efektif dalam model. Sampai saat ini, belum ada metode untuk menghitung kontribusi $\varphi\left(\mathbf{u}_i\right)$ dan $\boldsymbol{\beta}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)$ terhadap jumlah parameter efektif dalam model, sehingga parameter φ dan $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ didefinisikan sebagai parameter global untuk penyederhanaan. Dengan menggunakan metode yang dikembangkan oleh Nakaya (2005) untuk model GWPR, kontribusi $\boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)$ terhadap jumlah parameter efektif dalam model GWMGPR disajikan pada Lampiran 6.

5.4 Pengujian Hipotesis Parsial Parameter $\beta_{lk}\left(\mathbf{u}_i\right)$ Model GWMGPR

Pada bagian ini dibahas statistik uji beserta distribusi statistik uji untuk pengujian parameter secara parsial model MGPR modifikasi. Pengujian parameter secara parsial digunakan untuk menentukan signifikansi koefisien regresi $\beta_{lk}\left(\mathbf{u}_i\right)$ $\left(l,m=1,2,\ldots,g;\ l<m;\ i=1,2,\ldots,n\right)$ dalam model secara individual.

Pengujian hipotesis parsial ini untuk mengetahui signifikansi parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ $(l=1,2,\ldots,g;\ k=1,2,\ldots,p;\ i=1,2,\ldots,n)$ terhadap model secara individual. Formulasi pengujian hipotesis secara parsial, misalnya untuk $l=l^*$ dan $i=j$, dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{l^*k} = 0 \\ &H_1 : \beta_{l^*k} \neq 0 \ . \end{aligned} \tag{5.41}$$

Berkenaan dengan hipotesis (5.41), dimisalkan estimator MLE dari parameter model MGPR modifikasi dibawah populasi dan di bawah H_0 masing-masing dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2((gp+g+p+3)gn/2\times 1)} = \Big[& \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\varphi}_1(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\varphi}_g(\mathbf{u}_i) \\ & \hat{\boldsymbol{\beta}}_{12}^T(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(g-1)g}^T(\mathbf{u}_i); \quad l,m=1,2,\ldots,g; l<m; i=1,2,\ldots,n \Big]^T , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2 2((gp+g+p+3)gn/2-1\times 1)} = \Big[& \hat{\beta}_{\varpi_2 l0}(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\beta}_{\varpi_2 l1}(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\beta}_{\varpi_2 l^*(k-1)}(\mathbf{u}_j) \\ & \hat{\beta}_{\varpi_2 l^*(k+1)}(\mathbf{u}_j) \ \ldots \ \hat{\beta}_{\varpi_2 lp}(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\varphi}_{\varpi_2 1}(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\varphi}_{\varpi_2 l}(\mathbf{u}_i) \\ & \hat{\beta}_{\varpi_2 lm0}(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\beta}_{\varpi_2 lm1}(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\beta}_{\varpi_2 lmp}(\mathbf{u}_i) \Big]^T . \end{aligned} \tag{5.42}$$

Dengan mengikuti tahapan pembuktian Teorema 5.1, estimator di bawah populasi dipartisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2((gp+g+p+3)gn/2\times 1)} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{24} \right]^T ,$$

dengan

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} = \left[\hat{\beta}_{l^*k}(\mathbf{u}_i) \right],$$

dan

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{22} = \Big[& \hat{\beta}_{l0}(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\beta}_{l1}(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\beta}_{l^*(k-1)}(\mathbf{u}_j) \ \ \hat{\beta}_{l^*(k+1)}(\mathbf{u}_j) \ \ldots \ \hat{\beta}_{lp}(\mathbf{u}_i) \\ & \hat{\varphi}_1(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\varphi}_l(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\beta}_{lm0}(\mathbf{u}_i) \ \ \hat{\beta}_{lm1}(\mathbf{u}_i) \ \ldots \ \hat{\beta}_{lmp}(\mathbf{u}_i) \Big]^T , \end{aligned}$$

sedangkan estimator MLE dan parameter yang diketahui pada H_0 dibuat partisi menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2} = \left[\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2 2} \right]^T ,$$

di mana $\boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1} = [0]$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{2\varpi_2 2}$ seperti yang dinyatakan pada (5.42), sehingga diperoleh statistik uji *likelihood ratio* untuk menguji hipotesis (5.41), yaitu

$$\begin{aligned} G_{22}^2 &\approx \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1}\right)^T \left(I_{11} - I_{12} I_{22}^{-1} I_{21}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1}\right) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1}\right)^T \left(I^{11}\right)^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23} - \boldsymbol{\theta}_{2\varpi_2 1}\right), \end{aligned} \tag{5.43}$$

dengan

$$\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \begin{bmatrix} I_{11[1\times 1]} & I_{12[1\times(gp+g+p+3)gn/2-1]} \\ I_{21[(gp+g+p+3)gn/2-1\times 1]} & I_{22[g(gp+g+p+3)gn/2-1\times(gp+g+p+3)gn/2-1]} \end{bmatrix}, \tag{5.44}$$

dan

$$\mathbf{I}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right) = \begin{bmatrix} I_{1\times 1}^{11} & I_{1\times(gp+g+p+3)gn/2-1}^{12} \\ I_{(gp+g+p+3)gn/2-1\times 1}^{21} & I_{(gp+g+p+3)gn/2-1\times(gp+g+p+3)gn/2-1}^{22} \end{bmatrix}. \tag{5.45}$$

Berdasarkan sifat asimtotik MLE pada Subbab 2.3 dan memerhatikan persamaan (5.43) dengan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{23}$ hanya memiliki satu elemen, yaitu $\beta_{l^*k}(\mathbf{u}_i)$, maka statistik uji untuk hipotesis pada (5.41) dapat dituliskan sebagai

$$G_{22}^2 = \frac{\hat{\beta}_{l^*k}^2(\mathbf{u}_i)}{\hat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}(\mathbf{u}_i)\right)} \sim \chi_1^2, \tag{5.46}$$

atau dapat juga menggunakan akar kuadrat persamaan (5.46), sehingga diperoleh statistik uji

$$Z_{22} = \frac{\hat{\beta}_{l^*k}(\mathbf{u}_i)}{\sqrt{\hat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}(\mathbf{u}_i)\right)}} \sim N(0,1),$$

dengan $\hat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_{l^*k}\right)$ diperoleh dari elemen diagonal yang bersesuaian dari matriks $\left[\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right)\right]^{-1}$. Daerah kritis dari pengujian hipotesis (5.41) adalah tolak H_0 ketika $|Z_{22}| > Z_{\alpha/2}$.

BAB 6
PENERAPAN MODEL MGPR MODIFIKASI DAN GWMGPR PADA DATA KEMATIAN BAYI, ANAK, DAN IBU

Pada bab ini model MGPR modifikasi dan GWMGPR diterapkan pada data kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa berdasarkan data tahun 2019 di Pulau Jawa. Analisis data secara deskriptif disajikan pada Subbab 6.1 sebagai analisis awal sebelum penerapan model MGPR modifikasi dan GWMGPR, seperti analisis korelasi dan multikolinieritas. Pada Subbab 6.2 diuraikan aplikasi MGPR modifikasi dengan tiga variabel respon, yaitu kematian bayi, anak, dan ibu sehingga menghasilkan model *trivariate generalized Poisson regression* (TGPR). Selanjutnya, pada Subbab 6.3 dipaparkan aplikasi model lokal *geographically weighted trivariate generalized Poisson regression* (GWTGPR).

6.1 Deskripsi Data Penelitian

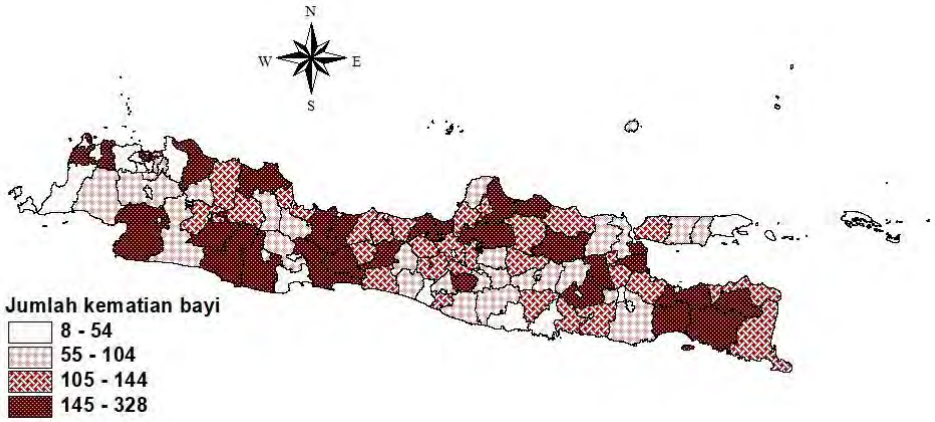
Variabel dalam penelitian ini terdiri atas tiga variabel respon, yaitu jumlah kematian bayi, anak, dan ibu dengan delapan variabel bebas yang diduga berpengaruh terhadap setiap variabel respon. Pada Tabel 6.1 ditunjukkan bahwa terdapat wilayah dengan jumlah kematian anak sama dengan nol, yaitu Kota Serang, Sumenep, Bekasi, dan Malang. Begitu pula halnya dengan kematian ibu, terdapat wilayah tanpa kematian ibu, yaitu Kepulauan Seribu dan Kota Kediri. Hal ini mungkin disebabkan karena kejadian kematian anak dan ibu merupakan kasus yang jarang terjadi atau kejadian kematian anak dan ibu tidak terlaporkan. Selain itu, terdapat lima wilayah nilai dengan persentase yang lebih besar dari 100 untuk variabel persentase keluarga dengan sanitasi layak (X_2), yaitu Tangerang (215,26%), Kota Sukabumi (152,29%), Kota Jakarta Utara (150,10%), Kudus (11,38%), dan Kota Kediri (100,34%) serta terdapat satu wilayah dengan di atas 100 untuk variabel persentase tempat-tempat umum memenuhi syarat kesehatan (X_5), yaitu Lebak (121,60%).

Tabel 6.1 Nilai Minimum, Maksimum, *Mean*, dan Standar Deviasi dari Variabel-variabel Penelitian

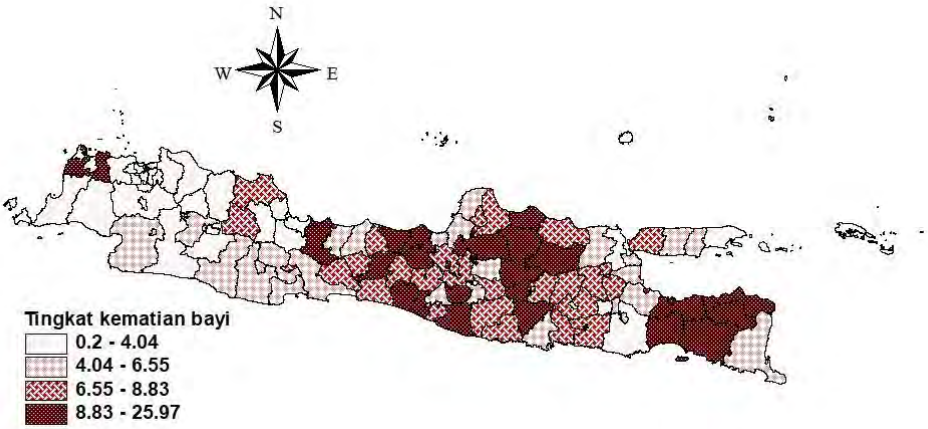
Variabel	Minimum	Maksimum	*Mean*	Standar Deviasi
Jumlah kematian bayi (Y_1)	8	328	106,16	65,51
Jumlah kematian anak (Y_2)	0	64	13,08	11,25
Jumlah kematian ibu (Y_3)	0	72	16,56	12,92
Jumlah kelahiran (*exposure* Y_1)	385	118.195	21.071,37	17.817,51
Jumlah penduduk umur 1–4 tahun (*exposure* Y_2)	1.873	462.548	80.545,86	70.777
Jumlah ibu hamil (*exposure* Y_3)	386	128.293	22.501,53	19.013,16
Persentase sarana air minum layak (X_1)	14	100	71,66	19,85
Persentase keluarga dengan sanitasi layak (X_2)	0,21	215,26	87,85	23,01
Persentase desa STBM (X_3)	0	100	17,24	26,39
Rasio posyandu aktif per 100.000 penduduk (X_4)	12,95	192,23	92,11	37,84
Persentase TTU memenuhi syarat kesehatan (X_5)	0,20	121,60	69,32	19,11
Persentase perempuan 15 tahun ke atas tamat SLTA+ (X_6)	9,60	63,65	30,82	13,91
Persentase perempuan menikah di bawah 17 tahun (X_7)	4,07	45,60	17,32	8,47
Persentase penduduk miskin (X_8)	1,68	20,71	9,15	4,04

Pada Gambar 6.1 dan Gambar 6.2 disajikan persebaran kematian bayi, masing-masing menurut jumlah dan tingkat di kabupaten/kota di Pulau Jawa berdasarkan data tahun 2019. Distribusi data jumlah kematian tersebut dibagi menjadi empat kuantil. Tingkat kematian bayi diperoleh dari jumlah kematian bayi dikontrol dengan jumlah kelahiran dan dikalikan dengan 1000. Formula ini berdasarkan rumus umum menghitung tingkat kematian bayi (Rowland, 2003).

Gambar 6.1 memperlihatkan wilayah dengan jumlah kematian bayi tinggi relatif menyebar dari ujung barat sampai timur Pulau Jawa. Namun, pada Gambar 6.2 densitas kematian bayi relatif mengumpul di bagian tengah dan timur Pulau Jawa. Hal ini menunjukkan bahwa pola densitas kejadian kematian bayi berdasarkan data jumlah atau tingkat (*rate*) pada kabupaten/kota di Pulau Jawa dapat memberikan hasil analisis yang berbeda. Apabila dikaitkan dengan target SDGs bahwa kematian neonatal kurang dari 12 kematian per 1000 kelahiran hidup, maka wilayah pada kuantil keempat terdapat wilayah dengan tingkat kematian bayi relatif tinggi.

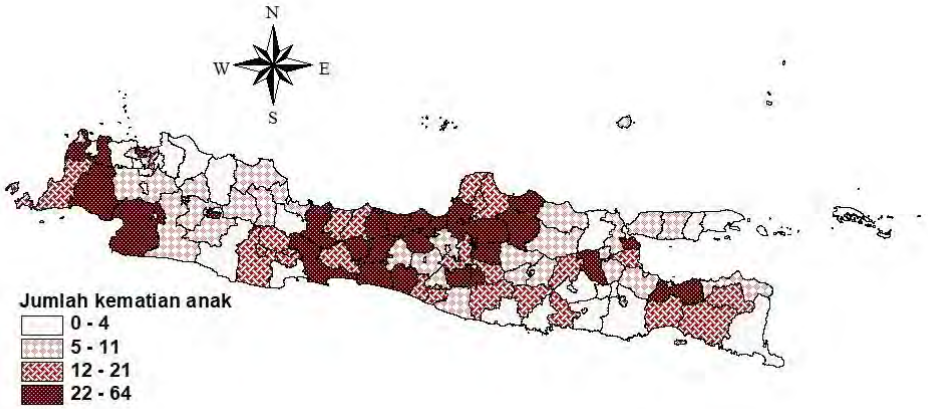


Gambar 6.1 Persebaran Jumlah Kematian Bayi di Pulau Jawa Tahun 2019

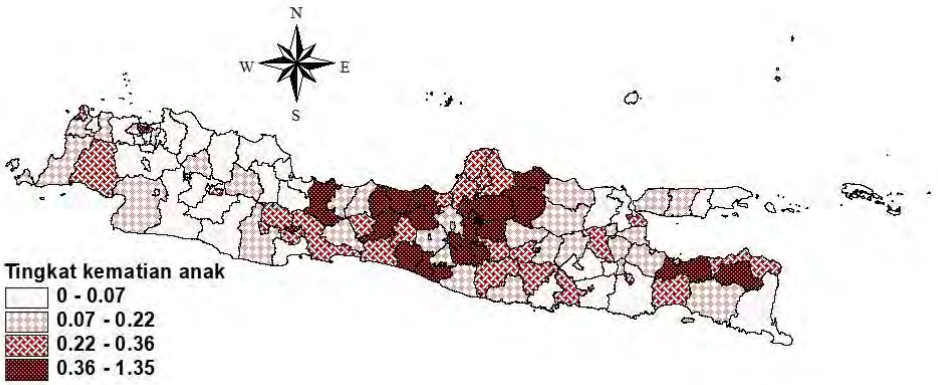


Gambar 6.2 Persebaran Tingkat Kematian Bayi di Pulau Jawa Tahun 2019

Persebaran kematian anak berdasarkan jumlah dan tingkat, masing-masing pada Gambar 6.3 dan Gambar 6.4 juga menunjukkan perilaku yang sama seperti pada Gambar 6.1 dan Gambar 6.2. Persebaran jumlah kematian anak tinggi relatif mengumpul di sisi barat dan tengah Pulau Jawa, sementara berdasarkan tingkat kematian, kejadian kematian tinggi relatif mengumpul di bagian tengah Pulau Jawa. Tingkat kematian anak dihitung dari jumlah kematian anak dikontrol dengan jumlah penduduk umur 1–4 tahun dikalikan dengan 1000. Formula ini merupakan rumus menghitung tingkat kematian anak (Irawan dkk., 2016).



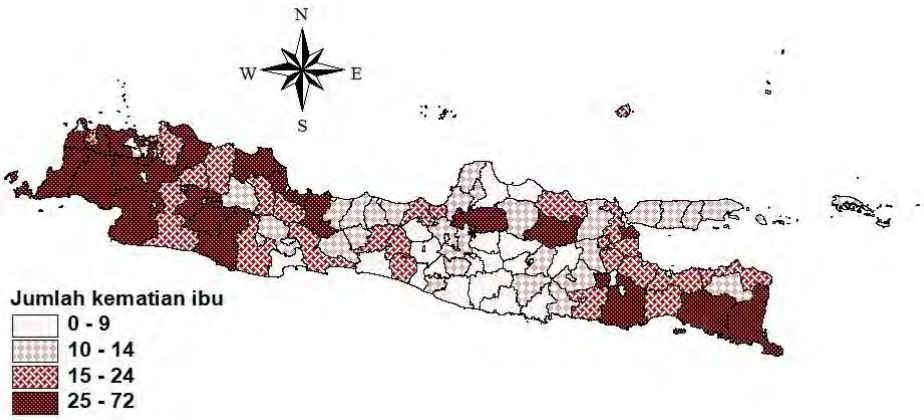
Gambar 6.3 Persebaran Jumlah Kematian Anak di Pulau Jawa Tahun 2019



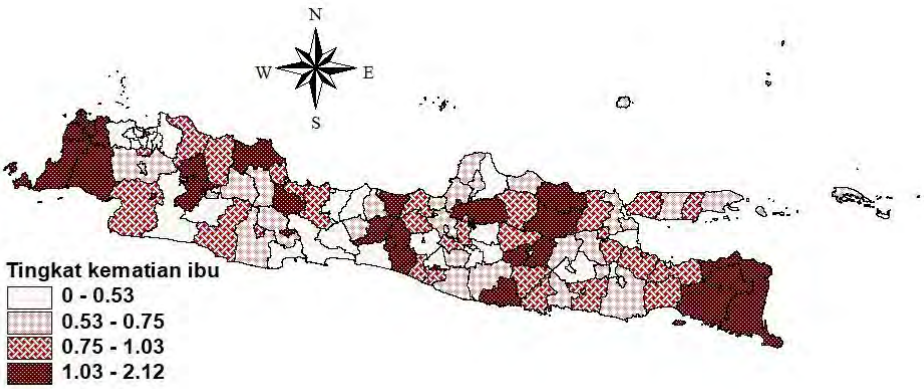
Gambar 6.4 Persebaran Tingkat Kematian Anak di Pulau Jawa Tahun 2019

Gambar 6.5 dan Gambar 6.6 juga memperlihatkan hal yang sama, yaitu bahwa ketika jumlah kematian dikontrol dengan suatu ukuran lain, yang disebut dengan *exposure*, dapat menghasilkan persebaran kematian yang berbeda dibandingkan dengan persebaran kematian berdasarkan data jumlah. Secara umum, *exposure* yang digunakan adalah penduduk yang berisiko terhadap suatu kejadian. *Exposure* untuk kematian ibu dalam penelitian ini adalah adalah jumlah ibu hamil. Pemilihan jumlah ibu hamil sebagai *exposure* untuk jumlah kematian ibu dikarenakan ibu hamil berisiko untuk mengalami kematian saat hamil, saat melahirkan, maupun dalam masa nifas (Rowland, 2003). Setelah dikontrol dengan jumlah ibu hamil, maka wilayah yang semula termasuk pada kuantil kematian

relatif tinggi menjadi turun ke kelas kuantil kematian yang lebih rendah, seperti yang terjadi pada beberapa wilayah di Jawa Barat dan Jawa Tengah.



Gambar 6.5 Persebaran Jumlah Kematian Ibu di Pulau Jawa Tahun 2019



Gambar 6.6 Persebaran Tingkat Kematian Ibu di Pulau Jawa Tahun 2019

Hasil pengujian Breusch-Pagan menunjukkan bahwa terdapat heterogenitas spasial pada kejadian kematian bayi dan anak dengan taraf signifikansi $\alpha = 10\%$ dan heterogenitas spasial pada kejadian kematian ibu dengan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ (Lampiran 9). Hasil ini mendukung adanya dugaan bahwa terdapat variasi spasial antara variabel bebas dalam penelitian ini dengan kejadian kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa.

Nilai korelasi antarvariabel respon, yaitu jumlah kematian bayi, anak, dan ibu disajikan pada Tabel 6.2. Untuk mengetahui adanya korelasi antara jumlah

kematian bayi, anak, dan ibu, digunakan *Bartlett's test of sphericity* dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$

$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$

dengan statistik uji $\chi^2_{hit} = -\left(v - \frac{1}{6}(2g+5)\right)\ln|\mathbf{R}|$ di mana $\mathbf{R}$ adalah matriks korelasi dan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas. Tolak H_0 ketika $\chi^2_{hit} > \chi^2_{\frac{1}{2}g(g-1)}$ (Rencher, 2002).

Tabel 6.2 Nilai Korelasi Antarvariabel Respon dan Variabel Bebas

	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
Y_2	0,611									
	(**)									
Y_3	0,580	0,182								
	(**)	(*)								
X_1	0,185	0,189	-0,047							
	(*)	(*)	(.)							
X_2	-0,125	-0,107	-0,258	0,113						
	(.)	(.)	(**)	(.)						
X_3	-0,147	-0,065	-0,001	-0,077	0,137					
	(.)	(.)	(.)	(.)	(.)					
X_4	0,006	0,048	-0,350	0,092	0,040	-0,145				
	(.)	(.)	(**)	(.)	(.)	(.)				
X_5	-0,208	0,021	-0,319	-0,058	0,067	0,014	0,192			
	(*)	(.)	(**)	(.)	(.)	(.)	(*)			
X_6	-0,425	-0,209	-0,253	-0,090	0,247	0,303	-0,190	0,224		
	(**)	(*)	(**)	(.)	(**)	(**)	(*)	(*)		
X_7	0,419	0,084	0,342	-0,110	-0,347	-0,179	-0,020	-0,234	-0,769	
	(**)	(.)	(**)	(.)	(**)	(.)	(.)	(*)	(**)	
X_8	0,224	0,146	-0,115	0,081	-0,097	-0,262	0,340	-0,072	-0,642	0,445
	(*)	(.)	(.)	(.)	(.)	(**)	(**)	(.)	(**)	(**)

* *p-value* < 5% ** *p-value* < 1%

Nilai statistik uji yang diperoleh adalah 110,76 dengan titik kritis adalah $\chi^2_{3;0,5\%} = 7,81$. Ini menghasilkan keputusan tolak H_0 yang berarti terdapat korelasi jumlah kematian bayi, anak, dan ibu. Arah hubungan setiap kombinasi kejadian kematian adalah positif yang berarti bahwa jika kematian bayi di suatu wilayah

tinggi maka jumlah kematian anak dan ibu di wilayah tersebut juga tinggi dan berlaku sebaliknya.

Pada Tabel 6.2 juga disajikan nilai korelasi antarvariabel bebas untuk memeriksa adanya indikasi multikolinieritas. Berdasarkan tabel tersebut, terlihat bahwa tidak terdapat korelasi yang sangat tinggi antarvariabel bebas yang dapat menyebabkan multikolinieritas. Korelasi terbesar terjadi antara variabel bebas X_6 (persentase perempuan usia 15 tahun ke atas yang tamat SLTA+) dan X_7 (persentase perempuan yang menikah di bawah usia 17 tahun) sebesar -0,769. Namun demikian, pada Tabel 6.3 tampak bahwa nilai VIF untuk masing-masing variabel bebas kurang dari 5 (Gujarati, 2004; Yan dan Su, 2009). Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada kasus multikolinieritas antarvariabel bebas sehingga seluruh variabel bebas dapat dimasukkan ke dalam model.

Tabel 6.3 Nilai VIF untuk Masing-masing Variabel Bebas

Variabel	R^2	VIF
X_1	0,0969	1,1074
X_2	0,1386	1,1608
X_3	0,1189	1,1349
X_4	0,2110	1,2675
X_5	0,1154	1,1304
X_6	0,7371	3,8033
X_7	0,6664	2,9974
X_8	0,4667	1,8752

Berdasarkan Tabel 6.2, variabel sanitasi layak (X_2), desa STBM (X_3), dan posyandu aktif (X_4) tidak signifikan berasosiasi dengan kematian bayi. Sementara itu, hanya sarana air minum (X_1) dan pendidikan perempuan (X_6) yang signifikan berasosiasi dengan kematian anak; sedangkan sarana air minum (X_1), desa STBM (X_3), dan kemiskinan (X_8) tidak berasosiasi secara statistik dengan kematian ibu.

6.2 Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu dengan Model TGPR Modifikasi

Berdasarkan MGPR pada (4.1) maka model TGPR dinyatakan sebagai berikut ini

$$
\begin{aligned}
P(y_1,y_2,y_3) &= \prod_{l=1}^{3}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{(1+\varphi_l y_l)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}(1+\varphi_l y_l)\right]\right] \\
&\quad\times\left[1+\sum_{l<m}^{3}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right], \\
&= \left(\frac{\mu_1}{1+\varphi_1\mu_1}\right)^{y_1}\frac{(1+\varphi_1 y_1)^{y_1-1}}{y_1!}\exp\left[-\frac{\mu_1}{1+\varphi_1\mu_1}(1+\varphi_1 y_1)\right] \\
&\quad\times\left(\frac{\mu_2}{1+\varphi_2\mu_2}\right)^{y_2}\frac{(1+\varphi_2 y_2)^{y_2-1}}{y_2!}\exp\left[-\frac{\mu_2}{1+\varphi_2\mu_2}(1+\varphi_2 y_2)\right] \\
&\quad\times\left(\frac{\mu_3}{1+\varphi_3\mu_3}\right)^{y_3}\frac{(1+\varphi_3 y_3)^{y_3-1}}{y_3!}\exp\left[-\frac{\mu_3}{1+\varphi_3\mu_3}(1+\varphi_3 y_3)\right] \\
&\quad\times[1+Q_2], \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

di mana

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \sum_{l<m}^{g=3}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right) \\
&= \gamma_{12}\left(e^{-y_1}-z_1\right)\left(e^{-y_2}-z_2\right)+\gamma_{13}\left(e^{-y_1}-z_1\right)\left(e^{-y_3}-z_3\right) \qquad (5.48) \\
&\quad+\gamma_{23}\left(e^{-y_2}-z_2\right)\left(e^{-y_3}-z_3\right),
\end{aligned}
$$

$$z_l = \exp\left(\frac{\mu_l(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_l}\right),\ l=1,2,3$$

dan

$$\ln(r_l)-\frac{\varphi_l\mu_l(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_l}+1=0,\ l=1,2,3.$$

Fungsi *likelihood* berkenaan dengan persamaan (5.47) adalah

$$L(\Omega_1)=L(\mu_l,\varphi_l,\gamma_{lm};l,m=1,2,3;l<m)=\prod_{i=1}^{n}P(y_1,y_2,y_3). \qquad (5.49)$$

Misalkan fungsi *ln-likelihood* dari (5.49) dinyatakan dengan Q_1 maka

$$
\begin{aligned}
Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& y_{i1} \ln\left(\frac{\mu_{i1}}{1+\varphi_1\mu_{i1}}\right) + \left(y_{i1}-1\right)\ln\left(1+\varphi_1 y_{i1}\right) - \ln\left(y_{i1}!\right) - \frac{\mu_{i1}\left(1+\varphi_1 y_{i1}\right)}{1+\varphi_1\mu_{i1}} \\
& + y_{i2} \ln\left(\frac{\mu_{i2}}{1+\varphi_2\mu_{i2}}\right) + \left(y_{i2}-1\right)\ln\left(1+\varphi_2 y_{i2}\right) - \ln\left(y_{i2}!\right) - \frac{\mu_{i2}\left(1+\varphi_2 y_{i2}\right)}{1+\varphi_2\mu_{i2}} \\
& + y_{i3} \ln\left(\frac{\mu_{i3}}{1+\varphi_3\mu_{i3}}\right) + \left(y_{i3}-1\right)\ln\left(1+\varphi_2 y_{i3}\right) - \ln\left(y_{i3}!\right) - \frac{\mu_{i3}\left(1+\varphi_3 y_{i3}\right)}{1+\varphi_3\mu_{i3}} \\
& + \ln\left(1+Q_2\right)\Bigg], \qquad (5.50)
\end{aligned}
$$

di mana

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \sum_{l<m}^{g=3} \gamma_{ilm}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right) \\
&= \gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \\
&\quad + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right), \qquad (5.51)
\end{aligned}
$$

$$
z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right),\ l = 1,2,3;\ i = 1,2,\ldots,n
$$

dan

$$
\ln\left(r_l\right) - \frac{\varphi_l\mu_{il}\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}} + 1 = 0,\ l = 1,2,3;\ \ i = 1,2,\ldots,n
$$

dengan

$$
\mu_{i1} = q_{i1}\ e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} = q_{i1}\exp\left(\beta_{10} + \beta_{11}x_{i1} + \beta_{12}x_{i2} + \ldots + \beta_{1p}x_{ip}\right),
$$

$$
\mu_{i2} = q_{i2}\ e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} = q_{i2}\exp\left(\beta_{20} + \beta_{21}x_{i1} + \beta_{22}x_{i2} + \ldots + \beta_{2p}x_{ip}\right),
$$

$$
\mu_{i3} = q_{i3}\ e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_3} = q_{i3}\exp\left(\beta_{30} + \beta_{31}x_{i1} + \beta_{32}x_{i2} + \ldots + \beta_{3p}x_{ip}\right),
$$

$$
\gamma_{i12} = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{12} = \beta_{120} + \beta_{121}x_{i1} + \beta_{122}x_{i2} + \ldots + \beta_{12p}x_{ip},
$$

$$
\gamma_{i13} = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{13} = \beta_{130} + \beta_{131}x_{i1} + \beta_{132}x_{i2} + \ldots + \beta_{13p}x_{ip},
$$

$$
\gamma_{i23} = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{23} = \beta_{230} + \beta_{231}x_{i1} + \beta_{232}x_{i2} + \ldots + \beta_{23p}x_{ip}.
$$

Misalkan vektor parameter bersesuaian dengan persamaan Q_1 pada (5.50) dinyatakan sebagai $\boldsymbol{\theta}_1 = \left[\boldsymbol{\beta}_1^T\ \ \boldsymbol{\beta}_2^T\ \ \boldsymbol{\beta}_3^T\ \ \varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \varphi_3\ \ \boldsymbol{\beta}_{12}^T\ \ \boldsymbol{\beta}_{13}^T\ \ \boldsymbol{\beta}_{23}^T\right]^T$, maka

turunan parsial pertama Q_1 terhadap masing-masing parameter disajikan berikut ini. Turunan parsial pertama Q_1 terhadap $\boldsymbol{\beta}_l,\ l=1,2,3$ adalah

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_{i1}-\mu_{i1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_1\ \mu_{i1}\right)^2}-\frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}}{1+Q_2}\right], \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_{i2}-\mu_{i2}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_2\ \mu_{i2}\right)^2}-\frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}}{1+Q_2}\right], \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_{i3}-\mu_{i3}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_3\ \mu_{i3}\right)^2}-\frac{\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right]\frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3}}{1+Q_2}\right], \tag{5.54}$$

dengan Q_2 dinyatakan pada (5.51) di mana

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l}=\frac{z_{il}\ \mathbf{x}_i\ \mu_{il}\left(r_l-1\right)}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\ \mu_{il}-\varphi_l\ \mu_{il}\ r_l\right)};\ l=1,2,3;\ i=1,2,\ldots,n.$$

Turunan parsial pertama Q_1 terhadap $\varphi_l,\ l=1,2,3$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\mu_{i1}\,y_{i1}}{1+\varphi_1\,\mu_{i1}}+\frac{\left(y_{i1}-1\right)y_{i1}}{\left(1+\varphi_1\,y_{i1}\right)}-\frac{\mu_{i1}\left(y_{i1}-\mu_{i1}\right)}{\left(1+\varphi_1\,\mu_{i1}\right)^2}+\frac{\partial Q_2/\partial\varphi_1}{1+Q_2}\right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\mu_{i2}\,y_{i2}}{1+\varphi_2\,\mu_{i2}}+\frac{\left(y_{i2}-1\right)y_{i2}}{\left(1+\varphi_2\,y_{i2}\right)}-\frac{\mu_{i2}\left(y_{i2}-\mu_{i2}\right)}{\left(1+\varphi_2\,\mu_{i2}\right)^2}+\frac{\partial Q_2/\partial\varphi_2}{1+Q_2}\right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_3}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\mu_{i3}\,y_{i3}}{1+\varphi_3\,\mu_{i3}}+\frac{\left(y_{i3}-1\right)y_{i3}}{\left(1+\varphi_3\,y_{i3}\right)}-\frac{\mu_{i3}\left(y_{i3}-\mu_{i3}\right)}{\left(1+\varphi_3\,\mu_{i3}\right)^2}+\frac{\partial Q_2/\partial\varphi_3}{1+Q_2}\right],$$

di mana

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_1}=-\left(\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right)\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1},$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_2}=-\left(\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right)\frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2},$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_3}=-\left(\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right)\frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3},$$

dengan

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l} = \frac{z_{il}\,\mu_{il}^2\left(r_l - 1\right)^2}{\left(1+\varphi_l\,\mu_{il}\right)\left(1+\varphi_l\,\mu_{il} - \varphi_l\,\mu_{il}\,r_l\right)};\ l = 1,2,3;\ i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Turunan parsial pertama Q_1 terhadap $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ di mana $l,m = 1,2,3;\ l < m$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbf{x}_i\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{1+Q_2}\right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbf{x}_i\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2}\right],$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{23}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbf{x}_i\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2}\right],$$

dengan Q_2 dinyatakan pada (5.51).

Persamaan turunan parsial pertama terhadap masing-masing parameter di atas diselesaikan menggunakan algoritma Newton Raphson yang dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right), \tag{5.55}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right) = \left[\left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right]^T \ \cdots\ \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T}\right]^T \ \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_1}\ \cdots\ \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_3}\ \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]^T \ \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]^T \ \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]^T\right]_{\boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}}.$$

Sementara itu, turunan kedua Q_1 terhadap setiap parameter disajikan pada Lampiran 2 dan elemen matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(h)}\right)$ disajikan pada Lampiran 4. Persamaan turunan parsial pertama dan kedua dari Q_1 terhadap setiap parameter telah divalidasi menggunakan paket *maxLik* pada program R dan disajikan pada Lampiran 7–8.

Pemodelan kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa dimulai dengan menghitung penaksir parameter model TGPR awal dan modifikasi. Hasil penaksir parameter, *standard error*, dan signifikansi parameter untuk model TGPR awal dan TGPR modifikasi, masing-masing disajikan pada Tabel 6.4 dan 6.5. Untuk evaluasi

kebaikan model dihitung nilai AICc dan *relative likelihood* dari model. AICc dihitung dengan formula

$$AIC_c = -2\ln\left(L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-K-1},$$

di mana K adalah jumlah parameter yang diestimasi dalam model dan n adalah ukuran sampel. Misalkan nilai AICc model 1 dan 2 memenuhi $AICc\left(M_1\right) \le AICc\left(M_2\right)$, maka *relative likelihood* dihitung sebagai $\exp\left(-1/2\left(AICc\left(M_1\right) - AICc\left(M_2\right)\right)\right)$ (Burnham dan Anderson, 2002). Berdasarkan nilai AICc, model TGPR modifikasi sama baiknya dengan model TGPR awal. Hal ini juga didukung dari nilai *relative likelihood* model TGPR modifikasi terhadap model TGPR awal yang hasilnya mendekati 1 $\left(\approx 0,9983\right)$ yang artinya peluang model TGPR modifikasi sebagai model terbaik adalah 0,9983. Selain itu, *standard error* parameter model TGPR modifikasi relatif lebih kecil dari pada *standard error* parameter model TGPR awal.

Pengujian parameter secara serentak pada model TGPR dilakukan dengan metode LRT dengan hipotesis sebagai berikut ini

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = \ldots = \beta_{lp} = 0;\ l = 1,2,3; \\ &H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{lk} \ne 0;\ l = 1,2,3;\ k = 1,2,\ldots,8 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Nilai statistik uji yang diperoleh adalah $G^2 = 86,838$ yang lebih besar dari $\chi^2_{0,05;24} = 36,415$, sehingga tolak H_0. Ini berarti bahwa paling sedikit ada satu variabel bebas yang signifikan memengaruhi variabel respon. Selanjutnya, untuk mengetahui variabel bebas mana yang signifikan memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu, dilakukan pengujian parameter β_{lk} $\left(l = 1,2,3;\ k = 1,2,\ldots,8\right)$ secara parsial dengan hipotesis sebagai berikut ini

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{lk} = 0 \\ &H_1 : \beta_{lk} \ne 0\ . \end{aligned} \tag{5.57}$$

Model TGPR untuk kematian bayi $\left(Y_1\right)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{E}\left(Y_{i1}\right) = \exp\big(&5,0315 + 0,0066X_{i1} + 0,0041X_{i2} - 0,0001X_{i3} - 0,0032X_{i4} \\ &-0,0056X_{i5} - 0,0207X_{i6} + 0,0060X_{i7} - 0,0016X_{i8}\big), \end{aligned} \tag{5.58}$$

di mana terdapat dua variabel bebas yang memiliki pengaruh signifikan terhadap kematian bayi, yaitu sarana air minum layak (X_1) dan pendidikan perempuan (X_6). Setiap kenaikan 1% sarana air minum layak maka jumlah kematian bayi akan naik sebesar 0,4%, sementara itu kenaikan 1% wanita yang berpendidikan SLTA ke atas akan menurunkan jumlah kematian bayi sebesar 0,6%. Koefisien sarana air minum layak (X_1) adalah positif. Tampak bahwa dalam model ini terjadi *reversal sign* untuk variabel X_1, namun hal ini sejalan dengan korelasi positif antara persentase sarana air minum layak dengan kematian bayi dan anak berdasarkan korelasi Pearson pada Tabel 6.2.

Tabel 6.4 Penaksir Parameter Model TGPR Awal untuk Kematian Bayi, Kematian Anak dan Kematian Ibu

		Kematian Bayi (Y_1)		Kematian Anak (Y_2)		Kematian Ibu (Y_3)	
		Koefisien	SE	Koefisien	SE	Koefisien	SE
	Konstanta	5,0315 **	0,9084	3,9393 **	1,1553	4,6060 **	0,6933
X_1	Persentase sarana air minum layak	0,0066 *	0,0032	0,0076 .	0,0045	0,0026 .	0,0030
X_2	Persentase keluarga dengan sanitasi layak	0,0041 .	0,0058	-0,0102 .	0,0056	-0,0036 .	0,0027
X_3	Persentase desa STBM	-0,0001 .	0,0024	0,0018 .	0,0032	0,0002 .	0,0023
X_4	Rasio posyandu aktif	-0,0032 .	0,0021	-0,0021 .	0,0028	-0,0068 **	0,0016
X_5	Persentase TTU layak	-0,0056 .	0,0041	0,0019 .	0,0049	-0,0060 *	0,0030
X_6	Persentase perempuan tamat SLTA+	-0,0207 *	0,0096	-0,0222 .	0,0114	-0,0181 *	0,0077
X_7	Persentase perempuan menikah dini	0,0060 .	0,0144	-0,0260 .	0,0180	0,0177 .	0,0119
X_8	Persentase penduduk miskin	-0,0016 .	0,0227	0,0126 .	0,0293	-0,0542 **	0,0190
	φ_1	0,0569 **	0,0048				
	φ_2	0,1785 **	0,0201				
	φ_3	0,0830 **	0,0109				
	γ_{12}	1,0000 **	6,9E-06				
	γ_{13}	1,0000 **	3,8E-06				
	γ_{23}	1,0001 **	1,5E-03				
	ln-likelihood	-1.490,745					
	AICc	3.007,890					

* *p-value* < 5% ** *p-value* < 1%

Model TGPR untuk kematian anak (Y_2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\hat{E}(Y_{i2}) = \exp(3,9393 + 0,0076X_{i1} - 0,0102X_{i2} + 0,0018X_{i3} - 0,0021X_{i4} + 0,0019X_{i5} - 0,0222X_{i6} - 0,0260X_{i7} + 0,0126X_{i8}). \quad (5.59)$$

Variabel sarana air minum layak (X_1), sanitasi layak (X_2), dan pendidikan perempuan (X_6) signifikan memengaruhi kematian anak pada taraf signifikansi 10%. Kenaikan 1% keluarga dengan sanitasi layak dan perempuan yang tamat SLTA ke atas maka jumlah kematian anak akan turun masing-masing 1% dan 2%.

Model TGPR untuk kematian ibu (Y_3) adalah

$$\hat{E}(Y_{i3}) = \exp(4,6060 + 0,0026X_{i1} - 0,0036X_{i2} + 0,0002X_{i3} - 0,0068X_{i4} - 0,0060X_{i5} - 0,0181X_{i6} + 0,0177X_{i7} - 0,0542X_{i8}). \quad (5.60)$$

Berdasarkan model (5.60), terdapat empat variabel yang signifikan memengaruhi kematian ibu, yaitu rasio posyandu aktif (X_4), tempat-tempat umum memenuhi syarat kesehatan (X_5), pendidikan perempuan (X_6), dan tingkat kemiskinan (X_8). Setiap kenaikan 1% rasio posyandu aktif, perempuan yang tamat SLTA ke atas, tempat-tempat umum yang memenuhi syarat kesehatan, dan tingkat kemiskinan akan menurunkan jumlah kematian ibu, masing-masing dalam rentang 1% sampai dengan 5%. Tampak bahwa dalam model ini terjadi *reversal sign* untuk variabel X_8, namun hal ini sejalan dengan korelasi negatif antara persentase penduduk miskin dengan kematian ibu berdasarkan korelasi Pearson pada Tabel 6.2.

Tabel 6.4 memperlihatkan bahwa data kematian bayi, kematian anak, dan kematian ibu mengalami overdispersi yang ditunjukkan dengan nilai parameter dispersi $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ positif. Hasil ini sejalan dengan kondisi data yang mengalami overdispersi, yaitu variansi data lebih besar dari pada *mean*. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan model regresi berdasarkan distribusi *generalized* Poisson sudah tepat. Sementara itu, semua koefisien untuk kovariansi antara jumlah kematian bayi, anak, dan ibu $(\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$ bernilai positif yang berarti terdapat hubungan positif antara kematian bayi, kematian anak, dan kematian ibu. Hal ini sejalan dengan nilai korelasi Pearson yang disajikan pada Tabel 6.2.

Tabel 6.6. menyajikan penaksir parameter dan *standard error* untuk model TGPR modifikasi. Persamaan model TGPR modifikasi untuk model kematian bayi (Y_1), anak (Y_2), dan ibu (Y_3) masing-masing adalah sebagai berikut ini

$$\hat{E}(Y_{i1}) = \exp(5,0315 + 0,0066X_{i1} + 0,0041X_{i2} - 0,0001X_{i3} - 0,0032X_{i4} \\ -0,0056X_{i5} - 0,0207X_{i6} - 0,0060X_{i7} - 0,0016X_{i8}), \quad (5.61)$$

$$\hat{E}(Y_{i2}) = \exp(4,3545 + 0.0092X_{i1} - 0,0115X_{i2} + 0,0026X_{i3} - 0,0043X_{i4} \\ +0,0016X_{i5} - 0,0284X_{i6} - 0,0330X_{i7} + 0,0222X_{i8}), \quad (5.62)$$

$$\hat{E}(Y_{i3}) = \exp(4,5811 + 0,0030X_{i1} - 0,0036X_{i2} + 0,0004X_{i3} - 0,0075X_{i4} \\ -0,0058X_{i5} - 0,0175X_{i6} + 0,0182X_{i7} - 0,0509X_{i8}), \quad (5.63)$$

dengan persamaan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas adalah

$$\hat{\gamma}_{i23} = 256,3531 - 6,3958X_{i6}. \quad (5.64)$$

Pada model TGPR modifikasi dengan 8 variabel bebas ini terdapat 57 parameter yang harus diestimasi jika setiap kovariansi juga sebagai fungsi dari 8 variabel bebas. Mengingat jumlah parameter terlalu banyak relatif terhadap jumlah observasi maka hanya kovariansi antara kematian anak dan ibu yang didefinisikan sebagai fungsi variabel bebas. Keputusan ini diambil berdasarkan nilai kovariansi antara kematian anak dan ibu (γ_{23}) lebih besar dibandingkan dua kovariansi lainnya. Kemudian, variabel bebas yang dipilih untuk menjelaskan γ_{23} adalah variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian anak dan ibu, yaitu variabel pendidikan wanita (X_6).

Pengujian parameter secara serentak untuk model TGPR modifikasi dilakukan berdasarkan hipotesis sebagai berikut

$$H_0 : \beta_{l1} = \beta_{l2} = ... = \beta_{l8} = \beta_{lm1} = \beta_{lm2} = ... = \beta_{lm8} = 0;\ l, m = 1,2,3;\ l < m; \\ H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_{lk} \neq 0 \text{ atau } \beta_{lmk} \neq 0;\ k = 1,2,\ldots,8. \quad (5.65)$$

Nilai statistik uji yang diperoleh adalah $G_{11}^2 = 98,88$, lebih besar dari $\chi^2_{0,05;25} = 37,65$ sehingga H_0 ditolak. Ini berarti bahwa paling sedikit ada satu

variabel bebas yang memengaruhi kematian bayi, anak, dan ibu serta kovariansi kematian anak dan ibu.

Tabel 6.5 Penaksir Parameter Model TGPR Modifikasi untuk Kematian Bayi, Kematian Anak, dan Kematian Ibu

		Kematian Bayi (Y_1)		Kematian Anak (Y_2)		Kematian Ibu (Y_3)	
		Koefisien	SE	Koefisien	SE	Koefisien	SE
	Konstanta	5,0315 **	0,9084	4,3545 **	1,0078	4,5811 **	0,6501
X_1	Persentase sarana air minum layak	0,0066 *	0,0032	0,0092 *	0,0039	0,0030 .	0,0028
X_2	Persentase keluarga dengan sanitasi layak	0,0041 .	0,0058	-0,0115 *	0,0049	-0,0036 .	0,0026
X_3	Persentase desa STBM	-0,0001 .	0,0024	0,0026 .	0,0028	0,0004 .	0,0021
X_4	Rasio posyandu aktif	-0,0032 .	0,0021	-0,0043 .	0,0025	-0,0075 **	0,0015
X_5	Persentase TTU layak	-0,0056 .	0,0041	0,0016 .	0,0044	-0,0058 *	0,0029
X_6	Persentase perempuan tamat SLTA+	-0,0207 *	0,0096	-0,0284 **	0,0100	-0,0175 *	0,0072
X_7	Persentase perempuan menikah dini	0,0060 .	0,0144	-0,0330 *	0,0157	0,0182 .	0,0113
X_8	Persentase penduduk miskin	-0,0016 .	0,0227	0,0222 .	0,0260	-0,0509 **	0,0172
		Kematian Bayi dan Anak (γ_{12})		Kematian Bayi dan Ibu (γ_{13})		Kematian Anak dan Ibu $(\boldsymbol{\beta}_{23})$	
		Koefisien	SE	Koefisien	SE	Koefisien	SE
		0,9996 **	2,6E-06	1,0000 **	3,9E-06		
	Konstanta					256,353 .	.
X_6	Persentase perempuan tamat SLTA+					-6,396 **	0,0606
	φ_1	0,0569 **	0,0048				
	φ_2	0,1478 **	0,0017				
	φ_3	0,0750 **	0,0088				
	ln-likelihood	-1.489,78					
	AICc	3.007,893					

* *p-value* < 5% ** *p-value* < 1%

Berdasarkan Tabel 6.5 diperoleh bahwa kematian bayi (Y_1) secara signifikan dipengaruhi oleh persentase sarana air minum layak (X_1), dan persentase perempuan tamat SLTA ke atas (X_6). Arah hubungan variabel sarana

air minum tidak sesuai secara teoretis namun sesuai dengan arah korelasi Pearson pada Tabel 6.2. Sementara itu, setiap kenaikan 1% perempuan yang tamat SLTA ke atas (X_6) maka jumlah kematian bayi cenderung turun.

Variabel yang signifikan memengaruhi kematian anak (Y_2) adalah persentase sarana air minum layak (X_1), persentase keluarga dengan sanitasi layak (X_2), rasio posyandu aktif (X_4), persentase perempuan tamat SLTA ke atas (X_6), dan persentase perempuan menikah dini (X_7). Arah hubungan variabel persentase sarana air minum layak (X_1) dengan kematian anak tidak sesuai teoretis namun sesuai dengan arah korelasi Pearson pada Tabel 6.2. Sementara itu, arah hubungan persentase perempuan menikah dini (X_7) dengan kematian anak tidak sesuai teoretis dan korelasi Perason pada Tabel 6.2. Dengan demikian, pada model TGPR modifikasi, parameter ini mengalami *reversal sign*.

Kematian ibu (Y_3) secara signifikan dipengaruhi oleh rasio posyandu aktif (X_4), persentase TTU yang memenuhi syarat kesehatan (X_5), persentase perempuan tamat SLTA ke atas (X_6), dan persentase penduduk miskin (X_8). Selain variabel persentase penduduk miskin (X_8), arah hubungan setiap variabel dengan kematian ibu telah sesuai secara teoretis dan korelasi Pearson pada Tabel 6.2. Setiap kenaikan 1% rasio posyandu aktif, TTU layak, dan perempuan yang tamat SLTA ke atas akan menurunkan jumlah kematian ibu. Sementara itu, arah hubungan variabel persentase penduduk miskin (X_8) dengan kematian ibu sesuai dengan korelasi Pearson pada Tabel 6.2.

Kovariansi antara kematian bayi dan anak (γ_{12}) dan antara kematian bayi dan ibu (γ_{13}) bernilai postif dan signifikan. Sementara itu, persentase perempuan yang tamat SLTA ke atas signifikan memengaruhi kovariansi kematian anak dan ibu (γ_{23}) dengan arah negatif. Ini berarti ketika persentase perempuan yang tamat SLTA naik maka korelasi antara kematian anak dan ibu akan turun.

Nilai parameter dispersi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ pada model TGPR modifikasi adalah positif dan signifikan dengan $p-value < 0,001$. Ini menunjukkan bahwa data kematian bayi, anak, dan ibu mengalami overdispersi sehingga pemodelan berdasarkan distribusi *generalized* Poisson sudah tepat digunakan.

6.3 Pemodelan Kematian Bayi, Anak, dan Ibu dengan Model GWTGPR

Fungsi *likelihood* lokasi ke$-i$ untuk GWTGPR bersesuaian dengan (5.3) adalah

$$\begin{aligned} L(\Omega_2) &= L\left(\mu_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l(\mathbf{u}_i), \gamma_{lm}(\mathbf{u}_i); i = 1,2,\ldots,n;\ l,m = 1,2,3;\ l < m\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{l=1}^{3}\left(\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right)^{y_{il}} \frac{\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il}\right)^{y_{il}-1}}{y_{il}!}\right.\right. \\ &\qquad \left.\exp\left(-\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\left(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il}\right)\right)\right) \\ &\qquad \left.\times\left(1+\sum_{l<m}^{3}\gamma_{ilm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}}-z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right)\right)\right], \end{aligned} \tag{5.66}$$

dengan

$$\mu_{il}(\mathbf{u}_i) = q_{il}\ \exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)\right),$$

$$\gamma_{ilm}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_{lm}(\mathbf{u}_i),$$

$$z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l-1)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right),$$

dan

$$\ln(r_l) - \frac{\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l-1)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} + 1 = 0.$$

Jika Q_3 merupakan fungsi *ln-likelihood* dari persamaan (5.66) maka Q_3 dituliskan sebagai

$$Q_3 = \ln\left(L\left(\boldsymbol{\mu}_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right);\ i = 1,2,\ldots,n;\ l,m = 1,2,3;\ l < m\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{3}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{il}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. -\ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{il}\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \ln\left(1+Q_4\right)\right], \tag{5.67}$$

dengan

$$Q_4 = \sum_{l<m}^{3}\gamma_{ilm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right).$$

Fungsi *ln-likelihood* terboboti dari (5.67) untuk lokasi ke $-i$ dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbb{Q}_3 = \ln\left(L\left(\boldsymbol{\mu}_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right); l,m = 1,2,3; l < m\right)\right)w_{ij}$$

$$\mathbb{Q}_3 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{3}\left(y_{jl}\ln\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{jl}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. -\ln\left(y_{jl}!\right) - \frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \ln\left(1+\mathbb{Q}_4\right)\right]w_{ij},$$

atau secara lengkap dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{Q}_3 = \sum_{j=1}^{n}\left[y_{j1}\ln\left(\frac{\mu_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_1\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{j1}-1\right)\ln\left(1+\varphi_1\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j1}\right) - \ln\left(y_{j1}!\right)\right.$$

$$- \frac{\mu_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_1\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j1}\right)}{1+\varphi_1\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$+ y_{j2}\ln\left(\frac{\mu_{j2}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_2\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j2}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{j2}-1\right)\ln\left(1+\varphi_2\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j2}\right) - \ln\left(y_{j2}!\right)$$

$$- \frac{\mu_{j2}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_2\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j2}\right)}{1+\varphi_2\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j2}\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$+ y_{j3}\ln\left(\frac{\mu_{j3}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_3\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j3}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{j3}-1\right)\ln\left(1+\varphi_3\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j3}\right) - \ln\left(y_{j3}!\right)$$

$$\left. - \frac{\mu_{j3}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_3\left(\mathbf{u}_i\right)y_{j3}\right)}{1+\varphi_3\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{j3}\left(\mathbf{u}_i\right)} + \ln\left(1+\mathbb{Q}_4\right)\right]w_{ij}, \tag{5.68}$$

dengan

$$\mathbb{Q}_4 = \sum_{l<m}^{3} \gamma_{jlm}\left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right)$$
$$= \gamma_{j12}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right)\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right)\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)$$
$$+ \gamma_{j23}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right), \tag{5.69}$$

$$z_{jl} = \exp\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l - 1\right)}{1 + \varphi_l \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right),\ l = 1,2,3;\ i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$\ln\left(r_l\right) - \frac{\varphi_l \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l - 1\right)}{1 + \varphi_l \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)} + 1 = 0,\ l = 1,2,3;\ i, j = 1,2,\ldots,n$$

dengan

$$\mu_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{j1}\ \exp\left(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$$
$$= q_{j1} \exp\left(\beta_{10}\left(\mathbf{u}_i\right) + \beta_{11}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j1} + \beta_{12}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j2} + \ldots + \beta_{1p}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{jp}\right),$$

$$\mu_{j2}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{j2}\ \exp\left(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_2\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$$
$$= q_{j2} \exp\left(\beta_{20}\left(\mathbf{u}_i\right) + \beta_{21}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j1} + \beta_{22}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j2} + \ldots + \beta_{2p}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{jp}\right),$$

$$\mu_{j3}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{j3}\ \exp\left(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_3\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$$
$$= q_{j3} \exp\left(\beta_{30}\left(\mathbf{u}_i\right) + \beta_{31}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j1} + \beta_{32}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{j2} + \ldots + \beta_{3p}\left(\mathbf{u}_i\right) x_{jp}\right),$$

$$\gamma_{j12} = \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_{12}$$
$$= \beta_{120} + \beta_{121} x_{j1} + \beta_{122} x_{j2} + \ldots + \beta_{12p} x_{jp},$$

$$\gamma_{j13} = \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_{13}$$
$$= \beta_{130} + \beta_{131} x_{j1} + \beta_{132} x_{j2} + \ldots + \beta_{13p} x_{jp},$$

$$\gamma_{j23} = \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_{23}$$
$$= \beta_{230} + \beta_{231} x_{j1} + \beta_{232} x_{j2} + \ldots + \beta_{23p} x_{jp}.$$

Misalkan vektor parameter bersesuaian dengan persamaan $\mathbb{Q}_3$ pada (5.68) dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{\theta}_2\left(\mathbf{u}_i\right) = \left[\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \boldsymbol{\beta}_2^T\left(\mathbf{u}_i\right) \quad \boldsymbol{\beta}_3^T\left(\mathbf{u}_i\right)\right]^T,$$

maka turunan parsial pertama $\mathbb{Q}_3$ terhadap masing-masing parameter adalah

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\left(y_{j1} - \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_1(\mathbf{u}_i)\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)^2} - \frac{\left[\gamma_{j12}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)} \right] w_{ij},$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\left(y_{j2} - \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_2(\mathbf{u}_i)\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)^2} - \frac{\left[\gamma_{j12}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)} \right] w_{ij},$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\left(y_{j3} - \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_3(\mathbf{u}_i)\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)^2} - \frac{\left[\gamma_{j13}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)} \right] w_{ij},$$

dengan $\mathbb{Q}_4$ dinyatakan pada (5.69) di mana

$$\frac{\partial z_{jl}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{jl}\ \mathbf{x}_j\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)}{\left(1+\varphi_l \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_l\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_l\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\ r_l\right)};\ l = 1,2,3.$$

Persamaan turunan parsial pertama untuk setiap parameter di atas diselesaikan menggunakan algoritma Newton Raphson yang dinyatakan sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right), \tag{5.70}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor penaksir parameter pada iterasi ke$-h$, $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ adalah vektor gradien pada iterasi ke$-h$ yang dinyatakan sebagai

$$\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right) = \left[\left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \left[\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]^T \right]^T_{\boldsymbol{\theta}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}}.$$

Sementara itu, turunan kedua $\mathbb{Q}_3$ terhadap setiap parameter disajikan pada Lampiran 3 dan elemen matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ disajikan pada Lampiran 5.

Dengan mempertimbangkan penyederhanaan dalam penghitungan jumlah parameter efektif dalam model GWTGPR seperti yang diuraikan pada Subbab 2.2

di atas, penerapan model GWTGPR pada kasus kematian bayi, anak, dan ibu di Pulau Jawa dilakukan dengan mendefinisikan parameter dispersi dan kovariansi konstan untuk semua wilayah. Jumlah parameter efektif untuk model GWTGPR dalam kasus ini disajikan pada Lampiran 6.

Model GWTGPR menghasilkan AICc sebesar 3.001,654. Nilai ini lebih kecil dibandingkan dengan nilai AICc untuk model TGPR awal dan modifikasi, di mana masing-masing adalah 3.007,890 dan 3.007,893. Sementara itu, berdasarkan nilai *relative likelihood* model TGPR awal dan modifikasi terhadap model GWTGPR diperoleh bahwa peluang kedua model tersebut sebagai model terbaik adalah 0,0443 dan 0,0442. Dengan demikian, model GWTGPR merupakan model terbaik.

Tabel 6.6 Pengelompokan Kabupaten/Kota di Pulau Jawa dengan Model GWTGPR

Variabel respon	Kelompok	Nomor urut Kabupaten/Kota	Jumlah Kabupaten/Kota	Variabel signifikan
Y_1	1	1-119	119	X_1, X_6
Y_2	1	1-119	119	-
Y_3	1	1-79, 90-96, 103-104, 109, 114, 116, 119	92	X_4, X_5, X_6, X_8
	2	80-89, 97-102, 105-108, 110-113, 115, 117, 118	27	X_4, X_6, X_8

Berdasarkan signifikansi variabel bebas yang memengaruhi kematian bayi di Pulau Jawa, terbentuk satu kelompok lokasi, yaitu bahwa persentase sarana air minum layak (X_1) dan persentase perempuan yang tamat SLTA ke atas (X_6) signifikan memengaruhi kematian bayi di seluruh kabupaten/kota di Pulau Jawa (Tabel 6.6). Demikian pula halnya untuk kematian anak di Pulau Jawa. Model GWTPR memberikan hasil satu pengelompokan lokasi tanpa variabel bebas yang yang signifikan memengaruhi kematian anak pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$. Adapun variabel persentase sarana air minum layak (X_1), persentase keluarga dengan akses sanitasi layak (X_2), dan persentase perempuan yang tamat SLTA ke

atas (X_6) signifikan memengaruhi kematian anak di seluruh lokasi pada taraf signifikansi $\alpha = 10\%$.

Model GWTGPR menghasilkan dua lokasi berdasarkan signifikansi variabel bebas yang memengaruhi kematian ibu di Pulau Jawa. Kelompok pertama terdiri dari 92 lokasi dengan 4 variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian ibu dan kelompok kedua terdiri dari 27 lokasi dengan 3 variabel bebas yang memengaruhi kematian ibu (Gambar 6.7). Kabupaten/kota yang terletak pada ujung barat dan timur Pulau Jawa membentuk klaster dengan variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian ibu adalah rasio posyandu aktif (X_4), persentase perempuan yang tamat SLTA ke atas (X_6), dan persentase penduduk miskin (X_8). Sementara itu, kabupaten/kota yang terletak di bagian tengah Pulau Jawa membentuk satu kelompok dengan tambahan satu variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian ibu, yaitu persentase tempat-tempat umum yang memenuhi syarat kesehatan (X_5).

Gambar 6.7 Variabel Bebas yang Berpengaruh Signifikan terhadap Kematian Ibu di Pulau Jawa

Pola pengelompokan lokasi di bagian ujung barat dan timur Pulau Jawa ini mirip dengan pola yang ditunjukkan pada Gambar 6.6 mengenai persebaran tingkat kematian ibu di mana lokasi-lokasi tersebut memiliki tingkat kematian relatif lebih tinggi dibandingkan dengan lokasi lainnya di Pulau Jawa. Hasil SDKI

2017 juga menempatkan Banten dan Jawa Timur sebagai provinsi dengan tingkat kematian bayi dan U5MR lebih tinggi dibandingkan dengan provinsi lainnya di Pulau Jawa, bahkan di atas angka kematian bayi dan U5MR nasional (BPS; BKKBN; Kemenkes; ICF International, 2018). Hal ini juga seiring dengan hubungan positif dalam korelasi Pearson antar-kombinasi kematian bayi, anak, dan ibu. Namun demikian, penjelasan mengenai fenomena pengelompokan kabupaten/kota ini membutuhkan penelitian lebih mendalam.

Model GWTGPR menghasilkan sebanyak 3.213 parameter untuk 119 lokasi. Hasil lengkap penaksir parameter, *standard error*, dan *p-value* setiap parameter model GWTGPR disajikan pada Lampiran 10. Contoh hasil luaran model GWTGPR untuk lokasi 110 (Kota Surabaya) dan lokasi 14 (Kuningan) disajikan pada Tabel 6.7.

Berdasarkan Tabel 6.7, variabel yang signifikan memengaruhi kematian bayi di Kota Surabaya dan Kuningan adalah persentase sarana air minum layak (X_1) dan persentase perempuan yang tamat SLTA ke atas (X_6). Arah hubungan persentase sarana air minum layak (X_1) dengan kematian bayi tidak sesuai teoretis namun sesuai dengan arah korelasi Pearson yang disajikan pada Tabel 6.2. Hal ini kemungkinan disebabkan karena adanya intervensi berkaitan dengan sarana air minum layak yang lebih cepat dari pada pengukuran kejadian kematian yang dilakukan pada akhir tahun. Sementara itu, pada Tabel 6.7 diperlihatkan bahwa semakin tinggi persentase perempuan yang menamatkan pendidikan yang lebih tinggi maka jumlah kejadian kematian bayi cenderung menurun.

Variabel persentase keluarga dengan sanitasi layak (X_2), persentase desa STBM (X_3), rasio posyandu (X_4), persentase TTU layak (X_5), persentase perempuan menikah dini (X_7), dan persentase penduduk miskin (X_8) tidak signifikan memengaruhi kematian bayi di Pulau Jawa. Hasil ini didukung dari korelasi Pearson yang tidak signifikan antara variabel bebas dengan kematian bayi seperti yang disajikan pada Tabel 6.2. Matriks sebaran data antara variabel bebas ini dengan kematian bayi juga memperlihatkan *slope* yang relatif landai (Lampiran

11). Hal ini menunjukkan bahwa variabel-variabel ini tidak sensitif dalam menjelaskan kematian bayi.

Sementara itu, tidak ada variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian anak di Kota Surabaya dan Kuningan pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$. Seperti halnya pada kematian bayi, variabel bebas dalam penelitian ini relatif tidak sensitif dalam menjelaskan kematian anak yang ditunjukkan dari korelasi Pearson yang tidak signifikan seperti yang disajikan pada Tabel 6.2 dan *slope* yang relatif landai seperti yang ditunjukkan *matrix plot* antara kematian anak dan varibel bebas pada Lampiran 11.

Kematian ibu di Kota Surabaya dan Kuningan secara signifikan dipengaruhi oleh rasio posyandu aktif (X_4), persentase perempuan tamat SLTA ke atas (X_6), dan persentase penduduk miskin (X_8). Kenaikan rasio posyandu aktif dan persentase penduduk perempuan yang tamat SLTA ke atas maka kematian ibu cenderung turun. Sementara itu, arah hubungan persentase penduduk miskin dengan kematian ibu untuk Kota Surabaya dan Kuningan tidak sesuai secara teoretis namun sesuai dengan arah korelasi Pearson yang disajikan pada Tabel 6.2. Seperti penjelasan sebelumnya, arah hubungan yang tidak sesuai teoretis ini kemungkinan disebabkan intervensi yang lebih cepat dalam penanganan kemiskinan dibandingkan dengan pengukuran kematian ibu di akhir tahun. Tabel 6.7 juga memperlihatkan bahwa kematian ibu di Kuningan dipengaruhi oleh persentase TTU yang memenuhi syarat kesehatan (X_5) pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ di mana semakin bertambahnya TTU memenuhi syarat kesehatan maka kematian ibu cenderung menurun.

Kematian ibu tidak signifikan dipengaruhi oleh persentase sarana air minum layak (X_1), persentase keluarga dengan sanitasi layak (X_2), persentase desa STBM (X_3), dan persentase perempuan menikah dini (X_7). Seperti penjelasan sebelumnya, variabel-variabel ini tidak sensitif dalam menjelaskan kematian ibu yang ditunjukkan oleh korelasi Pearson yang tidak signifikan pada Tabel 6.2 dan *slope* relatif landai seperti yang ditunjukkan *matrix plot* antara kematian ibu dan varibel bebas pada Lampiran 11.

Tabel 6.7 Penaksir Parameter dan Signifikansi Parameter Model GWTGPR, Kota Surabaya dan Kuningan

Parameter	Kota Surabaya		Kuningan	
	Koefisien regresi	SE	Koefisien Regresi	SE
β_{10}	5,0557 **	0,9187	5,0255 **	0,9163
β_{11}	0,0066 *	0,0032	0,0066 *	0,0032
β_{12}	0,0039 .	0,0059	0,0041 .	0,0058
β_{13}	-0,0001 .	0,0024	-0,0001 .	0,0024
β_{14}	-0,0033 .	0,0021	-0,0032 .	0,0021
β_{15}	-0,0056 .	0,0042	-0,0057 .	0,0042
β_{16}	-0,0210 *	0,0097	-0,0207 *	0,0097
β_{17}	0,0056 .	0,0145	0,0060 .	0,0145
β_{18}	-0,0013 .	0,0229	-0,0014 .	0,0228
β_{20}	3,9372 **	1,1671	3,9420 **	1,1631
β_{21}	0,0077 .	0,0045	0,0077 .	0,0045
β_{22}	-0,0102 .	0,0057	-0,0102 .	0,0056
β_{23}	0,0017 .	0,0033	0,0018 .	0,0033
β_{24}	-0,0021 .	0,0029	-0,0021 .	0,0029
β_{25}	0,0020 .	0,0050	0,0019 .	0,0050
β_{26}	-0,0222 .	0,0116	-0,0222 .	0,0115
β_{27}	-0,0259 .	0,0182	-0,0263 .	0,0182
β_{28}	0,0126 .	0,0296	0,0129 .	0,0295
β_{30}	4,6037 **	0,7008	4,6013 **	0,6994
β_{31}	0,0027 .	0,0030	0,0026 .	0,0030
β_{32}	-0,0037 .	0,0027	-0,0036 .	0,0027
β_{33}	0,0002 .	0,0023	0,0002 .	0,0023
β_{34}	-0,0068 **	0,0016	-0,0068 **	0,0016
β_{35}	-0,0060 .	0,0031	-0,0060 *	0,0030
β_{36}	-0,0182 *	0,0078	-0,0180 *	0,0078
β_{37}	0,0176 .	0,0120	0,0178 .	0,0120
β_{38}	-0,0538 **	0,0191	-0,0539 **	0,0191

* *p-value* < 5% ** *p-value* < 1%

BAB 7
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diuraikan kesimpulan dari hasil-hasil yang telah diperoleh pada penaksiran parameter model GWMGPR, pengujian parameter model GWMGPR, aplikasi model GWMGPR, serta saran berkaitan dengan penelitian lanjutan yang dapat dilakukan.

7.1 Kesimpulan

Berdasarkan kajian teori dan penerapan model GWMGPR serta dengan memperhatikan tujuan dari penelitian ini, maka beberapa kesimpulan diberikan, yaitu

1. a. Model MGPR modifikasi didefinisikan sebagai

$$P\left(y_1,\ldots,y_g\right)=\prod_{l=1}^{g}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l-1}}{y_l\,!}\exp\left[-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)\right]\right]$$
$$\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right],$$

dengan $z_l=\exp\left(\mu_l\left(r_l-1\right)/\left(1+\varphi_l\mu_l\right)\right)$, $\ln\left(r_l\right)-\varphi_l\mu_l\left(r_l-1\right)/\left(1+\varphi_l\mu_l\right)+1=0$,

di mana $\mu_l=q_l\exp\left(\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_l\right)$, dan $\gamma_{lm}=\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}_{lm}$.

b. Penaksir parameter model MGPR modifikasi diperoleh dengan metode MLE dan iterasi Newton Raphson di mana masing-masing elemen vektor gradien dan matriks Hessian diperoleh dari turunan parsial pertama dan kedua dari fungsi *ln-likelihood* berikut

$$Q_1=\ln L\left(\Omega_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right)+\left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l y_{il}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ln\left(y_{il}\,!\right)-\frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right)+\ln\left(1+Q_2\right)\right],$$

dengan $Q_2 = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm} \left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right)$, $z_{il} = \exp\left(\mu_{il}\left(r_l - 1\right)/1 + \varphi_l \mu_{il}\right)$,

$\ln\left(r_l\right) - \varphi_l \mu_{il}\left(r_l - 1\right)/\left(1 + \varphi_l \mu_{il}\right) + 1 = 0$, $\mu_{il} = q_{il}\ e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l}$, dan $\gamma_{ilm} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{lm}$.

c. Beberapa statistik uji untuk pengujian parameter model MGPR modifikasi adalah sebagai berikut ini.

i) Statistik uji hipotesis parameter β_{lk} dan β_{lmk} secara serentak, yaitu $G_{11}^2 = 2\left[\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_1\right)\right]$ berdistribusi $\chi^2_{(g+1)gp/2}$, di mana

$$L\left(\hat{\Omega}_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{il}}{1+\hat{\varphi}_l\hat{\mu}_{il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_l y_{il}\right) - \ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\hat{\mu}_{il}\left(1+\hat{\varphi}_l y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_l\hat{\mu}_{il}}\right) + \ln\left(1+\hat{Q}_2\right)\right],$$

dengan $\hat{Q}_2 = \sum_{l<m}^{g} \hat{\gamma}_{ilm}\left(e^{-y_{il}} - \hat{z}_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - \hat{z}_{im}\right)$, dan

$$\ln L\left(\hat{\omega}_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{\omega_1 il}}{1+\hat{\varphi}_{\omega_1 l}\hat{\mu}_{\omega_1 il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_1 l} y_{il}\right) - \ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\hat{\mu}_{\omega_1 il}\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_1 l} y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_{\omega_1 l}\hat{\mu}_{\omega_1 il}}\right) + \ln\left(1+\hat{Q}_{2\omega_1}\right)\right],$$

dengan $\hat{Q}_{2\omega_1} = \sum_{l<m}^{g} \hat{\gamma}_{\omega_1 ilm}\left(e^{-y_{il}} - \hat{z}_{\omega_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - \hat{z}_{\omega_1 im}\right)$.

ii) Statistik uji hipotesis parameter β_{lk} secara serentak, yaitu $G_{12}^2 = 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$ berdistribusi χ^2_{gp}, di mana

$$\ln L\left(\hat{\omega}_2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{\omega_2 il}}{1+\varphi_{\omega_2 l}\mu_{\omega_2 il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_2 l} y_{il}\right) - \ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\hat{\mu}_{\omega_2 il}\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_2 l} y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_{\omega_2 l}\hat{\mu}_{\omega_2 il}}\right) + \ln\left(1+\hat{Q}_{2\omega_2}\right)\right],$$

dengan $\hat{Q}_{2\omega_2} = \sum_{l<m}^{g} \hat{\gamma}_{\omega_2 ilm}\left(e^{-y_{il}} - \hat{z}_{\omega_2 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - \hat{z}_{\omega_2 im}\right)$.

iii) Statistik uji hipotesis parameter β_{lmk} secara serentak, yaitu $G_{13}^2 = 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_1\right) - \ln L\left(\hat{\omega}_3\right)\right)$ berdistribusi $\chi^2_{(g-1)gp/2}$, di mana

$$\ln L\left(\hat{\omega}_3\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{\omega_3 il}}{1+\hat{\varphi}_{\omega_3 l}\hat{\mu}_{\omega_3 il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_3 l}y_{il}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\ln\left(y_{il}!\right) - \frac{\hat{\mu}_{\omega_3 il}\left(1+\hat{\varphi}_{\omega_3 l}y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_{\omega_3 l}\hat{\mu}_{\omega_3 il}}\right) + \ln\left(1+\hat{Q}_{2\omega_3}\right)\right],$$

dengan $\hat{Q}_{2\omega_3} = \sum_{l<m}^{g}\hat{\gamma}_{\omega_3 ilm}\left(e^{-y_{il}} - \hat{z}_{\omega_3 il}\right)\left(e^{-y_{im}} - \hat{z}_{\omega_3 im}\right)$.

2. a. Jika diberikan n sampel random $\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dari variabel random $\mathbf{y}_i \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{u}_i\right), \boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ di mana $\mathbf{u}_i = \left(u_{1i}, u_{2i}\right)$ merupakan vektor koordinat dua dimensi (bujur dan lintang) pada lokasi i, maka model GWMGPR dapat dituliskan sebagai $\mu_{il}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{il}\, e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)}$ dan $\gamma_{ilm}\left(\mathbf{u}_i\right) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)$.

b. Penaksir parameter model GWMGPR modifikasi diperoleh dengan metode MLE dan iterasi Newton Raphson di mana masing-masing elemen vektor gradien dan matriks Hessian lokasi i diperoleh dari turunan parsial pertama dan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terboboti untuk lokasi i sebagai berikut

$$\mathbb{Q}_3 = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{jl}\ln\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{jl}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\ln\left(y_{jl}!\right) - \frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_l y_{jl}\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \ln\left(1+\mathbb{Q}_4\right)\right] w_{ij},$$

dengan $\mathbb{Q}_4 = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{jlm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right)$.

c. Statistik uji hipotesis parameter $\beta_{lk}\left(\mathbf{u}_i\right)$ secara serentak, yaitu $G_{21}^2 = 2\left(\ln L\left(\hat{\Omega}_2\right) - \ln L\left(\hat{\varpi}_1\right)\right)$ berdistribusi $\chi^2_{gpn/2}$, di mana

$$\ln L\left(\hat{\Omega}_2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\hat{\varphi}_l\left(\mathbf{u}_i\right)\hat{\mu}_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{il}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\left(y_{il}!\right)-\frac{\hat{\mu}_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\hat{\varphi}_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_l\left(\mathbf{u}_i\right)\hat{\mu}_{il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\ln\left(1+\hat{Q}_4\right)\right],$$

dengan $\hat{Q}_4=\sum_{l<m}^{g}\hat{\gamma}_{ilm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{il}}-\hat{z}_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-\hat{z}_{im}\right)$ dan

$$\ln L\left(\hat{\varpi}_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\hat{\varphi}_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\hat{\mu}_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\left(y_{il}-1\right)\ln\left(1+\hat{\varphi}_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)y_{il}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\left(y_{il}!\right)-\frac{\hat{\mu}_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\hat{\varphi}_{\varpi_1 l}y_{il}\right)}{1+\hat{\varphi}_{\varpi_1 l}\left(\mathbf{u}_i\right)\hat{\mu}_{\varpi_1 il}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)+\ln\left(1+\hat{Q}_{4\varpi_1}\right)\right],$$

serta

$$\hat{Q}_{4\varpi_1}=\sum_{l<m}^{g}\hat{\gamma}_{\varpi_1 ilm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{il}}-\hat{z}_{\varpi_1 il}\right)\left(e^{-y_{im}}-\hat{z}_{\varpi_1 im}\right).$$

3. a. Pemodelan GWTGPR menghasilkan 119 model sesuai banyaknya lokasi pengamatan dalam penelitian ini. Model GWTGPR menghasilkan satu kelompok lokasi berdasarkan berdasarkan variabel bebas yang signifikan memengaruhi kematian bayi dan anak dan membentuk dua kelompok wilayah untuk kematian ibu di Pulau Jawa.
   b. Model GWTGPR memiliki nilai AIC terkoreksi terendah dibandingkan model TGPR awal dan modifikasi, sehingga model GWTGPR merupakan model terbaik dibandingkan dengan kedua model lainnya. Sementara itu, model TGPR modifikasi menghasilkan *standard error* penaksir parameter relatif lebih kecil dibandingkan dengan *standard error* penaksir paramater model TGPR awal, sehingga dapat disimpulkan bahwa model TGPR modifikasi relatif lebih baik dibandingkan dengan model TGPR awal.

7.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini terdapat beberapa saran yang diberikan, yaitu:

1. Model TGPR modifikasi dengan mendefinisikan kovariansi sebagai fungsi variabel bebas memperbesar jumlah parameter sehingga perlu dilakukan seleksi

variabel bebas yang diduga sensitif dalam menjelaskan kovariansi yang diteliti untuk mengurangi kompleksitas dalam komputasi.

2. Dari hasil model TGPR dan GWTGPR variabel pendidikan perempuan sangat berpengaruh terhadap kematian bayi, anak, dan ibu. Hal ini memperkuat pentingnya pemberdayaan perempuan. Dari penelitian ini juga dapat diketahui beberapa variabel bebas kurang sensisitif dalam menjelaskan kematian bayi, anak, dan ibu sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat diganti dengan variabel lain.
3. Berkaitan dengan variabel bebas yang signifikan di seluruh lokasi maka pada penelitian selanjutnya dapat dipertimbangkan untuk membangun model *mixed* GWMGPR. Sementara itu, terkait dengan variabel bebas yang tidak signifikan di seluruh lokasi tetap perlu dilihat perkembangan signifikansinya sehingga dapat dipertimbangkan untuk membangun model *geographically and temporarily weighted* MGPR. Analisis spasial berbasis area juga dapat dipertimbangkan dalam menganalisis faktor penentu kematian bayi, anak, dan ibu.
4. Penelitian ini menggunakan pembobot hanya berdasarkan jarak geografis, belum memperhitungkan kesamaan atribut lokasi yang berdekatan. Penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan fungsi pembobotan alternatif dengan menggabungkan ruang geografis dan ruang atribut (*spatial attribute weighting*).

DAFTAR PUSTAKA

Akaike, H. (1973), "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", *Second International Symposium on Information Theory*, Petrov, B.N. dan Csaki, F. (eds.) , Akademia Kiado, Budapest, hal. 267-81.

Alam, N. dan David, P.H. (1998), "Infant and child mortality in Bangladesh: age-specific effects of previous child's death", *Journal of Biosocial Science*, Vol. 30, No. 3, hal. 333-348.

Anselin, L. (1988), *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Anselin, L. (1995), "Local indicators of spatial association – LISA", *Geographical Analysis*, Vol. 27, hal. 93-115.

Badan Pusat Statistik (2016), *Profil Penduduk Indonesia Hasil SUPAS 2015*, BPS RI, Jakarta.

Bascuñán, M.M. dan Quezada, C.R. (2016), "Geographically Weighted Regression for Modelling the Accessibility to the Public Hospital Network in Concepción Metropolitan Area, Chile", *Geospatial Health*, Vol. 11, No. 3, hal. 263-273.

Boerma, J.T. dan Bicego, G.T. (1992), "Preceding Birth Intervals and Child Survival: Searching for Pathways of Influence", *Studies in Family Planning*, Vol. 23, No. 4, hal. 243-256.

BPS; BKKBN; Kemenkes; ICF International (2018), *Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia 2017*, BPS, BKKBN, Kemenkes, dan ICF, Jakarta.

Brunsdon, C., Fotheringham, A.S., dan Charlton, M.E. (1996), "Geographically Weighted Regression: A Method for Exploring Spatial Nonstationarity", *Geographical Analysis*, Vol. 28, No. 4, hal. 281-298.

Brunsdon, C., Fotheringham, S., dan Charlton, M. (1998), "Geographically Weighted Regression-Modelling Spatial Non-Stationarity", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 47, No. 3, hal. 431-443.

Burnham, K.P. dan Anderson, D.R. (2002), *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, 2nd ed., Springer-Verlag New York, Inc.

Cameron, A.C. dan Trivedi, P.K. (2013), *Regression analysis of count data*, 2nd ed., Cambridge University Press., New York.

Clarke, K.A. (2007), "A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection", *Political Analysis*, Vol. 15, hal. 347–363.

Consul, P.C. (1989), *Generalized Poisson distributions: properties and applications*, Marcel Dekker, Inc., New York.

Consul, P.C. dan Famoye, F. (1988), "Maximum likelihood estimation for the generalized poisson distribution when sample mean is larger than sample variance", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 17, No. 1, hal. 299-309.

Consul, P.C. dan Famoye, F. (1992), "Generalized poisson regression model", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 21, No. 1, hal. 89-109.

Consul, P.C. dan Jain, G.C. (1973), "A generalization of the Poisson distribution", *Technometrics*, Vol. 15, No. 4, hal. 791-799.

Consul, P.C. dan Shoukri, M.M. (1984), "Maximum likelihood estimation for the generalized Poisson distribution", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 13, No. 12, hal. 1533-1547.

Consul, P.C. dan Shoukri, M.M. (1985), "The generalized poisson distribution when the sample mean is larger than the sample variance", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol. 14, No. 3, hal. 667-681.

De Castro, M.C. (2007), "Spatial Demography: an opportunity to improve policy making at diverse decision levels", *Population Research and Policy Review*, Vol. 26, No. 5-6, hal. 477–509.

Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., dan Walhin, J.F. (2007), *Actuarial Modeling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, John Wiley and Sons, West Sussex, UK.

Dewi, Y.S., Purhadi, Sutikno, dan Purnami, S.W. (2017), "Comparison of Bivariate Negative Binomial Regression Models for Handling Overdispersion",

International Journal of Applied Mathematics and Statistics, Vol. 56, No. 5.

Ermawati, Purhadi, dan Rahayu, S.P. (2022), "A Comparison of Bivariate Zero-Inflated Poisson Inverse Gaussian Regression Models with and without Exposure Variables", *Symmetry*, Vol. 14, No. 277.

Famoye, F. (1993), "Restricted generalized poisson regression model", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 22, No. 5, hal. 1335-1354.

Famoye, F. (2010), "A new bivariate generalized Poisson distribution", *Statistica Neerlandica*, Vol. 64, hal. 112-124.

Famoye, F. (2012), "Comparisons of some bivariate regression models", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 82, No. 7, hal. 937-949.

Famoye, F. (2015), "A multivariate generalized Poisson regression model", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 44, hal. 497-511.

Famoye, F. dan Consul, P.C. (1995), "Bivariate Generalized Poisson Distribution with Some Applications", *Metrika*, Vol. 42, hal. 127-138.

Famoye, F., Okafor, R., dan Adamu, M.O. (2011), "A multivariate generalized Poisson distribution", *Journal of Statistical Theory and Applications*, Vol. 10, No. 3, hal. 519-532.

Famoye, F., Wulu, J.T., dan Singh, K.P. (2004), "On the generalized Poisson regression model with an application to accident data", *Journal of Data Science*, Vol. 2, hal. 287-295.

Fotheringham, A.S., Brundson, C., dan Charlton, M. (2002), *Geographically Weighted Regression: The analysis of spatially varying relationship*, John Wiley & Son Ltd, England.

Fotheringham, A.S., Kelly, M.H., dan Charlton, M. (2012), "The demographic impacts of the Irish famine: towards a greater geographical understanding", *Transactions of the Institute of British Geographers*, Vol. 38, No. 2, hal. 221-237.

Gubhaju, B.B. (1985), "The Effect of Previous Child Death on Infant and Child Mortality in Rural Nepal ", *Studies in Family Planning*, Vol. 16, No. 4, hal. 231-236.

Gujarati, D.N. (2004), *Basic Econometrics*, 4th ed., McGraw Hill , New York.

Hay, M.C. (1999), "Dying mothers: Maternal mortality in rural Indonesia", *Medical Anthropology: Cross-Cultural Studies in Health and Illness*, Vol. 18, No. 3, hal. 243-279.

Heiman, H.J. dan Artiga, S. (2015), *Beyond health care: The role of social determinants in promoting health and health equity*, [Online] Washington DC diakses dari: http://kff.org/disparities-policy/issue-brief/beyond-health-care-the-role-of-social-determinants-in-promoting-health-and-health-equity/ [pada 27 April 2017].

Hobcraft, J.N., Mcdonald, J.W., dan Rutstein, S.O. (1984), "Socio-economic factors in Infant and child mortality: A cross-national comparison", *Population Studies: A Journal of Demography*, Vol. 38, No. 2, hal. 193-223.

Institute of Medicine (1990), "Milk composition",dalam *Nutrition during lactation*, , National Academy Press.

Irawan, P.B., Usman, H., Berliana, S.M., dan Wicaksono, F. (2016), *Official statistics : sosial-kependudukan dasar*, In-Media, Jakarta.

Jung, R.C. dan Winkelmann, R. (1993), "Two aspect of labor mobility: A bivariate Poisson regression approah", *Empirical Economics*, Vol. 18, hal. 543-556.

Karlis, D. dan Meligkotsidou, L. (2005), "Multivariate Poisson regression with covariance structure", *Statistics and Computing*, Vol. 15, hal. 255-265.

Karlis, D. dan Ntzoufras, I. (2003), "Analysis of sports data by using bivariate Poisson", *The Statistician*, Vol. 52, No. 3, hal. 381–393.

Kementerian Kesehatan RI (2016), *Profil kesehatan Indonesia tahun 2015*, Kemenkes RI, Jakarta.

Khan, K.S., Wojdyla, D., Say, L., Gülmezoglu, A.M., dan Van Look, P.F.A. (2006), "WHO analysis of causes of maternal death: a systematic review", *The Lancet*, Vol. 367, No. 9516, hal. 1066-74.

King, G. (1989), "A Seemingly Unrelated Poisson Regression Model", *Sociological Methods and Research*, Vol. 17, No. 3, hal. 235-255.

Koblinsky, M.A. (2003), *Reducing Maternal Mortality: Learning from Bolivia, China, Egypt, Honduras, Indonesia, Jamaica, and Zimbabwe*, World Bank, Washington, DC.

Kocherlakota, S. dan Kocherlakota, K. (1992), *Bivariate Discrete Distributions*, Dekker, New York.

Kocherlakota, S. dan Kocherlakota, K. (2001), "Regression in the bivariate Poisson distribution", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 30, No. 5, hal. 815-825.

Lakshminarayana, J., Pandit, S.N.N., dan Rao, K.S. (1999), "On a bivariate poisson distribution", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 28, No. 2, hal. 267-276.

Lee, M.-L.T. (1996), "Properties and applications of the sarmanov family of bivariate distributions", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 25, No. 6, hal. 1207-1222.

Lerner, B., Lone, A., dan Rao, M. (1997), "On generalized Poisson distributions", *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 17, No. 2, hal. 377-385.

Lin, C.H. dan Wen, T.H. (2011), "Using Geographically Weighted Regression (GWR) to Explore Spatial Varying Relationships of Immature Mosquitoes and Human Densities with the Incidence of Dengue", *International Journal of Environmental Research and Public Health*, Vol. 8, hal. 2798-2815.

Martinez-Beneito, M.A., Vergara-Hernández, C., Botella-Rocamora, P., Corpas-Burgos, F., Pérez-Panadés, J., Zurriaga, Ó., Aldasoro, E., Borrell, C., Cabeza, E., Cirera, L., dan al., e. (2021), "Geographical Variability in Mortality in Urban Areas: A Joint Analysis of 16 Causes of Death", *Int. J. Environ. Res. Public Health*, Vol. 18, No. 5664.

Martin, L.G., Trussell, J., Salvail, F.R., dan Shah, N.M. (1983), "Co-variates of child mortality in the Philippines, Indonesia, and Pakistan: An analysis based on hazard models", *Population Studies: A Journal of Demography*, Vol. 37, No. 3, hal. 417-432.

McCarthy, J. dan Maine, D. (1992), "A framework for analyzing the determinants of maternal mortality", *Studies in Family Planning*, Vol. 23, No. 1, hal. 23-33.

McLachlan, G. dan Peel, D. (2000), *Finite Mixture Models*, John Wiley & Sons, New York.

Mellington, N. dan Cameron, L. (1999), "Female education and child mortality in Indonesia", *Bulletin of Indonesian Economic Studies*, Vol. 35, No. 3, hal. 115-44.

Merkle, L. dan Zimmermann, K.F. (1992), "The Demographics of Labour Turnover: A Comparison of Ordinal Probit and Censored Count Data Models", *Louvain Economic Review*, Vol. 58, No. 3/4, hal. 283-306.

Mosley, W.H. dan Chen, L.C. (1984), "An analytical framework for the study of child survival in developing countries", *Population and Development Review*, Vol. 10, No. Supplement: Child Survival: Strategies for Research, hal. 25-45.

Muldoon, K.A., Galway, L.P., Nakajima, M., Kanters, S., Hogg, R.S., Bendavid, E., dan Mills, E.J. (2011), "Health system determinants of infant, child and maternal mortality: A cross-sectional study of UN member countries", *Globalization and Health*, Vol. 7, No. 42, hal. 1-10.

Nakaya, T., Fotheringham, A.S., Brunsdon, C., dan Charlton, M. (2005), "Geographhically weighted Poisson regression for disease association mapping", *Statistics in medicine*, Vol. 24, No. 17, hal. 2695-2717.

Pawitan, Y. (2001), *In All Likelihood*, Clarendon Press, Oxford.

Purhadi, Sutikno, Berliana, S.M., dan Setiawan, D.I. (2021), "Geographically weighted bivariate generalized Poisson regression: application to infant and maternal mortality data", *Letters in Spatial and Resource Sciences*, Vol. 14, No. 1, hal. 79 - 99.

Rencher, A.C. (2002), *Methods of multivariate analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc.

Rencher, A.C. dan Scaalje, G.B. (2008), *Linear Models in Statistics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New Jersey.

Rodrigues, M., de la Riva, J., dan Fotheringham, S. (2014), "Modeling the spatial variation of the explanatory factors of human-caused wildfires in Spain using geographically weighted logistic regression", *Applied Geography*, Vol. 48, hal. 52-63.

Ronsmans, C., Scott, S., Qomariyah, S.N., Achadi, E., Braunholtz, D., Marshall, T., Pambudi, E., Witten, K.H., dan Graham, W.J. (2009), "Professional

assistance during birth and maternal mortality in two Indonesian districts", *Bulletin World Health Organization*, Vol. 87, hal. 416–423.

Rowland, D.T. (2003), *Demographic methods and concepts*, Oxford University Press, Oxford.

Say, L., Chou, D., Gemmill, A., Tunçalp, Ö., Moller, A.-B., Daniels, J., Gülmezoglu, A.M., Temmerman, M., dan Alkema, L. (2014), "Global causes of maternal death: a WHO systematic analysis", *The Lancet Global Health*, Vol. 2, hal. e323–33.

Seipel, M.M.O. (1996), "Child Mortality", *Multicultural Social Work*, Vol. 4, No. 1, hal. 63-74.

Shrestha, R. (2010), "The village midwife program and infant mortality in Indonesia", *Bulletin of Indonesian Economic Studies*, Vol. 46, No. 2, hal. 193-211.

Smith, L.C., Ramakrishnan, U., Ndiaye, A., Haddad, L., dan Martorell, R. (2003), *The Importance of Women's Status for Child Nutrition in Developing Countries*, Research report, International Food Policy Research Institute, Washington, DC.

Srivastava, S., Upadhyay, S.K., Chauhan, S., dan Alagarajan, M. (2021), "Preceding child survival status and its effect on infant and child mortality in India: An evidence from National Family Health Survey 2015–16", *BMC Public Health*, Vol. 21, No. 1577.

Suyitno, Purhadi, Sutikno, dan Irhamah (2016), "Parameter Estimation of Geographically Weighted Trivariate Weibull Regression Model", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 10, No. 18, hal. 861 - 878.

Thaddeus, S. dan Maine, D. (1994), "Too far to walk: Maternal mortality in context", *Social Science and Medicine*, Vol. 38, No. 8, hal. 1091-110.

Tobler, W.R. (1970), "A Computer Movie Simulating Urban Growth in the Detroit Region", *Economic Geography*, Vol. 46, hal. 234-240.

Triyanto, Purhadi, Otok, B.W., dan Purnami, S.W. (2015), "Parameter estimation of geographically weigthed multivariate Poisson regression", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, No. 82, hal. 4081-4093.

Tuenter, H.J.H. (2000), "On the generalized Poisson distribution", *Statistica Neerlandica*, Vol. 54, No. 3, hal. 374-376.

United Nations Children's Fund (1998), *The state of the world's children*, Oxford University Press, New York.

United Nations Children's Fund (2015), *Levels and trends in child mortality*, UNICEF, New York.

United Nations Development Programme (2011), *Discussion paper: A social determinants approach to maternal health*, [Online] diakses dari: http://www.undp.org/content/undp/en/home/librarypage/democratic-governance/a-social-determinants-approach-to-maternal-health.html [pada 28 April 2017].

United Nations Development Programme (2016), *Indicators and data mapping to measure Sustainable Development Goals (SDGs) targets: Case of Indonesia 2015*, UNDP-Indonesia, Jakarta.

United Nations (1990), *Step-by-step guideto the estimation of child mortality*, United Nations, New York.

Vernic, R. (1997), "On the bivariate generalized Poisson distribution", *Astin Bulletin*, Vol. 27, No. 01, hal. 23-32.

Vernic, R. (2000), "A multivariate generalization of the Generalized Poisson distribution", *Astin Bulletin*, Vol. 30, No. 01, hal. 57-67.

Vuong, Q.H. (1989), "Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses", *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, hal. 307-333.

Wahab, A., Winkvist, A., Stenlund, H., dan Wilopo, S.A. (2001), "Infant mortality among Indonesian boys and girls: effect of sibling status", *Annals of Tropical Paediatrics*, Vol. 21, hal. 66-71.

Wang, W. dan Famoye, F. (1997), "Modeling household fertility decisions with generalized Poisson regression", *Journal of Population Economics*, Vol. 10, hal. 273–283.

Winkelmann, R. (2008), *Econometric analysis of count data*, 5th ed., Springer, Berlin.

World Health Organization (2003), *Social determinants of health: The solid facts*, 2nd ed., WHO, Denmark.

World Health Organization (2015), *Trends in maternal mortality 1990 to 2015: Estimates by WHO, UNICEF, UNFPA, World Bank Group and the United Nations Population Division*, World Health Organization, Jenewa, Swiss.

World Health Organization (2019), *Health statistics and information systems*. [Online] diakses dari: https://www.who.int/healthinfo/statistics/indmaternalmortality/en/ [pada 2 January 2019].

Yang, Z., Hardin, J.W., dan Addy, C.L. (2009), "A score test for overdispersion in Poisson regression based on the generalized Poisson-2 model", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 139, hal. 1514-1521.

Yan, X. dan Su, X.G. (2009), *Linear regression analysis: Theory and computing*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Zakir, M. dan Wunnava, P.V. (1999), "Factors affecting infant mortality rates: evidence from cross-sectional data", *Applied Economics Letters*, Vol. 6, hal. 271–273.

Zamani, H., Faroughi, P., dan Ismail, N. (2016), "Bivariate generalized Poisson regression model: applications on health care data", *Empirical Economics*, Vol. 51, No. 4, hal. 1607-1621.

Zamani, H. dan Ismail, N. (2012), "Functional form for the generalized Poisson regression model", *Communications in Statistics - Theory and Methods,* Vol. 41, No. 20, hal. 3666-3675.

Zhao, F. dan Park, N. (2004), "Using Geographically Weighted Regression Models to Estimate Annual Average Daily Traffic", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 1879, hal. 99–107.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Nama	:	Sarni Maniar Berliana
Jenis kelamin	:	Perempuan
Tempat tanggal lahir	:	Jakarta, 14 April 1976
Alamat kantor	:	Sekolah Tinggi Ilmu Statistik Jalan Otto Iskandardinata 64C Jakarta Timur, 13330 Telp, (021) 8191437, 8508812; Fax (021) 8197577
Nomor HP	:	08 184 184 69, 0818 140476
Email	:	sarni@stis.ac.id, sarni@bps.go.id

Pendidikan:

1982 – 1988	SDN 01 Jakarta Timur
1988 – 1991	SMPN 150 Jakarta Timur
1991 – 1994	SMAN 62 Jakarta Timur
1994 – 1997	Akademi Ilmu Statistik, Jakarta Timur
1997 – 1999	Sekolah Tinggi Ilmu Statistik (STIS), Jakarta Timur
2008 – 2010	Kajian Kependudukan dan Ketenagaan Kerja, Universitas Indonesia, Depok

Pekerjaan:

1999 – 2001	Staf di Bidang Statistik Sosial Kependudukan, BPS Provinsi Jawa Timur
2001 – 2011	Staf di Subdirektorat Statistik Demografi, BPS Pusat, Jakarta Pusat
2011 –	Fungsional Dosen di Sekolah Tinggi Ilmu Statistik, Jakarta Timur

Publikasi selama masa studi:

Berliana, S.M., Purhadi, Sutikno, dan Rahayu, S.P. (2019), "Multivariate generalized Poisson regression model with exposure and correlation as a function of covariates: Parameter estimation and hypothesis testing", *AIP Conference Proceedings 2192*, 090001.

Berliana, S.M., Purhadi, Sutikno, dan Rahayu, S.P. (2020), "Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson Regression", *Mathematics*, Vol. 8, No. 1523, hal. 1-14.

Purhadi, Sutikno, **Berliana, S.M.**, dan Setiawan, D.I. (2021), "Geographically weighted bivariate generalized Poisson regression: application to infant and maternal mortality data", Letters in Spatial and Resource Sciences, Vol. 14, No. 1, hal. 79 - 99.

LAMPIRAN 1 TABEL DATA PENELITIAN

ID	Provinsi	Kabupaten/Kota	Longitude	Latitude	Jumlah anak lahir hidup	Jumlah penduduk umur 1-4 tahun	Jumlah ibu hamil	Jumlah kematian bayi	Jumlah kematian anak	Jumlah kematian ibu
3,101	DKI Jakarta	Kepulauan Seribu	106.61555	-5.72459	385	1,873	386	10	1	0
3,171	DKI Jakarta	Kota Jakarta Selatan	106.80861	-6.26337	37,854	193,324	39,778	48	10	12
3,172	DKI Jakarta	Kota Jakarta Timur	106.90109	-6.23604	52,201	123,921	55,055	86	12	25
3,173	DKI Jakarta	Kota Jakarta Pusat	106.83909	-6.17509	12,792	72,499	13,558	145	17	20
3,174	DKI Jakarta	Kota Jakarta Barat	106.75186	-6.16668	46,020	96,538	48,304	165	47	25
3,175	DKI Jakarta	Kota Jakarta Utara	106.90109	-6.13515	31,167	124,572	34,278	129	9	18
3,201	Jawa Barat	Bogor	106.80963	-6.49193	118,195	462,548	128,293	104	6	72
3,202	Jawa Barat	Sukabumi	106.59821	-6.97019	46,998	177,124	48,541	207	23	42
3,203	Jawa Barat	Cianjur	107.13455	-6.8172	41,161	339,960	45,277	84	10	24
3,204	Jawa Barat	Bandung	107.53831	-7.03793	67,767	235,272	79,389	217	11	40
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,279	Jawa Barat	Kota Banjar	108.55369	-7.37141	3,031	10,351	3,171	25	14	5
3,301	Jawa Tengah	Cilacap	109.00419	-7.72106	28,875	99,974	31,282	155	35	16
3,302	Jawa Tengah	Banyumas	109.22731	-7.41718	26,515	96,983	26,963	197	21	10
3,303	Jawa Tengah	Purbalingga	109.36035	-7.38606	14,776	63,649	16,375	112	23	12
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,374	Jawa Tengah	Kota Semarang	110.38135	-7.0119	23,746	85,020	25,655	146	26	18
3,375	Jawa Tengah	Kota Pekalongan	109.6869	-6.89148	5,923	18,405	6,332	71	24	6
3,376	Jawa Tengah	Kota Tegal	109.1293	-6.8707	4,214	10,729	4,527	37	13	3
3,401	DI Yogyakarta	Kulon Progo	110.17794	-7.84757	4,856	20,439	5,580	47	13	5
3,402	DI Yogyakarta	Bantul	110.35818	-7.89355	13,072	46,933	15,508	110	19	13
3,403	DI Yogyakarta	Gunung Kidul	110.59992	-7.96134	7,724	32,044	8,916	78	6	6
3,404	DI Yogyakarta	Sleman	110.34709	-7.69973	13,462	49,673	15,206	55	7	8
3,471	DI Yogyakarta	Kota Yogyakarta	110.37131	-7.7992	3,338	13,971	3,855	25	7	4
3,501	Jawa Timur	Pacitan	111.10531	-8.20126	6,392	26,652	7,334	46	4	8
3,502	Jawa Timur	Ponorogo	111.47187	-7.86397	10,389	41,905	11,750	120	15	11
3,503	Jawa Timur	Trenggalek	111.71269	-8.05242	8,436	35,052	9,684	35	1	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,579	Jawa Timur	Kota Batu	112.52045	-7.84013	3,202	12,459	3,431	16	1	1
3,601	Banten	Pandeglang	106.10748	-6.31675	18,273	127,027	25,345	33	13	34
3,602	Banten	Lebak	106.26681	-6.36043	24,277	99,966	26,299	98	26	38
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,674	Banten	Kota Tangerang Selatan	106.71624	-6.30597	31,111	122,277	32,627	47	2	10

LAMPIRAN 1 TABEL DATA PENELITIAN (LANJUTAN)

ID	Provinsi	Kabupaten/Kota	Persentase sarana air minum layak	Persentase keluarga dengan sanitasi layak	Persentase desa STBM	Rasio posyandu per 100000 penduduk	Persentase tempat-tempat umum yang sehat	Persentase wanita tamat SLTA+	Persentase wanita menikah di dawah umur 17 tahun	Persentase penduduk miskin
3,101	DKI Jakarta	Kepulauan Seribu	62.50	40.60	33.33	115.25	90.00	32.55	17.81	12.09
3,171	DKI Jakarta	Kota Jakarta Selatan	41.40	70.80	10.77	55.77	73.80	62.84	6.98	2.73
3,172	DKI Jakarta	Kota Jakarta Timur	39.10	95.30	0.00	38.97	81.70	63.65	7.20	3.12
3,173	DKI Jakarta	Kota Jakarta Pusat	72.00	75.60	20.45	52.36	63.00	58.50	4.98	3.68
3,174	DKI Jakarta	Kota Jakarta Barat	73.60	94.50	100.00	29.58	43.70	53.42	7.40	3.25
3,175	DKI Jakarta	Kota Jakarta Utara	48.00	150.10	67.74	33.54	72.30	54.31	8.92	5.04
3,201	Jawa Barat	Bogor	76.51	56.29	10.34	42.39	36.00	29.55	16.13	6.66
3,202	Jawa Barat	Sukabumi	48.19	68.90	19.17	129.75	62.00	16.05	28.07	6.22
3,203	Jawa Barat	Cianjur	44.95	62.48	26.11	84.53	67.00	15.84	33.30	9.15
3,204	Jawa Barat	Bandung	81.38	80.19	13.93	112.15	47.00	32.41	19.19	5.94
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,279	Jawa Barat	Kota Banjar	88.49	47.17	72.00	108.68	63.00	29.17	19.98	5.50
3,301	Jawa Tengah	Cilacap	85.70	88.32	1.06	89.46	62.63	20.43	16.65	10.73
3,302	Jawa Tengah	Banyumas	76.30	70.51	8.76	117.13	68.85	23.82	17.93	12.53
3,303	Jawa Tengah	Purbalingga	63.60	90.20	0.00	124.63	68.68	18.20	22.37	15.03
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,374	Jawa Tengah	Kota Semarang	93.80	100.00	0.00	77.28	88.81	47.69	6.54	3.98
3,375	Jawa Tengah	Kota Pekalongan	86.60	99.03	0.00	108.76	96.43	34.17	10.34	6.60
3,376	Jawa Tengah	Kota Tegal	91.20	94.06	0.00	80.83	85.97	31.62	12.89	7.47
3,401	DI Yogyakarta	Kulon Progo	35.30	100.00	12.50	192.23	90.11	35.95	7.47	17.39
3,402	DI Yogyakarta	Bantul	67.90	100.00	74.67	89.55	92.91	48.86	6.26	12.92
3,403	DI Yogyakarta	Gunung Kidul	36.40	100.00	4.86	181.09	89.10	23.23	16.12	16.61
3,404	DI Yogyakarta	Sleman	20.50	100.00	70.93	12.95	92.94	56.92	4.07	7.41
3,471	DI Yogyakarta	Kota Yogyakarta	65.50	100.00	100.00	90.99	90.34	61.93	4.94	6.84
3,501	Jawa Timur	Pacitan	93.00	91.30	14.62	121.37	61.59	18.65	14.38	13.67
3,502	Jawa Timur	Ponorogo	86.90	95.06	2.28	114.65	59.55	27.34	16.87	9.64
3,503	Jawa Timur	Trenggalek	84.20	100.00	0.00	112.60	71.06	19.29	22.25	10.98
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,579	Jawa Timur	Kota Batu	42.50	100.00	0.00	88.20	68.98	41.31	17.85	3.81
3,601	Banten	Pandeglang	43.14	0.21	6.78	28.14	98.60	15.52	21.94	9.42
3,602	Banten	Lebak	14.27	53.86	61.05	83.63	121.60	9.60	30.75	8.30
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,674	Banten	Kota Tangerang Selatan	76.46	97.28	100.00	32.21	83.20	63.00	7.94	1.68

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI

1. $$\frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{u_1^{'} v_1 - v_1^{'} u_1}{v_1^2}$$

$$u_1 = z_{i1}\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_1^{'} = \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right) \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i^T + z_{i1}\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i\, \mathbf{x}_i^T + \frac{z_{i1}\, \mu_{i1}^2\, \varphi_1\, r_1 \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)}$$

$$v_1 = \left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1} - \varphi_1\, \mu_{i1}\, r_1\right)$$

$$v_1^{'} = \varphi_1\, \mu_{i1} \left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1} - \varphi_1\, \mu_{i1}\, r_1\right) \mathbf{x}_i^T$$

$$+ \left(\varphi_1\, \mu_{i1}\, \mathbf{x}_i^T - \varphi_1\, \mu_{i1}\, r_1\, \mathbf{x}_i^T - \frac{\varphi_1^2\, \mu_{i1}^2\, r_1 \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)} \right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)$$

2. $$\frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{u_2^{'} v_2 - v_2^{'} u_2}{v_2^2}$$

$$u_2 = z_{i2}\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_2^{'} = \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right) \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \mathbf{x}_i^T + z_{i2}\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i\, \mathbf{x}_i^T + \frac{z_{i2}\, \mu_{i2}^2\, \varphi_2\, r_2 \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)}$$

$$v_2 = \left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2} - \varphi_2\, \mu_{i2}\, r_2\right)$$

$$v_2^{'} = \varphi_2\, \mu_{i2} \left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2} - \varphi_2\, \mu_{i2}\, r_2\right) \mathbf{x}_i^T$$

$$+ \left(\varphi_2\, \mu_{i2}\, \mathbf{x}_i^T - \varphi_2\, \mu_{i2}\, r_2\, \mathbf{x}_i^T - \frac{\varphi_2^2\, \mu_{i2}^2\, r_2 \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)} \right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)$$

3. $$\frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \boldsymbol{\beta}_3^T} = \frac{u_3^{'} v_3 - v_3^{'} u_3}{v_3^2}$$

$$u_3 = z_{i3}\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_3^{'} = \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right) \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \mathbf{x}_i^T + z_{i3}\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i\, \mathbf{x}_i^T + \frac{z_{i3}\, \mu_{i3}^2\, \varphi_3\, r_3 \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)}$$

$$v_3 = \left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3} - \varphi_3\, \mu_{i3}\, r_3\right)$$

$$v_3^{'} = \varphi_3\, \mu_{i3} \left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3} - \varphi_3\, \mu_{i3}\, r_3\right) \mathbf{x}_i^T$$

$$+ \left(\varphi_3\, \mu_{i3}\, \mathbf{x}_i^T - \varphi_3\, \mu_{i3}\, r_3\, \mathbf{x}_i^T - \frac{\varphi_3^2\, \mu_{i3}^2\, r_3 \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i^T}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)} \right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

4. $$\frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \varphi_1^2} = \frac{u_4^{'} v_4 - v_4^{'} u_4}{v_4^2}$$

$$u_4 = z_{i1}\, \mu_{i1}^2 \left(r_1 - 1\right)^2$$

$$u_4^{'} = \mu_{i1}^2 \left(r_1 - 1\right)^2 \frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} + \frac{2\, z_{i1}\, \mu_{i1}^3\, r_1 \left(r_1 - 1\right)^2}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)}$$

$$v_4 = \left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1} - \varphi_1\, \mu_{i1}\, r_1\right)$$

$$v_4^{'} = \mu_{i1} + \varphi_1\, \mu_{i1}^2 - \varphi_1\, \mu_{i1}^2\, r_1 + \left(\mu_{i1} - \mu_{i1}\, r_1 - \frac{\varphi_1\, \mu_{i1}^2\, r_1 \left(r_1 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)$$

5. $$\frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \varphi_2^2} = \frac{u_5^{'} v_5 - v_5^{'} u_5}{v_5^2}$$

$$u_5 = z_{i2}\, \mu_{i2}^2 \left(r_2 - 1\right)^2$$

$$u_5^{'} = \mu_{i2}^2 \left(r_2 - 1\right)^2 \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} + \frac{2\, z_{i2}\, \mu_{i2}^3\, r_2 \left(r_2 - 1\right)^2}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)}$$

$$v_5 = \left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2} - \varphi_2\, \mu_{i2}\, r_2\right)$$

$$v_5^{'} = \mu_{i2} + \varphi_2\, \mu_{i2}^2 - \varphi_2\, \mu_{i2}^2\, r_2 + \left(\mu_{i2} - \mu_{i2}\, r_2 - \frac{\varphi_2\, \mu_{i2}^2\, r_2 \left(r_2 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)$$

6. $$\frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \varphi_3^2} = \frac{u_5^{'} v_6 - v_6^{'} u_6}{v_6^2}$$

$$u_6 = z_{i3}\, \mu_{i3}^2 \left(r_3 - 1\right)^2$$

$$u_6^{'} = \mu_{i3}^2 \left(r_3 - 1\right)^2 \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} + \frac{2\, z_{i3}\, \mu_{i3}^3\, r_3 \left(r_3 - 1\right)^2}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)}$$

$$v_6 = \left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3} - \varphi_3\, \mu_{i3}\, r_3\right)$$

$$v_6^{'} = \mu_{i3} + \varphi_3\, \mu_{i3}^2 - \varphi_3\, \mu_{i3}^2\, r_3 + \left(\mu_{i3} - \mu_{i3}\, r_3 - \frac{\varphi_3\, \mu_{i3}^2\, r_3 \left(r_3 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

7. $$\frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \varphi_1} = \frac{u_7^{'} v_4 - v_4^{'} u_7}{v_4^2}$$

$$u_7 = z_{i1}\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_7^{'} = \mu_{i1} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i + \frac{z_{i1}\, \mu_{i1}^2\, r_1 \left(r_1 - 1\right) \mathbf{x}_i}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)}$$

$$v_4 = \left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1} - \varphi_1\, \mu_{i1}\, r_1\right)$$

$$v_4^{'} = \mu_{i1} + \varphi_1\, \mu_{i1}^2 - \varphi_1\, \mu_{i1}^2\, r_1 + \left(\mu_{i1} - \mu_{i1}\, r_1 - \frac{\varphi_1\, \mu_{i1}^2\, r_1 \left(r_1 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{i1} \left(r_1 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{i1}\right)$$

8. $$\frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \varphi_2} = \frac{u_8^{'} v_5 - v_5^{'} u_8}{v_5^2}$$

$$u_8 = z_{i2}\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_8^{'} = \mu_{i2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i + \frac{z_{i2}\, \mu_{i2}^2\, r_2 \left(r_2 - 1\right) \mathbf{x}_i}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)}$$

$$v_5 = \left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2} - \varphi_2\, \mu_{i2}\, r_2\right)$$

$$v_5^{'} = \mu_{i2} + \varphi_2\, \mu_{i2}^2 - \varphi_2\, \mu_{i2}^2\, r_2 + \left(\mu_{i2} - \mu_{i2}\, r_2 - \frac{\varphi_2\, \mu_{i2}^2\, r_2 \left(r_2 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{i2} \left(r_2 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{i2}\right)$$

9. $$\frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \varphi_3} = \frac{u_9^{'} v_6 - v_6^{'} u_9}{v_6^2}$$

$$u_9 = z_{i3}\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i$$

$$u_9^{'} = \mu_{i3} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i + \frac{z_{i3}\, \mu_{i3}^2\, r_3 \left(r_3 - 1\right) \mathbf{x}_i}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)}$$

$$v_6 = \left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3} - \varphi_3\, \mu_{i3}\, r_3\right)$$

$$v_6^{'} = \mu_{i3} + \varphi_3\, \mu_{i3}^2 - \varphi_3\, \mu_{i3}^2\, r_3 + \left(\mu_{i3} - \mu_{i3}\, r_3 - \frac{\varphi_3\, \mu_{i3}^2\, r_3 \left(r_3 - 1\right)}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3} \left(r_3 - 1\right)\right)}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}\right)$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

10. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\mu_{i1}\, \mathbf{x}_i\, \mathbf{x}_i^T}{\left(1+\varphi_1 \mu_{i1}\right)^2} \left(1 + \frac{2\,\varphi_1 \left(y_{i1} - \mu_{i1} \right)}{1+\varphi_1\, \mu_{i1}} \right) - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} - \left(-\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \right)^2 \right]$$

11. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i12}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right]$$

12. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i13}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right]$$

13. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_1} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{2\left(y_{i1} - \mu_{i1}\right)\mu_{i1}\, \mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_1 \mu_{i1}\right)^3} - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_1} - \left(\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \right)^2 \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} \right]$$

14. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i12}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \right]$$

15. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_3} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i13}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

16. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1 + Q_2 - \left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i^T \right]$$

17. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T} = \left[-\left(1 + Q_2 - \left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i^T \right]$$

18. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \mathbf{x}_i^T \right]$$

19. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\mu_{i2}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}{\left(1+\varphi_2\mu_{i2}\right)^2}\left(1 + \frac{2\varphi_2\left(y_{i2} - \mu_{i2}\right)}{1+\varphi_2\mu_{i2}}\right) - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} - \left(-\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \right)^2 \right]$$

20. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i23}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T} \right]$$

21. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_1} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i12}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

22. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_2} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{2\left(y_{i2}-\mu_{i2}\right)\mu_{i2}\,\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_2\mu_{i2}\right)^3} - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2}\frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_2} - \left(\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2}\right)^2 \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \right]$$

23. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_3} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i23}}{\left(1+Q_2\right)} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right] - \frac{\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \right]$$

24. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T \right]$$

25. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T \right]$$

26. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\mathbf{x}_i^T \right]$$

27. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\mu_{i3}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}{\left(1+\varphi_3\mu_{i3}\right)^2}\left(1+\frac{2\varphi_3\left(y_{i3}-\mu_{i3}\right)}{1+\varphi_3\mu_{i3}}\right) - \frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{1+Q_2}\frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T} - \left(-\frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{1+Q_2}\frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3}\right)^2 \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

28. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_1} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i13}}{(1+Q_2)} - \left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) + \gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{(1+Q_2)^2} \right) \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} \right]$$

29. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i23}}{(1+Q_2)} - \left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right) \right]}{(1+Q_2)^2} \right) \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \right]$$

30. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_3} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{2\left(y_{i3} - \mu_{i3}\right)\mu_{i3}\,\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_3 \mu_{i3}\right)^3} - \frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_3} - \left(\frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{1+Q_2} \right)^2 \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \right]$$

31. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{(1+Q_2)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \mathbf{x}_i^T \right]$$

32. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2 - \left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)}{(1+Q_2)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \mathbf{x}_i^T \right]$$

33. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2 - \left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right) + \gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right) \right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)}{(1+Q_2)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3} \mathbf{x}_i^T \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

34. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mu_{i1}^2 y_{i1}}{\left(1+\varphi_1\mu_{i1}\right)^2} - \frac{y_{i1}^2\left(y_{i1}-1\right)}{\left(1+\varphi_1 y_{i1}\right)^2} + \frac{2\mu_{i1}^2\left(y_{i1}-\mu_{i1}\right)}{\left(1+\varphi_1\mu_{i1}\right)^3} - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2}\frac{\partial^2 z_{i1}}{\partial \varphi_1^2} - \left(-\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2}\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\right)^2\right]$$

35. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\gamma_{i12}}{1+Q_2} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]}{\left(1+Q_2\right)^2}\right)\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2}\right]$$

36. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\gamma_{i13}}{1+Q_2} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right]}{\left(1+Q_2\right)^2}\right)\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3}\right]$$

37. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\mathbf{x}_i\right]$$

38. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\mathbf{x}_i\right]$$

39. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)+\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\right] \times \frac{\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2}\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1}\mathbf{x}_i\right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

40. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mu_{i2}^2 y_{i2}}{\left(1+\varphi_2 \mu_{i2}\right)^2} - \frac{y_{i2}^2 \left(y_{i2}-1\right)}{\left(1+\varphi_2 y_{i2}\right)^2} + \frac{2\mu_{i2}^2 \left(y_{i2}-\mu_{i2}\right)}{\left(1+\varphi_2 \mu_{i2}\right)^3} - \frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i2}}{\partial \varphi_2^2} - \left(-\frac{\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]$$

41. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\gamma_{i23}}{1+Q_2} - \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right) \right] \times \frac{\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right) \right]}{\left(1+Q_2\right)^2} \right) \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \right]$$

42. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2 - \left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right) \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right) \right] \right) \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \mathbf{x}_i \right)\right]$$

43. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right) \right] \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \mathbf{x}_i \right]$$

44. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2 - \left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right) \left[\gamma_{i12}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right) \right] \right) \times \frac{\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i2}}{\partial \varphi_2} \mathbf{x}_i \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

45. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mu_{i3}^2 y_{i3}}{\left(1+\varphi_3 \mu_{i3}\right)^2} - \frac{y_{i3}^2 \left(y_{i3}-1\right)}{\left(1+\varphi_3 y_{i3}\right)^2} + \frac{2\mu_{i3}^2 \left(y_{i3}-\mu_{i3}\right)}{\left(1+\varphi_3 \mu_{i3}\right)^3} - \frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial^2 z_{i3}}{\partial \varphi_3^2} - \left(-\frac{\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{1+Q_2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \right)^2 \right]$$

46. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right) \right] \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \mathbf{x}_i \right]$$

47. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \mathbf{x}_i \right]$$

48. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(1+Q_2-\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)\left[\gamma_{i13}\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)+\gamma_{i23}\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\right]\right) \times \frac{\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \frac{\partial z_{i3}}{\partial \varphi_3} \mathbf{x}_i \right]$$

49. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)}{1+Q_2} \right)^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

50. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)^2 \left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

51. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}}-z_{i2}\right)^2 \left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{\left(1+Q_2\right)^2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

52. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13} \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\frac{\left(e^{-y_{i1}}-z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i3}}-z_{i3}\right)}{1+Q_2} \right)^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

LAMPIRAN 2 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD: TGPR MODIFIKASI (LANJUTAN)

53. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\left(e^{-y_{i1}} - z_{i1}\right)\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)^2}{\left(1+Q_2\right)^2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

54. $$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{23} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\frac{\left(e^{-y_{i2}} - z_{i2}\right)\left(e^{-y_{i3}} - z_{i3}\right)}{1+Q_2} \right)^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right]$$

LAMPIRAN 3 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD TERBOBOTI: GWTGPR

1. $$\frac{\partial^2 z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} = \frac{u_1^{'} v_1 - v_1^{'} u_1}{v_1^2}$$

$$u_1 = z_{j1}\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\mathbf{x}_i$$

$$u_1^{'} = \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\frac{\partial z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)}\mathbf{x}_j^T + z_{j1}\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\mathbf{x}_j\,\mathbf{x}_j^T$$

$$+\frac{z_{j1}\,\mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i)\varphi_1\,r_1(r_1 - 1)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\right)}$$

$$v_1 = \left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i) - \varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)r_1\right)$$

$$v_1^{'} = \varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i) - \varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)r_1\right)\mathbf{x}_j^T$$

$$+\left(\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i^T - \varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)r_1\,\mathbf{x}_j^T\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi_1^2\,\mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i)r_1(r_1 - 1)\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\right)}\right)\left(1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)$$

2. $$\frac{\partial^2 z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} = \frac{u_2^{'} v_2 - v_2^{'} u_2}{v_2^2}$$

$$u_2 = z_{j2}\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\mathbf{x}_j$$

$$u_2^{'} = \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\frac{\partial z_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)}\mathbf{x}_j^T + z_{j2}\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\mathbf{x}_j\,\mathbf{x}_j^T$$

$$+\frac{z_{j2}\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)\varphi_2\,r_2(r_2 - 1)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\right)}$$

$$v_2 = \left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)r_2\right)$$

$$v_2^{'} = \varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)r_2\right)\mathbf{x}_j^T$$

$$+\left(\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j^T - \varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)r_2\,\mathbf{x}_j^T\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi_2^2\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)r_2(r_2 - 1)\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\right)}\right)\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)$$

LAMPIRAN 3 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD TERBOBOTI: GWTGPR (LANJUTAN)

3. $$\frac{\partial^2 z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \frac{u_3^{'} v_3 - v_3^{'} u_3}{v_3^2}$$

$$u_3 = z_{j3}\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\mathbf{x}_j$$

$$u_3^{'} = \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\frac{\partial z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)}\mathbf{x}_j^T + z_{j3}\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\mathbf{x}_j\,\mathbf{x}_j^T$$

$$+\frac{z_{j3}\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)\varphi_3\,r_3(r_3 - 1)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\right)}$$

$$v_3 = \left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)r_3\right)$$

$$v_3^{'} = \varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)r_3\right)\mathbf{x}_j^T$$

$$+\left(\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j^T - \varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)r_3\,\mathbf{x}_j^T\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi_3^2\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)r_3(r_3 - 1)\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\right)}\right)\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)$$

4. $$\frac{\partial^2 z_{j1}}{\partial \varphi_1^2} = \frac{u_4^{'} v_4 - v_4^{'} u_4}{v_4^2}$$

$$u_4 = z_{i1}\,\mu_{i1}^2(r_1 - 1)^2$$

$$u_4^{'} = \mu_{i1}^2(r_1 - 1)^2\frac{\partial z_{i1}}{\partial \varphi_1} + \frac{2\,z_{i1}\,\mu_{i1}^3\,r_1(r_1 - 1)^2}{\left(1+\varphi_1\,\mu_{i1}\right)\left(1-\varphi_1\,\mu_{i1}(r_1 - 1)\right)}$$

$$v_4 = \left(1+\varphi_1\,\mu_{i1}\right)\left(1+\varphi_1\,\mu_{i1} - \varphi_1\,\mu_{i1}\,r_1\right)$$

$$v_4^{'} = \mu_{i1} + \varphi_1\,\mu_{i1}^2 - \varphi_1\,\mu_{i1}^2\,r_1$$

$$+\left(\mu_{i1} - \mu_{i1}\,r_1 - \frac{\varphi_1\,\mu_{i1}^2\,r_1(r_1 - 1)}{\left(1+\varphi_1\,\mu_{i1}\right)\left(1-\varphi_1\,\mu_{i1}(r_1 - 1)\right)}\right)\left(1+\varphi_1\,\mu_{i1}\right)$$

LAMPIRAN 3 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD TERBOBOTI: GWTGPR (LANJUTAN)

5. $$\frac{\partial^2 z_{j2}}{\partial \varphi_2^2} = \frac{u_5^{'} v_5 - v_5^{'} u_5}{v_5^2}$$

$$u_5 = z_{j2}\, \mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)^2$$

$$u_5^{'} = \mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)^2 \frac{\partial z_{j2}}{\partial \varphi_2} + \frac{2\, z_{j2}\, \mu_{j2}^3(\mathbf{u}_i) r_2 (r_2 - 1)^2}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\right)}$$

$$v_5 = \left(1 + \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i) r_2\right)$$

$$v_5^{'} = \mu_{j2}(\mathbf{u}_i) + \varphi_2\, \mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\, \mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i) r_2 + \left(\mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \mu_{j2}(\mathbf{u}_i) r_2 - \frac{\varphi_2\, \mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i) r_2 (r_2 - 1)}{\left(1 + \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\right)}\right)\left(1 + \varphi_2\, \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)$$

6. $$\frac{\partial^2 z_{j3}}{\partial \varphi_3^2} = \frac{u_5^{'} v_6 - v_6^{'} u_6}{v_6^2}$$

$$u_6 = z_{j3}\, \mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)^2$$

$$u_6^{'} = \mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)^2 \frac{\partial z_{j3}}{\partial \varphi_3} + \frac{2\, z_{j3}\, \mu_{j3}^3(\mathbf{u}_i) r_3 (r_3 - 1)^2}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{i3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{i3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\right)}$$

$$v_6 = \left(1 + \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i) r_3\right)$$

$$v_6^{'} = \mu_{i3}(\mathbf{u}_i) + \varphi_3\, \mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\, \mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i) r_3 + \left(\mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \mu_{j3}(\mathbf{u}_i) r_3 - \frac{\varphi_3\, \mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i) r_3 (r_3 - 1)}{\left(1 + \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\right)}\right)\left(1 + \varphi_3\, \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)$$

7. $$\frac{\partial^2 z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\varphi_1} = \frac{u_7^{'} v_4 - v_4^{'} u_7}{v_4^2}$$

$$u_7 = z_{j1}\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\mathbf{x}_j$$

$$u_7^{'} = \mu_{j1}(\mathbf{u}_i) \frac{\partial z_{j1}}{\partial \varphi_1}(r_1 - 1)\mathbf{x}_i + \frac{z_{j1}\, \mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i) r_1 (r_1 - 1)\mathbf{x}_j}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\right)}$$

$$v_4 = \left(1 + \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i) - \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i) r_1\right)$$

$$v_4^{'} = \mu_{j1}(\mathbf{u}_i) + \varphi_1\, \mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i) - \varphi_1\, \mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i) r_1 + \left(\mu_{j1}(\mathbf{u}_i) - \mu_{j1}(\mathbf{u}_i) r_1 - \frac{\varphi_1\, \mu_{j1}^2(\mathbf{u}_i) r_1 (r_1 - 1)}{\left(1 + \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 - \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)(r_1 - 1)\right)}\right)\left(1 + \varphi_1\, \mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)$$

LAMPIRAN 3 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD TERBOBOTI: GWTGPR (LANJUTAN)

8. $$\frac{\partial^2 z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\varphi_2} = \frac{u_8^{'} v_5 - v_5^{'} u_8}{v_5^2}$$

$$u_8 = z_{j2}\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2 - 1)\mathbf{x}_j$$

$$u_8^{'} = \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\frac{\partial z_{j2}}{\partial \varphi_2}(r_2 - 1)\mathbf{x}_i + \frac{z_{j2}\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)r_2(r_2 - 1)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2-1)\right)}$$

$$v_5 = \left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)r_2\right)$$

$$v_5^{'} = \mu_{j2}(\mathbf{u}_i) + \varphi_2\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i) - \varphi_2\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)r_2 + \left(\mu_{j2}(\mathbf{u}_i) - \mu_{j2}(\mathbf{u}_i)r_2 - \frac{\varphi_2\,\mu_{j2}^2(\mathbf{u}_i)r_2(r_2-1)}{\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)(r_2-1)\right)}\right)\left(1+\varphi_2\,\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)$$

9. $$\frac{\partial^2 z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)\varphi_3} = \frac{u_9^{'} v_6 - v_6^{'} u_9}{v_6^2}$$

$$u_9 = z_{j3}\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3 - 1)\mathbf{x}_i$$

$$u_9^{'} = \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\frac{\partial z_{j3}}{\partial \varphi_3}(r_3 - 1)\mathbf{x}_i + \frac{z_{j3}\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)r_3(r_3 - 1)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3-1)\right)}$$

$$v_6 = \left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)r_3\right)$$

$$v_6^{'} = \mu_{j3}(\mathbf{u}_i) + \varphi_3\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i) - \varphi_3\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)r_3 + \left(\mu_{j3}(\mathbf{u}_i) - \mu_{j3}(\mathbf{u}_i)r_3 - \frac{\varphi_3\,\mu_{j3}^2(\mathbf{u}_i)r_3(r_3-1)}{\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1-\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)(r_3-1)\right)}\right)\left(1+\varphi_3\,\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)$$

10. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[-\frac{\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\,\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_1\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)^2}\left(1+\frac{2\varphi_1\left(y_{j1}-\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)\right)}{1+\varphi_1\,\mu_{j1}(\mathbf{u}_i)}\right) - \frac{\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)} - \left(-\frac{\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)}\right)^2\right]$$

LAMPIRAN 3 TURUNAN KEDUA FUNGSI LIKELIHOOD TERBOBOTI: GWTGPR (LANJUTAN)

11. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[\left(\frac{\gamma_{j12}}{(1+\mathbb{Q}_4)} - \left[\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right]}{(1+\mathbb{Q}_4)^2}\right)\frac{\partial z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)}\frac{\partial z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)}\right]$$

12. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[\left(\frac{\gamma_{j13}}{(1+\mathbb{Q}_4)} - \left[\gamma_{j13}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right) + \gamma_{j13}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right]}{(1+\mathbb{Q}_4)^2}\right)\frac{\partial z_{j1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)}\frac{\partial z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]$$

13. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[-\frac{\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_2\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)^2}\left(1+\frac{2\varphi_2\left(y_{i2}-\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)\right)}{1+\varphi_2\mu_{j2}(\mathbf{u}_i)}\right) - \frac{\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} - \left(-\frac{\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)}\right)^2\right]$$

14. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[\left(\frac{\gamma_{j23}}{(1+\mathbb{Q}_4)} - \left[\gamma_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)\right] \times \frac{\left[\gamma_{j13}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)\right]}{(1+\mathbb{Q}_4)^2}\right)\frac{\partial z_{j2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)}\frac{\partial z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]$$

15. $$\frac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[-\frac{\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\varphi_3\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)^2}\left(1+\frac{2\varphi_3\left(y_{j3}-\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)\right)}{1+\varphi_3\mu_{j3}(\mathbf{u}_i)}\right) - \frac{\gamma_{j13}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)} - \left(-\frac{\gamma_{j13}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \gamma_{j23}\left(e^{-y_{j2}} - z_{j2}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)}\right)^2\right]$$

LAMPIRAN 4 MATRIKS HESSIAN: TGPR MODIFIKASI

$$
\begin{bmatrix}
\left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_1}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_2}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \varphi_3}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9} \\
 & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_1}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_2}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \varphi_3}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9} \\
 & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_3^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_1}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_2}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \varphi_3}\right]_{9\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9} \\
 & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1^2}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_1 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}}\right]_{1\times9} \\
 & & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2^2}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_2 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}}\right]_{1\times9} \\
 & & \text{simetris} & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3^2}\right]_{1\times1} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{12}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{13}}\right]_{1\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi_3 \partial \boldsymbol{\beta}_{23}}\right]_{1\times9} \\
 & & & & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{12}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{12} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9} \\
 & & & & & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13} \partial \boldsymbol{\beta}_{13}^T}\right]_{9\times9} & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{13} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9} \\
 & & & & & & & & \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{23} \partial \boldsymbol{\beta}_{23}^T}\right]_{9\times9}
\end{bmatrix}_{57\times57}
$$

LAMPIRAN 5 MATRIKS HESSIAN PER LOKASI: GWTGPR

$$\begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} & \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} & \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} \\ & \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} & \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} \\ \text{simetris} & & \left[\dfrac{\partial^2 \mathbb{Q}_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\beta}_3^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{9\times 9} \end{bmatrix}_{57\times 57}$$

LAMPIRAN 6 JUMLAH PARAMETER EFEKTIF MODEL GWTGPR

Penaksiran parameter menggunakan iterasi Newton-Raphson secara umum dinyatakan sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_l\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_l\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_l\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_l\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right),$$

Jumlah parameter efektif untuk $\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)} - \left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(-\frac{\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}_1\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}}\right)\right.\right.$$

$$-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$\left.\left.-\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2\right)\right]^{-1}$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(\frac{\left(y_{j1}-\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{\mu}_{j1}\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\right)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left[\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{x}_j w_{ij}\left(\frac{\hat{y}_{j1}{}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)}{1+\varphi_1\hat{y}_{j1}{}^{(h)}}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$\left.\left.\left.+\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2\right)\mathbf{x}_j^T\right)\right]^{-1}$$

$$\times\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j w_{ij}\left(\frac{\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)^2}-\frac{\left[\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)\right)\right.$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j w_{ij}\left(\frac{\hat{y}_{j1}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)}{1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$\left.\left.\left.+\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2\right)\mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{x}_j w_{ij}\left(\frac{\hat{y}_{j1}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)}{1+\varphi_1\hat{y}_{j1}^{(h)}}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$\left.\left.\left.+\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2\right)\mathbf{x}_j^T\right)\right]^{-1}$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{x}_j w_{ij}\left(\frac{\hat{y}_{j1}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)}{1+\varphi_1\hat{y}_{j1}^{(h)}}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$

$$\left.+\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2\right)$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)+\frac{1}{a_{1ij}}\left(\frac{\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}^{(h)}\right)^2}-\frac{\left[\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)\right)\right)\right]$$

LAMPIRAN 6 JUMLAH PARAMETER EFEKTIF MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

Dalam pendekatan matriks, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h+1)} = \left(\mathbf{X}^T\,\mathbf{W}\left(\mathbf{u}_i\right)\,\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\,\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\,\mathbf{W}\left(\mathbf{u}_i\right)\,\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}\,\mathbf{z}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)},$$

dengan

$\mathbf{W}\left(\mathbf{u}_i\right)$ adalah matriks pembobot ukuran $n \times n$ untuk lokasi i

$$\mathbf{W}\left(\mathbf{u}_i\right) = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{i2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_{in} \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}$ adalah matriks pembobot varians untuk lokasi i pada iterasi ke$-h$

$$\mathbf{A}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)} = \begin{bmatrix} a_{1i1}{}^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1i2}{}^{(h)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{1in}{}^{(h)} \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\begin{aligned} a_{1ij}^{(h)} = {} & \frac{\hat{y}_{j1}{}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\,\hat{\varphi}_1\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)}{1+\varphi_1\,\hat{y}_{j1}{}^{(h)}}\right) \\ & + \frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\,\frac{\partial^2 z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_1^T\left(\mathbf{u}_i\right)} \\ & + \left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\,\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2, \end{aligned}$$

dan $\mathbf{z}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)}$ adalah *adjusted vector* dari variabel respon pada iterasi ke$-h$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1\left(\mathbf{u}_i\right)^{(h)} = {} & \mathbf{x}_j^T\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right) + \frac{1}{a_{1ij}}\left(\frac{\left(y_{j1}-\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)}{\left(1+\hat{\varphi}_1\hat{y}_{j1}{}^{(h)}\right)^2}\right. \\ & \left. - \frac{\left[\hat{\gamma}_{j12}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)+\hat{\gamma}_{j13}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{j3}}-z_{j3}\right)\right]}{1+\mathbb{Q}_4}\,\frac{\partial z_{j1(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\left(\mathbf{u}_i\right)}\right), \end{aligned}$$

LAMPIRAN 6 JUMLAH PARAMETER EFEKTIF MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

Mengikuti metode yang dikembangkan oleh Nakaya (2005), banyaknya parameter efektif untuk $\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{u}_i)$ pada model GWTGPR, dinotasikan dengan v_{211}, diperoleh dari *trace* matriks $\mathbf{S}_1$ di mana elemen-elemennya adalah

$$s_{1j} = \mathbf{x}_j \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_i),$$

dengan $\mathbf{x}_j$ adalah baris ke$-j$ matriks $\mathbf{X}$.

Dengan menerapkan prosedur yang sama untuk $\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)$ dan $\boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)$, maka jumlah parameter efektif sumbangan $\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)$ dan $\boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{u}_i)$, dinotasikan dengan v_{212} dan v_{213}, diperoleh dari *trace* matriks $\mathbf{S}_2$ dan $\mathbf{S}_3$ di mana masing-masing elemennya adalah

$$s_{2j} = \mathbf{x}_j \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_2(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_2(\mathbf{u}_i),$$

$$s_{3j} = \mathbf{x}_j \left(\mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_3(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_i)\, \mathbf{A}_3(\mathbf{u}_i),$$

dengan elemen matriks $\mathbf{A}_2(\mathbf{u}_i)$ dan $\mathbf{A}_3(\mathbf{u}_i)$ masing-masing adalah

$$\begin{aligned} a_{2ij}^{(h)} = {} & \frac{\hat{y}_{j2}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_2 \hat{y}_{j2}^{(h)}\right)^2} \left(1 + \frac{2\hat{\varphi}_2\left(y_{j2} - \hat{y}_{j2}^{(h)}\right)}{1+\varphi_2 \hat{y}_{j2}^{(h)}}\right) \\ & + \frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \hat{\gamma}_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial^2 z_{j2(s)}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)\, \partial \boldsymbol{\beta}_2^T(\mathbf{u}_i)} \\ & + \left(-\frac{\hat{\gamma}_{j12}\left(e^{-y_{j1}} - z_{j1}\right) + \hat{\gamma}_{j23}\left(e^{-y_{j3}} - z_{j3}\right)}{1+\mathbb{Q}_4} \frac{\partial z_{j2(s)}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{u}_i)}\right)^2, \end{aligned}$$

LAMPIRAN 6 JUMLAH PARAMETER EFEKTIF MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

$$a_{3ij}^{(h)} = \frac{\hat{y}_{j3}^{(h)}}{\left(1+\hat{\varphi}_3\hat{y}_{j3}^{(h)}\right)^2}\left(1+\frac{2\hat{\varphi}_3\left(y_{j3}-\hat{y}_{j3}^{(h)}\right)}{1+\varphi_3\hat{y}_{j3}^{(h)}}\right)$$
$$+\frac{\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j1}}-z_{j1}\right)+\hat{\gamma}_{j23}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial^2 z_{j3(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_3\left(\mathbf{u}_i\right)\partial\boldsymbol{\beta}_3^T\left(\mathbf{u}_i\right)}$$
$$+\left(-\frac{\hat{\gamma}_{j13}\left(e^{-y_{j1}}-z_{j1}\right)+\hat{\gamma}_{j23}\left(e^{-y_{j2}}-z_{j2}\right)}{1+\mathbb{Q}_4}\frac{\partial z_{j3(s)}}{\partial\boldsymbol{\beta}_3\left(\mathbf{u}_i\right)}\right)^2.$$

Misalkan $v_{211}=tr\left(\mathbf{S}_1\right)$, $v_{212}=tr\left(\mathbf{S}_2\right)$, dan $v_{213}=tr\left(\mathbf{S}_3\right)$, maka jumlah parameter efektif model GWTGPR adalah

$v_2 = v_{21}+v_{22}+v_{23}$,

dengan $v_{21}=v_{211}+v_{212}+v_{213}$, merupakan jumlah parameter sumbangan dari $\boldsymbol{\beta}_l\left(l=1,2,3\right)$. Sementara itu, v_{22} dan v_{23} masing-masing adalah jumlah parameter karena φ_l dan $\boldsymbol{\beta}_{lm}$. Karena tidak ada variasi spasial untuk φ_l dan $\boldsymbol{\beta}_{lm}$, maka kontribusi $\varphi_l\left(l=1,2,3\right)$ pada jumlah parameter efektif dalam model GWTGPR adalah $v_{22}=g=3$ dan kontribusi $\boldsymbol{\beta}_{lm}\left(l,m=1,2,3;\ l<m\right)$ pada jumlah parameter efektif dalam model GWTGPR adalah $v_{23}=3\left(p+1\right)$. Dengan demikian, jumlah parameter efektif model GWTGPR adalah

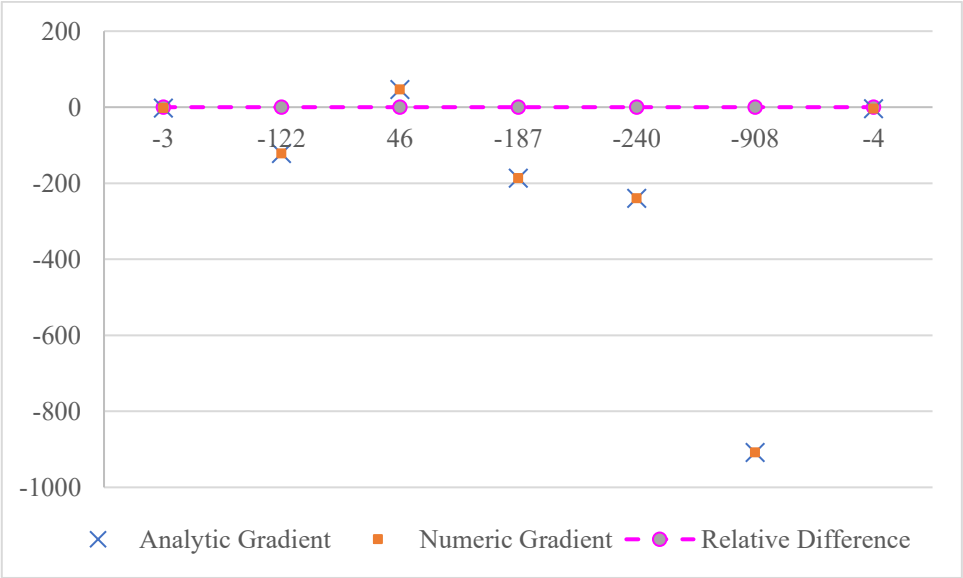
$$\begin{aligned} v_2 &= v_{21}+v_{22}+v_{23} \\ &= tr\left(\mathbf{S}_1\right)+tr\left(\mathbf{S}_2\right)+tr\left(\mathbf{S}_3\right)+3+3(p+1), \\ &= tr\left(\mathbf{S}_1\right)+tr\left(\mathbf{S}_2\right)+tr\left(\mathbf{S}_3\right)+3p+6, \end{aligned}$$

dengan p adalah jumlah variabel bebas dalam model GWTGPR.

LAMPIRAN 7 VALIDASI TURUNAN PARSIAL PERTAMA

Compare First Derivatives

Analytic Gradient	Numeric Gradient	Relative Difference
-2.734534	-2.734516	-6.52E-06
-122.3269	-122.3255	-1.15E-05
45.99886	45.99987	-2.18E-05
-187.0869	-187.0855	-7.49E-06
-240.0522	-240.0509	-5.61E-06
-908.4528	-908.4515	-1.47E-06
-3.792893	-3.792256	-1.68E-04
Max relative difference		2.85E-01



LAMPIRAN 8 VALIDASI TURUNAN PARSIAL KEDUA

Compare Second Derivatives

Analytic Gradient

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	-2.9E+02	-2.1E+04	-1.8E+04	-2.3E+04	-2.3E+04	-2.2E+04	-8.7E+03
[2,]	-2.1E+04	-1.5E+06	-1.3E+06	-1.6E+06	-1.7E+06	-1.6E+06	-6.3E+05
[3,]	-1.8E+04	-1.3E+06	-1.2E+06	-1.4E+06	-1.4E+06	-1.3E+06	-5.5E+05
[4,]	-2.3E+04	-1.6E+06	-1.4E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-6.8E+05
[5,]	-2.3E+04	-1.7E+06	-1.4E+06	-1.8E+06	-1.9E+06	-1.8E+06	-7.0E+05
[6,]	-2.2E+04	-1.6E+06	-1.3E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-2.0E+06	-6.3E+05
[7,]	-8.7E+03	-6.3E+05	-5.5E+05	-6.8E+05	-7.0E+05	-6.3E+05	-3.2E+05
[8,]	-4.8E+03	-3.2E+05	-2.7E+05	-3.6E+05	-3.7E+05	-3.7E+05	-1.1E+05
[9,]	-3.0E+03	-2.1E+05	-1.8E+05	-2.4E+05	-2.4E+05	-2.4E+05	-7.4E+04
[10,]	3.3E-06	2.6E-04	1.4E-04	3.1E-04	2.8E-04	4.5E-04	1.4E-04
[11,]	2.6E-04	2.0E-02	1.1E-02	2.4E-02	2.2E-02	3.4E-02	1.1E-02
[12,]	1.4E-04	1.1E-02	6.5E-03	1.3E-02	1.2E-02	2.0E-02	5.6E-03
[13,]	3.1E-04	2.4E-02	1.3E-02	2.9E-02	2.7E-02	4.3E-02	1.3E-02
[14,]	2.8E-04	2.2E-02	1.2E-02	2.7E-02	2.5E-02	4.0E-02	1.2E-02
[15,]	4.5E-04	3.4E-02	2.0E-02	4.3E-02	4.0E-02	6.7E-02	1.8E-02
[16,]	1.4E-04	1.1E-02	5.6E-03	1.3E-02	1.2E-02	1.8E-02	6.2E-03
[17,]	3.0E-05	2.3E-03	1.3E-03	2.8E-03	2.6E-03	4.2E-03	1.1E-03
[18,]	3.7E-05	2.7E-03	1.6E-03	3.4E-03	3.3E-03	5.7E-03	1.4E-03
[19,]	8.9E-06	6.7E-04	4.5E-04	8.5E-04	8.3E-04	1.4E-03	3.7E-04
[20,]	6.7E-04	5.2E-02	3.4E-02	6.4E-02	6.2E-02	1.0E-01	2.8E-02

Numeric Gradient

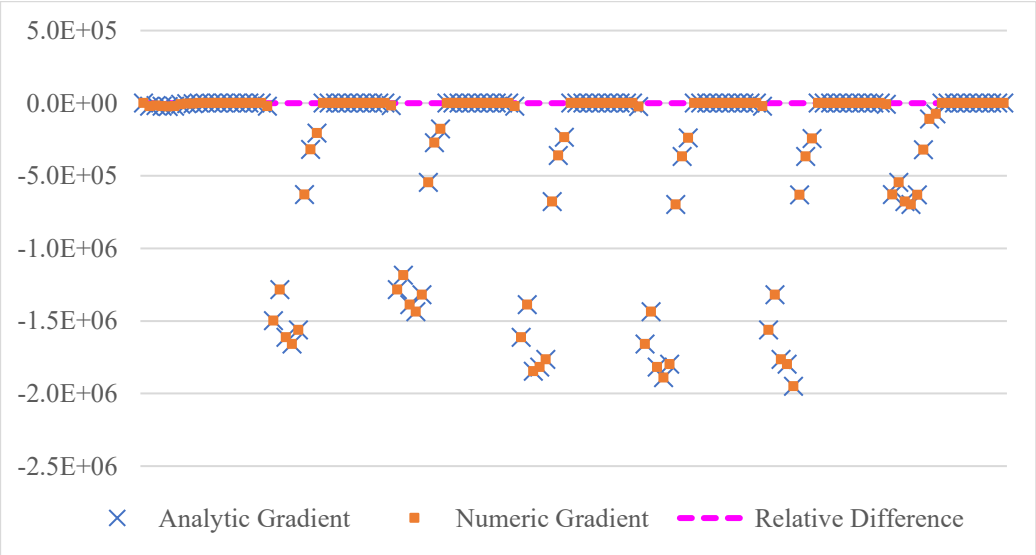
	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	-2.9E+02	-2.1E+04	-1.8E+04	-2.3E+04	-2.3E+04	-2.2E+04	-8.7E+03
[2,]	-2.1E+04	-1.5E+06	-1.3E+06	-1.6E+06	-1.7E+06	-1.6E+06	-6.3E+05
[3,]	-1.8E+04	-1.3E+06	-1.2E+06	-1.4E+06	-1.4E+06	-1.3E+06	-5.5E+05
[4,]	-2.3E+04	-1.6E+06	-1.4E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-6.8E+05
[5,]	-2.3E+04	-1.7E+06	-1.4E+06	-1.8E+06	-1.9E+06	-1.8E+06	-7.0E+05
[6,]	-2.2E+04	-1.6E+06	-1.3E+06	-1.8E+06	-1.8E+06	-2.0E+06	-6.3E+05
[7,]	-8.7E+03	-6.3E+05	-5.5E+05	-6.8E+05	-7.0E+05	-6.3E+05	-3.2E+05
[8,]	-4.8E+03	-3.2E+05	-2.7E+05	-3.6E+05	-3.7E+05	-3.7E+05	-1.1E+05
[9,]	-3.0E+03	-2.1E+05	-1.8E+05	-2.4E+05	-2.4E+05	-2.4E+05	-7.4E+04
[10,]	3.1E-06	2.4E-04	1.3E-04	2.9E-04	2.6E-04	4.2E-04	1.3E-04
[11,]	2.4E-04	1.9E-02	9.8E-03	2.2E-02	2.0E-02	3.2E-02	1.0E-02
[12,]	1.3E-04	9.8E-03	6.0E-03	1.2E-02	1.1E-02	1.8E-02	5.2E-03
[13,]	2.9E-04	2.2E-02	1.2E-02	2.7E-02	2.5E-02	4.0E-02	1.2E-02
[14,]	2.6E-04	2.0E-02	1.1E-02	2.5E-02	2.3E-02	3.7E-02	1.1E-02
[15,]	4.2E-04	3.2E-02	1.8E-02	4.0E-02	3.7E-02	6.2E-02	1.7E-02
[16,]	1.3E-04	1.0E-02	5.2E-03	1.2E-02	1.1E-02	1.7E-02	5.8E-03
[17,]	2.8E-05	2.1E-03	1.2E-03	2.6E-03	2.4E-03	3.8E-03	1.0E-03
[18,]	3.4E-05	2.5E-03	1.5E-03	3.2E-03	3.1E-03	5.3E-03	1.3E-03
[19,]	8.3E-06	6.2E-04	4.2E-04	7.8E-04	7.7E-04	1.3E-03	3.4E-04
[20,]	6.2E-04	4.8E-02	3.1E-02	5.9E-02	5.8E-02	9.4E-02	2.6E-02

LAMPIRAN 8 VALIDASI TURUNAN PARSIAL KEDUA (LANJUTAN)

Relative Difference

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	-6.9E-09	-6.6E-09	-5.1E-09	-5.7E-09	-4.9E-09	-4.5E-09	-8.2E-09
[2,]	-8.3E-09	-8.3E-09	-6.3E-09	-7.4E-09	-6.5E-09	-6.9E-09	-1.0E-08
[3,]	-6.5E-09	-6.1E-09	-5.0E-09	-5.2E-09	-4.8E-09	-4.9E-09	-7.4E-09
[4,]	-7.5E-09	-7.5E-09	-5.5E-09	-6.3E-09	-5.5E-09	-5.1E-09	-9.3E-09
[5,]	-6.7E-09	-6.7E-09	-5.1E-09	-5.5E-09	-4.6E-09	-3.7E-09	-8.1E-09
[6,]	-6.5E-09	-7.3E-09	-5.4E-09	-5.3E-09	-3.9E-09	-1.7E-10	-9.4E-09
[7,]	-9.1E-09	-9.4E-09	-6.9E-09	-8.6E-09	-7.3E-09	-8.4E-09	-9.5E-09
[8,]	-5.5E-09	-4.8E-09	-3.9E-09	-4.1E-09	-3.6E-09	-3.5E-09	-7.3E-09
[9,]	-1.5E-09	-7.2E-10	-4.9E-10	1.1E-09	1.4E-09	6.4E-09	-1.3E-09
[10,]	7.8E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02
[11,]	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02
[12,]	7.8E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02
[13,]	7.6E-02	7.6E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02
[14,]	7.7E-02	7.7E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02
[15,]	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02
[16,]	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02
[17,]	7.7E-02	7.9E-02	7.9E-02	7.8E-02	7.8E-02	7.8E-02	7.8E-02
[18,]	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02
[19,]	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.5E-02	7.6E-02
[20,]	7.6E-02	7.6E-02	7.7E-02	7.6E-02	7.6E-02	7.5E-02	7.6E-02

Max relative difference: 2



LAMPIRAN 9 UJI HETEROGENITAS DAN DEPENDENSI SPASIAL

Hipotesis pengujian heterogenitas spasial dinyatakan sebagai berikut

H_0 : Tidak ada heterogenitas spasial

H_1 : Ada heterogenitas spasial

Hasil statistik uji Breusch–Pagan (BP) pada tabel di bawah ini menunjukkan bahwa data mendukung pernyataan hipotesis bahwa terdapat heterogenitas spasial untuk kejadian kematian bayi, anak dan ibu di Pulau Jawa.

Variabel respon	Nilai statistik BP	df	*p-value*	Kesimpulan
Jumlah kematian bayi	14,98	8	0,0596	Terdapat heterogenitas spasial (α =10%)
Jumlah kematian anak	15,08	8	0,0577	Terdapat heterogenitas spasial (α =10%)
Jumlah kematian ibu	23,10	8	0,0032	Terdapat heterogenitas spasial (α =10%)

Hipotesis untuk menguji ada tidaknya dependensi spasial dinyatakan sebagai berikut

H_0 : Tidak ada dependensi spasial

H_1 : Ada dependensi spasial

Hasil statistik uji Moran's I pada tabel di bawah ini menunjukkan bahwa terdapat dependensi spasial untuk kematian anak dan ibu tetapi tidak terdapat dependensi spasial untuk kematian bayi.

Variabel respon	*Observed*	*Expected*	SD	*p-value*	Kesimpulan
Jumlah kematian bayi	-0,0058	-0,0085	0,0153	0,8627	Tidak ada dependensi spasial
Jumlah kematian anak	0,0417	-0,0085	0,0152	0,0010	Terdapat dependensi spasial
Jumlah kematian ibu	0,1293	-0,0085	0,0151	0,0000	Terdapat dependensi spasial

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.	No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1	1	b10	5.0116	0.9187	0.0000	**	55	3	b10	5.0142	0.9180	0.0000	**
2	1	b11	0.0066	0.0032	0.0420	*	56	3	b11	0.0066	0.0032	0.0416	*
3	1	b12	0.0043	0.0058	0.4637	.	57	3	b12	0.0042	0.0058	0.4684	.
4	1	b13	-0.0001	0.0024	0.9627	.	58	3	b13	-0.0001	0.0024	0.9639	.
5	1	b14	-0.0032	0.0021	0.1324	.	59	3	b14	-0.0032	0.0021	0.1318	.
6	1	b15	-0.0057	0.0042	0.1718	.	60	3	b15	-0.0057	0.0042	0.1726	.
7	1	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*	61	3	b16	-0.0206	0.0097	0.0346	*
8	1	b17	0.0062	0.0146	0.6702	.	62	3	b17	0.0062	0.0146	0.6708	.
9	1	b18	-0.0017	0.0229	0.9407	.	63	3	b18	-0.0017	0.0229	0.9425	.
10	1	b20	3.9448	1.1675	0.0007	**	64	3	b20	3.9449	1.1661	0.0007	**
11	1	b21	0.0076	0.0045	0.0917	.	65	3	b21	0.0076	0.0045	0.0911	.
12	1	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.	66	3	b22	-0.0102	0.0056	0.0708	.
13	1	b23	0.0018	0.0033	0.5833	.	67	3	b23	0.0018	0.0033	0.5828	.
14	1	b24	-0.0021	0.0029	0.4670	.	68	3	b24	-0.0021	0.0029	0.4662	.
15	1	b25	0.0018	0.0050	0.7106	.	69	3	b25	0.0018	0.0050	0.7099	.
16	1	b26	-0.0222	0.0116	0.0549	.	70	3	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
17	1	b27	-0.0263	0.0183	0.1515	.	71	3	b27	-0.0263	0.0183	0.1506	.
18	1	b28	0.0127	0.0296	0.6688	.	72	3	b28	0.0127	0.0296	0.6668	.
19	1	b30	4.6069	0.7017	0.0000	**	73	3	b30	4.6065	0.7009	0.0000	**
20	1	b31	0.0026	0.0030	0.3871	.	74	3	b31	0.0026	0.0030	0.3857	.
21	1	b32	-0.0036	0.0027	0.1856	.	75	3	b32	-0.0036	0.0027	0.1838	.
22	1	b33	0.0002	0.0023	0.9343	.	76	3	b33	0.0002	0.0023	0.9330	.
23	1	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**	77	3	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
24	1	b35	-0.0060	0.0031	0.0499	*	78	3	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
25	1	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*	79	3	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
26	1	b37	0.0178	0.0121	0.1394	.	80	3	b37	0.0178	0.0121	0.1388	.
27	1	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**	81	3	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
28	2	b10	5.0138	0.9181	0.0000	**	82	4	b10	5.0138	0.9181	0.0000	**
29	2	b11	0.0066	0.0032	0.0416	*	83	4	b11	0.0066	0.0032	0.0417	*
30	2	b12	0.0042	0.0058	0.4682	.	84	4	b12	0.0042	0.0058	0.4677	.
31	2	b13	-0.0001	0.0024	0.9638	.	85	4	b13	-0.0001	0.0024	0.9638	.
32	2	b14	-0.0032	0.0021	0.1320	.	86	4	b14	-0.0032	0.0021	0.1319	.
33	2	b15	-0.0057	0.0042	0.1726	.	87	4	b15	-0.0057	0.0042	0.1724	.
34	2	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*	88	4	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*
35	2	b17	0.0062	0.0146	0.6707	.	89	4	b17	0.0062	0.0146	0.6707	.
36	2	b18	-0.0017	0.0229	0.9422	.	90	4	b18	-0.0017	0.0229	0.9421	.
37	2	b20	3.9454	1.1663	0.0007	**	91	4	b20	3.9452	1.1663	0.0007	**
38	2	b21	0.0076	0.0045	0.0913	.	92	4	b21	0.0076	0.0045	0.0912	.
39	2	b22	-0.0102	0.0056	0.0708	.	93	4	b22	-0.0102	0.0056	0.0709	.
40	2	b23	0.0018	0.0033	0.5825	.	94	4	b23	0.0018	0.0033	0.5825	.
41	2	b24	-0.0021	0.0029	0.4663	.	95	4	b24	-0.0021	0.0029	0.4662	.
42	2	b25	0.0018	0.0050	0.7101	.	96	4	b25	0.0018	0.0050	0.7102	.
43	2	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.	97	4	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
44	2	b27	-0.0263	0.0183	0.1507	.	98	4	b27	-0.0263	0.0183	0.1507	.
45	2	b28	0.0127	0.0296	0.6671	.	99	4	b28	0.0127	0.0296	0.6671	.
46	2	b30	4.6068	0.7010	0.0000	**	100	4	b30	4.6067	0.7010	0.0000	**
47	2	b31	0.0026	0.0030	0.3860	.	101	4	b31	0.0026	0.0030	0.3861	.
48	2	b32	-0.0036	0.0027	0.1840	.	102	4	b32	-0.0036	0.0027	0.1841	.
49	2	b33	0.0002	0.0023	0.9333	.	103	4	b33	0.0002	0.0023	0.9333	.
50	2	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**	104	4	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
51	2	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*	105	4	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
52	2	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*	106	4	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
53	2	b37	0.0178	0.0121	0.1389	.	107	4	b37	0.0178	0.0121	0.1389	.
54	2	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**	108	4	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
109	5	b10	5.0134	0.9182	0.0000	**
110	5	b11	0.0066	0.0032	0.0417	*
111	5	b12	0.0042	0.0058	0.4672	.
112	5	b13	-0.0001	0.0024	0.9637	.
113	5	b14	-0.0032	0.0021	0.1321	.
114	5	b15	-0.0057	0.0042	0.1723	.
115	5	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*
116	5	b17	0.0062	0.0146	0.6705	.
117	5	b18	-0.0017	0.0229	0.9418	.
118	5	b20	3.9457	1.1665	0.0007	**
119	5	b21	0.0076	0.0045	0.0914	.
120	5	b22	-0.0102	0.0056	0.0709	.
121	5	b23	0.0018	0.0033	0.5822	.
122	5	b24	-0.0021	0.0029	0.4664	.
123	5	b25	0.0018	0.0050	0.7105	.
124	5	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
125	5	b27	-0.0263	0.0183	0.1508	.
126	5	b28	0.0127	0.0296	0.6675	.
127	5	b30	4.6070	0.7011	0.0000	**
128	5	b31	0.0026	0.0030	0.3865	.
129	5	b32	-0.0036	0.0027	0.1843	.
130	5	b33	0.0002	0.0023	0.9336	.
131	5	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
132	5	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
133	5	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
134	5	b37	0.0178	0.0121	0.1390	.
135	5	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
136	6	b10	5.0139	0.9180	0.0000	**
137	6	b11	0.0066	0.0032	0.0416	*
138	6	b12	0.0042	0.0058	0.4675	.
139	6	b13	-0.0001	0.0024	0.9639	.
140	6	b14	-0.0032	0.0021	0.1318	.
141	6	b15	-0.0057	0.0042	0.1724	.
142	6	b16	-0.0206	0.0097	0.0346	*
143	6	b17	0.0062	0.0146	0.6708	.
144	6	b18	-0.0017	0.0229	0.9423	.
145	6	b20	3.9447	1.1662	0.0007	**
146	6	b21	0.0076	0.0045	0.0912	.
147	6	b22	-0.0102	0.0056	0.0709	.
148	6	b23	0.0018	0.0033	0.5827	.
149	6	b24	-0.0021	0.0029	0.4662	.
150	6	b25	0.0018	0.0050	0.7101	.
151	6	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
152	6	b27	-0.0263	0.0183	0.1507	.
153	6	b28	0.0127	0.0296	0.6670	.
154	6	b30	4.6065	0.7010	0.0000	**
155	6	b31	0.0026	0.0030	0.3859	.
156	6	b32	-0.0036	0.0027	0.1841	.
157	6	b33	0.0002	0.0023	0.9330	.
158	6	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
159	6	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
160	6	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
161	6	b37	0.0178	0.0121	0.1388	.
162	6	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
163	7	b10	5.0143	0.9181	0.0000	**
164	7	b11	0.0066	0.0032	0.0415	*
165	7	b12	0.0042	0.0058	0.4696	.
166	7	b13	-0.0001	0.0024	0.9645	.
167	7	b14	-0.0032	0.0021	0.1321	.
168	7	b15	-0.0057	0.0042	0.1730	.
169	7	b16	-0.0206	0.0097	0.0346	*
170	7	b17	0.0062	0.0146	0.6709	.
171	7	b18	-0.0016	0.0229	0.9425	.
172	7	b20	3.9452	1.1660	0.0007	**
173	7	b21	0.0076	0.0045	0.0911	.
174	7	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
175	7	b23	0.0018	0.0033	0.5828	.
176	7	b24	-0.0021	0.0029	0.4664	.
177	7	b25	0.0018	0.0050	0.7092	.
178	7	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
179	7	b27	-0.0263	0.0183	0.1505	.
180	7	b28	0.0127	0.0296	0.6667	.
181	7	b30	4.6068	0.7009	0.0000	**
182	7	b31	0.0026	0.0030	0.3853	.
183	7	b32	-0.0036	0.0027	0.1834	.
184	7	b33	0.0002	0.0023	0.9324	.
185	7	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
186	7	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
187	7	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
188	7	b37	0.0178	0.0121	0.1388	.
189	7	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
190	8	b10	5.0151	0.9187	0.0000	**
191	8	b11	0.0066	0.0032	0.0415	*
192	8	b12	0.0042	0.0058	0.4713	.
193	8	b13	-0.0001	0.0024	0.9655	.
194	8	b14	-0.0032	0.0021	0.1325	.
195	8	b15	-0.0057	0.0042	0.1737	.
196	8	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*
197	8	b17	0.0062	0.0146	0.6714	.
198	8	b18	-0.0017	0.0229	0.9424	.
199	8	b20	3.9461	1.1668	0.0007	**
200	8	b21	0.0076	0.0045	0.0912	.
201	8	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
202	8	b23	0.0018	0.0033	0.5833	.
203	8	b24	-0.0021	0.0029	0.4667	.
204	8	b25	0.0019	0.0050	0.7086	.
205	8	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
206	8	b27	-0.0263	0.0183	0.1506	.
207	8	b28	0.0127	0.0296	0.6671	.
208	8	b30	4.6061	0.7013	0.0000	**
209	8	b31	0.0026	0.0030	0.3850	.
210	8	b32	-0.0036	0.0027	0.1835	.
211	8	b33	0.0002	0.0023	0.9309	.
212	8	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
213	8	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
214	8	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
215	8	b37	0.0179	0.0121	0.1388	.
216	8	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
217	9	b10	5.0173	0.9178	0.0000	**
218	9	b11	0.0066	0.0032	0.0410	*
219	9	b12	0.0042	0.0058	0.4733	.
220	9	b13	-0.0001	0.0024	0.9661	.
221	9	b14	-0.0032	0.0021	0.1313	.
222	9	b15	-0.0057	0.0042	0.1738	.
223	9	b16	-0.0206	0.0097	0.0343	*
224	9	b17	0.0062	0.0146	0.6727	.
225	9	b18	-0.0016	0.0229	0.9444	.
226	9	b20	3.9448	1.1652	0.0007	**
227	9	b21	0.0076	0.0045	0.0903	.
228	9	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
229	9	b23	0.0018	0.0033	0.5841	.
230	9	b24	-0.0021	0.0029	0.4653	.
231	9	b25	0.0019	0.0050	0.7079	.
232	9	b26	-0.0222	0.0115	0.0543	.
233	9	b27	-0.0263	0.0183	0.1498	.
234	9	b28	0.0128	0.0295	0.6652	.
235	9	b30	4.6045	0.7006	0.0000	**
236	9	b31	0.0026	0.0030	0.3823	.
237	9	b32	-0.0036	0.0027	0.1824	.
238	9	b33	0.0002	0.0023	0.9293	.
239	9	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
240	9	b35	-0.0060	0.0031	0.0494	*
241	9	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
242	9	b37	0.0179	0.0120	0.1382	.
243	9	b38	-0.0542	0.0192	0.0047	**
244	10	b10	5.0198	0.9174	0.0000	**
245	10	b11	0.0066	0.0032	0.0405	*
246	10	b12	0.0042	0.0058	0.4756	.
247	10	b13	-0.0001	0.0024	0.9672	.
248	10	b14	-0.0032	0.0021	0.1305	.
249	10	b15	-0.0057	0.0042	0.1741	.
250	10	b16	-0.0206	0.0097	0.0340	*
251	10	b17	0.0061	0.0146	0.6742	.
252	10	b18	-0.0015	0.0229	0.9461	.
253	10	b20	3.9438	1.1643	0.0007	**
254	10	b21	0.0076	0.0045	0.0896	.
255	10	b22	-0.0102	0.0056	0.0702	.
256	10	b23	0.0018	0.0033	0.5859	.
257	10	b24	-0.0021	0.0029	0.4640	.
258	10	b25	0.0019	0.0050	0.7063	.
259	10	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
260	10	b27	-0.0263	0.0182	0.1493	.
261	10	b28	0.0128	0.0295	0.6639	.
262	10	b30	4.6027	0.7002	0.0000	**
263	10	b31	0.0026	0.0030	0.3791	.
264	10	b32	-0.0036	0.0027	0.1812	.
265	10	b33	0.0002	0.0023	0.9263	.
266	10	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
267	10	b35	-0.0060	0.0030	0.0491	*
268	10	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
269	10	b37	0.0179	0.0120	0.1378	.
270	10	b38	-0.0542	0.0191	0.0047	**
271	11	b10	5.0220	0.9169	0.0000	**
272	11	b11	0.0066	0.0032	0.0403	*
273	11	b12	0.0041	0.0058	0.4770	.
274	11	b13	-0.0001	0.0024	0.9680	.
275	11	b14	-0.0032	0.0021	0.1296	.
276	11	b15	-0.0057	0.0042	0.1745	.
277	11	b16	-0.0206	0.0097	0.0336	*
278	11	b17	0.0061	0.0145	0.6761	.
279	11	b18	-0.0015	0.0228	0.9482	.
280	11	b20	3.9435	1.1637	0.0007	**
281	11	b21	0.0077	0.0045	0.0892	.
282	11	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
283	11	b23	0.0018	0.0033	0.5872	.
284	11	b24	-0.0021	0.0029	0.4628	.
285	11	b25	0.0019	0.0050	0.7054	.
286	11	b26	-0.0222	0.0115	0.0540	.
287	11	b27	-0.0263	0.0182	0.1489	.
288	11	b28	0.0129	0.0295	0.6629	.
289	11	b30	4.6014	0.6999	0.0000	**
290	11	b31	0.0026	0.0030	0.3772	.
291	11	b32	-0.0036	0.0027	0.1805	.
292	11	b33	0.0002	0.0023	0.9241	.
293	11	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
294	11	b35	-0.0060	0.0030	0.0490	*
295	11	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
296	11	b37	0.0178	0.0120	0.1379	.
297	11	b38	-0.0541	0.0191	0.0047	**
298	12	b10	5.0234	0.9168	0.0000	**
299	12	b11	0.0066	0.0032	0.0402	*
300	12	b12	0.0041	0.0058	0.4776	.
301	12	b13	-0.0001	0.0024	0.9683	.
302	12	b14	-0.0032	0.0021	0.1291	.
303	12	b15	-0.0057	0.0042	0.1747	.
304	12	b16	-0.0207	0.0097	0.0334	*
305	12	b17	0.0060	0.0145	0.6774	.
306	12	b18	-0.0014	0.0228	0.9495	.
307	12	b20	3.9433	1.1635	0.0007	**
308	12	b21	0.0077	0.0045	0.0890	.
309	12	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
310	12	b23	0.0018	0.0033	0.5877	.
311	12	b24	-0.0021	0.0029	0.4623	.
312	12	b25	0.0019	0.0050	0.7049	.
313	12	b26	-0.0222	0.0115	0.0539	.
314	12	b27	-0.0263	0.0182	0.1488	.
315	12	b28	0.0129	0.0295	0.6625	.
316	12	b30	4.6009	0.6997	0.0000	**
317	12	b31	0.0026	0.0030	0.3767	.
318	12	b32	-0.0036	0.0027	0.1803	.
319	12	b33	0.0002	0.0023	0.9233	.
320	12	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
321	12	b35	-0.0060	0.0030	0.0489	*
322	12	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
323	12	b37	0.0178	0.0120	0.1381	.
324	12	b38	-0.0540	0.0191	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
325	13	b10	5.0251	0.9164	0.0000	**
326	13	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
327	13	b12	0.0041	0.0058	0.4783	.
328	13	b13	-0.0001	0.0024	0.9683	.
329	13	b14	-0.0032	0.0021	0.1283	.
330	13	b15	-0.0057	0.0042	0.1747	.
331	13	b16	-0.0207	0.0097	0.0332	*
332	13	b17	0.0060	0.0145	0.6790	.
333	13	b18	-0.0014	0.0228	0.9513	.
334	13	b20	3.9429	1.1632	0.0007	**
335	13	b21	0.0077	0.0045	0.0886	.
336	13	b22	-0.0102	0.0056	0.0704	.
337	13	b23	0.0018	0.0033	0.5883	.
338	13	b24	-0.0021	0.0029	0.4613	.
339	13	b25	0.0019	0.0050	0.7041	.
340	13	b26	-0.0222	0.0115	0.0538	.
341	13	b27	-0.0263	0.0182	0.1486	.
342	13	b28	0.0129	0.0295	0.6619	.
343	13	b30	4.6005	0.6995	0.0000	**
344	13	b31	0.0026	0.0030	0.3760	.
345	13	b32	-0.0036	0.0027	0.1800	.
346	13	b33	0.0002	0.0023	0.9226	.
347	13	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
348	13	b35	-0.0060	0.0030	0.0488	*
349	13	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
350	13	b37	0.0178	0.0120	0.1383	.
351	13	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
352	14	b10	5.0255	0.9163	0.0000	**
353	14	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
354	14	b12	0.0041	0.0058	0.4783	.
355	14	b13	-0.0001	0.0024	0.9683	.
356	14	b14	-0.0032	0.0021	0.1280	.
357	14	b15	-0.0057	0.0042	0.1745	.
358	14	b16	-0.0207	0.0097	0.0331	*
359	14	b17	0.0060	0.0145	0.6791	.
360	14	b18	-0.0014	0.0228	0.9512	.
361	14	b20	3.9420	1.1631	0.0007	**
362	14	b21	0.0077	0.0045	0.0884	.
363	14	b22	-0.0102	0.0056	0.0705	.
364	14	b23	0.0018	0.0033	0.5883	.
365	14	b24	-0.0021	0.0029	0.4611	.
366	14	b25	0.0019	0.0050	0.7037	.
367	14	b26	-0.0222	0.0115	0.0538	.
368	14	b27	-0.0263	0.0182	0.1487	.
369	14	b28	0.0129	0.0295	0.6623	.
370	14	b30	4.6013	0.6994	0.0000	**
371	14	b31	0.0026	0.0030	0.3763	.
372	14	b32	-0.0036	0.0027	0.1797	.
373	14	b33	0.0002	0.0023	0.9225	.
374	14	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
375	14	b35	-0.0060	0.0030	0.0487	*
376	14	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
377	14	b37	0.0178	0.0120	0.1383	.
378	14	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
379	15	b10	5.0262	0.9163	0.0000	**
380	15	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
381	15	b12	0.0041	0.0058	0.4785	.
382	15	b13	-0.0001	0.0024	0.9684	.
383	15	b14	-0.0032	0.0021	0.1278	.
384	15	b15	-0.0057	0.0042	0.1745	.
385	15	b16	-0.0207	0.0097	0.0330	*
386	15	b17	0.0060	0.0145	0.6796	.
387	15	b18	-0.0014	0.0228	0.9514	.
388	15	b20	3.9418	1.1631	0.0007	**
389	15	b21	0.0077	0.0045	0.0883	.
390	15	b22	-0.0102	0.0056	0.0705	.
391	15	b23	0.0018	0.0033	0.5884	.
392	15	b24	-0.0021	0.0029	0.4608	.
393	15	b25	0.0019	0.0050	0.7033	.
394	15	b26	-0.0222	0.0115	0.0537	.
395	15	b27	-0.0263	0.0182	0.1488	.
396	15	b28	0.0129	0.0295	0.6625	.
397	15	b30	4.6014	0.6994	0.0000	**
398	15	b31	0.0026	0.0030	0.3763	.
399	15	b32	-0.0036	0.0027	0.1795	.
400	15	b33	0.0002	0.0023	0.9223	.
401	15	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
402	15	b35	-0.0060	0.0030	0.0487	*
403	15	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
404	15	b37	0.0178	0.0120	0.1384	.
405	15	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
406	16	b10	5.0236	0.9165	0.0000	**
407	16	b11	0.0066	0.0032	0.0402	*
408	16	b12	0.0041	0.0058	0.4770	.
409	16	b13	-0.0001	0.0024	0.9678	.
410	16	b14	-0.0032	0.0021	0.1287	.
411	16	b15	-0.0057	0.0042	0.1743	.
412	16	b16	-0.0207	0.0097	0.0334	*
413	16	b17	0.0060	0.0145	0.6774	.
414	16	b18	-0.0014	0.0228	0.9494	.
415	16	b20	3.9423	1.1633	0.0007	**
416	16	b21	0.0077	0.0045	0.0888	.
417	16	b22	-0.0102	0.0056	0.0704	.
418	16	b23	0.0018	0.0033	0.5876	.
419	16	b24	-0.0021	0.0029	0.4621	.
420	16	b25	0.0019	0.0050	0.7047	.
421	16	b26	-0.0222	0.0115	0.0539	.
422	16	b27	-0.0263	0.0182	0.1489	.
423	16	b28	0.0129	0.0295	0.6629	.
424	16	b30	4.6018	0.6996	0.0000	**
425	16	b31	0.0026	0.0030	0.3772	.
426	16	b32	-0.0036	0.0027	0.1802	.
427	16	b33	0.0002	0.0023	0.9239	.
428	16	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
429	16	b35	-0.0060	0.0030	0.0488	*
430	16	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
431	16	b37	0.0178	0.0120	0.1381	.
432	16	b38	-0.0540	0.0191	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
433	17	b10	5.0215	0.9169	0.0000	**
434	17	b11	0.0066	0.0032	0.0403	*
435	17	b12	0.0042	0.0058	0.4761	.
436	17	b13	-0.0001	0.0024	0.9674	.
437	17	b14	-0.0032	0.0021	0.1295	.
438	17	b15	-0.0057	0.0042	0.1742	.
439	17	b16	-0.0206	0.0097	0.0337	*
440	17	b17	0.0061	0.0145	0.6757	.
441	17	b18	-0.0015	0.0228	0.9478	.
442	17	b20	3.9429	1.1637	0.0007	**
443	17	b21	0.0077	0.0045	0.0892	.
444	17	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
445	17	b23	0.0018	0.0033	0.5869	.
446	17	b24	-0.0021	0.0029	0.4630	.
447	17	b25	0.0019	0.0050	0.7055	.
448	17	b26	-0.0222	0.0115	0.0540	.
449	17	b27	-0.0263	0.0182	0.1491	.
450	17	b28	0.0128	0.0295	0.6633	.
451	17	b30	4.6021	0.6998	0.0000	**
452	17	b31	0.0026	0.0030	0.3781	.
453	17	b32	-0.0036	0.0027	0.1806	.
454	17	b33	0.0002	0.0023	0.9252	.
455	17	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
456	17	b35	-0.0060	0.0030	0.0490	*
457	17	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
458	17	b37	0.0178	0.0120	0.1379	.
459	17	b38	-0.0541	0.0191	0.0047	**
460	18	b10	5.0239	0.9168	0.0000	**
461	18	b11	0.0066	0.0032	0.0404	*
462	18	b12	0.0042	0.0058	0.4763	.
463	18	b13	-0.0001	0.0024	0.9672	.
464	18	b14	-0.0032	0.0021	0.1285	.
465	18	b15	-0.0057	0.0042	0.1742	.
466	18	b16	-0.0207	0.0097	0.0333	*
467	18	b17	0.0060	0.0145	0.6776	.
468	18	b18	-0.0015	0.0228	0.9491	.
469	18	b20	3.9420	1.1638	0.0007	**
470	18	b21	0.0077	0.0045	0.0889	.
471	18	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
472	18	b23	0.0018	0.0033	0.5874	.
473	18	b24	-0.0021	0.0029	0.4622	.
474	18	b25	0.0019	0.0050	0.7047	.
475	18	b26	-0.0222	0.0115	0.0540	.
476	18	b27	-0.0263	0.0182	0.1493	.
477	18	b28	0.0128	0.0295	0.6638	.
478	18	b30	4.6025	0.6998	0.0000	**
479	18	b31	0.0026	0.0030	0.3784	.
480	18	b32	-0.0036	0.0027	0.1805	.
481	18	b33	0.0002	0.0023	0.9248	.
482	18	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
483	18	b35	-0.0060	0.0030	0.0489	*
484	18	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
485	18	b37	0.0178	0.0120	0.1383	.
486	18	b38	-0.0540	0.0191	0.0047	**
487	19	b10	5.0201	0.9171	0.0000	**
488	19	b11	0.0066	0.0032	0.0406	*
489	19	b12	0.0042	0.0058	0.4747	.
490	19	b13	-0.0001	0.0024	0.9666	.
491	19	b14	-0.0032	0.0021	0.1299	.
492	19	b15	-0.0057	0.0042	0.1739	.
493	19	b16	-0.0206	0.0097	0.0339	*
494	19	b17	0.0061	0.0145	0.6747	.
495	19	b18	-0.0015	0.0228	0.9467	.
496	19	b20	3.9429	1.1641	0.0007	**
497	19	b21	0.0077	0.0045	0.0895	.
498	19	b22	-0.0102	0.0056	0.0704	.
499	19	b23	0.0018	0.0033	0.5862	.
500	19	b24	-0.0021	0.0029	0.4637	.
501	19	b25	0.0019	0.0050	0.7063	.
502	19	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
503	19	b27	-0.0263	0.0182	0.1494	.
504	19	b28	0.0128	0.0295	0.6640	.
505	19	b30	4.6030	0.7000	0.0000	**
506	19	b31	0.0026	0.0030	0.3797	.
507	19	b32	-0.0036	0.0027	0.1812	.
508	19	b33	0.0002	0.0023	0.9269	.
509	19	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
510	19	b35	-0.0060	0.0030	0.0491	*
511	19	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
512	19	b37	0.0178	0.0120	0.1380	.
513	19	b38	-0.0541	0.0191	0.0047	**
514	20	b10	5.0180	0.9174	0.0000	**
515	20	b11	0.0066	0.0032	0.0409	*
516	20	b12	0.0042	0.0058	0.4732	.
517	20	b13	-0.0001	0.0024	0.9660	.
518	20	b14	-0.0032	0.0021	0.1307	.
519	20	b15	-0.0057	0.0042	0.1736	.
520	20	b16	-0.0206	0.0097	0.0342	*
521	20	b17	0.0061	0.0146	0.6731	.
522	20	b18	-0.0016	0.0229	0.9452	.
523	20	b20	3.9435	1.1646	0.0007	**
524	20	b21	0.0076	0.0045	0.0900	.
525	20	b22	-0.0102	0.0056	0.0705	.
526	20	b23	0.0018	0.0033	0.5849	.
527	20	b24	-0.0021	0.0029	0.4648	.
528	20	b25	0.0019	0.0050	0.7076	.
529	20	b26	-0.0222	0.0115	0.0543	.
530	20	b27	-0.0263	0.0182	0.1497	.
531	20	b28	0.0128	0.0295	0.6647	.
532	20	b30	4.6040	0.7003	0.0000	**
533	20	b31	0.0026	0.0030	0.3815	.
534	20	b32	-0.0036	0.0027	0.1820	.
535	20	b33	0.0002	0.0023	0.9286	.
536	20	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
537	20	b35	-0.0060	0.0030	0.0493	*
538	20	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
539	20	b37	0.0179	0.0120	0.1381	.
540	20	b38	-0.0542	0.0192	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
541	21	b10	5.0167	0.9176	0.0000	**
542	21	b11	0.0066	0.0032	0.0412	*
543	21	b12	0.0042	0.0058	0.4713	.
544	21	b13	-0.0001	0.0024	0.9652	.
545	21	b14	-0.0032	0.0021	0.1310	.
546	21	b15	-0.0057	0.0042	0.1733	.
547	21	b16	-0.0206	0.0097	0.0343	*
548	21	b17	0.0062	0.0146	0.6723	.
549	21	b18	-0.0016	0.0229	0.9442	.
550	21	b20	3.9435	1.1651	0.0007	**
551	21	b21	0.0076	0.0045	0.0903	.
552	21	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
553	21	b23	0.0018	0.0033	0.5841	.
554	21	b24	-0.0021	0.0029	0.4655	.
555	21	b25	0.0019	0.0050	0.7087	.
556	21	b26	-0.0222	0.0115	0.0545	.
557	21	b27	-0.0263	0.0183	0.1501	.
558	21	b28	0.0128	0.0295	0.6655	.
559	21	b30	4.6049	0.7006	0.0000	**
560	21	b31	0.0026	0.0030	0.3833	.
561	21	b32	-0.0036	0.0027	0.1827	.
562	21	b33	0.0002	0.0023	0.9303	.
563	21	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
564	21	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
565	21	b36	-0.0180	0.0078	0.0211	*
566	21	b37	0.0178	0.0120	0.1383	.
567	21	b38	-0.0542	0.0192	0.0047	**
568	22	b10	5.0157	0.9177	0.0000	**
569	22	b11	0.0066	0.0032	0.0413	*
570	22	b12	0.0042	0.0058	0.4704	.
571	22	b13	-0.0001	0.0024	0.9649	.
572	22	b14	-0.0032	0.0021	0.1313	.
573	22	b15	-0.0057	0.0042	0.1731	.
574	22	b16	-0.0206	0.0097	0.0344	*
575	22	b17	0.0062	0.0146	0.6717	.
576	22	b18	-0.0016	0.0229	0.9437	.
577	22	b20	3.9438	1.1654	0.0007	**
578	22	b21	0.0076	0.0045	0.0906	.
579	22	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
580	22	b23	0.0018	0.0033	0.5835	.
581	22	b24	-0.0021	0.0029	0.4659	.
582	22	b25	0.0018	0.0050	0.7091	.
583	22	b26	-0.0222	0.0115	0.0545	.
584	22	b27	-0.0263	0.0183	0.1503	.
585	22	b28	0.0128	0.0296	0.6659	.
586	22	b30	4.6055	0.7007	0.0000	**
587	22	b31	0.0026	0.0030	0.3841	.
588	22	b32	-0.0036	0.0027	0.1831	.
589	22	b33	0.0002	0.0023	0.9312	.
590	22	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
591	22	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
592	22	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
593	22	b37	0.0178	0.0120	0.1384	.
594	22	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
595	23	b10	5.0187	0.9174	0.0000	**
596	23	b11	0.0066	0.0032	0.0407	*
597	23	b12	0.0042	0.0058	0.4744	.
598	23	b13	-0.0001	0.0024	0.9666	.
599	23	b14	-0.0032	0.0021	0.1307	.
600	23	b15	-0.0057	0.0042	0.1739	.
601	23	b16	-0.0206	0.0097	0.0341	*
602	23	b17	0.0061	0.0146	0.6735	.
603	23	b18	-0.0016	0.0229	0.9455	.
604	23	b20	3.9438	1.1645	0.0007	**
605	23	b21	0.0076	0.0045	0.0898	.
606	23	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
607	23	b23	0.0018	0.0033	0.5853	.
608	23	b24	-0.0021	0.0029	0.4645	.
609	23	b25	0.0019	0.0050	0.7069	.
610	23	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
611	23	b27	-0.0263	0.0182	0.1495	.
612	23	b28	0.0128	0.0295	0.6644	.
613	23	b30	4.6033	0.7003	0.0000	**
614	23	b31	0.0026	0.0030	0.3803	.
615	23	b32	-0.0036	0.0027	0.1816	.
616	23	b33	0.0002	0.0023	0.9273	.
617	23	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
618	23	b35	-0.0060	0.0030	0.0492	*
619	23	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
620	23	b37	0.0179	0.0120	0.1378	.
621	23	b38	-0.0542	0.0192	0.0047	**
622	24	b10	5.0274	0.9167	0.0000	**
623	24	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
624	24	b12	0.0041	0.0058	0.4802	.
625	24	b13	-0.0001	0.0024	0.9690	.
626	24	b14	-0.0032	0.0021	0.1280	.
627	24	b15	-0.0057	0.0042	0.1752	.
628	24	b16	-0.0207	0.0097	0.0330	*
629	24	b17	0.0060	0.0145	0.6812	.
630	24	b18	-0.0013	0.0228	0.9532	.
631	24	b20	3.9432	1.1636	0.0007	**
632	24	b21	0.0077	0.0045	0.0885	.
633	24	b22	-0.0102	0.0056	0.0705	.
634	24	b23	0.0018	0.0033	0.5888	.
635	24	b24	-0.0021	0.0029	0.4608	.
636	24	b25	0.0019	0.0050	0.7039	.
637	24	b26	-0.0222	0.0115	0.0538	.
638	24	b27	-0.0263	0.0182	0.1485	.
639	24	b28	0.0129	0.0295	0.6613	.
640	24	b30	4.6003	0.6996	0.0000	**
641	24	b31	0.0027	0.0030	0.3753	.
642	24	b32	-0.0036	0.0027	0.1796	.
643	24	b33	0.0002	0.0023	0.9213	.
644	24	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
645	24	b35	-0.0060	0.0030	0.0489	*
646	24	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
647	24	b37	0.0178	0.0120	0.1387	.
648	24	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
649	25	b10	5.0146	0.9181	0.0000	**
650	25	b11	0.0066	0.0032	0.0414	*
651	25	b12	0.0042	0.0058	0.4702	.
652	25	b13	-0.0001	0.0024	0.9648	.
653	25	b14	-0.0032	0.0021	0.1321	.
654	25	b15	-0.0057	0.0042	0.1732	.
655	25	b16	-0.0206	0.0097	0.0346	*
656	25	b17	0.0062	0.0146	0.6711	.
657	25	b18	-0.0016	0.0229	0.9427	.
658	25	b20	3.9453	1.1660	0.0007	**
659	25	b21	0.0076	0.0045	0.0910	.
660	25	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
661	25	b23	0.0018	0.0033	0.5828	.
662	25	b24	-0.0021	0.0029	0.4664	.
663	25	b25	0.0018	0.0050	0.7090	.
664	25	b26	-0.0222	0.0116	0.0545	.
665	25	b27	-0.0263	0.0183	0.1505	.
666	25	b28	0.0127	0.0296	0.6667	.
667	25	b30	4.6065	0.7009	0.0000	**
668	25	b31	0.0026	0.0030	0.3850	.
669	25	b32	-0.0036	0.0027	0.1834	.
670	25	b33	0.0002	0.0023	0.9320	.
671	25	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
672	25	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
673	25	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
674	25	b37	0.0178	0.0121	0.1388	.
675	25	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
676	26	b10	5.0169	0.9182	0.0000	**
677	26	b11	0.0066	0.0032	0.0412	*
678	26	b12	0.0042	0.0058	0.4732	.
679	26	b13	-0.0001	0.0024	0.9661	.
680	26	b14	-0.0032	0.0021	0.1317	.
681	26	b15	-0.0057	0.0042	0.1739	.
682	26	b16	-0.0206	0.0097	0.0345	*
683	26	b17	0.0062	0.0146	0.6724	.
684	26	b18	-0.0016	0.0229	0.9438	.
685	26	b20	3.9459	1.1658	0.0007	**
686	26	b21	0.0076	0.0045	0.0907	.
687	26	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
688	26	b23	0.0018	0.0033	0.5836	.
689	26	b24	-0.0021	0.0029	0.4656	.
690	26	b25	0.0019	0.0050	0.7081	.
691	26	b26	-0.0222	0.0116	0.0544	.
692	26	b27	-0.0263	0.0183	0.1500	.
693	26	b28	0.0128	0.0296	0.6658	.
694	26	b30	4.6051	0.7008	0.0000	**
695	26	b31	0.0026	0.0030	0.3834	.
696	26	b32	-0.0036	0.0027	0.1829	.
697	26	b33	0.0002	0.0023	0.9301	.
698	26	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
699	26	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
700	26	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
701	26	b37	0.0179	0.0121	0.1384	.
702	26	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
703	27	b10	5.0199	0.9172	0.0000	**
704	27	b11	0.0066	0.0032	0.0405	*
705	27	b12	0.0042	0.0058	0.4756	.
706	27	b13	-0.0001	0.0024	0.9670	.
707	27	b14	-0.0032	0.0021	0.1303	.
708	27	b15	-0.0057	0.0042	0.1741	.
709	27	b16	-0.0206	0.0097	0.0340	*
710	27	b17	0.0061	0.0145	0.6744	.
711	27	b18	-0.0015	0.0228	0.9464	.
712	27	b20	3.9434	1.1641	0.0007	**
713	27	b21	0.0077	0.0045	0.0895	.
714	27	b22	-0.0102	0.0056	0.0702	.
715	27	b23	0.0018	0.0033	0.5861	.
716	27	b24	-0.0021	0.0029	0.4638	.
717	27	b25	0.0019	0.0050	0.7062	.
718	27	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
719	27	b27	-0.0263	0.0182	0.1493	.
720	27	b28	0.0128	0.0295	0.6639	.
721	27	b30	4.6025	0.7001	0.0000	**
722	27	b31	0.0026	0.0030	0.3789	.
723	27	b32	-0.0036	0.0027	0.1810	.
724	27	b33	0.0002	0.0023	0.9263	.
725	27	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
726	27	b35	-0.0060	0.0030	0.0491	*
727	27	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
728	27	b37	0.0179	0.0120	0.1378	.
729	27	b38	-0.0541	0.0191	0.0047	**
730	28	b10	5.0261	0.9164	0.0000	**
731	28	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
732	28	b12	0.0041	0.0058	0.4782	.
733	28	b13	-0.0001	0.0024	0.9684	.
734	28	b14	-0.0032	0.0021	0.1278	.
735	28	b15	-0.0057	0.0042	0.1745	.
736	28	b16	-0.0207	0.0097	0.0330	*
737	28	b17	0.0060	0.0145	0.6795	.
738	28	b18	-0.0014	0.0228	0.9511	.
739	28	b20	3.9419	1.1632	0.0007	**
740	28	b21	0.0077	0.0045	0.0884	.
741	28	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
742	28	b23	0.0018	0.0033	0.5882	.
743	28	b24	-0.0021	0.0029	0.4610	.
744	28	b25	0.0019	0.0050	0.7035	.
745	28	b26	-0.0222	0.0115	0.0538	.
746	28	b27	-0.0263	0.0182	0.1488	.
747	28	b28	0.0129	0.0295	0.6627	.
748	28	b30	4.6015	0.6995	0.0000	**
749	28	b31	0.0026	0.0030	0.3766	.
750	28	b32	-0.0036	0.0027	0.1796	.
751	28	b33	0.0002	0.0023	0.9225	.
752	28	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
753	28	b35	-0.0060	0.0030	0.0487	*
754	28	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
755	28	b37	0.0178	0.0120	0.1383	.
756	28	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
757	29	b10	5.0148	0.9179	0.0000	**
758	29	b11	0.0066	0.0032	0.0415	*
759	29	b12	0.0042	0.0058	0.4691	.
760	29	b13	-0.0001	0.0024	0.9643	.
761	29	b14	-0.0032	0.0021	0.1316	.
762	29	b15	-0.0057	0.0042	0.1728	.
763	29	b16	-0.0206	0.0097	0.0345	*
764	29	b17	0.0062	0.0146	0.6712	.
765	29	b18	-0.0016	0.0229	0.9429	.
766	29	b20	3.9444	1.1658	0.0007	**
767	29	b21	0.0076	0.0045	0.0909	.
768	29	b22	-0.0102	0.0056	0.0708	.
769	29	b23	0.0018	0.0033	0.5830	.
770	29	b24	-0.0021	0.0029	0.4661	.
771	29	b25	0.0018	0.0050	0.7096	.
772	29	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
773	29	b27	-0.0263	0.0183	0.1505	.
774	29	b28	0.0127	0.0296	0.6664	.
775	29	b30	4.6061	0.7008	0.0000	**
776	29	b31	0.0026	0.0030	0.3850	.
777	29	b32	-0.0036	0.0027	0.1835	.
778	29	b33	0.0002	0.0023	0.9323	.
779	29	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
780	29	b35	-0.0060	0.0031	0.0495	*
781	29	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
782	29	b37	0.0178	0.0121	0.1386	.
783	29	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
784	30	b10	5.0140	0.9181	0.0000	**
785	30	b11	0.0066	0.0032	0.0416	*
786	30	b12	0.0042	0.0058	0.4690	.
787	30	b13	-0.0001	0.0024	0.9641	.
788	30	b14	-0.0032	0.0021	0.1321	.
789	30	b15	-0.0057	0.0042	0.1729	.
790	30	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*
791	30	b17	0.0062	0.0146	0.6707	.
792	30	b18	-0.0017	0.0229	0.9424	.
793	30	b20	3.9453	1.1661	0.0007	**
794	30	b21	0.0076	0.0045	0.0912	.
795	30	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
796	30	b23	0.0018	0.0033	0.5827	.
797	30	b24	-0.0021	0.0029	0.4664	.
798	30	b25	0.0018	0.0050	0.7097	.
799	30	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
800	30	b27	-0.0263	0.0183	0.1506	.
801	30	b28	0.0127	0.0296	0.6669	.
802	30	b30	4.6068	0.7010	0.0000	**
803	30	b31	0.0026	0.0030	0.3856	.
804	30	b32	-0.0036	0.0027	0.1837	.
805	30	b33	0.0002	0.0023	0.9329	.
806	30	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
807	30	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
808	30	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
809	30	b37	0.0178	0.0121	0.1389	.
810	30	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
811	31	b10	5.0194	0.9173	0.0000	**
812	31	b11	0.0066	0.0032	0.0406	*
813	31	b12	0.0042	0.0058	0.4752	.
814	31	b13	-0.0001	0.0024	0.9669	.
815	31	b14	-0.0032	0.0021	0.1304	.
816	31	b15	-0.0057	0.0042	0.1740	.
817	31	b16	-0.0206	0.0097	0.0340	*
818	31	b17	0.0061	0.0146	0.6740	.
819	31	b18	-0.0015	0.0229	0.9460	.
820	31	b20	3.9434	1.1643	0.0007	**
821	31	b21	0.0076	0.0045	0.0896	.
822	31	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
823	31	b23	0.0018	0.0033	0.5857	.
824	31	b24	-0.0021	0.0029	0.4641	.
825	31	b25	0.0019	0.0050	0.7064	.
826	31	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
827	31	b27	-0.0263	0.0182	0.1494	.
828	31	b28	0.0128	0.0295	0.6641	.
829	31	b30	4.6028	0.7002	0.0000	**
830	31	b31	0.0026	0.0030	0.3794	.
831	31	b32	-0.0036	0.0027	0.1812	.
832	31	b33	0.0002	0.0023	0.9267	.
833	31	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
834	31	b35	-0.0060	0.0030	0.0491	*
835	31	b36	-0.0180	0.0078	0.0212	*
836	31	b37	0.0179	0.0120	0.1378	.
837	31	b38	-0.0542	0.0191	0.0047	**
838	32	b10	5.0242	0.9165	0.0000	**
839	32	b11	0.0066	0.0032	0.0401	*
840	32	b12	0.0041	0.0058	0.4779	.
841	32	b13	-0.0001	0.0024	0.9683	.
842	32	b14	-0.0032	0.0021	0.1287	.
843	32	b15	-0.0057	0.0042	0.1747	.
844	32	b16	-0.0207	0.0097	0.0333	*
845	32	b17	0.0060	0.0145	0.6781	.
846	32	b18	-0.0014	0.0228	0.9503	.
847	32	b20	3.9431	1.1633	0.0007	**
848	32	b21	0.0077	0.0045	0.0888	.
849	32	b22	-0.0102	0.0056	0.0703	.
850	32	b23	0.0018	0.0033	0.5880	.
851	32	b24	-0.0021	0.0029	0.4618	.
852	32	b25	0.0019	0.0050	0.7045	.
853	32	b26	-0.0222	0.0115	0.0539	.
854	32	b27	-0.0263	0.0182	0.1486	.
855	32	b28	0.0129	0.0295	0.6622	.
856	32	b30	4.6007	0.6996	0.0000	**
857	32	b31	0.0026	0.0030	0.3762	.
858	32	b32	-0.0036	0.0027	0.1802	.
859	32	b33	0.0002	0.0023	0.9230	.
860	32	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
861	32	b35	-0.0060	0.0030	0.0489	*
862	32	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
863	32	b37	0.0178	0.0120	0.1381	.
864	32	b38	-0.0540	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
865	33	b10	5.0268	0.9163	0.0000	**
866	33	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
867	33	b12	0.0041	0.0058	0.4792	.
868	33	b13	-0.0001	0.0024	0.9683	.
869	33	b14	-0.0032	0.0021	0.1277	.
870	33	b15	-0.0057	0.0042	0.1749	.
871	33	b16	-0.0207	0.0097	0.0329	*
872	33	b17	0.0060	0.0145	0.6806	.
873	33	b18	-0.0013	0.0228	0.9528	.
874	33	b20	3.9428	1.1631	0.0007	**
875	33	b21	0.0077	0.0045	0.0884	.
876	33	b22	-0.0102	0.0056	0.0705	.
877	33	b23	0.0018	0.0033	0.5888	.
878	33	b24	-0.0021	0.0029	0.4605	.
879	33	b25	0.0019	0.0050	0.7035	.
880	33	b26	-0.0222	0.0115	0.0537	.
881	33	b27	-0.0263	0.0182	0.1484	.
882	33	b28	0.0129	0.0295	0.6615	.
883	33	b30	4.6003	0.6994	0.0000	**
884	33	b31	0.0027	0.0030	0.3757	.
885	33	b32	-0.0036	0.0027	0.1797	.
886	33	b33	0.0002	0.0023	0.9221	.
887	33	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
888	33	b35	-0.0060	0.0030	0.0488	*
889	33	b36	-0.0180	0.0078	0.0210	*
890	33	b37	0.0178	0.0120	0.1385	.
891	33	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
892	34	b10	5.0318	0.9166	0.0000	**
893	34	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
894	34	b12	0.0041	0.0058	0.4832	.
895	34	b13	-0.0001	0.0024	0.9698	.
896	34	b14	-0.0033	0.0021	0.1267	.
897	34	b15	-0.0056	0.0042	0.1759	.
898	34	b16	-0.0208	0.0097	0.0325	*
899	34	b17	0.0059	0.0145	0.6848	.
900	34	b18	-0.0013	0.0228	0.9560	.
901	34	b20	3.9435	1.1635	0.0007	**
902	34	b21	0.0077	0.0045	0.0881	.
903	34	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
904	34	b23	0.0018	0.0033	0.5899	.
905	34	b24	-0.0021	0.0029	0.4591	.
906	34	b25	0.0019	0.0050	0.7023	.
907	34	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
908	34	b27	-0.0263	0.0182	0.1482	.
909	34	b28	0.0129	0.0295	0.6609	.
910	34	b30	4.6001	0.6994	0.0000	**
911	34	b31	0.0027	0.0030	0.3746	.
912	34	b32	-0.0037	0.0027	0.1786	.
913	34	b33	0.0002	0.0023	0.9194	.
914	34	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
915	34	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
916	34	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
917	34	b37	0.0177	0.0120	0.1391	.
918	34	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
919	35	b10	5.0333	0.9163	0.0000	**
920	35	b11	0.0066	0.0032	0.0397	*
921	35	b12	0.0041	0.0058	0.4840	.
922	35	b13	-0.0001	0.0024	0.9700	.
923	35	b14	-0.0033	0.0021	0.1262	.
924	35	b15	-0.0056	0.0042	0.1760	.
925	35	b16	-0.0208	0.0097	0.0323	*
926	35	b17	0.0059	0.0145	0.6857	.
927	35	b18	-0.0012	0.0228	0.9567	.
928	35	b20	3.9431	1.1632	0.0007	**
929	35	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
930	35	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
931	35	b23	0.0018	0.0033	0.5901	.
932	35	b24	-0.0021	0.0029	0.4584	.
933	35	b25	0.0019	0.0050	0.7014	.
934	35	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
935	35	b27	-0.0263	0.0182	0.1482	.
936	35	b28	0.0129	0.0295	0.6610	.
937	35	b30	4.6000	0.6992	0.0000	**
938	35	b31	0.0027	0.0030	0.3743	.
939	35	b32	-0.0037	0.0027	0.1782	.
940	35	b33	0.0002	0.0023	0.9190	.
941	35	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
942	35	b35	-0.0060	0.0030	0.0487	*
943	35	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
944	35	b37	0.0177	0.0120	0.1390	.
945	35	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
946	36	b10	5.0343	0.9163	0.0000	**
947	36	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
948	36	b12	0.0041	0.0058	0.4846	.
949	36	b13	-0.0001	0.0024	0.9703	.
950	36	b14	-0.0033	0.0021	0.1259	.
951	36	b15	-0.0056	0.0042	0.1762	.
952	36	b16	-0.0208	0.0097	0.0322	*
953	36	b17	0.0058	0.0145	0.6865	.
954	36	b18	-0.0012	0.0228	0.9571	.
955	36	b20	3.9430	1.1632	0.0007	**
956	36	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
957	36	b22	-0.0102	0.0056	0.0707	.
958	36	b23	0.0018	0.0033	0.5903	.
959	36	b24	-0.0021	0.0029	0.4581	.
960	36	b25	0.0019	0.0050	0.7010	.
961	36	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
962	36	b27	-0.0263	0.0182	0.1482	.
963	36	b28	0.0129	0.0295	0.6611	.
964	36	b30	4.6000	0.6992	0.0000	**
965	36	b31	0.0027	0.0030	0.3741	.
966	36	b32	-0.0037	0.0027	0.1779	.
967	36	b33	0.0002	0.0023	0.9185	.
968	36	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
969	36	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
970	36	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
971	36	b37	0.0177	0.0120	0.1391	.
972	36	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
973	37	b10	5.0372	0.9163	0.0000	**
974	37	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
975	37	b12	0.0041	0.0058	0.4865	.
976	37	b13	-0.0001	0.0024	0.9709	.
977	37	b14	-0.0033	0.0021	0.1253	.
978	37	b15	-0.0056	0.0042	0.1768	.
979	37	b16	-0.0208	0.0097	0.0318	*
980	37	b17	0.0058	0.0145	0.6888	.
981	37	b18	-0.0012	0.0228	0.9582	.
982	37	b20	3.9427	1.1633	0.0007	**
983	37	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
984	37	b22	-0.0102	0.0057	0.0708	.
985	37	b23	0.0018	0.0033	0.5910	.
986	37	b24	-0.0021	0.0029	0.4574	.
987	37	b25	0.0019	0.0050	0.7000	.
988	37	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
989	37	b27	-0.0263	0.0182	0.1483	.
990	37	b28	0.0129	0.0294	0.6614	.
991	37	b30	4.6002	0.6992	0.0000	**
992	37	b31	0.0027	0.0030	0.3734	.
993	37	b32	-0.0037	0.0027	0.1773	.
994	37	b33	0.0002	0.0023	0.9172	.
995	37	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
996	37	b35	-0.0060	0.0031	0.0486	*
997	37	b36	-0.0180	0.0078	0.0208	*
998	37	b37	0.0177	0.0120	0.1394	.
999	37	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1000	38	b10	5.0375	0.9165	0.0000	**
1001	38	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1002	38	b12	0.0041	0.0058	0.4869	.
1003	38	b13	-0.0001	0.0024	0.9711	.
1004	38	b14	-0.0033	0.0021	0.1254	.
1005	38	b15	-0.0056	0.0042	0.1770	.
1006	38	b16	-0.0208	0.0097	0.0318	*
1007	38	b17	0.0058	0.0145	0.6893	.
1008	38	b18	-0.0012	0.0228	0.9589	.
1009	38	b20	3.9429	1.1635	0.0007	**
1010	38	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
1011	38	b22	-0.0102	0.0057	0.0708	.
1012	38	b23	0.0018	0.0033	0.5912	.
1013	38	b24	-0.0021	0.0029	0.4576	.
1014	38	b25	0.0019	0.0050	0.7003	.
1015	38	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1016	38	b27	-0.0263	0.0182	0.1483	.
1017	38	b28	0.0129	0.0295	0.6609	.
1018	38	b30	4.6003	0.6993	0.0000	**
1019	38	b31	0.0027	0.0030	0.3734	.
1020	38	b32	-0.0037	0.0027	0.1773	.
1021	38	b33	0.0002	0.0023	0.9169	.
1022	38	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1023	38	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1024	38	b36	-0.0180	0.0078	0.0208	*
1025	38	b37	0.0177	0.0120	0.1397	.
1026	38	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1027	39	b10	5.0404	0.9165	0.0000	**
1028	39	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1029	39	b12	0.0040	0.0058	0.4887	.
1030	39	b13	-0.0001	0.0024	0.9716	.
1031	39	b14	-0.0033	0.0021	0.1247	.
1032	39	b15	-0.0056	0.0042	0.1775	.
1033	39	b16	-0.0208	0.0097	0.0315	*
1034	39	b17	0.0057	0.0145	0.6916	.
1035	39	b18	-0.0011	0.0228	0.9599	.
1036	39	b20	3.9426	1.1636	0.0007	**
1037	39	b21	0.0077	0.0045	0.0877	.
1038	39	b22	-0.0102	0.0057	0.0710	.
1039	39	b23	0.0018	0.0033	0.5920	.
1040	39	b24	-0.0021	0.0029	0.4569	.
1041	39	b25	0.0019	0.0050	0.6995	.
1042	39	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1043	39	b27	-0.0263	0.0182	0.1484	.
1044	39	b28	0.0129	0.0295	0.6611	.
1045	39	b30	4.6008	0.6993	0.0000	**
1046	39	b31	0.0027	0.0030	0.3729	.
1047	39	b32	-0.0037	0.0027	0.1769	.
1048	39	b33	0.0002	0.0023	0.9158	.
1049	39	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1050	39	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1051	39	b36	-0.0181	0.0078	0.0207	*
1052	39	b37	0.0177	0.0120	0.1402	.
1053	39	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1054	40	b10	5.0388	0.9163	0.0000	**
1055	40	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1056	40	b12	0.0041	0.0058	0.4873	.
1057	40	b13	-0.0001	0.0024	0.9711	.
1058	40	b14	-0.0033	0.0021	0.1249	.
1059	40	b15	-0.0056	0.0042	0.1771	.
1060	40	b16	-0.0208	0.0097	0.0316	*
1061	40	b17	0.0058	0.0145	0.6901	.
1062	40	b18	-0.0012	0.0228	0.9585	.
1063	40	b20	3.9424	1.1633	0.0007	**
1064	40	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1065	40	b22	-0.0102	0.0057	0.0710	.
1066	40	b23	0.0018	0.0033	0.5916	.
1067	40	b24	-0.0021	0.0029	0.4569	.
1068	40	b25	0.0019	0.0050	0.6994	.
1069	40	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1070	40	b27	-0.0263	0.0182	0.1484	.
1071	40	b28	0.0129	0.0294	0.6617	.
1072	40	b30	4.6005	0.6992	0.0000	**
1073	40	b31	0.0027	0.0030	0.3731	.
1074	40	b32	-0.0037	0.0027	0.1770	.
1075	40	b33	0.0002	0.0023	0.9166	.
1076	40	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1077	40	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1078	40	b36	-0.0180	0.0078	0.0207	*
1079	40	b37	0.0177	0.0120	0.1397	.
1080	40	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1081	41	b10	5.0424	0.9164	0.0000	**
1082	41	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1083	41	b12	0.0040	0.0058	0.4896	.
1084	41	b13	-0.0001	0.0024	0.9718	.
1085	41	b14	-0.0033	0.0021	0.1243	.
1086	41	b15	-0.0056	0.0042	0.1778	.
1087	41	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1088	41	b17	0.0057	0.0145	0.6930	.
1089	41	b18	-0.0011	0.0228	0.9601	.
1090	41	b20	3.9423	1.1636	0.0007	**
1091	41	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1092	41	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1093	41	b23	0.0017	0.0033	0.5927	.
1094	41	b24	-0.0021	0.0029	0.4561	.
1095	41	b25	0.0019	0.0050	0.6988	.
1096	41	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1097	41	b27	-0.0262	0.0182	0.1486	.
1098	41	b28	0.0129	0.0295	0.6616	.
1099	41	b30	4.6011	0.6993	0.0000	**
1100	41	b31	0.0027	0.0030	0.3724	.
1101	41	b32	-0.0037	0.0027	0.1766	.
1102	41	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
1103	41	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1104	41	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1105	41	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1106	41	b37	0.0177	0.0120	0.1403	.
1107	41	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1108	42	b10	5.0454	0.9165	0.0000	**
1109	42	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1110	42	b12	0.0040	0.0058	0.4918	.
1111	42	b13	-0.0001	0.0024	0.9716	.
1112	42	b14	-0.0033	0.0021	0.1239	.
1113	42	b15	-0.0056	0.0042	0.1783	.
1114	42	b16	-0.0209	0.0097	0.0311	*
1115	42	b17	0.0057	0.0145	0.6949	.
1116	42	b18	-0.0011	0.0228	0.9602	.
1117	42	b20	3.9421	1.1639	0.0007	**
1118	42	b21	0.0077	0.0045	0.0877	.
1119	42	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1120	42	b23	0.0017	0.0033	0.5936	.
1121	42	b24	-0.0021	0.0029	0.4555	.
1122	42	b25	0.0019	0.0050	0.6981	.
1123	42	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1124	42	b27	-0.0262	0.0182	0.1490	.
1125	42	b28	0.0129	0.0295	0.6621	.
1126	42	b30	4.6017	0.6993	0.0000	**
1127	42	b31	0.0027	0.0030	0.3716	.
1128	42	b32	-0.0037	0.0027	0.1762	.
1129	42	b33	0.0002	0.0023	0.9141	.
1130	42	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1131	42	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1132	42	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1133	42	b37	0.0176	0.0120	0.1406	.
1134	42	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1135	43	b10	5.0456	0.9167	0.0000	**
1136	43	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1137	43	b12	0.0040	0.0058	0.4922	.
1138	43	b13	-0.0001	0.0024	0.9716	.
1139	43	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
1140	43	b15	-0.0056	0.0042	0.1785	.
1141	43	b16	-0.0209	0.0097	0.0311	*
1142	43	b17	0.0057	0.0145	0.6952	.
1143	43	b18	-0.0011	0.0228	0.9608	.
1144	43	b20	3.9420	1.1640	0.0007	**
1145	43	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
1146	43	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1147	43	b23	0.0017	0.0033	0.5936	.
1148	43	b24	-0.0021	0.0029	0.4558	.
1149	43	b25	0.0019	0.0050	0.6983	.
1150	43	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1151	43	b27	-0.0262	0.0182	0.1490	.
1152	43	b28	0.0129	0.0295	0.6620	.
1153	43	b30	4.6016	0.6994	0.0000	**
1154	43	b31	0.0027	0.0030	0.3717	.
1155	43	b32	-0.0037	0.0027	0.1762	.
1156	43	b33	0.0002	0.0023	0.9140	.
1157	43	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1158	43	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1159	43	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1160	43	b37	0.0176	0.0120	0.1408	.
1161	43	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1162	44	b10	5.0476	0.9168	0.0000	**
1163	44	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1164	44	b12	0.0040	0.0058	0.4937	.
1165	44	b13	-0.0001	0.0024	0.9714	.
1166	44	b14	-0.0033	0.0021	0.1236	.
1167	44	b15	-0.0056	0.0042	0.1789	.
1168	44	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1169	44	b17	0.0056	0.0145	0.6962	.
1170	44	b18	-0.0011	0.0228	0.9607	.
1171	44	b20	3.9419	1.1642	0.0007	**
1172	44	b21	0.0077	0.0045	0.0880	.
1173	44	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1174	44	b23	0.0017	0.0033	0.5943	.
1175	44	b24	-0.0021	0.0029	0.4554	.
1176	44	b25	0.0019	0.0050	0.6977	.
1177	44	b26	-0.0223	0.0115	0.0536	.
1178	44	b27	-0.0262	0.0182	0.1493	.
1179	44	b28	0.0129	0.0295	0.6626	.
1180	44	b30	4.6020	0.6995	0.0000	**
1181	44	b31	0.0027	0.0030	0.3713	.
1182	44	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
1183	44	b33	0.0002	0.0023	0.9136	.
1184	44	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1185	44	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1186	44	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1187	44	b37	0.0176	0.0120	0.1409	.
1188	44	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1189	45	b10	5.0484	0.9170	0.0000	**
1190	45	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1191	45	b12	0.0040	0.0058	0.4946	.
1192	45	b13	-0.0001	0.0024	0.9713	.
1193	45	b14	-0.0033	0.0021	0.1236	.
1194	45	b15	-0.0056	0.0042	0.1792	.
1195	45	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1196	45	b17	0.0056	0.0145	0.6965	.
1197	45	b18	-0.0011	0.0228	0.9609	.
1198	45	b20	3.9418	1.1644	0.0007	**
1199	45	b21	0.0077	0.0045	0.0881	.
1200	45	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1201	45	b23	0.0017	0.0033	0.5945	.
1202	45	b24	-0.0021	0.0029	0.4554	.
1203	45	b25	0.0019	0.0050	0.6976	.
1204	45	b26	-0.0223	0.0115	0.0537	.
1205	45	b27	-0.0262	0.0182	0.1496	.
1206	45	b28	0.0129	0.0295	0.6627	.
1207	45	b30	4.6021	0.6996	0.0000	**
1208	45	b31	0.0027	0.0030	0.3712	.
1209	45	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
1210	45	b33	0.0002	0.0023	0.9135	.
1211	45	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1212	45	b35	-0.0060	0.0031	0.0491	*
1213	45	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1214	45	b37	0.0176	0.0120	0.1410	.
1215	45	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1216	46	b10	5.0484	0.9168	0.0000	**
1217	46	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1218	46	b12	0.0040	0.0058	0.4942	.
1219	46	b13	-0.0001	0.0024	0.9712	.
1220	46	b14	-0.0033	0.0021	0.1235	.
1221	46	b15	-0.0056	0.0042	0.1791	.
1222	46	b16	-0.0209	0.0097	0.0309	*
1223	46	b17	0.0056	0.0145	0.6965	.
1224	46	b18	-0.0011	0.0228	0.9604	.
1225	46	b20	3.9420	1.1643	0.0007	**
1226	46	b21	0.0077	0.0045	0.0881	.
1227	46	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
1228	46	b23	0.0017	0.0033	0.5946	.
1229	46	b24	-0.0021	0.0029	0.4551	.
1230	46	b25	0.0019	0.0050	0.6974	.
1231	46	b26	-0.0223	0.0115	0.0536	.
1232	46	b27	-0.0262	0.0182	0.1495	.
1233	46	b28	0.0128	0.0295	0.6628	.
1234	46	b30	4.6022	0.6995	0.0000	**
1235	46	b31	0.0027	0.0030	0.3711	.
1236	46	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
1237	46	b33	0.0002	0.0023	0.9135	.
1238	46	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1239	46	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1240	46	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1241	46	b37	0.0176	0.0120	0.1408	.
1242	46	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1243	47	b10	5.0487	0.9168	0.0000	**
1244	47	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1245	47	b12	0.0040	0.0058	0.4943	.
1246	47	b13	-0.0001	0.0024	0.9710	.
1247	47	b14	-0.0033	0.0021	0.1234	.
1248	47	b15	-0.0056	0.0042	0.1792	.
1249	47	b16	-0.0209	0.0097	0.0309	*
1250	47	b17	0.0056	0.0145	0.6965	.
1251	47	b18	-0.0011	0.0228	0.9599	.
1252	47	b20	3.9421	1.1644	0.0007	**
1253	47	b21	0.0077	0.0045	0.0881	.
1254	47	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
1255	47	b23	0.0017	0.0033	0.5948	.
1256	47	b24	-0.0021	0.0029	0.4547	.
1257	47	b25	0.0019	0.0050	0.6971	.
1258	47	b26	-0.0223	0.0115	0.0536	.
1259	47	b27	-0.0262	0.0182	0.1496	.
1260	47	b28	0.0128	0.0295	0.6631	.
1261	47	b30	4.6023	0.6995	0.0000	**
1262	47	b31	0.0027	0.0030	0.3709	.
1263	47	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
1264	47	b33	0.0002	0.0023	0.9137	.
1265	47	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1266	47	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1267	47	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1268	47	b37	0.0176	0.0120	0.1408	.
1269	47	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1270	48	b10	5.0466	0.9167	0.0000	**
1271	48	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1272	48	b12	0.0040	0.0058	0.4927	.
1273	48	b13	-0.0001	0.0024	0.9707	.
1274	48	b14	-0.0033	0.0021	0.1237	.
1275	48	b15	-0.0056	0.0042	0.1790	.
1276	48	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1277	48	b17	0.0057	0.0145	0.6949	.
1278	48	b18	-0.0012	0.0228	0.9585	.
1279	48	b20	3.9416	1.1643	0.0007	**
1280	48	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1281	48	b22	-0.0102	0.0057	0.0715	.
1282	48	b23	0.0017	0.0033	0.5945	.
1283	48	b24	-0.0021	0.0029	0.4547	.
1284	48	b25	0.0019	0.0050	0.6970	.
1285	48	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1286	48	b27	-0.0262	0.0182	0.1496	.
1287	48	b28	0.0128	0.0295	0.6635	.
1288	48	b30	4.6021	0.6994	0.0000	**
1289	48	b31	0.0027	0.0030	0.3713	.
1290	48	b32	-0.0037	0.0027	0.1762	.
1291	48	b33	0.0002	0.0023	0.9144	.
1292	48	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1293	48	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1294	48	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1295	48	b37	0.0176	0.0120	0.1406	.
1296	48	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1297	49	b10	5.0497	0.9172	0.0000	**
1298	49	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1299	49	b12	0.0040	0.0058	0.4956	.
1300	49	b13	-0.0001	0.0024	0.9702	.
1301	49	b14	-0.0033	0.0021	0.1236	.
1302	49	b15	-0.0056	0.0042	0.1802	.
1303	49	b16	-0.0209	0.0097	0.0309	*
1304	49	b17	0.0056	0.0145	0.6964	.
1305	49	b18	-0.0012	0.0228	0.9577	.
1306	49	b20	3.9407	1.1650	0.0007	**
1307	49	b21	0.0077	0.0045	0.0885	.
1308	49	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
1309	49	b23	0.0017	0.0033	0.5955	.
1310	49	b24	-0.0021	0.0029	0.4547	.
1311	49	b25	0.0019	0.0050	0.6962	.
1312	49	b26	-0.0223	0.0115	0.0538	.
1313	49	b27	-0.0261	0.0182	0.1507	.
1314	49	b28	0.0128	0.0295	0.6652	.
1315	49	b30	4.6026	0.6997	0.0000	**
1316	49	b31	0.0027	0.0030	0.3705	.
1317	49	b32	-0.0037	0.0027	0.1762	.
1318	49	b33	0.0002	0.0023	0.9142	.
1319	49	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1320	49	b35	-0.0060	0.0031	0.0493	*
1321	49	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1322	49	b37	0.0176	0.0120	0.1410	.
1323	49	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1324	50	b10	5.0479	0.9172	0.0000	**
1325	50	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1326	50	b12	0.0040	0.0058	0.4944	.
1327	50	b13	-0.0001	0.0024	0.9700	.
1328	50	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
1329	50	b15	-0.0056	0.0042	0.1800	.
1330	50	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1331	50	b17	0.0057	0.0145	0.6951	.
1332	50	b18	-0.0012	0.0228	0.9567	.
1333	50	b20	3.9402	1.1651	0.0007	**
1334	50	b21	0.0077	0.0045	0.0885	.
1335	50	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
1336	50	b23	0.0017	0.0033	0.5952	.
1337	50	b24	-0.0021	0.0029	0.4553	.
1338	50	b25	0.0019	0.0050	0.6964	.
1339	50	b26	-0.0223	0.0115	0.0539	.
1340	50	b27	-0.0261	0.0182	0.1508	.
1341	50	b28	0.0128	0.0295	0.6654	.
1342	50	b30	4.6026	0.6998	0.0000	**
1343	50	b31	0.0027	0.0030	0.3711	.
1344	50	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
1345	50	b33	0.0002	0.0023	0.9147	.
1346	50	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1347	50	b35	-0.0060	0.0031	0.0493	*
1348	50	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1349	50	b37	0.0176	0.0120	0.1409	.
1350	50	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1351	51	b10	5.0461	0.9170	0.0000	**
1352	51	b11	0.0066	0.0032	0.0397	*
1353	51	b12	0.0040	0.0058	0.4928	.
1354	51	b13	-0.0001	0.0024	0.9702	.
1355	51	b14	-0.0033	0.0021	0.1241	.
1356	51	b15	-0.0056	0.0042	0.1793	.
1357	51	b16	-0.0209	0.0097	0.0311	*
1358	51	b17	0.0057	0.0145	0.6942	.
1359	51	b18	-0.0012	0.0228	0.9571	.
1360	51	b20	3.9408	1.1647	0.0007	**
1361	51	b21	0.0077	0.0045	0.0881	.
1362	51	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.
1363	51	b23	0.0017	0.0033	0.5946	.
1364	51	b24	-0.0021	0.0029	0.4551	.
1365	51	b25	0.0019	0.0050	0.6968	.
1366	51	b26	-0.0223	0.0115	0.0537	.
1367	51	b27	-0.0261	0.0182	0.1501	.
1368	51	b28	0.0128	0.0295	0.6646	.
1369	51	b30	4.6023	0.6996	0.0000	**
1370	51	b31	0.0027	0.0030	0.3716	.
1371	51	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
1372	51	b33	0.0002	0.0023	0.9148	.
1373	51	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1374	51	b35	-0.0060	0.0031	0.0491	*
1375	51	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1376	51	b37	0.0176	0.0120	0.1406	.
1377	51	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1378	52	b10	5.0448	0.9168	0.0000	**
1379	52	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1380	52	b12	0.0040	0.0058	0.4917	.
1381	52	b13	-0.0001	0.0024	0.9703	.
1382	52	b14	-0.0033	0.0021	0.1241	.
1383	52	b15	-0.0056	0.0042	0.1789	.
1384	52	b16	-0.0209	0.0097	0.0312	*
1385	52	b17	0.0057	0.0145	0.6935	.
1386	52	b18	-0.0012	0.0228	0.9574	.
1387	52	b20	3.9412	1.1644	0.0007	**
1388	52	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1389	52	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.
1390	52	b23	0.0017	0.0033	0.5942	.
1391	52	b24	-0.0021	0.0029	0.4551	.
1392	52	b25	0.0019	0.0050	0.6971	.
1393	52	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1394	52	b27	-0.0262	0.0182	0.1497	.
1395	52	b28	0.0128	0.0295	0.6641	.
1396	52	b30	4.6020	0.6995	0.0000	**
1397	52	b31	0.0027	0.0030	0.3719	.
1398	52	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
1399	52	b33	0.0002	0.0023	0.9149	.
1400	52	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1401	52	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1402	52	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1403	52	b37	0.0176	0.0120	0.1404	.
1404	52	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1405	53	b10	5.0427	0.9168	0.0000	**
1406	53	b11	0.0066	0.0032	0.0397	*
1407	53	b12	0.0040	0.0058	0.4903	.
1408	53	b13	-0.0001	0.0024	0.9701	.
1409	53	b14	-0.0033	0.0021	0.1246	.
1410	53	b15	-0.0056	0.0042	0.1785	.
1411	53	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
1412	53	b17	0.0057	0.0145	0.6919	.
1413	53	b18	-0.0012	0.0228	0.9565	.
1414	53	b20	3.9411	1.1644	0.0007	**
1415	53	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1416	53	b22	-0.0102	0.0057	0.0715	.
1417	53	b23	0.0017	0.0033	0.5937	.
1418	53	b24	-0.0021	0.0029	0.4558	.
1419	53	b25	0.0019	0.0050	0.6976	.
1420	53	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1421	53	b27	-0.0262	0.0182	0.1497	.
1422	53	b28	0.0128	0.0295	0.6643	.
1423	53	b30	4.6017	0.6996	0.0000	**
1424	53	b31	0.0027	0.0030	0.3726	.
1425	53	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
1426	53	b33	0.0002	0.0023	0.9158	.
1427	53	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1428	53	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1429	53	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1430	53	b37	0.0177	0.0120	0.1401	.
1431	53	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1432	54	b10	5.0436	0.9166	0.0000	**
1433	54	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1434	54	b12	0.0040	0.0058	0.4907	.
1435	54	b13	-0.0001	0.0024	0.9706	.
1436	54	b14	-0.0033	0.0021	0.1242	.
1437	54	b15	-0.0056	0.0042	0.1785	.
1438	54	b16	-0.0209	0.0097	0.0312	*
1439	54	b17	0.0057	0.0145	0.6929	.
1440	54	b18	-0.0012	0.0228	0.9576	.
1441	54	b20	3.9415	1.1641	0.0007	**
1442	54	b21	0.0077	0.0045	0.0877	.
1443	54	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
1444	54	b23	0.0017	0.0033	0.5938	.
1445	54	b24	-0.0021	0.0029	0.4552	.
1446	54	b25	0.0019	0.0050	0.6975	.
1447	54	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1448	54	b27	-0.0262	0.0182	0.1493	.
1449	54	b28	0.0128	0.0295	0.6635	.
1450	54	b30	4.6017	0.6994	0.0000	**
1451	54	b31	0.0027	0.0030	0.3721	.
1452	54	b32	-0.0037	0.0027	0.1765	.
1453	54	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
1454	54	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1455	54	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1456	54	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1457	54	b37	0.0177	0.0120	0.1402	.
1458	54	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1459	55	b10	5.0425	0.9164	0.0000	**
1460	55	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1461	55	b12	0.0040	0.0058	0.4897	.
1462	55	b13	-0.0001	0.0024	0.9710	.
1463	55	b14	-0.0033	0.0021	0.1242	.
1464	55	b15	-0.0056	0.0042	0.1780	.
1465	55	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1466	55	b17	0.0057	0.0145	0.6926	.
1467	55	b18	-0.0012	0.0228	0.9583	.
1468	55	b20	3.9419	1.1637	0.0007	**
1469	55	b21	0.0077	0.0045	0.0875	.
1470	55	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1471	55	b23	0.0017	0.0033	0.5931	.
1472	55	b24	-0.0021	0.0029	0.4556	.
1473	55	b25	0.0019	0.0050	0.6981	.
1474	55	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1475	55	b27	-0.0262	0.0182	0.1489	.
1476	55	b28	0.0128	0.0295	0.6627	.
1477	55	b30	4.6013	0.6993	0.0000	**
1478	55	b31	0.0027	0.0030	0.3722	.
1479	55	b32	-0.0037	0.0027	0.1765	.
1480	55	b33	0.0002	0.0023	0.9153	.
1481	55	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1482	55	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1483	55	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1484	55	b37	0.0177	0.0120	0.1401	.
1485	55	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1486	56	b10	5.0410	0.9163	0.0000	**
1487	56	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1488	56	b12	0.0040	0.0058	0.4886	.
1489	56	b13	-0.0001	0.0024	0.9713	.
1490	56	b14	-0.0033	0.0021	0.1245	.
1491	56	b15	-0.0056	0.0042	0.1776	.
1492	56	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
1493	56	b17	0.0057	0.0145	0.6918	.
1494	56	b18	-0.0012	0.0228	0.9588	.
1495	56	b20	3.9421	1.1635	0.0007	**
1496	56	b21	0.0077	0.0045	0.0875	.
1497	56	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1498	56	b23	0.0018	0.0033	0.5924	.
1499	56	b24	-0.0021	0.0029	0.4562	.
1500	56	b25	0.0019	0.0050	0.6987	.
1501	56	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1502	56	b27	-0.0262	0.0182	0.1486	.
1503	56	b28	0.0129	0.0295	0.6621	.
1504	56	b30	4.6009	0.6992	0.0000	**
1505	56	b31	0.0027	0.0030	0.3726	.
1506	56	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
1507	56	b33	0.0002	0.0023	0.9157	.
1508	56	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1509	56	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1510	56	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1511	56	b37	0.0177	0.0120	0.1400	.
1512	56	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1513	57	b10	5.0400	0.9163	0.0000	**
1514	57	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1515	57	b12	0.0040	0.0058	0.4881	.
1516	57	b13	-0.0001	0.0024	0.9706	.
1517	57	b14	-0.0033	0.0021	0.1247	.
1518	57	b15	-0.0056	0.0042	0.1776	.
1519	57	b16	-0.0208	0.0097	0.0315	*
1520	57	b17	0.0058	0.0145	0.6906	.
1521	57	b18	-0.0012	0.0228	0.9572	.
1522	57	b20	3.9418	1.1636	0.0007	**
1523	57	b21	0.0077	0.0045	0.0875	.
1524	57	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1525	57	b23	0.0018	0.0033	0.5924	.
1526	57	b24	-0.0021	0.0029	0.4562	.
1527	57	b25	0.0019	0.0050	0.6984	.
1528	57	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1529	57	b27	-0.0262	0.0182	0.1488	.
1530	57	b28	0.0128	0.0295	0.6629	.
1531	57	b30	4.6009	0.6993	0.0000	**
1532	57	b31	0.0027	0.0030	0.3730	.
1533	57	b32	-0.0037	0.0027	0.1769	.
1534	57	b33	0.0002	0.0023	0.9164	.
1535	57	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1536	57	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1537	57	b36	-0.0181	0.0078	0.0207	*
1538	57	b37	0.0177	0.0120	0.1397	.
1539	57	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1540	58	b10	5.0365	0.9162	0.0000	**
1541	58	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1542	58	b12	0.0041	0.0058	0.4857	.
1543	58	b13	-0.0001	0.0024	0.9703	.
1544	58	b14	-0.0033	0.0021	0.1254	.
1545	58	b15	-0.0056	0.0042	0.1767	.
1546	58	b16	-0.0208	0.0097	0.0319	*
1547	58	b17	0.0058	0.0145	0.6879	.
1548	58	b18	-0.0012	0.0228	0.9566	.
1549	58	b20	3.9422	1.1633	0.0007	**
1550	58	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1551	58	b22	-0.0102	0.0057	0.0710	.
1552	58	b23	0.0018	0.0033	0.5910	.
1553	58	b24	-0.0021	0.0029	0.4573	.
1554	58	b25	0.0019	0.0050	0.6995	.
1555	58	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1556	58	b27	-0.0263	0.0182	0.1486	.
1557	58	b28	0.0129	0.0295	0.6625	.
1558	58	b30	4.6003	0.6992	0.0000	**
1559	58	b31	0.0027	0.0030	0.3739	.
1560	58	b32	-0.0037	0.0027	0.1774	.
1561	58	b33	0.0002	0.0023	0.9178	.
1562	58	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1563	58	b35	-0.0060	0.0031	0.0486	*
1564	58	b36	-0.0180	0.0078	0.0208	*
1565	58	b37	0.0177	0.0120	0.1391	.
1566	58	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1567	59	b10	5.0353	0.9162	0.0000	**
1568	59	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1569	59	b12	0.0041	0.0058	0.4850	.
1570	59	b13	-0.0001	0.0024	0.9703	.
1571	59	b14	-0.0033	0.0021	0.1256	.
1572	59	b15	-0.0056	0.0042	0.1764	.
1573	59	b16	-0.0208	0.0097	0.0320	*
1574	59	b17	0.0058	0.0145	0.6871	.
1575	59	b18	-0.0012	0.0228	0.9567	.
1576	59	b20	3.9425	1.1632	0.0007	**
1577	59	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1578	59	b22	-0.0102	0.0057	0.0708	.
1579	59	b23	0.0018	0.0033	0.5904	.
1580	59	b24	-0.0021	0.0029	0.4577	.
1581	59	b25	0.0019	0.0050	0.7001	.
1582	59	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1583	59	b27	-0.0263	0.0182	0.1484	.
1584	59	b28	0.0129	0.0295	0.6620	.
1585	59	b30	4.6001	0.6992	0.0000	**
1586	59	b31	0.0027	0.0030	0.3741	.
1587	59	b32	-0.0037	0.0027	0.1776	.
1588	59	b33	0.0002	0.0023	0.9183	.
1589	59	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1590	59	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1591	59	b36	-0.0180	0.0078	0.0208	*
1592	59	b37	0.0177	0.0120	0.1390	.
1593	59	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1594	60	b10	5.0332	0.9162	0.0000	**
1595	60	b11	0.0066	0.0032	0.0397	*
1596	60	b12	0.0041	0.0058	0.4834	.
1597	60	b13	-0.0001	0.0024	0.9698	.
1598	60	b14	-0.0033	0.0021	0.1260	.
1599	60	b15	-0.0056	0.0042	0.1759	.
1600	60	b16	-0.0208	0.0097	0.0322	*
1601	60	b17	0.0059	0.0145	0.6853	.
1602	60	b18	-0.0013	0.0228	0.9555	.
1603	60	b20	3.9423	1.1632	0.0007	**
1604	60	b21	0.0077	0.0045	0.0877	.
1605	60	b22	-0.0102	0.0056	0.0708	.
1606	60	b23	0.0018	0.0033	0.5900	.
1607	60	b24	-0.0021	0.0029	0.4582	.
1608	60	b25	0.0019	0.0050	0.7007	.
1609	60	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1610	60	b27	-0.0263	0.0182	0.1485	.
1611	60	b28	0.0129	0.0295	0.6621	.
1612	60	b30	4.6002	0.6992	0.0000	**
1613	60	b31	0.0027	0.0030	0.3747	.
1614	60	b32	-0.0037	0.0027	0.1780	.
1615	60	b33	0.0002	0.0023	0.9192	.
1616	60	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1617	60	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1618	60	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
1619	60	b37	0.0178	0.0120	0.1387	.
1620	60	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1621	61	b10	5.0314	0.9162	0.0000	**
1622	61	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1623	61	b12	0.0041	0.0058	0.4823	.
1624	61	b13	-0.0001	0.0024	0.9695	.
1625	61	b14	-0.0033	0.0021	0.1264	.
1626	61	b15	-0.0056	0.0042	0.1755	.
1627	61	b16	-0.0207	0.0097	0.0324	*
1628	61	b17	0.0059	0.0145	0.6839	.
1629	61	b18	-0.0013	0.0228	0.9550	.
1630	61	b20	3.9426	1.1631	0.0007	**
1631	61	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
1632	61	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
1633	61	b23	0.0018	0.0033	0.5896	.
1634	61	b24	-0.0021	0.0029	0.4585	.
1635	61	b25	0.0019	0.0050	0.7014	.
1636	61	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1637	61	b27	-0.0263	0.0182	0.1484	.
1638	61	b28	0.0129	0.0295	0.6617	.
1639	61	b30	4.6002	0.6992	0.0000	**
1640	61	b31	0.0027	0.0030	0.3750	.
1641	61	b32	-0.0037	0.0027	0.1784	.
1642	61	b33	0.0002	0.0023	0.9198	.
1643	61	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1644	61	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1645	61	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
1646	61	b37	0.0178	0.0120	0.1386	.
1647	61	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**
1648	62	b10	5.0303	0.9162	0.0000	**
1649	62	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1650	62	b12	0.0041	0.0058	0.4814	.
1651	62	b13	-0.0001	0.0024	0.9692	.
1652	62	b14	-0.0032	0.0021	0.1266	.
1653	62	b15	-0.0056	0.0042	0.1753	.
1654	62	b16	-0.0207	0.0097	0.0325	*
1655	62	b17	0.0059	0.0145	0.6829	.
1656	62	b18	-0.0013	0.0228	0.9542	.
1657	62	b20	3.9425	1.1631	0.0007	**
1658	62	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1659	62	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
1660	62	b23	0.0018	0.0033	0.5893	.
1661	62	b24	-0.0021	0.0029	0.4588	.
1662	62	b25	0.0019	0.0050	0.7017	.
1663	62	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1664	62	b27	-0.0263	0.0182	0.1485	.
1665	62	b28	0.0129	0.0295	0.6617	.
1666	62	b30	4.6005	0.6993	0.0000	**
1667	62	b31	0.0027	0.0030	0.3753	.
1668	62	b32	-0.0037	0.0027	0.1786	.
1669	62	b33	0.0002	0.0023	0.9204	.
1670	62	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1671	62	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1672	62	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
1673	62	b37	0.0178	0.0120	0.1385	.
1674	62	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**
1675	63	b10	5.0419	0.9164	0.0000	**
1676	63	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1677	63	b12	0.0040	0.0058	0.4892	.
1678	63	b13	-0.0001	0.0024	0.9716	.
1679	63	b14	-0.0033	0.0021	0.1243	.
1680	63	b15	-0.0056	0.0042	0.1776	.
1681	63	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1682	63	b17	0.0057	0.0145	0.6926	.
1683	63	b18	-0.0012	0.0228	0.9597	.
1684	63	b20	3.9423	1.1636	0.0007	**
1685	63	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1686	63	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1687	63	b23	0.0018	0.0033	0.5926	.
1688	63	b24	-0.0021	0.0029	0.4561	.
1689	63	b25	0.0019	0.0050	0.6988	.
1690	63	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1691	63	b27	-0.0262	0.0182	0.1486	.
1692	63	b28	0.0129	0.0295	0.6617	.
1693	63	b30	4.6010	0.6992	0.0000	**
1694	63	b31	0.0027	0.0030	0.3724	.
1695	63	b32	-0.0037	0.0027	0.1766	.
1696	63	b33	0.0002	0.0023	0.9153	.
1697	63	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1698	63	b35	-0.0060	0.0031	0.0487	*
1699	63	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1700	63	b37	0.0177	0.0120	0.1402	.
1701	63	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1702	64	b10	5.0472	0.9167	0.0000	**
1703	64	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1704	64	b12	0.0040	0.0058	0.4932	.
1705	64	b13	-0.0001	0.0024	0.9714	.
1706	64	b14	-0.0033	0.0021	0.1236	.
1707	64	b15	-0.0056	0.0042	0.1788	.
1708	64	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1709	64	b17	0.0057	0.0145	0.6959	.
1710	64	b18	-0.0011	0.0228	0.9603	.
1711	64	b20	3.9420	1.1641	0.0007	**
1712	64	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1713	64	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1714	64	b23	0.0017	0.0033	0.5942	.
1715	64	b24	-0.0021	0.0029	0.4552	.
1716	64	b25	0.0019	0.0050	0.6977	.
1717	64	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1718	64	b27	-0.0262	0.0182	0.1493	.
1719	64	b28	0.0129	0.0295	0.6626	.
1720	64	b30	4.6020	0.6994	0.0000	**
1721	64	b31	0.0027	0.0030	0.3713	.
1722	64	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
1723	64	b33	0.0002	0.0023	0.9137	.
1724	64	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1725	64	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1726	64	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
1727	64	b37	0.0176	0.0120	0.1408	.
1728	64	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1729	65	b10	5.0441	0.9164	0.0000	**
1730	65	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1731	65	b12	0.0040	0.0058	0.4907	.
1732	65	b13	-0.0001	0.0024	0.9715	.
1733	65	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
1734	65	b15	-0.0056	0.0042	0.1781	.
1735	65	b16	-0.0209	0.0097	0.0312	*
1736	65	b17	0.0057	0.0145	0.6939	.
1737	65	b18	-0.0012	0.0228	0.9594	.
1738	65	b20	3.9422	1.1638	0.0007	**
1739	65	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1740	65	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1741	65	b23	0.0017	0.0033	0.5933	.
1742	65	b24	-0.0021	0.0029	0.4554	.
1743	65	b25	0.0019	0.0050	0.6981	.
1744	65	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1745	65	b27	-0.0262	0.0182	0.1489	.
1746	65	b28	0.0129	0.0295	0.6623	.
1747	65	b30	4.6015	0.6993	0.0000	**
1748	65	b31	0.0027	0.0030	0.3718	.
1749	65	b32	-0.0037	0.0027	0.1763	.
1750	65	b33	0.0002	0.0023	0.9146	.
1751	65	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1752	65	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1753	65	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1754	65	b37	0.0176	0.0120	0.1404	.
1755	65	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1756	66	b10	5.0418	0.9164	0.0000	**
1757	66	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1758	66	b12	0.0040	0.0058	0.4893	.
1759	66	b13	-0.0001	0.0024	0.9707	.
1760	66	b14	-0.0033	0.0021	0.1244	.
1761	66	b15	-0.0056	0.0042	0.1780	.
1762	66	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
1763	66	b17	0.0057	0.0145	0.6919	.
1764	66	b18	-0.0012	0.0228	0.9577	.
1765	66	b20	3.9418	1.1637	0.0007	**
1766	66	b21	0.0077	0.0045	0.0875	.
1767	66	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
1768	66	b23	0.0017	0.0033	0.5931	.
1769	66	b24	-0.0021	0.0029	0.4557	.
1770	66	b25	0.0019	0.0050	0.6980	.
1771	66	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1772	66	b27	-0.0262	0.0182	0.1490	.
1773	66	b28	0.0128	0.0295	0.6630	.
1774	66	b30	4.6012	0.6993	0.0000	**
1775	66	b31	0.0027	0.0030	0.3724	.
1776	66	b32	-0.0037	0.0027	0.1766	.
1777	66	b33	0.0002	0.0023	0.9157	.
1778	66	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1779	66	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1780	66	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1781	66	b37	0.0177	0.0120	0.1400	.
1782	66	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1783	67	b10	5.0358	0.9162	0.0000	**
1784	67	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1785	67	b12	0.0041	0.0058	0.4852	.
1786	67	b13	-0.0001	0.0024	0.9702	.
1787	67	b14	-0.0033	0.0021	0.1255	.
1788	67	b15	-0.0056	0.0042	0.1765	.
1789	67	b16	-0.0208	0.0097	0.0319	*
1790	67	b17	0.0058	0.0145	0.6873	.
1791	67	b18	-0.0012	0.0228	0.9564	.
1792	67	b20	3.9422	1.1633	0.0007	**
1793	67	b21	0.0077	0.0045	0.0876	.
1794	67	b22	-0.0102	0.0057	0.0709	.
1795	67	b23	0.0018	0.0033	0.5908	.
1796	67	b24	-0.0021	0.0029	0.4575	.
1797	67	b25	0.0019	0.0050	0.6997	.
1798	67	b26	-0.0223	0.0115	0.0533	.
1799	67	b27	-0.0263	0.0182	0.1486	.
1800	67	b28	0.0129	0.0295	0.6625	.
1801	67	b30	4.6003	0.6992	0.0000	**
1802	67	b31	0.0027	0.0030	0.3741	.
1803	67	b32	-0.0037	0.0027	0.1775	.
1804	67	b33	0.0002	0.0023	0.9181	.
1805	67	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1806	67	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1807	67	b36	-0.0180	0.0078	0.0208	*
1808	67	b37	0.0177	0.0120	0.1390	.
1809	67	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
1810	68	b10	5.0311	0.9162	0.0000	**
1811	68	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1812	68	b12	0.0041	0.0058	0.4820	.
1813	68	b13	-0.0001	0.0024	0.9694	.
1814	68	b14	-0.0032	0.0021	0.1265	.
1815	68	b15	-0.0056	0.0042	0.1754	.
1816	68	b16	-0.0207	0.0097	0.0325	*
1817	68	b17	0.0059	0.0145	0.6835	.
1818	68	b18	-0.0013	0.0228	0.9546	.
1819	68	b20	3.9424	1.1631	0.0007	**
1820	68	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1821	68	b22	-0.0102	0.0056	0.0706	.
1822	68	b23	0.0018	0.0033	0.5895	.
1823	68	b24	-0.0021	0.0029	0.4586	.
1824	68	b25	0.0019	0.0050	0.7015	.
1825	68	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1826	68	b27	-0.0263	0.0182	0.1485	.
1827	68	b28	0.0129	0.0295	0.6618	.
1828	68	b30	4.6003	0.6993	0.0000	**
1829	68	b31	0.0027	0.0030	0.3752	.
1830	68	b32	-0.0037	0.0027	0.1784	.
1831	68	b33	0.0002	0.0023	0.9200	.
1832	68	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1833	68	b35	-0.0060	0.0030	0.0486	*
1834	68	b36	-0.0180	0.0078	0.0209	*
1835	68	b37	0.0178	0.0120	0.1385	.
1836	68	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1837	69	b10	5.0421	0.9167	0.0000	**
1838	69	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1839	69	b12	0.0040	0.0058	0.4900	.
1840	69	b13	-0.0001	0.0024	0.9717	.
1841	69	b14	-0.0033	0.0021	0.1245	.
1842	69	b15	-0.0056	0.0042	0.1779	.
1843	69	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
1844	69	b17	0.0057	0.0145	0.6929	.
1845	69	b18	-0.0011	0.0228	0.9607	.
1846	69	b20	3.9424	1.1638	0.0007	**
1847	69	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
1848	69	b22	-0.0102	0.0057	0.0710	.
1849	69	b23	0.0018	0.0033	0.5925	.
1850	69	b24	-0.0021	0.0029	0.4567	.
1851	69	b25	0.0019	0.0050	0.6992	.
1852	69	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1853	69	b27	-0.0262	0.0182	0.1486	.
1854	69	b28	0.0129	0.0295	0.6610	.
1855	69	b30	4.6010	0.6994	0.0000	**
1856	69	b31	0.0027	0.0030	0.3727	.
1857	69	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
1858	69	b33	0.0002	0.0023	0.9150	.
1859	69	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1860	69	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1861	69	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1862	69	b37	0.0176	0.0120	0.1405	.
1863	69	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1864	70	b10	5.0437	0.9167	0.0000	**
1865	70	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1866	70	b12	0.0040	0.0058	0.4912	.
1867	70	b13	-0.0001	0.0024	0.9719	.
1868	70	b14	-0.0033	0.0021	0.1242	.
1869	70	b15	-0.0056	0.0042	0.1783	.
1870	70	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1871	70	b17	0.0057	0.0145	0.6941	.
1872	70	b18	-0.0011	0.0228	0.9613	.
1873	70	b20	3.9422	1.1640	0.0007	**
1874	70	b21	0.0077	0.0045	0.0879	.
1875	70	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1876	70	b23	0.0017	0.0033	0.5929	.
1877	70	b24	-0.0021	0.0029	0.4563	.
1878	70	b25	0.0019	0.0050	0.6988	.
1879	70	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1880	70	b27	-0.0262	0.0182	0.1488	.
1881	70	b28	0.0129	0.0295	0.6613	.
1882	70	b30	4.6011	0.6994	0.0000	**
1883	70	b31	0.0027	0.0030	0.3723	.
1884	70	b32	-0.0037	0.0027	0.1766	.
1885	70	b33	0.0002	0.0023	0.9143	.
1886	70	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1887	70	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1888	70	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1889	70	b37	0.0176	0.0120	0.1407	.
1890	70	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1891	71	b10	5.0457	0.9169	0.0000	**
1892	71	b11	0.0066	0.0032	0.0396	*
1893	71	b12	0.0040	0.0058	0.4928	.
1894	71	b13	-0.0001	0.0024	0.9717	.
1895	71	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
1896	71	b15	-0.0056	0.0042	0.1787	.
1897	71	b16	-0.0209	0.0097	0.0312	*
1898	71	b17	0.0057	0.0145	0.6952	.
1899	71	b18	-0.0011	0.0228	0.9613	.
1900	71	b20	3.9420	1.1643	0.0007	**
1901	71	b21	0.0077	0.0045	0.0880	.
1902	71	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1903	71	b23	0.0017	0.0033	0.5936	.
1904	71	b24	-0.0021	0.0029	0.4560	.
1905	71	b25	0.0019	0.0050	0.6984	.
1906	71	b26	-0.0223	0.0115	0.0536	.
1907	71	b27	-0.0262	0.0182	0.1492	.
1908	71	b28	0.0129	0.0295	0.6619	.
1909	71	b30	4.6016	0.6995	0.0000	**
1910	71	b31	0.0027	0.0030	0.3719	.
1911	71	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
1912	71	b33	0.0002	0.0023	0.9139	.
1913	71	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1914	71	b35	-0.0060	0.0031	0.0490	*
1915	71	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1916	71	b37	0.0176	0.0120	0.1409	.
1917	71	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1918	72	b10	5.0435	0.9165	0.0000	**
1919	72	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1920	72	b12	0.0040	0.0058	0.4906	.
1921	72	b13	-0.0001	0.0024	0.9717	.
1922	72	b14	-0.0033	0.0021	0.1241	.
1923	72	b15	-0.0056	0.0042	0.1780	.
1924	72	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1925	72	b17	0.0057	0.0145	0.6939	.
1926	72	b18	-0.0011	0.0228	0.9607	.
1927	72	b20	3.9422	1.1638	0.0007	**
1928	72	b21	0.0077	0.0045	0.0877	.
1929	72	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1930	72	b23	0.0017	0.0033	0.5929	.
1931	72	b24	-0.0021	0.0029	0.4561	.
1932	72	b25	0.0019	0.0050	0.6987	.
1933	72	b26	-0.0223	0.0115	0.0534	.
1934	72	b27	-0.0262	0.0182	0.1487	.
1935	72	b28	0.0129	0.0295	0.6615	.
1936	72	b30	4.6012	0.6993	0.0000	**
1937	72	b31	0.0027	0.0030	0.3722	.
1938	72	b32	-0.0037	0.0027	0.1765	.
1939	72	b33	0.0002	0.0023	0.9147	.
1940	72	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1941	72	b35	-0.0060	0.0031	0.0488	*
1942	72	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1943	72	b37	0.0176	0.0120	0.1405	.
1944	72	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
1945	73	b10	5.0438	0.9166	0.0000	**
1946	73	b11	0.0066	0.0032	0.0395	*
1947	73	b12	0.0040	0.0058	0.4910	.
1948	73	b13	-0.0001	0.0024	0.9717	.
1949	73	b14	-0.0033	0.0021	0.1241	.
1950	73	b15	-0.0056	0.0042	0.1782	.
1951	73	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
1952	73	b17	0.0057	0.0145	0.6941	.
1953	73	b18	-0.0011	0.0228	0.9610	.
1954	73	b20	3.9422	1.1639	0.0007	**
1955	73	b21	0.0077	0.0045	0.0878	.
1956	73	b22	-0.0102	0.0057	0.0711	.
1957	73	b23	0.0017	0.0033	0.5930	.
1958	73	b24	-0.0021	0.0029	0.4562	.
1959	73	b25	0.0019	0.0050	0.6987	.
1960	73	b26	-0.0223	0.0115	0.0535	.
1961	73	b27	-0.0262	0.0182	0.1488	.
1962	73	b28	0.0129	0.0295	0.6614	.
1963	73	b30	4.6012	0.6994	0.0000	**
1964	73	b31	0.0027	0.0030	0.3722	.
1965	73	b32	-0.0037	0.0027	0.1765	.
1966	73	b33	0.0002	0.0023	0.9145	.
1967	73	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1968	73	b35	-0.0060	0.0031	0.0489	*
1969	73	b36	-0.0181	0.0078	0.0206	*
1970	73	b37	0.0176	0.0120	0.1407	.
1971	73	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1972	74	b10	5.0495	0.9175	0.0000	**
1973	74	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
1974	74	b12	0.0040	0.0059	0.4965	.
1975	74	b13	-0.0001	0.0024	0.9714	.
1976	74	b14	-0.0033	0.0021	0.1237	.
1977	74	b15	-0.0056	0.0042	0.1800	.
1978	74	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
1979	74	b17	0.0056	0.0145	0.6968	.
1980	74	b18	-0.0011	0.0228	0.9609	.
1981	74	b20	3.9412	1.1651	0.0007	**
1982	74	b21	0.0077	0.0045	0.0886	.
1983	74	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
1984	74	b23	0.0017	0.0033	0.5948	.
1985	74	b24	-0.0021	0.0029	0.4558	.
1986	74	b25	0.0019	0.0050	0.6974	.
1987	74	b26	-0.0222	0.0115	0.0540	.
1988	74	b27	-0.0261	0.0182	0.1503	.
1989	74	b28	0.0128	0.0295	0.6632	.
1990	74	b30	4.6023	0.6999	0.0000	**
1991	74	b31	0.0027	0.0030	0.3711	.
1992	74	b32	-0.0037	0.0027	0.1763	.
1993	74	b33	0.0002	0.0023	0.9135	.
1994	74	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
1995	74	b35	-0.0060	0.0031	0.0493	*
1996	74	b36	-0.0181	0.0078	0.0205	*
1997	74	b37	0.0176	0.0120	0.1412	.
1998	74	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
1999	75	b10	5.0528	0.9175	0.0000	**
2000	75	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2001	75	b12	0.0040	0.0059	0.4982	.
2002	75	b13	-0.0001	0.0024	0.9709	.
2003	75	b14	-0.0033	0.0021	0.1230	.
2004	75	b15	-0.0056	0.0042	0.1804	.
2005	75	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2006	75	b17	0.0056	0.0145	0.6985	.
2007	75	b18	-0.0011	0.0229	0.9605	.
2008	75	b20	3.9415	1.1651	0.0007	**
2009	75	b21	0.0077	0.0045	0.0887	.
2010	75	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
2011	75	b23	0.0017	0.0033	0.5955	.
2012	75	b24	-0.0021	0.0029	0.4549	.
2013	75	b25	0.0019	0.0050	0.6964	.
2014	75	b26	-0.0222	0.0115	0.0540	.
2015	75	b27	-0.0261	0.0182	0.1505	.
2016	75	b28	0.0128	0.0295	0.6642	.
2017	75	b30	4.6030	0.6999	0.0000	**
2018	75	b31	0.0027	0.0030	0.3703	.
2019	75	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
2020	75	b33	0.0002	0.0023	0.9133	.
2021	75	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2022	75	b35	-0.0060	0.0031	0.0494	*
2023	75	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2024	75	b37	0.0176	0.0120	0.1413	.
2025	75	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
2026	76	b10	5.0539	0.9179	0.0000	**
2027	76	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2028	76	b12	0.0040	0.0059	0.5000	.
2029	76	b13	-0.0001	0.0024	0.9711	.
2030	76	b14	-0.0033	0.0021	0.1231	.
2031	76	b15	-0.0056	0.0042	0.1812	.
2032	76	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2033	76	b17	0.0056	0.0145	0.6988	.
2034	76	b18	-0.0011	0.0229	0.9603	.
2035	76	b20	3.9407	1.1656	0.0007	**
2036	76	b21	0.0077	0.0045	0.0890	.
2037	76	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
2038	76	b23	0.0017	0.0033	0.5958	.
2039	76	b24	-0.0021	0.0029	0.4553	.
2040	76	b25	0.0019	0.0050	0.6960	.
2041	76	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
2042	76	b27	-0.0261	0.0182	0.1512	.
2043	76	b28	0.0128	0.0295	0.6648	.
2044	76	b30	4.6031	0.7002	0.0000	**
2045	76	b31	0.0027	0.0030	0.3698	.
2046	76	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
2047	76	b33	0.0003	0.0023	0.9130	.
2048	76	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2049	76	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
2050	76	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2051	76	b37	0.0176	0.0120	0.1416	.
2052	76	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2053	77	b10	5.0546	0.9181	0.0000	**
2054	77	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2055	77	b12	0.0039	0.0059	0.5010	.
2056	77	b13	-0.0001	0.0024	0.9711	.
2057	77	b14	-0.0033	0.0021	0.1232	.
2058	77	b15	-0.0056	0.0042	0.1817	.
2059	77	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2060	77	b17	0.0056	0.0145	0.6991	.
2061	77	b18	-0.0012	0.0229	0.9599	.
2062	77	b20	3.9400	1.1660	0.0007	**
2063	77	b21	0.0077	0.0045	0.0891	.
2064	77	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2065	77	b23	0.0017	0.0033	0.5961	.
2066	77	b24	-0.0021	0.0029	0.4556	.
2067	77	b25	0.0019	0.0050	0.6956	.
2068	77	b26	-0.0222	0.0115	0.0544	.
2069	77	b27	-0.0260	0.0182	0.1516	.
2070	77	b28	0.0128	0.0295	0.6654	.
2071	77	b30	4.6032	0.7003	0.0000	**
2072	77	b31	0.0027	0.0030	0.3693	.
2073	77	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
2074	77	b33	0.0003	0.0023	0.9128	.
2075	77	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2076	77	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
2077	77	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2078	77	b37	0.0176	0.0120	0.1417	.
2079	77	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2080	78	b10	5.0556	0.9185	0.0000	**
2081	78	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
2082	78	b12	0.0039	0.0059	0.5026	.
2083	78	b13	-0.0001	0.0024	0.9711	.
2084	78	b14	-0.0033	0.0021	0.1233	.
2085	78	b15	-0.0056	0.0042	0.1824	.
2086	78	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2087	78	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2088	78	b18	-0.0012	0.0229	0.9592	.
2089	78	b20	3.9385	1.1665	0.0007	**
2090	78	b21	0.0077	0.0045	0.0894	.
2091	78	b22	-0.0102	0.0057	0.0715	.
2092	78	b23	0.0017	0.0033	0.5966	.
2093	78	b24	-0.0021	0.0029	0.4561	.
2094	78	b25	0.0020	0.0050	0.6952	.
2095	78	b26	-0.0222	0.0116	0.0548	.
2096	78	b27	-0.0260	0.0182	0.1525	.
2097	78	b28	0.0127	0.0295	0.6661	.
2098	78	b30	4.6037	0.7007	0.0000	**
2099	78	b31	0.0027	0.0030	0.3688	.
2100	78	b32	-0.0037	0.0027	0.1763	.
2101	78	b33	0.0003	0.0023	0.9128	.
2102	78	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2103	78	b35	-0.0060	0.0031	0.0500	*
2104	78	b36	-0.0181	0.0078	0.0202	*
2105	78	b37	0.0176	0.0120	0.1421	.
2106	78	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2107	79	b10	5.0553	0.9180	0.0000	**
2108	79	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2109	79	b12	0.0039	0.0059	0.5014	.
2110	79	b13	-0.0001	0.0024	0.9707	.
2111	79	b14	-0.0033	0.0021	0.1230	.
2112	79	b15	-0.0056	0.0042	0.1819	.
2113	79	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2114	79	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2115	79	b18	-0.0012	0.0229	0.9593	.
2116	79	b20	3.9395	1.1659	0.0007	**
2117	79	b21	0.0077	0.0045	0.0892	.
2118	79	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2119	79	b23	0.0017	0.0033	0.5962	.
2120	79	b24	-0.0021	0.0029	0.4554	.
2121	79	b25	0.0020	0.0050	0.6950	.
2122	79	b26	-0.0222	0.0115	0.0544	.
2123	79	b27	-0.0260	0.0182	0.1519	.
2124	79	b28	0.0127	0.0295	0.6661	.
2125	79	b30	4.6032	0.7003	0.0000	**
2126	79	b31	0.0027	0.0030	0.3690	.
2127	79	b32	-0.0037	0.0027	0.1762	.
2128	79	b33	0.0002	0.0023	0.9131	.
2129	79	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2130	79	b35	-0.0060	0.0031	0.0498	*
2131	79	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2132	79	b37	0.0176	0.0120	0.1416	.
2133	79	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2134	80	b10	5.0560	0.9191	0.0000	**
2135	80	b11	0.0066	0.0032	0.0401	*
2136	80	b12	0.0039	0.0059	0.5038	.
2137	80	b13	-0.0001	0.0024	0.9706	.
2138	80	b14	-0.0033	0.0021	0.1238	.
2139	80	b15	-0.0056	0.0042	0.1831	.
2140	80	b16	-0.0210	0.0097	0.0308	*
2141	80	b17	0.0056	0.0145	0.6990	.
2142	80	b18	-0.0012	0.0229	0.9582	.
2143	80	b20	3.9367	1.1673	0.0007	**
2144	80	b21	0.0077	0.0045	0.0897	.
2145	80	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
2146	80	b23	0.0017	0.0033	0.5974	.
2147	80	b24	-0.0021	0.0029	0.4570	.
2148	80	b25	0.0020	0.0050	0.6949	.
2149	80	b26	-0.0222	0.0116	0.0552	.
2150	80	b27	-0.0259	0.0182	0.1535	.
2151	80	b28	0.0127	0.0296	0.6669	.
2152	80	b30	4.6044	0.7011	0.0000	**
2153	80	b31	0.0027	0.0030	0.3690	.
2154	80	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
2155	80	b33	0.0002	0.0023	0.9134	.
2156	80	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2157	80	b35	-0.0060	0.0031	0.0503	.
2158	80	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2159	80	b37	0.0176	0.0120	0.1425	.
2160	80	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2161	81	b10	5.0557	0.9202	0.0000	**
2162	81	b11	0.0066	0.0032	0.0406	*
2163	81	b12	0.0039	0.0059	0.5048	.
2164	81	b13	-0.0001	0.0024	0.9696	.
2165	81	b14	-0.0033	0.0021	0.1250	.
2166	81	b15	-0.0056	0.0042	0.1841	.
2167	81	b16	-0.0209	0.0097	0.0311	*
2168	81	b17	0.0056	0.0145	0.6975	.
2169	81	b18	-0.0013	0.0229	0.9555	.
2170	81	b20	3.9339	1.1688	0.0008	**
2171	81	b21	0.0077	0.0045	0.0905	.
2172	81	b22	-0.0102	0.0057	0.0722	.
2173	81	b23	0.0017	0.0033	0.5990	.
2174	81	b24	-0.0021	0.0029	0.4587	.
2175	81	b25	0.0020	0.0050	0.6948	.
2176	81	b26	-0.0221	0.0116	0.0560	.
2177	81	b27	-0.0258	0.0182	0.1553	.
2178	81	b28	0.0127	0.0296	0.6684	.
2179	81	b30	4.6051	0.7020	0.0000	**
2180	81	b31	0.0027	0.0030	0.3697	.
2181	81	b32	-0.0037	0.0027	0.1775	.
2182	81	b33	0.0002	0.0023	0.9145	.
2183	81	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2184	81	b35	-0.0060	0.0031	0.0507	.
2185	81	b36	-0.0182	0.0078	0.0203	*
2186	81	b37	0.0175	0.0120	0.1430	.
2187	81	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
2188	82	b10	5.0550	0.9213	0.0000	**
2189	82	b11	0.0066	0.0032	0.0409	*
2190	82	b12	0.0039	0.0059	0.5055	.
2191	82	b13	-0.0001	0.0024	0.9694	.
2192	82	b14	-0.0033	0.0021	0.1261	.
2193	82	b15	-0.0056	0.0042	0.1845	.
2194	82	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
2195	82	b17	0.0057	0.0145	0.6963	.
2196	82	b18	-0.0013	0.0230	0.9540	.
2197	82	b20	3.9324	1.1702	0.0008	**
2198	82	b21	0.0077	0.0045	0.0910	.
2199	82	b22	-0.0102	0.0057	0.0726	.
2200	82	b23	0.0017	0.0033	0.5997	.
2201	82	b24	-0.0021	0.0029	0.4603	.
2202	82	b25	0.0020	0.0050	0.6953	.
2203	82	b26	-0.0221	0.0116	0.0565	.
2204	82	b27	-0.0258	0.0182	0.1563	.
2205	82	b28	0.0127	0.0296	0.6695	.
2206	82	b30	4.6055	0.7028	0.0000	**
2207	82	b31	0.0027	0.0030	0.3705	.
2208	82	b32	-0.0037	0.0027	0.1783	.
2209	82	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
2210	82	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2211	82	b35	-0.0060	0.0031	0.0509	.
2212	82	b36	-0.0182	0.0078	0.0204	*
2213	82	b37	0.0175	0.0120	0.1433	.
2214	82	b38	-0.0539	0.0191	0.0049	**
2215	83	b10	5.0551	0.9230	0.0000	**
2216	83	b11	0.0066	0.0032	0.0414	*
2217	83	b12	0.0039	0.0059	0.5068	.
2218	83	b13	-0.0001	0.0024	0.9697	.
2219	83	b14	-0.0033	0.0021	0.1271	.
2220	83	b15	-0.0056	0.0042	0.1857	.
2221	83	b16	-0.0209	0.0097	0.0317	*
2222	83	b17	0.0057	0.0145	0.6968	.
2223	83	b18	-0.0014	0.0230	0.9531	.
2224	83	b20	3.9328	1.1724	0.0008	**
2225	83	b21	0.0077	0.0045	0.0918	.
2226	83	b22	-0.0103	0.0057	0.0730	.
2227	83	b23	0.0017	0.0033	0.6003	.
2228	83	b24	-0.0021	0.0029	0.4614	.
2229	83	b25	0.0020	0.0050	0.6957	.
2230	83	b26	-0.0221	0.0116	0.0570	.
2231	83	b27	-0.0258	0.0182	0.1569	.
2232	83	b28	0.0126	0.0297	0.6705	.
2233	83	b30	4.6053	0.7042	0.0000	**
2234	83	b31	0.0027	0.0030	0.3712	.
2235	83	b32	-0.0037	0.0028	0.1796	.
2236	83	b33	0.0002	0.0023	0.9157	.
2237	83	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2238	83	b35	-0.0060	0.0031	0.0515	.
2239	83	b36	-0.0182	0.0079	0.0206	*
2240	83	b37	0.0175	0.0120	0.1439	.
2241	83	b38	-0.0539	0.0192	0.0049	**
2242	84	b10	5.0550	0.9213	0.0000	**
2243	84	b11	0.0066	0.0032	0.0410	*
2244	84	b12	0.0039	0.0059	0.5057	.
2245	84	b13	-0.0001	0.0024	0.9694	.
2246	84	b14	-0.0033	0.0021	0.1262	.
2247	84	b15	-0.0056	0.0042	0.1849	.
2248	84	b16	-0.0209	0.0097	0.0313	*
2249	84	b17	0.0056	0.0145	0.6963	.
2250	84	b18	-0.0014	0.0230	0.9530	.
2251	84	b20	3.9318	1.1702	0.0008	**
2252	84	b21	0.0077	0.0045	0.0910	.
2253	84	b22	-0.0102	0.0057	0.0726	.
2254	84	b23	0.0017	0.0033	0.5997	.
2255	84	b24	-0.0021	0.0029	0.4607	.
2256	84	b25	0.0020	0.0050	0.6948	.
2257	84	b26	-0.0221	0.0116	0.0566	.
2258	84	b27	-0.0258	0.0182	0.1564	.
2259	84	b28	0.0126	0.0296	0.6703	.
2260	84	b30	4.6061	0.7028	0.0000	**
2261	84	b31	0.0027	0.0030	0.3707	.
2262	84	b32	-0.0037	0.0027	0.1785	.
2263	84	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
2264	84	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2265	84	b35	-0.0060	0.0031	0.0511	.
2266	84	b36	-0.0182	0.0078	0.0204	*
2267	84	b37	0.0175	0.0120	0.1436	.
2268	84	b38	-0.0539	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2269	85	b10	5.0549	0.9216	0.0000	**
2270	85	b11	0.0066	0.0032	0.0411	*
2271	85	b12	0.0039	0.0059	0.5060	.
2272	85	b13	-0.0001	0.0024	0.9695	.
2273	85	b14	-0.0033	0.0021	0.1266	.
2274	85	b15	-0.0056	0.0042	0.1853	.
2275	85	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
2276	85	b17	0.0057	0.0145	0.6964	.
2277	85	b18	-0.0014	0.0230	0.9520	.
2278	85	b20	3.9319	1.1707	0.0008	**
2279	85	b21	0.0077	0.0045	0.0912	.
2280	85	b22	-0.0102	0.0057	0.0728	.
2281	85	b23	0.0017	0.0033	0.5997	.
2282	85	b24	-0.0021	0.0029	0.4612	.
2283	85	b25	0.0020	0.0050	0.6947	.
2284	85	b26	-0.0221	0.0116	0.0567	.
2285	85	b27	-0.0258	0.0182	0.1566	.
2286	85	b28	0.0126	0.0297	0.6712	.
2287	85	b30	4.6060	0.7031	0.0000	**
2288	85	b31	0.0027	0.0030	0.3710	.
2289	85	b32	-0.0037	0.0027	0.1787	.
2290	85	b33	0.0002	0.0023	0.9154	.
2291	85	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2292	85	b35	-0.0060	0.0031	0.0512	.
2293	85	b36	-0.0182	0.0078	0.0204	*
2294	85	b37	0.0175	0.0120	0.1438	.
2295	85	b38	-0.0539	0.0192	0.0049	**
2296	86	b10	5.0555	0.9202	0.0000	**
2297	86	b11	0.0066	0.0032	0.0406	*
2298	86	b12	0.0039	0.0059	0.5050	.
2299	86	b13	-0.0001	0.0024	0.9693	.
2300	86	b14	-0.0033	0.0021	0.1253	.
2301	86	b15	-0.0056	0.0042	0.1845	.
2302	86	b16	-0.0209	0.0097	0.0311	*
2303	86	b17	0.0056	0.0145	0.6972	.
2304	86	b18	-0.0013	0.0229	0.9539	.
2305	86	b20	3.9324	1.1689	0.0008	**
2306	86	b21	0.0077	0.0045	0.0905	.
2307	86	b22	-0.0102	0.0057	0.0723	.
2308	86	b23	0.0017	0.0033	0.5992	.
2309	86	b24	-0.0021	0.0029	0.4593	.
2310	86	b25	0.0020	0.0050	0.6942	.
2311	86	b26	-0.0221	0.0116	0.0561	.
2312	86	b27	-0.0258	0.0182	0.1558	.
2313	86	b28	0.0127	0.0296	0.6691	.
2314	86	b30	4.6055	0.7020	0.0000	**
2315	86	b31	0.0027	0.0030	0.3701	.
2316	86	b32	-0.0037	0.0027	0.1777	.
2317	86	b33	0.0002	0.0023	0.9150	.
2318	86	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2319	86	b35	-0.0060	0.0031	0.0508	.
2320	86	b36	-0.0182	0.0078	0.0203	*
2321	86	b37	0.0175	0.0120	0.1431	.
2322	86	b38	-0.0539	0.0191	0.0049	**
2323	87	b10	5.0564	0.9189	0.0000	**
2324	87	b11	0.0066	0.0032	0.0402	*
2325	87	b12	0.0039	0.0059	0.5036	.
2326	87	b13	-0.0001	0.0024	0.9695	.
2327	87	b14	-0.0033	0.0021	0.1238	.
2328	87	b15	-0.0056	0.0042	0.1836	.
2329	87	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2330	87	b17	0.0056	0.0145	0.6991	.
2331	87	b18	-0.0013	0.0229	0.9558	.
2332	87	b20	3.9364	1.1672	0.0007	**
2333	87	b21	0.0077	0.0045	0.0898	.
2334	87	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
2335	87	b23	0.0017	0.0033	0.5980	.
2336	87	b24	-0.0021	0.0029	0.4570	.
2337	87	b25	0.0020	0.0050	0.6937	.
2338	87	b26	-0.0222	0.0116	0.0552	.
2339	87	b27	-0.0259	0.0182	0.1538	.
2340	87	b28	0.0126	0.0296	0.6687	.
2341	87	b30	4.6043	0.7010	0.0000	**
2342	87	b31	0.0027	0.0030	0.3689	.
2343	87	b32	-0.0037	0.0027	0.1769	.
2344	87	b33	0.0002	0.0023	0.9145	.
2345	87	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2346	87	b35	-0.0060	0.0031	0.0504	.
2347	87	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2348	87	b37	0.0176	0.0120	0.1424	.
2349	87	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
2350	88	b10	5.0562	0.9188	0.0000	**
2351	88	b11	0.0066	0.0032	0.0401	*
2352	88	b12	0.0039	0.0059	0.5030	.
2353	88	b13	-0.0001	0.0024	0.9693	.
2354	88	b14	-0.0033	0.0021	0.1237	.
2355	88	b15	-0.0056	0.0042	0.1836	.
2356	88	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2357	88	b17	0.0056	0.0145	0.6991	.
2358	88	b18	-0.0013	0.0229	0.9553	.
2359	88	b20	3.9369	1.1671	0.0007	**
2360	88	b21	0.0077	0.0045	0.0898	.
2361	88	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
2362	88	b23	0.0017	0.0033	0.5979	.
2363	88	b24	-0.0021	0.0029	0.4569	.
2364	88	b25	0.0020	0.0050	0.6934	.
2365	88	b26	-0.0222	0.0116	0.0551	.
2366	88	b27	-0.0259	0.0182	0.1536	.
2367	88	b28	0.0126	0.0296	0.6692	.
2368	88	b30	4.6040	0.7009	0.0000	**
2369	88	b31	0.0027	0.0030	0.3689	.
2370	88	b32	-0.0037	0.0027	0.1769	.
2371	88	b33	0.0002	0.0023	0.9146	.
2372	88	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2373	88	b35	-0.0060	0.0031	0.0504	.
2374	88	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2375	88	b37	0.0176	0.0120	0.1423	.
2376	88	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2377	89	b10	5.0561	0.9185	0.0000	**
2378	89	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
2379	89	b12	0.0039	0.0059	0.5026	.
2380	89	b13	-0.0001	0.0024	0.9698	.
2381	89	b14	-0.0033	0.0021	0.1234	.
2382	89	b15	-0.0056	0.0042	0.1831	.
2383	89	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2384	89	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2385	89	b18	-0.0012	0.0229	0.9565	.
2386	89	b20	3.9378	1.1667	0.0007	**
2387	89	b21	0.0077	0.0045	0.0896	.
2388	89	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
2389	89	b23	0.0017	0.0033	0.5974	.
2390	89	b24	-0.0021	0.0029	0.4562	.
2391	89	b25	0.0020	0.0050	0.6938	.
2392	89	b26	-0.0222	0.0116	0.0548	.
2393	89	b27	-0.0260	0.0182	0.1530	.
2394	89	b28	0.0127	0.0295	0.6685	.
2395	89	b30	4.6037	0.7006	0.0000	**
2396	89	b31	0.0027	0.0030	0.3686	.
2397	89	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
2398	89	b33	0.0002	0.0023	0.9141	.
2399	89	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2400	89	b35	-0.0060	0.0031	0.0502	.
2401	89	b36	-0.0181	0.0078	0.0202	*
2402	89	b37	0.0176	0.0120	0.1421	.
2403	89	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2404	90	b10	5.0555	0.9181	0.0000	**
2405	90	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2406	90	b12	0.0039	0.0059	0.5015	.
2407	90	b13	-0.0001	0.0024	0.9703	.
2408	90	b14	-0.0033	0.0021	0.1231	.
2409	90	b15	-0.0056	0.0042	0.1823	.
2410	90	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2411	90	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2412	90	b18	-0.0012	0.0229	0.9579	.
2413	90	b20	3.9391	1.1661	0.0007	**
2414	90	b21	0.0077	0.0045	0.0893	.
2415	90	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.
2416	90	b23	0.0017	0.0033	0.5967	.
2417	90	b24	-0.0021	0.0029	0.4556	.
2418	90	b25	0.0020	0.0050	0.6945	.
2419	90	b26	-0.0222	0.0116	0.0545	.
2420	90	b27	-0.0260	0.0182	0.1522	.
2421	90	b28	0.0127	0.0295	0.6673	.
2422	90	b30	4.6032	0.7003	0.0000	**
2423	90	b31	0.0027	0.0030	0.3687	.
2424	90	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
2425	90	b33	0.0002	0.0023	0.9136	.
2426	90	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2427	90	b35	-0.0060	0.0031	0.0500	*
2428	90	b36	-0.0181	0.0078	0.0202	*
2429	90	b37	0.0176	0.0120	0.1417	.
2430	90	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2431	91	b10	5.0546	0.9177	0.0000	**
2432	91	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2433	91	b12	0.0039	0.0059	0.5001	.
2434	91	b13	-0.0001	0.0024	0.9705	.
2435	91	b14	-0.0033	0.0021	0.1229	.
2436	91	b15	-0.0056	0.0042	0.1814	.
2437	91	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2438	91	b17	0.0056	0.0145	0.6991	.
2439	91	b18	-0.0012	0.0229	0.9592	.
2440	91	b20	3.9404	1.1656	0.0007	**
2441	91	b21	0.0077	0.0045	0.0890	.
2442	91	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2443	91	b23	0.0017	0.0033	0.5961	.
2444	91	b24	-0.0021	0.0029	0.4550	.
2445	91	b25	0.0020	0.0050	0.6952	.
2446	91	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
2447	91	b27	-0.0261	0.0182	0.1514	.
2448	91	b28	0.0127	0.0295	0.6659	.
2449	91	b30	4.6031	0.7000	0.0000	**
2450	91	b31	0.0027	0.0030	0.3693	.
2451	91	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
2452	91	b33	0.0002	0.0023	0.9135	.
2453	91	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2454	91	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
2455	91	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2456	91	b37	0.0176	0.0120	0.1415	.
2457	91	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2458	92	b10	5.0537	0.9174	0.0000	**
2459	92	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2460	92	b12	0.0040	0.0059	0.4984	.
2461	92	b13	-0.0001	0.0024	0.9704	.
2462	92	b14	-0.0033	0.0021	0.1228	.
2463	92	b15	-0.0056	0.0042	0.1806	.
2464	92	b16	-0.0209	0.0097	0.0306	*
2465	92	b17	0.0056	0.0145	0.6989	.
2466	92	b18	-0.0011	0.0229	0.9599	.
2467	92	b20	3.9415	1.1651	0.0007	**
2468	92	b21	0.0077	0.0045	0.0887	.
2469	92	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2470	92	b23	0.0017	0.0033	0.5958	.
2471	92	b24	-0.0021	0.0029	0.4545	.
2472	92	b25	0.0019	0.0050	0.6960	.
2473	92	b26	-0.0222	0.0115	0.0539	.
2474	92	b27	-0.0261	0.0182	0.1507	.
2475	92	b28	0.0128	0.0295	0.6649	.
2476	92	b30	4.6031	0.6998	0.0000	**
2477	92	b31	0.0027	0.0030	0.3700	.
2478	92	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
2479	92	b33	0.0002	0.0023	0.9137	.
2480	92	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2481	92	b35	-0.0060	0.0031	0.0494	*
2482	92	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2483	92	b37	0.0176	0.0120	0.1413	.
2484	92	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi Parameter		Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2485	93	b10	5.0518	0.9172	0.0000	**
2486	93	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2487	93	b12	0.0040	0.0058	0.4968	.
2488	93	b13	-0.0001	0.0024	0.9707	.
2489	93	b14	-0.0033	0.0021	0.1230	.
2490	93	b15	-0.0056	0.0042	0.1799	.
2491	93	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2492	93	b17	0.0056	0.0145	0.6981	.
2493	93	b18	-0.0011	0.0228	0.9604	.
2494	93	b20	3.9419	1.1648	0.0007	**
2495	93	b21	0.0077	0.0045	0.0885	.
2496	93	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
2497	93	b23	0.0017	0.0033	0.5953	.
2498	93	b24	-0.0021	0.0029	0.4546	.
2499	93	b25	0.0019	0.0050	0.6966	.
2500	93	b26	-0.0223	0.0115	0.0538	.
2501	93	b27	-0.0261	0.0182	0.1501	.
2502	93	b28	0.0128	0.0295	0.6639	.
2503	93	b30	4.6029	0.6997	0.0000	**
2504	93	b31	0.0027	0.0030	0.3705	.
2505	93	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
2506	93	b33	0.0002	0.0023	0.9136	.
2507	93	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2508	93	b35	-0.0060	0.0031	0.0492	*
2509	93	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2510	93	b37	0.0176	0.0120	0.1411	.
2511	93	b38	-0.0536	0.0191	0.0049	**
2512	94	b10	5.0520	0.9172	0.0000	**
2513	94	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2514	94	b12	0.0040	0.0058	0.4969	.
2515	94	b13	-0.0001	0.0024	0.9704	.
2516	94	b14	-0.0033	0.0021	0.1230	.
2517	94	b15	-0.0056	0.0042	0.1801	.
2518	94	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2519	94	b17	0.0056	0.0145	0.6980	.
2520	94	b18	-0.0012	0.0228	0.9595	.
2521	94	b20	3.9415	1.1649	0.0007	**
2522	94	b21	0.0077	0.0045	0.0885	.
2523	94	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2524	94	b23	0.0017	0.0033	0.5955	.
2525	94	b24	-0.0021	0.0029	0.4544	.
2526	94	b25	0.0019	0.0050	0.6962	.
2527	94	b26	-0.0223	0.0115	0.0538	.
2528	94	b27	-0.0261	0.0182	0.1504	.
2529	94	b28	0.0128	0.0295	0.6646	.
2530	94	b30	4.6028	0.6997	0.0000	**
2531	94	b31	0.0027	0.0030	0.3702	.
2532	94	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
2533	94	b33	0.0002	0.0023	0.9138	.
2534	94	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2535	94	b35	-0.0060	0.0031	0.0493	*
2536	94	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2537	94	b37	0.0176	0.0120	0.1411	.
2538	94	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2539	95	b10	5.0530	0.9176	0.0000	**
2540	95	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2541	95	b12	0.0040	0.0059	0.4986	.
2542	95	b13	-0.0001	0.0024	0.9700	.
2543	95	b14	-0.0033	0.0021	0.1233	.
2544	95	b15	-0.0056	0.0042	0.1813	.
2545	95	b16	-0.0209	0.0097	0.0307	*
2546	95	b17	0.0056	0.0145	0.6980	.
2547	95	b18	-0.0012	0.0229	0.9574	.
2548	95	b20	3.9403	1.1656	0.0007	**
2549	95	b21	0.0077	0.0045	0.0890	.
2550	95	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.
2551	95	b23	0.0017	0.0033	0.5962	.
2552	95	b24	-0.0021	0.0029	0.4551	.
2553	95	b25	0.0020	0.0050	0.6950	.
2554	95	b26	-0.0222	0.0115	0.0542	.
2555	95	b27	-0.0261	0.0182	0.1514	.
2556	95	b28	0.0127	0.0295	0.6669	.
2557	95	b30	4.6026	0.7000	0.0000	**
2558	95	b31	0.0027	0.0030	0.3694	.
2559	95	b32	-0.0037	0.0027	0.1764	.
2560	95	b33	0.0002	0.0023	0.9143	.
2561	95	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2562	95	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
2563	95	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2564	95	b37	0.0176	0.0120	0.1412	.
2565	95	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2566	96	b10	5.0524	0.9179	0.0000	**
2567	96	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
2568	96	b12	0.0040	0.0059	0.4987	.
2569	96	b13	-0.0001	0.0024	0.9697	.
2570	96	b14	-0.0033	0.0021	0.1238	.
2571	96	b15	-0.0056	0.0042	0.1818	.
2572	96	b16	-0.0209	0.0097	0.0308	*
2573	96	b17	0.0056	0.0145	0.6973	.
2574	96	b18	-0.0013	0.0229	0.9557	.
2575	96	b20	3.9393	1.1660	0.0007	**
2576	96	b21	0.0077	0.0045	0.0892	.
2577	96	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
2578	96	b23	0.0017	0.0033	0.5964	.
2579	96	b24	-0.0021	0.0029	0.4560	.
2580	96	b25	0.0020	0.0050	0.6946	.
2581	96	b26	-0.0222	0.0116	0.0544	.
2582	96	b27	-0.0260	0.0182	0.1520	.
2583	96	b28	0.0127	0.0295	0.6683	.
2584	96	b30	4.6027	0.7002	0.0000	**
2585	96	b31	0.0027	0.0030	0.3696	.
2586	96	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
2587	96	b33	0.0002	0.0023	0.9147	.
2588	96	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2589	96	b35	-0.0060	0.0031	0.0499	*
2590	96	b36	-0.0181	0.0078	0.0204	*
2591	96	b37	0.0176	0.0120	0.1414	.
2592	96	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2593	97	b10	5.0545	0.9182	0.0000	**
2594	97	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
2595	97	b12	0.0039	0.0059	0.5010	.
2596	97	b13	-0.0001	0.0024	0.9696	.
2597	97	b14	-0.0033	0.0021	0.1237	.
2598	97	b15	-0.0056	0.0042	0.1828	.
2599	97	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2600	97	b17	0.0056	0.0145	0.6983	.
2601	97	b18	-0.0013	0.0229	0.9552	.
2602	97	b20	3.9387	1.1665	0.0007	**
2603	97	b21	0.0077	0.0045	0.0896	.
2604	97	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
2605	97	b23	0.0017	0.0033	0.5971	.
2606	97	b24	-0.0021	0.0029	0.4563	.
2607	97	b25	0.0020	0.0050	0.6938	.
2608	97	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
2609	97	b27	-0.0260	0.0182	0.1527	.
2610	97	b28	0.0126	0.0295	0.6693	.
2611	97	b30	4.6029	0.7005	0.0000	**
2612	97	b31	0.0027	0.0030	0.3690	.
2613	97	b32	-0.0037	0.0027	0.1769	.
2614	97	b33	0.0002	0.0023	0.9147	.
2615	97	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2616	97	b35	-0.0060	0.0031	0.0502	.
2617	97	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2618	97	b37	0.0176	0.0120	0.1417	.
2619	97	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
2620	98	b10	5.0551	0.9186	0.0000	**
2621	98	b11	0.0066	0.0032	0.0402	*
2622	98	b12	0.0039	0.0059	0.5020	.
2623	98	b13	-0.0001	0.0024	0.9692	.
2624	98	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
2625	98	b15	-0.0056	0.0042	0.1835	.
2626	98	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2627	98	b17	0.0056	0.0145	0.6983	.
2628	98	b18	-0.0013	0.0229	0.9541	.
2629	98	b20	3.9374	1.1670	0.0007	**
2630	98	b21	0.0077	0.0045	0.0898	.
2631	98	b22	-0.0102	0.0057	0.0719	.
2632	98	b23	0.0017	0.0033	0.5977	.
2633	98	b24	-0.0021	0.0029	0.4571	.
2634	98	b25	0.0020	0.0050	0.6933	.
2635	98	b26	-0.0222	0.0116	0.0550	.
2636	98	b27	-0.0259	0.0182	0.1534	.
2637	98	b28	0.0126	0.0295	0.6703	.
2638	98	b30	4.6034	0.7008	0.0000	**
2639	98	b31	0.0027	0.0030	0.3691	.
2640	98	b32	-0.0037	0.0027	0.1771	.
2641	98	b33	0.0002	0.0023	0.9150	.
2642	98	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2643	98	b35	-0.0060	0.0031	0.0504	.
2644	98	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2645	98	b37	0.0176	0.0120	0.1420	.
2646	98	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2647	99	b10	5.0545	0.9188	0.0000	**
2648	99	b11	0.0066	0.0032	0.0403	*
2649	99	b12	0.0039	0.0059	0.5020	.
2650	99	b13	-0.0001	0.0024	0.9692	.
2651	99	b14	-0.0033	0.0021	0.1244	.
2652	99	b15	-0.0056	0.0042	0.1836	.
2653	99	b16	-0.0210	0.0097	0.0308	*
2654	99	b17	0.0056	0.0145	0.6978	.
2655	99	b18	-0.0013	0.0229	0.9532	.
2656	99	b20	3.9366	1.1673	0.0007	**
2657	99	b21	0.0077	0.0045	0.0899	.
2658	99	b22	-0.0102	0.0057	0.0720	.
2659	99	b23	0.0017	0.0033	0.5978	.
2660	99	b24	-0.0021	0.0029	0.4577	.
2661	99	b25	0.0020	0.0050	0.6933	.
2662	99	b26	-0.0222	0.0116	0.0551	.
2663	99	b27	-0.0259	0.0182	0.1537	.
2664	99	b28	0.0126	0.0296	0.6709	.
2665	99	b30	4.6035	0.7009	0.0000	**
2666	99	b31	0.0027	0.0030	0.3694	.
2667	99	b32	-0.0037	0.0027	0.1772	.
2668	99	b33	0.0002	0.0023	0.9151	.
2669	99	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2670	99	b35	-0.0060	0.0031	0.0504	.
2671	99	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2672	99	b37	0.0176	0.0120	0.1421	.
2673	99	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**
2674	100	b10	5.0548	0.9197	0.0000	**
2675	100	b11	0.0066	0.0032	0.0405	*
2676	100	b12	0.0039	0.0059	0.5041	.
2677	100	b13	-0.0001	0.0024	0.9693	.
2678	100	b14	-0.0033	0.0021	0.1254	.
2679	100	b15	-0.0056	0.0042	0.1847	.
2680	100	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
2681	100	b17	0.0056	0.0145	0.6972	.
2682	100	b18	-0.0014	0.0229	0.9517	.
2683	100	b20	3.9337	1.1684	0.0008	**
2684	100	b21	0.0077	0.0045	0.0903	.
2685	100	b22	-0.0102	0.0057	0.0723	.
2686	100	b23	0.0017	0.0033	0.5985	.
2687	100	b24	-0.0021	0.0029	0.4596	.
2688	100	b25	0.0020	0.0050	0.6930	.
2689	100	b26	-0.0221	0.0116	0.0558	.
2690	100	b27	-0.0258	0.0182	0.1552	.
2691	100	b28	0.0125	0.0296	0.6718	.
2692	100	b30	4.6047	0.7017	0.0000	**
2693	100	b31	0.0027	0.0030	0.3698	.
2694	100	b32	-0.0037	0.0027	0.1776	.
2695	100	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
2696	100	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2697	100	b35	-0.0060	0.0031	0.0508	.
2698	100	b36	-0.0182	0.0078	0.0203	*
2699	100	b37	0.0175	0.0120	0.1428	.
2700	100	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2701	101	b10	5.0545	0.9203	0.0000	**
2702	101	b11	0.0066	0.0032	0.0407	*
2703	101	b12	0.0039	0.0059	0.5047	.
2704	101	b13	-0.0001	0.0024	0.9695	.
2705	101	b14	-0.0033	0.0021	0.1260	.
2706	101	b15	-0.0056	0.0042	0.1850	.
2707	101	b16	-0.0209	0.0097	0.0312	*
2708	101	b17	0.0056	0.0145	0.6967	.
2709	101	b18	-0.0014	0.0230	0.9510	.
2710	101	b20	3.9328	1.1690	0.0008	**
2711	101	b21	0.0077	0.0045	0.0906	.
2712	101	b22	-0.0102	0.0057	0.0724	.
2713	101	b23	0.0017	0.0033	0.5987	.
2714	101	b24	-0.0021	0.0029	0.4606	.
2715	101	b25	0.0020	0.0050	0.6932	.
2716	101	b26	-0.0221	0.0116	0.0561	.
2717	101	b27	-0.0258	0.0182	0.1557	.
2718	101	b28	0.0125	0.0296	0.6724	.
2719	101	b30	4.6051	0.7021	0.0000	**
2720	101	b31	0.0027	0.0030	0.3702	.
2721	101	b32	-0.0037	0.0027	0.1779	.
2722	101	b33	0.0002	0.0023	0.9152	.
2723	101	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2724	101	b35	-0.0060	0.0031	0.0510	.
2725	101	b36	-0.0182	0.0078	0.0203	*
2726	101	b37	0.0175	0.0120	0.1431	.
2727	101	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
2728	102	b10	5.0539	0.9212	0.0000	**
2729	102	b11	0.0066	0.0032	0.0410	*
2730	102	b12	0.0039	0.0059	0.5050	.
2731	102	b13	-0.0001	0.0024	0.9696	.
2732	102	b14	-0.0033	0.0021	0.1269	.
2733	102	b15	-0.0056	0.0042	0.1854	.
2734	102	b16	-0.0209	0.0097	0.0314	*
2735	102	b17	0.0057	0.0145	0.6962	.
2736	102	b18	-0.0014	0.0230	0.9498	.
2737	102	b20	3.9320	1.1703	0.0008	**
2738	102	b21	0.0077	0.0045	0.0910	.
2739	102	b22	-0.0102	0.0057	0.0728	.
2740	102	b23	0.0017	0.0033	0.5990	.
2741	102	b24	-0.0021	0.0029	0.4620	.
2742	102	b25	0.0020	0.0050	0.6938	.
2743	102	b26	-0.0221	0.0116	0.0565	.
2744	102	b27	-0.0258	0.0182	0.1565	.
2745	102	b28	0.0125	0.0296	0.6735	.
2746	102	b30	4.6053	0.7029	0.0000	**
2747	102	b31	0.0027	0.0030	0.3709	.
2748	102	b32	-0.0037	0.0027	0.1786	.
2749	102	b33	0.0002	0.0023	0.9155	.
2750	102	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2751	102	b35	-0.0060	0.0031	0.0512	.
2752	102	b36	-0.0182	0.0078	0.0205	*
2753	102	b37	0.0175	0.0120	0.1435	.
2754	102	b38	-0.0539	0.0191	0.0048	**
2755	103	b10	5.0551	0.9180	0.0000	**
2756	103	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2757	103	b12	0.0039	0.0059	0.5013	.
2758	103	b13	-0.0001	0.0024	0.9708	.
2759	103	b14	-0.0033	0.0021	0.1230	.
2760	103	b15	-0.0056	0.0042	0.1818	.
2761	103	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2762	103	b17	0.0056	0.0145	0.6992	.
2763	103	b18	-0.0012	0.0229	0.9595	.
2764	103	b20	3.9397	1.1659	0.0007	**
2765	103	b21	0.0077	0.0045	0.0891	.
2766	103	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
2767	103	b23	0.0017	0.0033	0.5962	.
2768	103	b24	-0.0021	0.0029	0.4553	.
2769	103	b25	0.0020	0.0050	0.6951	.
2770	103	b26	-0.0222	0.0115	0.0544	.
2771	103	b27	-0.0260	0.0182	0.1518	.
2772	103	b28	0.0127	0.0295	0.6659	.
2773	103	b30	4.6032	0.7003	0.0000	**
2774	103	b31	0.0027	0.0030	0.3691	.
2775	103	b32	-0.0037	0.0027	0.1761	.
2776	103	b33	0.0003	0.0023	0.9130	.
2777	103	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2778	103	b35	-0.0060	0.0031	0.0498	*
2779	103	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2780	103	b37	0.0176	0.0120	0.1416	.
2781	103	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2782	104	b10	5.0554	0.9185	0.0000	**
2783	104	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2784	104	b12	0.0039	0.0059	0.5023	.
2785	104	b13	-0.0001	0.0024	0.9712	.
2786	104	b14	-0.0033	0.0021	0.1233	.
2787	104	b15	-0.0056	0.0042	0.1822	.
2788	104	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2789	104	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2790	104	b18	-0.0012	0.0229	0.9594	.
2791	104	b20	3.9388	1.1664	0.0007	**
2792	104	b21	0.0077	0.0045	0.0893	.
2793	104	b22	-0.0102	0.0057	0.0715	.
2794	104	b23	0.0017	0.0033	0.5964	.
2795	104	b24	-0.0021	0.0029	0.4560	.
2796	104	b25	0.0020	0.0050	0.6953	.
2797	104	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
2798	104	b27	-0.0260	0.0182	0.1523	.
2799	104	b28	0.0127	0.0295	0.6659	.
2800	104	b30	4.6036	0.7006	0.0000	**
2801	104	b31	0.0027	0.0030	0.3688	.
2802	104	b32	-0.0037	0.0027	0.1763	.
2803	104	b33	0.0003	0.0023	0.9127	.
2804	104	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2805	104	b35	-0.0060	0.0031	0.0499	*
2806	104	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2807	104	b37	0.0176	0.0120	0.1420	.
2808	104	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2809	105	b10	5.0564	0.9190	0.0000	**
2810	105	b11	0.0066	0.0032	0.0401	*
2811	105	b12	0.0039	0.0059	0.5038	.
2812	105	b13	-0.0001	0.0024	0.9705	.
2813	105	b14	-0.0033	0.0021	0.1237	.
2814	105	b15	-0.0056	0.0042	0.1832	.
2815	105	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2816	105	b17	0.0056	0.0145	0.6992	.
2817	105	b18	-0.0012	0.0229	0.9579	.
2818	105	b20	3.9367	1.1672	0.0007	**
2819	105	b21	0.0077	0.0045	0.0897	.
2820	105	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
2821	105	b23	0.0017	0.0033	0.5974	.
2822	105	b24	-0.0021	0.0029	0.4568	.
2823	105	b25	0.0020	0.0050	0.6945	.
2824	105	b26	-0.0222	0.0116	0.0551	.
2825	105	b27	-0.0259	0.0182	0.1535	.
2826	105	b28	0.0127	0.0296	0.6672	.
2827	105	b30	4.6044	0.7010	0.0000	**
2828	105	b31	0.0027	0.0030	0.3689	.
2829	105	b32	-0.0037	0.0027	0.1767	.
2830	105	b33	0.0002	0.0023	0.9135	.
2831	105	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2832	105	b35	-0.0060	0.0031	0.0503	.
2833	105	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2834	105	b37	0.0175	0.0120	0.1425	.
2835	105	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2836	106	b10	5.0558	0.9198	0.0000	**
2837	106	b11	0.0066	0.0032	0.0405	*
2838	106	b12	0.0039	0.0059	0.5048	.
2839	106	b13	-0.0001	0.0024	0.9692	.
2840	106	b14	-0.0033	0.0021	0.1249	.
2841	106	b15	-0.0056	0.0042	0.1843	.
2842	106	b16	-0.0209	0.0097	0.0310	*
2843	106	b17	0.0056	0.0145	0.6977	.
2844	106	b18	-0.0013	0.0229	0.9545	.
2845	106	b20	3.9335	1.1684	0.0008	**
2846	106	b21	0.0077	0.0045	0.0904	.
2847	106	b22	-0.0102	0.0057	0.0722	.
2848	106	b23	0.0017	0.0033	0.5990	.
2849	106	b24	-0.0021	0.0029	0.4587	.
2850	106	b25	0.0020	0.0050	0.6941	.
2851	106	b26	-0.0221	0.0116	0.0559	.
2852	106	b27	-0.0258	0.0182	0.1552	.
2853	106	b28	0.0127	0.0296	0.6690	.
2854	106	b30	4.6052	0.7017	0.0000	**
2855	106	b31	0.0027	0.0030	0.3699	.
2856	106	b32	-0.0037	0.0027	0.1774	.
2857	106	b33	0.0002	0.0023	0.9150	.
2858	106	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
2859	106	b35	-0.0060	0.0031	0.0507	.
2860	106	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2861	106	b37	0.0175	0.0120	0.1430	.
2862	106	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
2863	107	b10	5.0563	0.9192	0.0000	**
2864	107	b11	0.0066	0.0032	0.0403	*
2865	107	b12	0.0039	0.0059	0.5040	.
2866	107	b13	-0.0001	0.0024	0.9693	.
2867	107	b14	-0.0033	0.0021	0.1240	.
2868	107	b15	-0.0056	0.0042	0.1839	.
2869	107	b16	-0.0210	0.0097	0.0308	*
2870	107	b17	0.0056	0.0145	0.6987	.
2871	107	b18	-0.0013	0.0229	0.9556	.
2872	107	b20	3.9356	1.1676	0.0007	**
2873	107	b21	0.0077	0.0045	0.0900	.
2874	107	b22	-0.0102	0.0057	0.0719	.
2875	107	b23	0.0017	0.0033	0.5983	.
2876	107	b24	-0.0021	0.0029	0.4574	.
2877	107	b25	0.0020	0.0050	0.6937	.
2878	107	b26	-0.0222	0.0116	0.0554	.
2879	107	b27	-0.0259	0.0182	0.1542	.
2880	107	b28	0.0126	0.0296	0.6688	.
2881	107	b30	4.6046	0.7012	0.0000	**
2882	107	b31	0.0027	0.0030	0.3691	.
2883	107	b32	-0.0037	0.0027	0.1770	.
2884	107	b33	0.0002	0.0023	0.9147	.
2885	107	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2886	107	b35	-0.0060	0.0031	0.0505	.
2887	107	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2888	107	b37	0.0175	0.0120	0.1426	.
2889	107	b38	-0.0538	0.0191	0.0049	**
2890	108	b10	5.0559	0.9183	0.0000	**
2891	108	b11	0.0066	0.0032	0.0399	*
2892	108	b12	0.0039	0.0059	0.5022	.
2893	108	b13	-0.0001	0.0024	0.9701	.
2894	108	b14	-0.0033	0.0021	0.1232	.
2895	108	b15	-0.0056	0.0042	0.1829	.
2896	108	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2897	108	b17	0.0056	0.0145	0.6993	.
2898	108	b18	-0.0012	0.0229	0.9569	.
2899	108	b20	3.9384	1.1665	0.0007	**
2900	108	b21	0.0077	0.0045	0.0895	.
2901	108	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
2902	108	b23	0.0017	0.0033	0.5971	.
2903	108	b24	-0.0021	0.0029	0.4560	.
2904	108	b25	0.0020	0.0050	0.6939	.
2905	108	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
2906	108	b27	-0.0260	0.0182	0.1527	.
2907	108	b28	0.0127	0.0295	0.6682	.
2908	108	b30	4.6034	0.7005	0.0000	**
2909	108	b31	0.0027	0.0030	0.3685	.
2910	108	b32	-0.0037	0.0027	0.1766	.
2911	108	b33	0.0002	0.0023	0.9139	.
2912	108	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2913	108	b35	-0.0060	0.0031	0.0502	.
2914	108	b36	-0.0181	0.0078	0.0202	*
2915	108	b37	0.0176	0.0120	0.1419	.
2916	108	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2917	109	b10	5.0535	0.9174	0.0000	**
2918	109	b11	0.0066	0.0032	0.0398	*
2919	109	b12	0.0040	0.0059	0.4980	.
2920	109	b13	-0.0001	0.0024	0.9704	.
2921	109	b14	-0.0033	0.0021	0.1228	.
2922	109	b15	-0.0056	0.0042	0.1804	.
2923	109	b16	-0.0209	0.0097	0.0306	*
2924	109	b17	0.0056	0.0145	0.6989	.
2925	109	b18	-0.0011	0.0229	0.9602	.
2926	109	b20	3.9417	1.1650	0.0007	**
2927	109	b21	0.0077	0.0045	0.0887	.
2928	109	b22	-0.0102	0.0057	0.0713	.
2929	109	b23	0.0017	0.0033	0.5957	.
2930	109	b24	-0.0021	0.0029	0.4544	.
2931	109	b25	0.0019	0.0050	0.6962	.
2932	109	b26	-0.0222	0.0115	0.0539	.
2933	109	b27	-0.0261	0.0182	0.1505	.
2934	109	b28	0.0128	0.0295	0.6645	.
2935	109	b30	4.6032	0.6998	0.0000	**
2936	109	b31	0.0027	0.0030	0.3702	.
2937	109	b32	-0.0037	0.0027	0.1760	.
2938	109	b33	0.0002	0.0023	0.9137	.
2939	109	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2940	109	b35	-0.0060	0.0031	0.0494	*
2941	109	b36	-0.0181	0.0078	0.0203	*
2942	109	b37	0.0176	0.0120	0.1413	.
2943	109	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2944	110	b10	5.0557	0.9187	0.0000	**
2945	110	b11	0.0066	0.0032	0.0402	*
2946	110	b12	0.0039	0.0059	0.5025	.
2947	110	b13	-0.0001	0.0024	0.9690	.
2948	110	b14	-0.0033	0.0021	0.1239	.
2949	110	b15	-0.0056	0.0042	0.1836	.
2950	110	b16	-0.0210	0.0097	0.0307	*
2951	110	b17	0.0056	0.0145	0.6987	.
2952	110	b18	-0.0013	0.0229	0.9542	.
2953	110	b20	3.9372	1.1671	0.0007	**
2954	110	b21	0.0077	0.0045	0.0898	.
2955	110	b22	-0.0102	0.0057	0.0719	.
2956	110	b23	0.0017	0.0033	0.5980	.
2957	110	b24	-0.0021	0.0029	0.4570	.
2958	110	b25	0.0020	0.0050	0.6931	.
2959	110	b26	-0.0222	0.0116	0.0550	.
2960	110	b27	-0.0259	0.0182	0.1535	.
2961	110	b28	0.0126	0.0296	0.6701	.
2962	110	b30	4.6037	0.7008	0.0000	**
2963	110	b31	0.0027	0.0030	0.3690	.
2964	110	b32	-0.0037	0.0027	0.1771	.
2965	110	b33	0.0002	0.0023	0.9150	.
2966	110	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2967	110	b35	-0.0060	0.0031	0.0504	.
2968	110	b36	-0.0182	0.0078	0.0203	*
2969	110	b37	0.0176	0.0120	0.1422	.
2970	110	b38	-0.0538	0.0191	0.0048	**

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
2971	111	b10	5.0564	0.9187	0.0000	**
2972	111	b11	0.0066	0.0032	0.0400	*
2973	111	b12	0.0039	0.0059	0.5035	.
2974	111	b13	-0.0001	0.0024	0.9705	.
2975	111	b14	-0.0033	0.0021	0.1234	.
2976	111	b15	-0.0056	0.0042	0.1830	.
2977	111	b16	-0.0210	0.0097	0.0306	*
2978	111	b17	0.0056	0.0145	0.6996	.
2979	111	b18	-0.0012	0.0229	0.9581	.
2980	111	b20	3.9375	1.1668	0.0007	**
2981	111	b21	0.0077	0.0045	0.0895	.
2982	111	b22	-0.0102	0.0057	0.0716	.
2983	111	b23	0.0017	0.0033	0.5971	.
2984	111	b24	-0.0021	0.0029	0.4563	.
2985	111	b25	0.0020	0.0050	0.6944	.
2986	111	b26	-0.0222	0.0116	0.0549	.
2987	111	b27	-0.0260	0.0182	0.1531	.
2988	111	b28	0.0127	0.0295	0.6672	.
2989	111	b30	4.6041	0.7008	0.0000	**
2990	111	b31	0.0027	0.0030	0.3685	.
2991	111	b32	-0.0037	0.0027	0.1765	.
2992	111	b33	0.0002	0.0023	0.9133	.
2993	111	b34	-0.0068	0.0016	0.0000	**
2994	111	b35	-0.0060	0.0031	0.0502	.
2995	111	b36	-0.0182	0.0078	0.0202	*
2996	111	b37	0.0176	0.0120	0.1423	.
2997	111	b38	-0.0537	0.0191	0.0049	**
2998	112	b10	5.0086	0.9191	0.0000	**
2999	112	b11	0.0066	0.0032	0.0421	*
3000	112	b12	0.0043	0.0058	0.4637	.
3001	112	b13	-0.0001	0.0024	0.9632	.
3002	112	b14	-0.0032	0.0021	0.1336	.
3003	112	b15	-0.0057	0.0042	0.1722	.
3004	112	b16	-0.0206	0.0098	0.0350	*
3005	112	b17	0.0063	0.0146	0.6685	.
3006	112	b18	-0.0017	0.0229	0.9403	.
3007	112	b20	3.9454	1.1682	0.0007	**
3008	112	b21	0.0076	0.0045	0.0921	.
3009	112	b22	-0.0102	0.0057	0.0715	.
3010	112	b23	0.0018	0.0033	0.5827	.
3011	112	b24	-0.0021	0.0029	0.4682	.
3012	112	b25	0.0018	0.0050	0.7099	.
3013	112	b26	-0.0222	0.0116	0.0549	.
3014	112	b27	-0.0263	0.0183	0.1518	.
3015	112	b28	0.0127	0.0296	0.6694	.
3016	112	b30	4.6074	0.7019	0.0000	**
3017	112	b31	0.0026	0.0030	0.3882	.
3018	112	b32	-0.0036	0.0027	0.1855	.
3019	112	b33	0.0002	0.0023	0.9337	.
3020	112	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3021	112	b35	-0.0060	0.0031	0.0501	.
3022	112	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
3023	112	b37	0.0178	0.0121	0.1396	.
3024	112	b38	-0.0544	0.0192	0.0047	**

LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
3025	113	b10	5.0102	0.9188	0.0000	**
3026	113	b11	0.0066	0.0032	0.0419	*
3027	113	b12	0.0043	0.0058	0.4654	.
3028	113	b13	-0.0001	0.0024	0.9634	.
3029	113	b14	-0.0032	0.0021	0.1333	.
3030	113	b15	-0.0057	0.0042	0.1725	.
3031	113	b16	-0.0206	0.0097	0.0349	*
3032	113	b17	0.0062	0.0146	0.6691	.
3033	113	b18	-0.0017	0.0229	0.9406	.
3034	113	b20	3.9459	1.1676	0.0007	**
3035	113	b21	0.0076	0.0045	0.0919	.
3036	113	b22	-0.0102	0.0057	0.0712	.
3037	113	b23	0.0018	0.0033	0.5825	.
3038	113	b24	-0.0021	0.0029	0.4677	.
3039	113	b25	0.0018	0.0050	0.7096	.
3040	113	b26	-0.0222	0.0116	0.0548	.
3041	113	b27	-0.0263	0.0183	0.1514	.
3042	113	b28	0.0127	0.0296	0.6689	.
3043	113	b30	4.6075	0.7017	0.0000	**
3044	113	b31	0.0026	0.0030	0.3878	.
3045	113	b32	-0.0036	0.0027	0.1851	.
3046	113	b33	0.0002	0.0023	0.9334	.
3047	113	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3048	113	b35	-0.0060	0.0031	0.0500	.
3049	113	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
3050	113	b37	0.0178	0.0121	0.1395	.
3051	113	b38	-0.0544	0.0192	0.0047	**
3052	114	b10	5.0116	0.9185	0.0000	**
3053	114	b11	0.0066	0.0032	0.0419	*
3054	114	b12	0.0043	0.0058	0.4668	.
3055	114	b13	-0.0001	0.0024	0.9631	.
3056	114	b14	-0.0032	0.0021	0.1328	.
3057	114	b15	-0.0057	0.0042	0.1726	.
3058	114	b16	-0.0206	0.0097	0.0349	*
3059	114	b17	0.0062	0.0146	0.6697	.
3060	114	b18	-0.0017	0.0229	0.9412	.
3061	114	b20	3.9462	1.1671	0.0007	**
3062	114	b21	0.0076	0.0045	0.0917	.
3063	114	b22	-0.0102	0.0056	0.0709	.
3064	114	b23	0.0018	0.0033	0.5826	.
3065	114	b24	-0.0021	0.0029	0.4671	.
3066	114	b25	0.0018	0.0050	0.7100	.
3067	114	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
3068	114	b27	-0.0263	0.0183	0.1511	.
3069	114	b28	0.0127	0.0296	0.6683	.
3070	114	b30	4.6075	0.7014	0.0000	**
3071	114	b31	0.0026	0.0030	0.3874	.
3072	114	b32	-0.0036	0.0027	0.1848	.
3073	114	b33	0.0002	0.0023	0.9339	.
3074	114	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3075	114	b35	-0.0060	0.0031	0.0498	*
3076	114	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
3077	114	b37	0.0178	0.0121	0.1393	.
3078	114	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**
3079	115	b10	5.0098	0.9189	0.0000	**
3080	115	b11	0.0066	0.0032	0.0421	*
3081	115	b12	0.0043	0.0058	0.4639	.
3082	115	b13	-0.0001	0.0024	0.9627	.
3083	115	b14	-0.0032	0.0021	0.1332	.
3084	115	b15	-0.0057	0.0042	0.1721	.
3085	115	b16	-0.0206	0.0098	0.0349	*
3086	115	b17	0.0062	0.0146	0.6691	.
3087	115	b18	-0.0017	0.0229	0.9403	.
3088	115	b20	3.9462	1.1678	0.0007	**
3089	115	b21	0.0076	0.0045	0.0920	.
3090	115	b22	-0.0102	0.0057	0.0714	.
3091	115	b23	0.0018	0.0033	0.5829	.
3092	115	b24	-0.0021	0.0029	0.4677	.
3093	115	b25	0.0018	0.0050	0.7106	.
3094	115	b26	-0.0222	0.0116	0.0549	.
3095	115	b27	-0.0263	0.0183	0.1516	.
3096	115	b28	0.0126	0.0296	0.6694	.
3097	115	b30	4.6075	0.7018	0.0000	**
3098	115	b31	0.0026	0.0030	0.3881	.
3099	115	b32	-0.0036	0.0027	0.1856	.
3100	115	b33	0.0002	0.0023	0.9343	.
3101	115	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3102	115	b35	-0.0060	0.0031	0.0500	.
3103	115	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
3104	115	b37	0.0178	0.0121	0.1396	.
3105	115	b38	-0.0544	0.0192	0.0047	**
3106	116	b10	5.0126	0.9184	0.0000	**
3107	116	b11	0.0066	0.0032	0.0418	*
3108	116	b12	0.0042	0.0058	0.4668	.
3109	116	b13	-0.0001	0.0024	0.9632	.
3110	116	b14	-0.0032	0.0021	0.1324	.
3111	116	b15	-0.0057	0.0042	0.1724	.
3112	116	b16	-0.0206	0.0097	0.0348	*
3113	116	b17	0.0062	0.0146	0.6702	.
3114	116	b18	-0.0017	0.0229	0.9414	.
3115	116	b20	3.9460	1.1668	0.0007	**
3116	116	b21	0.0076	0.0045	0.0915	.
3117	116	b22	-0.0102	0.0056	0.0709	.
3118	116	b23	0.0018	0.0033	0.5824	.
3119	116	b24	-0.0021	0.0029	0.4667	.
3120	116	b25	0.0018	0.0050	0.7103	.
3121	116	b26	-0.0222	0.0116	0.0547	.
3122	116	b27	-0.0263	0.0183	0.1510	.
3123	116	b28	0.0127	0.0296	0.6679	.
3124	116	b30	4.6074	0.7013	0.0000	**
3125	116	b31	0.0026	0.0030	0.3871	.
3126	116	b32	-0.0036	0.0027	0.1846	.
3127	116	b33	0.0002	0.0023	0.9341	.
3128	116	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3129	116	b35	-0.0060	0.0031	0.0497	*
3130	116	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
3131	116	b37	0.0178	0.0121	0.1392	.
3132	116	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**

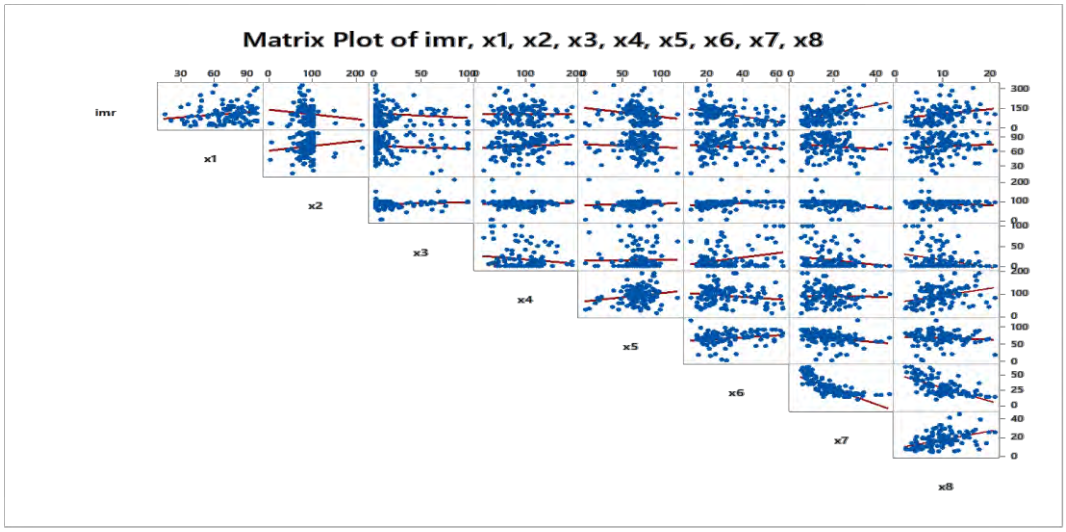
LAMPIRAN 10 PENAKSIR PARAMETER DAN SIGNIFIKANSI PARAMETER MODEL GWTGPR (LANJUTAN)

No.	Lokasi	Parameter	Koef. Beta	SE	p-value	Sig.
3133	117	b10	5.0084	0.9195	0.0000	**
3134	117	b11	0.0066	0.0032	0.0422	*
3135	117	b12	0.0043	0.0058	0.4628	.
3136	117	b13	-0.0001	0.0024	0.9625	.
3137	117	b14	-0.0032	0.0021	0.1336	.
3138	117	b15	-0.0057	0.0042	0.1721	.
3139	117	b16	-0.0206	0.0098	0.0350	*
3140	117	b17	0.0063	0.0146	0.6688	.
3141	117	b18	-0.0017	0.0229	0.9402	.
3142	117	b20	3.9454	1.1687	0.0007	**
3143	117	b21	0.0076	0.0045	0.0923	.
3144	117	b22	-0.0102	0.0057	0.0718	.
3145	117	b23	0.0018	0.0033	0.5831	.
3146	117	b24	-0.0021	0.0029	0.4683	.
3147	117	b25	0.0018	0.0050	0.7104	.
3148	117	b26	-0.0222	0.0116	0.0551	.
3149	117	b27	-0.0262	0.0183	0.1520	.
3150	117	b28	0.0126	0.0296	0.6699	.
3151	117	b30	4.6073	0.7023	0.0000	**
3152	117	b31	0.0026	0.0030	0.3886	.
3153	117	b32	-0.0036	0.0027	0.1862	.
3154	117	b33	0.0002	0.0023	0.9344	.
3155	117	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3156	117	b35	-0.0060	0.0031	0.0502	.
3157	117	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
3158	117	b37	0.0178	0.0121	0.1399	.
3159	117	b38	-0.0544	0.0192	0.0047	**
3160	118	b10	5.0085	0.9191	0.0000	**
3161	118	b11	0.0066	0.0032	0.0421	*
3162	118	b12	0.0043	0.0058	0.4631	.
3163	118	b13	-0.0001	0.0024	0.9627	.
3164	118	b14	-0.0032	0.0021	0.1335	.
3165	118	b15	-0.0057	0.0042	0.1721	.
3166	118	b16	-0.0206	0.0098	0.0350	*
3167	118	b17	0.0063	0.0146	0.6686	.
3168	118	b18	-0.0017	0.0229	0.9402	.
3169	118	b20	3.9453	1.1682	0.0007	**
3170	118	b21	0.0076	0.0045	0.0921	.
3171	118	b22	-0.0102	0.0057	0.0717	.
3172	118	b23	0.0018	0.0033	0.5829	.
3173	118	b24	-0.0021	0.0029	0.4681	.
3174	118	b25	0.0018	0.0050	0.7102	.
3175	118	b26	-0.0222	0.0116	0.0549	.
3176	118	b27	-0.0263	0.0183	0.1518	.
3177	118	b28	0.0126	0.0296	0.6696	.
3178	118	b30	4.6073	0.7020	0.0000	**
3179	118	b31	0.0026	0.0030	0.3883	.
3180	118	b32	-0.0036	0.0027	0.1859	.
3181	118	b33	0.0002	0.0023	0.9342	.
3182	118	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3183	118	b35	-0.0060	0.0031	0.0501	.
3184	118	b36	-0.0181	0.0078	0.0212	*
3185	118	b37	0.0178	0.0121	0.1397	.
3186	118	b38	-0.0544	0.0192	0.0047	**
3187	119	b10	5.0134	0.9182	0.0000	**
3188	119	b11	0.0066	0.0032	0.0417	*
3189	119	b12	0.0042	0.0058	0.4680	.
3190	119	b13	-0.0001	0.0024	0.9637	.
3191	119	b14	-0.0032	0.0021	0.1322	.
3192	119	b15	-0.0057	0.0042	0.1727	.
3193	119	b16	-0.0206	0.0097	0.0347	*
3194	119	b17	0.0062	0.0146	0.6705	.
3195	119	b18	-0.0017	0.0229	0.9419	.
3196	119	b20	3.9458	1.1665	0.0007	**
3197	119	b21	0.0076	0.0045	0.0914	.
3198	119	b22	-0.0102	0.0056	0.0708	.
3199	119	b23	0.0018	0.0033	0.5825	.
3200	119	b24	-0.0021	0.0029	0.4665	.
3201	119	b25	0.0018	0.0050	0.7101	.
3202	119	b26	-0.0222	0.0116	0.0546	.
3203	119	b27	-0.0263	0.0183	0.1507	.
3204	119	b28	0.0127	0.0296	0.6673	.
3205	119	b30	4.6071	0.7011	0.0000	**
3206	119	b31	0.0026	0.0030	0.3863	.
3207	119	b32	-0.0036	0.0027	0.1841	.
3208	119	b33	0.0002	0.0023	0.9335	.
3209	119	b34	-0.0068	0.0017	0.0000	**
3210	119	b35	-0.0060	0.0031	0.0496	*
3211	119	b36	-0.0181	0.0078	0.0211	*
3212	119	b37	0.0178	0.0121	0.1390	.
3213	119	b38	-0.0543	0.0192	0.0047	**

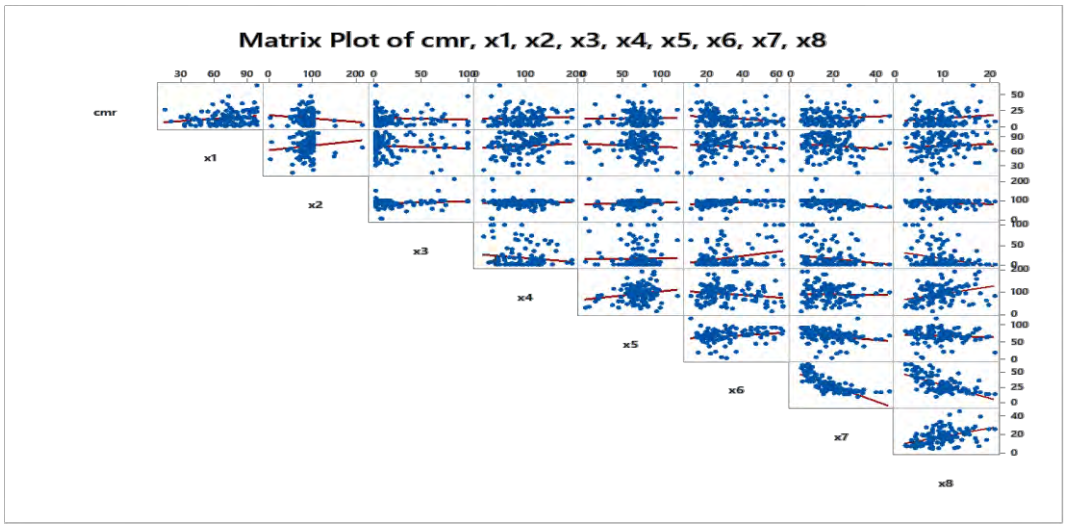
* *p-value* < 5% ** *p-value* < 1%

LAMPIRAN 11 MATRIX PLOT ANTARA VARIABEL RESPON DAN VARIABEL BEBAS

Matrix plot antara kematian bayi dan variabel bebas

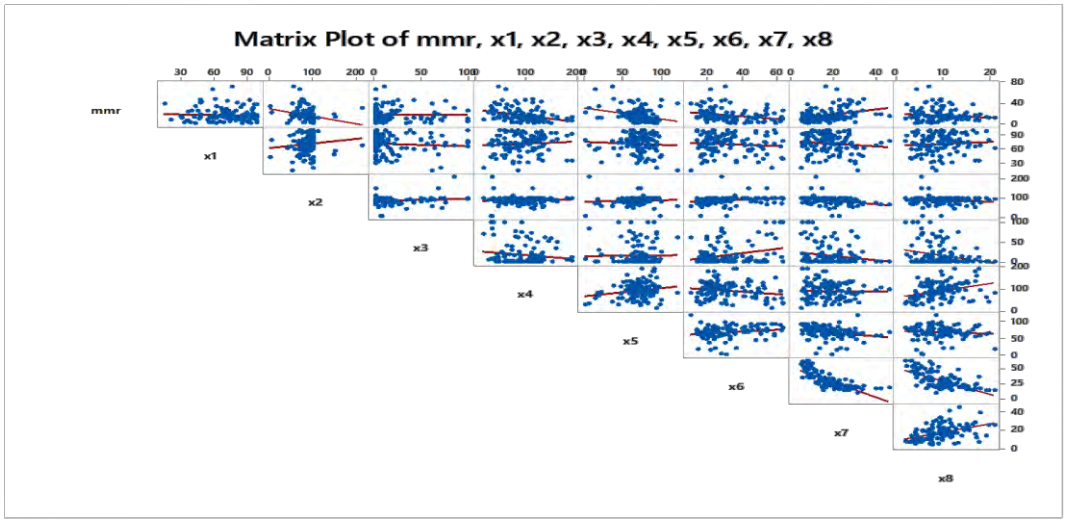


Matrix plot antara kematian anak dan variabel bebas



LAMPIRAN 11 MATRIX PLOT ANTARA VARIABEL RESPON DAN VARIABEL BEBAS (LANJUTAN)

Matrix plot antara kematian ibu dan variabel bebas



LAMPIRAN 12 CODING MODEL TGPR DAN GWTGPR

```
library(readxl)
library(sp)
library(psych)
set.seed(1234)

data <- read_excel("DataMCH2019.xlsx")
source("tgpr_est.R")
source("tgpr_llike.R")
source("tgpr_predict.R")
source("tgp_regress.R")
source("gwtgp_regress.R")
source("optbw_gwtgpr.R")
source("wtgpr_llike.R")
source("wtgpr_est.R")
source("wtgpr_predict.R")

y1=as.matrix(data$imr)
y2=as.matrix(data$cmr)
y3=as.matrix(data$mmr)
y=cbind(y1,y2,y3)
n=nrow(data)
x=as.matrix(cbind(data$x1,data$x2,data$x3,data$x4,data$x5,data$x6,data$x7,data$x8))
l=ncol(y)
q1=data$expo1
q2=data$expo2
q3=data$expo3
expo<-cbind(q1,q2,q3)

vig<-c(0,0,0)
gamg<-c(0,0,0)
r0<-c(0.1,0.1,0.1)
glm1=glm(y1~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8,family=poisson(link="log"),data=data)
glm2=glm(y2~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8,family=poisson(link="log"),data=data)
glm3=glm(y3~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8,family=poisson(link="log"),data=data)
beta1g=as.matrix(c(glm1$coefficients))
beta2g=as.matrix(c(glm2$coefficients))
beta3g=as.matrix(c(glm3$coefficients))

parametergh1=as.matrix(c(beta1g,beta2g,beta3g,vig,gamg))
maxiter<-1000
tolerance<-10^-12

est.tgpr<-
tgpr.est(y=y,x=x,exposure=NULL,start=parametergh1,tolerance=tolerance,maxiter=maxi
ter)
est.tgpr$param.iter[[1]]
est.tgpr$param.iter[[2]]
est.tgpr$param.iter[[3]]
est.tgpr$param.iter[[4]]
```

LAMPIRAN 12 CODING MODEL TGPR DAN GWTGPR (LANJUTAN)

```
est.tgpr$h.iter[[1]]
est.tgpr$h.iter[[2]]
est.tgpr$h.iter[[3]]
est.tgpr$h.iter[[4]]

reg.tgph1<-
tgp.regress(y=y,x=x,exposure=NULL,start=parametergh1,tolerance=tolerance,maxiter=m
axiter)

x0<-NULL
glm10=glm(y1~1,family=poisson(link="log"),data=data)
glm20=glm(y2~1,family=poisson(link="log"),data=data)
glm30=glm(y3~1,family=poisson(link="log"),data=data)
beta1g0=as.matrix(c(glm10$coefficients))
beta2g0=as.matrix(c(glm20$coefficients))
beta3g0=as.matrix(c(glm30$coefficients))
parametergh0=as.matrix(c(beta1g0,beta2g0,beta3g0,vig,gamg))
tgp.regress(y=y,x=x0,exposure=expo,start=parametergh0,tolerance=tolerance,maxiter=m
axiter)
reg.tgph0<-
tgp.regress(y=y,x=x0,exposure=NULL,start=parametergh0,tolerance=tolerance,maxiter=
maxiter)

coords=as.matrix(cbind(data$x_longi,data$y_lati))
b1h1<-
gwtgpr.bw(y=y,x=x,exposure=NULL,coords,tolerance,maxiter,reg.tgph1,criteria="gcv",g
weight=gwr.Gauss,longlat=FALSE)
outgwh1<-
gwtgp.regress(y=y,x=x,exposure=NULL,coords,tolerance,maxiter,reg.tgph1,bandwidth=
b1h1,gweight=gwr.Gauss,longlat=FALSE)

param.wbetagabh1<-matrix(0,n,3*(ncol(x)+1))
se.wbetagabh1<-matrix(0,n,3*(ncol(x)+1))
z.wbetagabh1<-matrix(0,n,3*(ncol(x)+1))
pvalue.wbetagabh1<-matrix(0,n,3*(ncol(x)+1))
for(i in 1:n){
  pvalue.wbetagabh1[i,]<-c(outgwh1$estimate$pvalue$beta[[i]])
  se.wbetagabh1[i,]<-c(outgwh1$estimate$se$beta[[i]])
  param.wbetagabh1[i,]<-c(outgwh1$estimate$param$beta[[i]])
  z.wbetagabh1[i,]<-c(outgwh1$estimate$z$beta[[i]])
}

paramgw_gaussfix<-
cbind(c(t(param.wbetagabh1)),c(t(se.wbetagabh1)),c(t(pvalue.wbetagabh1)))
colnames(paramgw_gaussfix)<-c("koef beta","se", "pvalue")

library(spgwr)
i<-14
```

LAMPIRAN 12 CODING MODEL TGPR DAN GWTGPR (LANJUTAN)

```
west.tgpr<-NULL
gweight<-gwr.Gauss
dist2 <- spDistsN1(coords, coords[i,], longlat=FALSE)
wi<-gweight(dist2,b1h1)
startw<-c(reg.tgph1$estimate$param$beta)
west.tgpr[[i]]<-
wtgpr.est(y,x=x,exposure=NULL,wi=wi,startw,tolerance,maxiter,reg.tgph1)
wtgpr.llike(y,x=x,exposure=NULL,wi,reg.tgph1)
west.tgpr[[i]]$param.iter[[1]]
west.tgpr[[i]]$param.iter[[2]]
west.tgpr[[i]]$param.iter[[3]]
west.tgpr[[i]]$param.iter[[4]]
west.tgpr[[i]]$h.iter[[1]]
west.tgpr[[i]]$h.iter[[2]]
west.tgpr[[i]]$h.iter[[3]]
west.tgpr[[i]]$h.iter[[4]]

mat_w<-outgwh1$w
write.csv(mat_w,"matriks_w.csv")
S<-outgwh1$S
mat_S1<-outgwh1$S[[1]]
mat_S2<-outgwh1$S[[2]]
mat_S3<-outgwh1$S[[3]]
write.csv(mat_S1,"matriks_S1.csv")
write.csv(mat_S2,"matriks_S2.csv")
write.csv(mat_S3,"matriks_S3.csv")

sum(diag(S[[1]]))
sum(diag(S[[2]]))
sum(diag(S[[3]]))

S1<-outgwh1$S[[1]]
S1<-as.matrix(S1,n,n)
trace <- function(S1) {
  n <- dim(S1)[1] # get dimension of matrix
  tr <- 0 # initialize trace value

  # Loop over the diagonal elements of the supplied matrix and add the element to tr
  for (i in 1:n) {
    j <- S1[i,i]
    tr <- tr + j
  }
  return(tr[[1]])
}
trace(S1)

S2<-outgwh1$S[[2]]
S2<-as.matrix(S2,n,n)
trace <- function(S2) {
```

LAMPIRAN 12 CODING MODEL TGPR DAN GWTGPR (LANJUTAN)

```
  n <- dim(S2)[1] # get dimension of matrix
  tr <- 0 # initialize trace value

  # Loop over the diagonal elements of the supplied matrix and add the element to tr
  for (i in 1:n) {
    j <- S2[i,i]
    tr <- tr + j
  }
  return(tr[[1]])
}
trace(S2)

S3<-outgwh1$S[[3]]
S3<-as.matrix(S3,n,n)
trace <- function(S3) {
  n <- dim(S3)[1] # get dimension of matrix
  tr <- 0 # initialize trace value

  # Loop over the diagonal elements of the supplied matrix and add the element to tr
  for (i in 1:n) {
    j <- S3[i,i]
    tr <- tr + j
  }
  return(tr[[1]])
}
trace(S3)

trace_S=trace(S1)+trace(S2)+trace(S3)
trace_S

b1h0<-
gwtgpr.bw(y=y,x=x0,exposure=NULL,coords,tolerance,maxiter,reg.tgph0,criteria="gcv",
gweight=gwr.Gauss,longlat=FALSE,lower=0.4)
outgwh0<-
gwtgp.regress(y,x0,coords,tolerance,maxiter,b1h0,reg.tgph0,gweight=gwr.Gauss,longlat=
FALSE)
```

AIP Conference Proceedings

Multivariate generalized Poisson regression model with exposure and correlation as a function of covariates: Parameter estimation and hypothesis testing

Cite as: AIP Conference Proceedings **2192**, 090001 (2019); https://doi.org/10.1063/1.5139171
Published Online: 19 December 2019

Sarni Maniar Berliana, Purhadi, Sutikno, and Santi Puteri Rahayu

View Online
Export Citation

Lock-in Amplifiers up to 600 MHz
Zurich Instruments
Watch

© 2019 Author(s).

Multivariate Generalized Poisson Regression Model With Exposure and Correlation as a Function of Covariates: Parameter Estimation and Hypothesis Testing

Sarni Maniar Berliana[1,2,a)], Purhadi[1,b)], Sutikno[1,c)] and Santi Puteri Rahayu[1,d)]

[1]*Doctoral Candidate at Department of Statistics, Faculty of Mathematics, Computing, and Data Science, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia*
[2]*Politeknik Statistika STIS, Jakarta, Indonesia*

[a)]sarni@stis.ac.id
[b)]Corresponding author: purhadi@statistika.its.ac.id
[c)]sutikno@statistika.its.ac.id
[d)]santi_pr@statistika.its.ac.id

Abstract. This paper presents the parameter estimation and the simultaneous testing for the parameters of a modified multivariate generalized Poisson regression (MGPR) model that takes into account a measure of exposure and defines the correlation as a function of covariates. An exposure is included in the model to account for population size difference of the analysis units in the study where the exposure is not necessarily the same for each response variable. The correlations between the response variable are defined as a function of the covariates with the assumption that each response variable and their correlations are affected by the same covariates. The Newton method with BHHH algorithm is used to obtain maximum likelihood estimators of the modified MGPR model. The test statistic G^2 for simultaneous hypothesis testing is achieved using the likelihood ratio method which is asymptotically chi-square distributed with v degrees of freedom.

Keywords: Multivariate Generalized Poisson Regression, Exposure, BHHH algorithm

INTRODUCTION

Several models for count data regression models are based on Poisson, generalized Poisson, negative binomial, or zero inflated Poisson (ZIP) distribution. The Poisson regression model is used for data modeling drawn from Poisson distribution, such as number of events in an interval of time [1, 2]. The Poisson regression model assumes that the mean of the response variable equals to its variance, a situation which is called equidispersion, which means the model does not allow for overdispersion or underdispersion. When the sample variance is greater or lower than the sample mean, it is called overdispersion or underdispersion, respectively. The negative binomial regression model accommodates overdispersion cases, the generalized Poisson regression model handles any type of dispersion, while the ZIP regression model is used to model count data with excessive amount of zero.

The assumption of equidispersion in the Poisson regression model is very difficult to achieve in application using real data. Inappropriate imposition of the Poisson regression model will lead to biased parameter estimates and misleading conclusions [3]. Alternative models to handle overdispersion cases are generally mixture-Poisson regression models, such as Poisson-Inverse Gaussian, log-normal Poisson, and Poisson-gamma (negative binomial) [4]. Meanwhile, some alternative models of count data that allow overdispersion or underdispersion include generalized event count models, double Poisson distribution, gamma count distribution, and generalized Poisson distribution [5, 1]. Of all these four models, it cannot be immediately determined which model is better than the other models because each model has weaknesses, such as the observation range in the generalized event count model and generalized Poisson distribution depend on the parameter values for underdispersion cases, the first moment of the double Poisson distribution is not closed-form, and the function of gamma count distribution cannot be expressed in a simple formula [6, 1].

Proceedings of The 8th SEAMS-UGM International Conference on Mathematics and its Applications 2019
AIP Conf. Proc. 2192, 090001-1–090001-10; https://doi.org/10.1063/1.5139171
Published by AIP Publishing. 978-0-7354-1943-8/$30.00

Generalized Poisson distribution (GPD) was introduced by Consul and Jain [5] as a limiting form of the generalized negative binomial (GNB) distribution. The GNB parameters are defined such that a Poisson distribution with two parameters is produced, in which one of them is as a dispersion parameter. With the additional of dispersion parameters, the GPD can accommodate overdispersion or under dispersion in the Poisson distribution. Consul and Shoukri [7] investigated the natural truncations which occur whenever there is underdispersion. Furthermore, Lerner, Lone and Rao [8] and Tuenter [9] proved some of the characteristics of GPD, such as GPD as a probability measure and as a probability distribution.

Famoye [6] defined BGPD with a more flexible correlation structure which allows any type of correlation based on the restricted GPD by Consul [10] and Famoye [11]. The development of BGPD followed the work of Lakshminarayana, Pandit and Rao [12] in developing a bivariate Poisson distribution (BPD) as a product of Poisson marginals with a multiplicative factor. The BGPD produced by Famoye [6] is a product of univariate generalized Poisson (GP) marginal with a multiplicative factor.

The extension of the GPR model for more than two dimensions has been carried out by Famoye, Okafor and Adamu [13] and Famoye [14], called multivariate generalized Poisson regression (MGPR) model based on the multivariate generalized Poisson distribution (MGPD). The MGPD was developed with the same procedure in obtaining the BGPD [6], which is as a product of univariate GP marginals with some multiplicative factors.

In this paper, the MGPR model introduced by Famoye [14] was extended by including a measure of exposure in the model and considering the correlation between the response variables as a function of covariates. Hereafter, the proposed model is referred to as the modified MGPR model. The measure of exposure included in the model is intended to account for the difference of population sizes. For example, suppose the response variable of interest is the number of child deaths in areas over a period of time. If the analysis solely uses the count data, the intensity of the death incidence in an area will not be reflected properly because each area has a different population size. To overcome this matter, the number of deaths in each area needs to be controlled with a measure of exposure, such as the number of births or the number of residents in each of the corresponding areas. This measure of exposure is not necessarily the same for each response variables. Meanwhile, to increase the flexibility of the model, the correlation between the response variables was defined as a function of covariates as carried out by Karlis and Meligkotsidou [15] and Triyanto, Purhadi, Otok and Purnami [16] in their research about multivariate Poisson regression model and geographically weighted multivariate Poisson regression model, respectively. Here, we assume that each response variables and their correlations are affected by the same covariates.

This paper proceeds in the following way. The next section presents the modified MGPR model. Hereinafter, the parameter estimation of the modified MGPR model using BHHH algorithm is discussed. The subsequent section provides the simultaneous hypothesis testing for the parameters of the modified MGPR model. Finally, in the last section a conclusion is given.

MODIFIED MGPR MODEL

The probablity mass function of the GPD is defined [5, 10, 17]

$$p_Y(y;\lambda,\phi) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda+\phi y)^{y-1}\, e^{-\lambda-\phi y}}{y!}; & y = 0,1,2,..., \\ 0; & \text{for } y > s \text{ when } \phi > 0, \end{cases} \tag{1}$$

with $\lambda > 0$ and ϕ is the dispersion parameter where $\max(-1, -\lambda/s) \leq \phi < 1$, s is the largest positive integer for which $\lambda + \phi s > 0$ when $\phi < 0$. Famoye [11] transformed $\phi = \varphi\lambda$ in (1) which makes ϕ proportional to λ. Thus the parameter ϕ becomes restricted and yields the restricted GPD model

$$p_Y(y;\lambda,\varphi) = \frac{(1+\varphi y)^{y-1}(\lambda)^y e^{-\lambda(1+\varphi y)}}{y!}; \; y = 0,1,2,..., \tag{2}$$

with $\max(-1/\lambda, -1/s) < \varphi < 1/\lambda$ and s is the largest positive integer for which $1 + \varphi s > 0$ when $\varphi < 0$. In (2), $p_Y(Y = y) = 0$ for $y > s$ when $\varphi < 0$. The mean and the variance for (2) are given by

$$E(Y) = \lambda(1-\varphi\lambda)^{-1}, \tag{3}$$

and

$$Var(Y) = \lambda(1-\varphi\lambda)^{-3}. \tag{4}$$

When $\phi = 0$ in (1) or $\varphi = 0$ in (2), each of the GPD model reduces to Poisson. The GPR model based on restricted GPD in (2) is

$$P(Y_i = y_i|\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \varphi) = \left(\frac{\mu_i}{1+\varphi\mu_i}\right)^{y_i} \frac{(1+\varphi y_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1+\varphi y_i)}{1+\varphi\mu_i}\right), \tag{5}$$

where $y_i = 0, 1, 2, ...$, $\mu_i = \exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)$ and $\mathbf{x}_i$ is the vector of covariates. The variance of Y in (5) is given by

$$Var(Y_i|\boldsymbol{x}_i) = \mu_i(1+\varphi\mu_i)^2. \tag{6}$$

The MGPD based on restricted GPD in (2) is defined as [14]

$$\begin{aligned} P\left(y_1,\ldots,y_g\right) = &\prod_{l=1}^{g}\left[\frac{(\lambda_l)^{y_l}(1+\varphi_l y_l)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\lambda_l(1+\varphi_l y_l)\right]\right] \\ &\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

where $z_l = E\left(e^{-Y_l}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_l(r_l-1)}$ with $\log r_l - \varphi_l\lambda_l(r_l-1)+1 = 0$, $l = 1,2,\ldots,g$ and $y_1, y_2, \ldots, y_g = 0, 1, 2, \ldots$. The marginal distribution of Y_l in (7) is GPD in (2). The model in (7) reduces to bivariate GPD when $g = 2$ and to multivariate Poisson distribution when $\varphi_l = 0$. The response variable y_l exhibits overdispersion or underdispersion when $\varphi_l > 0$ or $\varphi_l < 0$, respectively. The response variables y_l and y_m have positive or negative correlation when $\gamma_{lm} < 0$ or $\gamma_{lm} > 0$, respectively. The marginal mean and variance of (7) are

$$\mu_l = \frac{\lambda_l}{1-\varphi_l\,\lambda_l}, \tag{8}$$

and

$$\sigma_l^2 = \frac{\lambda_l}{(1-\varphi_l\,\lambda_l)^3}. \tag{9}$$

By substituting (8) into (7) we obtain

$$\begin{aligned} P\left(y_1,\ldots,y_g\right) = &\prod_{l=1}^{g}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{(1+\varphi_l y_l)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}(1+\varphi_l y_l)\right]\right] \\ &\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

The MGPR model with exposure can be written as

$$\lambda_{il} = \frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}} = \frac{q_{il}\;e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l}}{1+\varphi_l\;q_{il}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_l}}, \quad l = 1,2,\ldots,g;\;\; i = 1,2,\ldots,n \tag{11}$$

where q_{il} is the exposure of the $l-th$ response variable for the $i-th$ observation where

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i0}=1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,p, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\beta}_l = \begin{bmatrix}\beta_{l0} & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lp}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}. \tag{13}$$

The model in (10) is extended by defining γ_{lm} as a function of covariates such that

$$\gamma_{ilm} = \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_{lm}\right), \tag{14}$$

where

$$\boldsymbol{\beta}_{lm} = \begin{bmatrix}\beta_{lm0} & \beta_{lm1} & \beta_{lm2} & \cdots & \beta_{lmp}\end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}. \tag{15}$$

PARAMETER ESTIMATION OF MODIFIED MGPR MODEL

The parameter estimation of modified MGPR model is obtained using maximum likelihood estimation (MLE) method. The MLE method is a general method for estimating parameters from observed data. The principle of MLE method requires that the maximum likelihood estimator, $\hat{\theta}$, maximizes the log-likelihood function. The maximum likelihood estimator is the solution of a set solution of equation obtained by evaluating the gradient of the log-likelihood function at zero. Suppose there are n random samples such that the joint distribution of $Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{ig}$ is MGPD in (7). The log-likelihood function, $\log(\mu, \varphi, \gamma; \boldsymbol{y}) = Q_1$, for the modified MGPR model is

$$\begin{aligned} Q_1 = \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{l=1}^{g}\Bigg[& y_{il}\log\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right) + (y_{il}-1)\log(1+\varphi_l y_{il}) \\ & - \log(y_{il}!) - \frac{\mu_{il}(1+\varphi_l y_{il})}{1+\varphi_l\mu_{il}}\Bigg] \\ & + \log\left[1 + \sum_{l<m}^{g}\gamma_{ilm}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right)\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{16}$$

where μ_{il} and γ_{ilm} are defined in (11) and (14), respectively. The log-likelihood function in (16) is maximized over each parameter $\boldsymbol{\beta}_l, \varphi_l$ $(l = 1, 2, \ldots, g)$, and $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ $(l, m = 1, 2, \ldots, g$ dan $l < m)$ by taking the first partial derivatives with respect to the parameters.

First Partial Derivatives

Based on (16), let

$$K_1 = y_{il}\log\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right), \tag{17}$$

$$K_2 = (y_{il}-1)\log(1+\varphi_l y_{il}) - \log(y_{il}!), \tag{18}$$

$$K_3 = -\frac{\mu_{il}(1+\varphi_l y_{il})}{1+\varphi_l\mu_{il}}, \tag{19}$$

$$K_4 = \log[1+Q_2], \tag{20}$$

and

$$Q_2 = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{ilm}\left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right), \tag{21}$$

where $z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right)$ and $\log r_l - \frac{\varphi_l\mu_{il}(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_{il}} + 1 = 0$ with μ_{il} and γ_{ilm} are defined in (11) and (14), respectively.

First partial derivative of Q_1 with respect to $\boldsymbol{\beta}_l$

The first partial derivatives of (17) to (20) with respect to $\boldsymbol{\beta}_l$ are

$$\frac{\partial K_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_{il}\mathbf{x}_i - \frac{y_{il}\ \varphi_l\ \mathbf{x}_i\mu_{il}}{1+\varphi_l\,\mu_{il}} \right],$$
$$\frac{\partial K_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = 0,$$
$$\frac{\partial K_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = \sum_{i=1}^{n} -(1+\varphi_l y_{il}) \frac{\mathbf{x}_i\mu_{il}}{(1+\varphi_l\mu_{il})^2},$$
$$\frac{\partial K_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T}.$$

Thus, the first partial derivative of Q_1 with respect to $\boldsymbol{\beta}_l$ is

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(y_{il}-\mu_{il})\,\mathbf{x}_i}{(1+\varphi_l\mu_{il})^2} + \frac{1}{1+Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} \right], \tag{22}$$

where

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm}\,(e^{-y_{im}} - z_{im}) \frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T}, \tag{23}$$

with

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T} = \frac{z_{il}\,(r_l-1)\,\mu_{il}\mathbf{x}_i}{(1+\varphi_l\mu_{il})\,(1+\varphi_l\mu_{il}-\varphi_l\mu_{il}r_l)}.$$

There will be $g\,(p+1)$ equations from (22).

First partial derivative of Q_1 with respect to φ_l

The first partial derivatives of (17) to (20) with respect to φ_l are

$$\frac{\partial K_1}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\mu_{il}y_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}},$$
$$\frac{\partial K_2}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{il}\,(y_{il}-1)}{(1+\varphi_l y_{il})},$$
$$\frac{\partial K_3}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\mu_{il}\,(y_{il}-\mu_{il})}{(1+\varphi_l\mu_{il})^2},$$
$$\frac{\partial K_4}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_l}.$$

Thus, the first partial derivative of Q_1 with respect to φ_l is

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi_l} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{\mu_{il}y_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}} + \frac{y_{il}\,(y_{il}-1)}{(1+\varphi_l y_{il})} - \frac{\mu_{il}\,(y_{il}-\mu_{il})}{(1+\varphi_l\mu_{il})^2} + \frac{1}{1+Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_l} \right], \tag{24}$$

where

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi_l} = -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{ilm}\,(e^{-y_{im}} - z_{im}) \frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l}, \tag{25}$$

with

$$\frac{\partial z_{il}}{\partial \varphi_l} = \frac{z_{il}(r_l - 1)^2 \mu_{il}^2}{(1 + \varphi_l \mu_{il})(1 + \varphi_l \mu_{il} - \varphi_l \mu_{il} r_l)}.$$

There will be g equations from (24).

First partial derivative of Q_1 with respect to $\boldsymbol{\beta}_{lm}$

The first partial derivatives of (17) to (20) with respect to $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ are

$$\frac{\partial K_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = 0, \quad \frac{\partial K_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = 0, \quad \frac{\partial K_3}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = 0, \quad \frac{\partial K_4}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T}.$$

Thus, the first partial derivative of Q_1 with respect to $\boldsymbol{\beta}_{lm}$ is

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T}, \tag{26}$$

where

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_{lm}^T} = \mathbf{x}_i \gamma_{ilm} \left(e^{-y_{il}} - z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{im}\right). \tag{27}$$

There will be $g(g-1)(p+1)/2$ equations from (26).

BHHH Algorithm

The equation in (22), (24), and (26) are equation systems that do not yield closed-form solutions for the maximum likelihood estimators. To obtain the maximum likelihood estimator where no analytical solution exists, numerical optimization algorithms need to be used. These algorithms begin by assuming initial values for the unknown parameters and then proceed iteratively until a convergence criterion is satisfied. This paper applies Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) algorithm, which is defined as [18]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)} + \mathbf{J}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}\right), \tag{28}$$

where $\boldsymbol{\theta} = \left[\boldsymbol{\beta}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_g^T \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_g \quad \boldsymbol{\beta}_{12}^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_{(g-1)g}^T\right]^T$ is the parameter vector, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(h)}$ is the estimator vector at the $h-th$ iteration, and $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ is the vector of the first partial derivatives of the log-likelihood function with respect to the vector of parameter $\boldsymbol{\theta}$, also known as gradient vector. Matrix $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$, the outer product of gradients (OPG) matrix, is computed as

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_i^T(\boldsymbol{\theta}), \tag{29}$$

where $\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta})$ is the gradient vector evaluated at $i-th$ observation

$$\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log p(y_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial(\boldsymbol{\theta})}. \tag{30}$$

It is obvious that the BHHH algorithm just requires the gradients of the log-density function and is, therefore, relatively easy to apply. The cost of using this algorithm, however, is that it may require more iterations than other numerical algorithms, such as Newton-Raphson or scoring method [19].

To estimate the parameters of the modified MGPR model using the BHHH algorithm, the gradient must be evaluated at each observation. Let

$$\begin{aligned} Q_{1i} &= \log p\left(y_i;\boldsymbol{\theta}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{g}\left[y_{il}\log\left(\frac{\mu_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right)+\left(y_{il}-1\right)\log\left(1+\varphi_l y_{il}\right)\right. \\ &\quad \left.-\log\left(y_{il}!\right)-\frac{\mu_{il}\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}{1+\varphi_l\mu_{il}}\right]+\log\left[1+Q_2\right], \end{aligned} \tag{31}$$

where Q_2 is defined in (21). The gradient function for θ at observation i is defined as

$$\mathbf{g}_i\left(\theta\right)=\frac{\partial Q_{1i}}{\partial\theta}, \tag{32}$$

then the gradient of each parameters at observation i is

$$\frac{\partial Q_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_l^T}=\frac{\left(y_{il}-\mu_{il}\right)\mathbf{x}_i}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2}+\frac{1}{1+Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial\boldsymbol{\beta}_l^T}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial Q_{1i}}{\partial\varphi_l}=-\frac{\mu_{il}y_{il}}{1+\varphi_l\mu_{il}}+\frac{y_{il}\left(y_{il}-1\right)}{\left(1+\varphi_l y_{il}\right)}-\frac{\mu_{il}\left(y_{il}-\mu_{il}\right)}{\left(1+\varphi_l\mu_{il}\right)^2}+\frac{1}{1+Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial\varphi_l}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial Q_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_{lm}^T}=\frac{1}{1+Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial\boldsymbol{\beta}_{lm}^T}, \tag{35}$$

where $\frac{\partial Q_2}{\partial\boldsymbol{\beta}_l^T}$, $\frac{\partial Q_2}{\partial\varphi_l}$, and $\frac{\partial Q_2}{\partial\boldsymbol{\beta}_{lm}^T}$ are defined in (23), (25), and (27), respectively.

The total number of parameters in the modified MGPR model, a, is $g\left(p+2\right)+g\left(g-1\right)\left(p+1\right)/2$. Thus, the dimension of matrix $\mathbf{J}\left(\theta\right)$ will be $g\left(p+2\right)+g\left(g-1\right)\left(p+1\right)/2\times g\left(p+2\right)+g\left(g-1\right)\left(p+1\right)/2$.

SIMULTANEOUS HYPOTHESIS TESTING OF MODIFIED MGPR MODEL

The hypothesis testing presented in this section is the simultaneous hypothesis for the parameters of the modified MGPR model. This test is used to determine the significance of regression coefficients in the model simultaneously. The hypothesis of simultaneous testing for the parameters of the modified MGPR model is defined as

$$\begin{aligned} &H_0:\beta_{l1}=\beta_{l2}=...=\beta_{lp}=\beta_{lm1}=\beta_{lm2}=...=\beta_{lmp}=0;\ l=1,2,\ldots,g;\ l<m; \\ &H_1:\ H_0 \text{ is not true.} \end{aligned} \tag{36}$$

The classical test procedure to obtain critical area of the hypothesis testing for the hypothesis stated in (36) is based on the likelihood ratio, which is the ratio of the maximum value of the likelihood function under the null hypothesis ($L\left(\omega\right)$) divided by the maximum value of the likelihood function under the population ($L\left(\Omega\right)$). This method is called the likelihood ratio test (LRT).

The first step of the LRT method is to define the parameter space under the null hypothesis (ω) which is $\omega=\{\beta_{00l},\varphi_{0l},\beta_{00lm};l=1,2,\ldots,g;l<m\}$. The log-likelihood function of ω is computed as

$$Q_3=\log L\left(\omega\right)=\sum_{i=1}^{n}p\left(y_i\,|\beta_{00l},\varphi_{0l},\beta_{00lm}\right),$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{g}\left[y_{il}\log\left(\frac{\mu_{0il}}{1+\varphi_{l0}\mu_{0il}}\right) + (y_{il}-1)\log(1+\varphi_{0l}y_{il}) - \log(y_{il}!) - \frac{\mu_{0il}(1+\varphi_{0l}y_{il})}{1+\varphi_{0l}\mu_{0il}}\right] + \log\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{0ilm}\left(e^{-y_{il}}-z_{0il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{0im}\right)\right]\right\}, \tag{37}$$

where $\mu_{0il} = q_{il}\ \exp(\beta_{00l})$ and $\gamma_{0ilm} = \exp(\beta_{00lm})$.

The next step is to take the first partial derivatives of Q_3 with respect to β_{00l}, φ_{0l}, and β_{00lm} which are

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \beta_{00l}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_{il}-\mu_{0il})}{(1+\varphi_{0l}\mu_{0il})^2} + \frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00l}}\right], \tag{38}$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \varphi_{0l}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\mu_{0il}y_{il}}{1+\varphi_{0l}\mu_{il}} + \frac{y_{il}(y_{il}-1)}{(1+\varphi_{0l}y_{il})} - \frac{\mu_{0il}(y_{il}-\mu_{0il})}{(1+\varphi_{0l}\mu_{0il})^2} + \frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \varphi_{0l}}\right], \tag{39}$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \beta_{00lm}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00lm}}\right], \tag{40}$$

where

$$Q_4 = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{0ilm}\left(e^{-y_{il}}-z_{0il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{0im}\right), \tag{41}$$

$$\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00l}} = -\sum_{l<m}^{g}\gamma_{0ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{0im}\right)\frac{\partial z_{0il}}{\partial \beta_{00l}}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial Q_4}{\partial \varphi_{0l}} = -\sum_{l<m}^{g}\gamma_{0ilm}\left(e^{-y_{im}}-z_{0im}\right)\frac{\partial z_{0il}}{\partial \varphi_{0l}}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00lm}} = \gamma_{0ilm}\left(e^{-y_{il}}-z_{0il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{0im}\right), \tag{44}$$

with

$$\frac{\partial z_{0il}}{\partial \beta_{00l}} = \frac{z_{0il}(r_{0l}-1)\mu_{0il}}{(1+\varphi_{0l}\mu_{0il})(1+\varphi_{0l}\mu_{0il}-\varphi_{0l}\mu_{0il}r_{0l})},$$

$$\frac{\partial z_{0il}}{\partial \varphi_{0l}} = \frac{z_{0il}(r_{0l}-1)^2\mu_{0il}^2}{(1+\varphi_{0l}\mu_{0il})(1+\varphi_{0l}\mu_{0il}-\varphi_{0l}\mu_{0il}r_{0l})},$$

and

$$z_{0il} = \exp\left(\frac{\mu_{0il}(r_{0l}-1)}{1+\varphi_{0l}\mu_{0il}}\right),$$

$$\ln r_{0l} - \frac{\varphi_{0l}\mu_{0il}(r_{0l}-1)}{1+\varphi_{0l}\mu_{0il}} + 1 = 0.$$

The total number of parameters in the parameter space under the null hypothesis, b, is $g(g+3)/2$. The system of equations in (38) and (39) will produce g equations. Meanwhile, (40) will yield $g(g-1)/2$ equations. There are

no analytical solutions which can be obtained from the equation (38) until (40) such that the BHHH algorithm will be applied, which is computed as

$$\hat{\theta}_0^{(h+1)} = \hat{\theta}_0^{(h)} + \mathbf{J}^{-1}\left(\hat{\theta}_0^{(h)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\theta}_0^{(h)}\right), \tag{45}$$

where $\boldsymbol{\theta_0} = \left[\beta_{001} \quad \ldots \quad \beta_{00g} \quad \varphi_{01} \quad \ldots \quad \varphi_{0g} \quad \beta_{0012} \quad \ldots \quad \beta_{00(g-1)g}\right]^T$ is the parameter vector, $\hat{\theta}_0^{(h)}$ is the estimator vector at the $h-th$ iteration, $\mathbf{g}\left(\hat{\theta}_0^{(h)}\right)$ is the gradient vector at $h-th$ iteration, and $\mathbf{J}\left(\hat{\theta}_0^{(h)}\right)$ is the OPG matrix at $h-th$ iteration.

Using the same procedure as discussed above, let

$$\begin{aligned} Q_{3i} &= \log p\left(y_i; \theta_0\right) \\ &= \sum_{l=1}^{g}\left[y_{il}\log\left(\frac{\mu_{0il}}{1+\varphi_{l0}\mu_{0il}}\right) + \left(y_{il}-1\right)\log\left(1+\varphi_{0l}y_{il}\right)\right. \\ &\quad \left. -\log\left(y_{il}!\right) - \frac{\mu_{0il}\left(1+\varphi_{0l}y_{il}\right)}{1+\varphi_{0l}\mu_{0il}}\right] + \log\left[1+Q_4\right], \end{aligned} \tag{46}$$

where Q_4 is defined in (41). The gradient function for θ_0 at observation i is

$$\mathbf{g}_i\left(\theta\right) = \frac{\partial Q_{3i}}{\partial \theta_0}.$$

The gradient of each parameters at observation i is

$$\frac{\partial Q_{3i}}{\partial \beta_{00l}} = \frac{\left(y_{il}-\mu_{0il}\right)}{\left(1+\varphi_{0l}\mu_{0il}\right)^2} + \frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00l}}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial Q_{3i}}{\partial \varphi_{0l}} = -\frac{\mu_{0il}y_{il}}{1+\varphi_{0l}\mu_{0il}} + \frac{y_{il}\left(y_{il}-1\right)}{\left(1+\varphi_{0l}y_{il}\right)} - \frac{\mu_{0il}\left(y_{il}-\mu_{0il}\right)}{\left(1+\varphi_{0l}\mu_{0il}\right)^2} + \frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \varphi_{0l}}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial Q_{3i}}{\partial \beta_{00lm}} = \frac{1}{1+Q_4}\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00lm}}, \tag{49}$$

where $\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00l}}$, $\frac{\partial Q_4}{\partial \varphi_{0l}}$, and $\frac{\partial Q_4}{\partial \beta_{00lm}}$ are defined in (42), (43), and (44), respectively. The product of these gradient functions generates matrix $\mathbf{J}$ with dimension of $\left[g\left(g+3\right)/2\right] \times \left[g\left(g+3\right)/2\right]$.

The critical area of LRT test with level of significance $\alpha \in (0,1)$ for the modified MGPR model based on the hypothesis in (36) is defined as follows

$$\Lambda = \frac{max\ L\left(\omega\right)}{max\ L\left(\Omega\right)} < k_\alpha, \tag{50}$$

where k_α is a constant that depends on α with $0 \le k_\alpha \le 1$. The equation in (50) can be rewritten as

$$\begin{aligned} G^2 &= -\log\left(\Lambda^2\right) = -2\log\left(\Lambda\right) \\ &= 2\left[\log\left(L\left(\hat{\Omega}\right)\right) - \log\left(L\left(\hat{\omega}\right)\right)\right] \\ &= 2\left[\log\left(L\left(\hat{\theta}\right)\right) - \log\left(L\left(\hat{\theta}_0\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{51}$$

It has been shown that for large sample sizes, the statistic in (51) is asymptotically distributed as chi-square with v degrees of freedom where $v = a - b$ [20]. The H_0 is rejected when $G^2 > \chi^2_{\alpha,v}$.

CONCLUSION

This paper presents parameter estimation and hypothesis testing of model parameters simultaneously for MGPR model with exposure and correlation as a function of covariates. The parameter estimators of the model are carried out using the MLE method and solved by the BHHH algorithm. The test statistic for simultaneous hypothesis, G^2, is obtained by applying the LRT method which is chi-square distributed with v degrees of freedom. The application of the modified MGPR model using real data is under way and will be presented in another paper.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to the referees for valuable suggestions that led to improvement of this paper. The authors are also pleased to thank Achmad Syahrul Choir for his constructive comments.

REFERENCES

[1] R. Winkelmann, *Econometric analysis of count data*, (Springer, Berlin, 2008).
[2] A. C. Cameron and P. K. Trivedi, *Regression analysis of count data*, (Cambridge University Press, New York, 2013).
[3] M. Geoffrey and D. Peel, *Finite Mixture Models*, (John Wiley & Sons, New York, 2000).
[4] M. Denuit, X. Marchal, S. Pitrebois, J. F. Walhin, *Actuarial Modeling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, (John Wiley & Sons, West Sussex, UK, 2007).
[5] P. C. Consul and G. C. Jain, "A generalization of the Poisson distribution," *Technometrics*, (1973), pp. 791-799.
[6] F. Famoye, "A new bivariate generalized Poisson distribution," *Statistica Neerlandica*, (2010), pp. 112-124.
[7] P. C. Consul and M. M. Shoukri, "The generalized Poisson distribution when the sample mean is larger than the sample variance," *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, (1985), pp. 667-681.
[8] B. Lerner, A. Lone, and M. Rao, "On generalized Poisson distributions," *Probability and Mathematical Statistics*, (1997), pp. 377-385.
[9] H. J. H. Tuenter, "On the generalized Poisson distribution," *Statistica Neerlandica*, (2000), pp. 374-376.
[10] P. C. Consul, *Generalized Poisson distributions: properties and applications*, (Marcel Dekker, Inc., New York, 1989).
[11] F. Famoye, "Restricted generalized Poisson regression model," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (1993), pp. 1335-1354.
[12] J. Lakshminarayana, S. N. N. Pandit, and K. S. Rao, "On a bivariate Poisson distribution," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (1999), pp. 267-276.
[13] F. Famoye, R. Okafor, and M. O. Adamu, "A multivariate generalized Poisson distribution," *Journal of Statistical Theory and Applications*, (2011), pp. 519-532.
[14] F. Famoye, "A multivariate generalized Poisson regression model," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (2015), pp. 497-511.
[15] D. Karlis and L. Meligkotsidou, "Multivariate Poisson regression with covariance structure," *Statistics and Computing*, (2005), pp. 255-265.
[16] Triyanto, Purhadi, B. W. Otok, and S. W. Purnami, "Parameter estimation of geographically weighted multivariate Poisson regression," *Applied Mathematical Sciences*, (2015), pp. 4081-4093.
[17] P. C. Consul, F. Famoye, "Generalized Poisson regression model," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (1992), pp. 89-109.
[18] E. K. Berndt, B. H. Hall, R. E. Hall, J. A. Hausman, "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, (1974), pp. 653665.
[19] V. Martin, S. Hurn, and D. Harris, *Econometric Modelling with Time Series: Specification, Estimation and Testing*, (Cambridge University Press, 2012).
[20] Y. Pawitan, *In All Likelihood*, (Clarendon Press, Oxford, 2001).

mathematics

MDPI

Article

Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically Weighted Multivariate Generalized Poisson Regression

Sarni Maniar Berliana [1,2,†], Purhadi [1,*,†], Sutikno [1,†] and Santi Puteri Rahayu [1,†]

1 Department of Statistics, Faculty of Science and Data Analytics, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya 60111, Indonesia; sarni@stis.ac.id (S.M.B.); sutikno@statistika.its.ac.id (S.S.); santi_pr@statistika.its.ac.id (S.P.R.)

2 Department of Statistics, Politeknik Statistika STIS, Jakarta 13330, Indonesia

* Correspondence: purhadi@statistika.its.ac.id

† These authors contributed equally to this work.

Received: 6 August 2020; Accepted: 3 September 2020; Published: 7 September 2020

Abstract: We introduce a new multivariate regression model based on the generalized Poisson distribution, which we called geographically-weighted multivariate generalized Poisson regression (GWMGPR) model, and we present a maximum likelihood step-by-step procedure to obtain parameters for it. We use the maximum likelihood ratio test to examine the significance of the regression parameters and to define their critical region.

Keywords: spatial analysis; distribution theory; maximum likelihood estimation; likelihood ratio test

MSC: 62H10; 62H11; 62H12; 62H15; 62E20

1. Introduction

Poisson distribution is one of the most widely utilized univariate and multivariate regression models for count data analysis. The univariate regression model is comprised of one response variable, while the multivariate regression model is made up of two or more response variables that are correlated. There are several multivariate count data models based on Poisson distribution, namely multivariate Poisson regression model, multivariate Poisson-gamma mixture model, multivariate Poisson log-normal model, and multivariate generalized Poisson regression model [1,2].

Poisson distribution is characterized by its restrictive assumption on equidispersion, a condition where the sample variance is equal to the mean. However, when the sample mean is less (greater) than the variance, it is called overdispersion (underdispersion). The multivariate Poisson regression model assumes equidispersion and allows for nonnegative correlations, while the multivariate Poisson-gamma mixture model handles overdispersion and nonnegative correlations. Furthermore, the multivariate Poisson-log-normal model allows overdispersion and a more flexible correlation structure. The multivariate generalized Poisson regression (MGPR) model is the most flexible amongst all because it allows any type of dispersion and correlation.

The MGPR model developed by Famoye [2] is a regression model based on multivariate generalized Poisson distribution, which was obtained by the same procedure in constructing bivariate generalized Poisson distribution, which is a product of generalized Poisson marginal with a multiplicative factor [3,4]. To date, bivariate and multivariate generalized Poisson regression models have been applied to real data with units of analysis such as elderly, women, patients, soccer teams, or households [2,5,6]. These models are global regression models that assume the relationships between variables are spatially constant.

When the units of analysis used are locations, spatial effects need to be taken into account in modeling the relationships between the explanatory variables and the response variables. Two possible issues arise when the sample data contain spatial elements, namely spatial dependency and spatial heterogeneity [7]. Out of these two, spatial dependency or spatial autocorrelation is best known and most acknowledged. Spatial dependency occurs when the intensity of an event at one location influences the intensity at surrounding locations. Meanwhile, spatial heterogeneity describes the distribution of an event and the distribution of a relationship across a landscape. This means that what matters in a socio-economic relationship may not be homogenously distributed across space, such as infant mortality rates or unemployment rates at different locations. Both of these issues tend to arise when data are collected by location units such as provinces, districts/cities, sub-districts, villages, etc.

One statistical technique commonly used to address spatial effects is geographically weighted regression (GWR) model [8]. The GWR model allows the relationships between response variables and explanatory variables vary over space so the regression coefficients systematically vary across space. With this method, separate regression models are estimated for each location unit. All observations, i.e., location units, are included in each regression but with different weights. The farther a spatial unit from the location for which the regression is fitted, the smaller its data are weighted. This is in line with Tobler's First Law, which stated that everything is related to everything else, but near things are more related than distant things [9].

The GWR models for univariate response applied in previous studies were based on normal distribution [10–13]. Another study used Poisson distribution to develop a geographically weighted Poisson regression model and semi-parametric geographically weighted Poisson regression [14]. Meanwhile, Rodrigues et al. [15] and Chen et al. [16] used the GWR model based on logistic distribution and negative binomial distribution, respectively. The development of the GWR model for multivariate responses based on several different distributions has been carried out, such as based on normal distribution [17], Poisson distribution [18], Weibull distribution [19], Student-t distribution [20], negative binomial distribution [21], and logistic distribution [22].

Furthermore, two GWR models for count data which use multivariate responses have been developed, based on the Poisson distribution and negative binomial distribution. The first model is called geographically weighted multivariate Poisson regression (GWMPR) model [18], while the second model is called geographically weighted negative binomial regression (GWMNBR) model [21]. The GWMPR model assumes equidispersion, whereas the GWMNBR model only handles cases of overdispersion. In this paper, we propose an alternative multivariate regression model that can handle any type of dispersion by taking into account spatial effects in measuring the relationships between the response variables and the explanatory variables. The proposed model is called a geographically weighted multivariate generalized Poisson regression (GWMGPR) model.

The following discussion in this paper is divided into several main topics. In Section 2, we define the GWMGPR model followed by discussions on the parameter estimation using the maximum likelihood estimation (MLE) method in Section 3. We present simultaneous hypothesis testing in Section 4 to test the significance of all parameters together. In this section, we define the distribution of the test statistic and the critical region for the corresponding hypothesis by applying the maximum likelihood ratio test. We give conclusions in Section 5.

2. GWMGPR Model

The GWMGPR model is an extension of existing model of MGPR developed by Famoye [2] as follows:

$$P\left(y_1,\ldots,y_g\right)=\prod_{l=1}^{g}\left[\left(\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\right)^{y_l}\frac{\left(1+\varphi_l y_l\right)^{y_l-1}}{y_l!}\exp\left[-\frac{\mu_l}{1+\varphi_l\mu_l}\left(1+\varphi_l y_l\right)\right]\right]$$
$$\times\left[1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}\left(e^{-y_l}-z_l\right)\left(e^{-y_m}-z_m\right)\right], \quad (1)$$

where $y_1, \ldots, y_g = 0, 1, 2, \ldots$ with $z_l = \exp\left(\frac{\mu_l(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_l}\right); l = 1, 2, \ldots, g$, and $\ln(r_l) - \frac{\varphi_l\mu_l(r_l-1)}{1+\varphi_l\mu_l} + 1 = 0$, $l = 1, 2, \ldots, g$, where y_l is the response variable $(l = 1, 2, \ldots, g)$, φ_l is the dispersion parameter of y_l, and γ_{lm} shows the correlation between y_l and y_m $(l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m)$. When $\varphi_l = 0$, the MGPR model is reduced to multivariate Poisson regression model. Meanwhile, if $\varphi_l < 0$ or $\varphi_l > 0$, then the MGPR model experiences underdispersion or overdispersion, respectively. The variable y_l and y_m are negatively or positively correlated when $\gamma_{lm} < 0$ or $\gamma_{lm} > 0$, respectively.

We use the usual log-linear relationship between the marginal Y_{il} and the covariates $\mathbf{x}_i$ as follows:

$$\mu_{il} = q_{il} \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l\right), \tag{2}$$

where q_{il} is an exposure measure for observation i of the response variable l, $\mathbf{x}_i$ is a vector of the explanatory variables, and $\boldsymbol{\beta}_l$ is a parameter vector of the MGPR model for the response variable l,

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\boldsymbol{\beta}_l = \begin{bmatrix} \beta_{l0} & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{lp} \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \quad l = 1, 2, \ldots, g.$$

Equation (2) produces one regression model with the same regression coefficients for all n observations (locations), which we called the global model. Meanwhile, the local regression model produces n regression models; therefore, each location has its own regression coefficients. This is the underlying idea of the GWMGPR model, which is to build a model that takes into account spatial variations in relationships that allows the regression coefficients to vary across geographical locations. In this case, the location-specific regression coefficients are functions of longitude and latitude coordinates denoted by $\mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i})$, a vector of two-dimensional coordinates of location i. This means that the response variables $Y_{1i}, Y_{2i}, \ldots, Y_{il}$ are predicted by explanatory variables $\mathbf{x}_i$, each of which has a regression coefficient depending on the location where the data were observed.

Let n random samples $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ from the random variables $\mathbf{y}_i \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i)\right)$ be given, where $\mathbf{u}_i$ is a two-dimensional coordinate vector of location i; then, the GWMGPR model based on MGPR in (2) is written as

$$\mu_{il}(\mathbf{u}_i) = q_{il} \ \exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i)\right), \tag{3}$$

where q_{il} is the exposure for location i of the response variable l with

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\beta}_l(\mathbf{u}_i) = \begin{bmatrix} \beta_{l0}(\mathbf{u}_i) & \beta_{l1}(\mathbf{u}_i) & \beta_{l2}(\mathbf{u}_i) & \cdots & \beta_{lp}(\mathbf{u}_i) \end{bmatrix}^T_{(p+1)\times 1}, \quad l = 1, 2, \ldots, g;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Parameter Estimation

As stated earlier, we use the MLE method to obtain the estimators of the GWMGPR model. The MLE method is widely used to find estimators from observed data. This method requires that the estimators, say $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, maximizes the log-likelihood function by solving the gradient function to zero. For a more detailed discussion about MLE, including its principles and properties, see Pawitan [23].

Supposing n random samples $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ are taken independently from random variables $\mathbf{y}_i \sim MGP\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i), \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_i)\right)$, then the likelihood function of location i that corresponds to (1) is

$$
\begin{aligned}
L(\Omega) =& L\left(\mu_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l(\mathbf{u}_i), \gamma_{lm}(\mathbf{u}_i)\right), \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ l,m = 1,2\ldots,g;\ l < m), \\
=& \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{l=1}^{g}\left(\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right)^{y_{il}} \frac{(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il})^{y_{il}-1}}{y_{il}!}\right.\right. \\
& \left.\exp\left(-\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il})\right)\right) \\
& \left.\times\left(1+\sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}}-z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{4}
$$

where

$$
z_{il} = \exp\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l-1)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right), \tag{5}
$$

$$
\ln(r_l) - \frac{\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(r_l-1)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)} + 1 = 0, \tag{6}
$$

and $\mu_{il}(\mathbf{u}_i)$ is stated in (3). Hence, the parameter vector of location i of the corresponding GWMGPR model is written as

$$
\theta(\mathbf{u}_i) = \left[\boldsymbol{\beta}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\beta}_g^T(\mathbf{u}_i) \quad \varphi_1(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \varphi_g(\mathbf{u}_i) \quad \gamma_{12}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \gamma_{(g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T. \tag{7}
$$

Let Q_1 be the log-likelihood function of (4) such that

$$
\begin{aligned}
Q_1 =& \ln\left(L\left(\mu_l(\mathbf{u}_i), \varphi_l(\mathbf{u}_i), \gamma_{lm}(\mathbf{u}_i)\right)\right), \quad (i = 1,2,\ldots,n;\ l,m = 1,2\ldots,g;\ l < m), \\
=& \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{il}\ln\left(\frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right) + (y_{il}-1)\ln(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il})\right.\right. \\
& \left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{il}(\mathbf{u}_i)(1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)y_{il})}{1+\varphi_l(\mathbf{u}_i)\mu_{il}(\mathbf{u}_i)}\right) + \ln(1+Q_2)\right],
\end{aligned} \tag{8}
$$

where

$$
Q_2 = \sum_{l<m}^{g}\gamma_{lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}}-z_{il}\right)\left(e^{-y_{im}}-z_{im}\right), \tag{9}
$$

and z_{il} is defined in (5).

To estimate the parameters for location i, we can approximate Equation (2) by Equation (3). The regression model is built on using a subset or the entire data points by giving a weight based on the distance of the data points to location i. We give more weight to data points that are closer to location i than other data points that are farther away. Thus, the weights vary according to the proximity of the data points to location i. This means that we need to compute a weighting matrix for each location where the weights represent the proximity of each data point to location i with closer points having more weight in the estimation of the parameters for location i.

The above explanation means that the local parameters of $\hat{\theta}$ are estimated by a weighting function, w_{ij}. The weights $w_{ij}, i, j = 1,2,\ldots,n$ at each location $\mathbf{u}_i$ are defined by a function of distance d_{ij} between the center of location i and other locations. Several weighting functions (kernels) are presented in Fotheringham et al. [8]. The kernels generally define weights such that locations close to the regression point will make more contributions in estimating the parameters than locations farther away. The most common kernels are the Gaussian function and bi-square function accompany with fixed or adaptive bandwidth.

Fixed Gaussian weighting function is defined as

$$
w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right),
$$

and fixed bi-square weighting function is

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right)^2; & \text{if } d_{ij} < b \\ 0 \quad ; & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where d_{ij} is Euclidean distance between location i and location j

$$d_{ij} = \sqrt{\left(u_{1i} - u_{1j}\right)^2 + \left(u_{2i} - u_{2j}\right)^2},$$

and b is the bandwidth that controls the degree of distance-decay. The bandwidth is a measure of the distance-decay in the weighting function and indicates the extent to which the local model should be smoothed [8]. When b is large (small), it gives relative higher (lower) weight for more remote locations. This means that a fixed weighting functions may lead to a problem of undersmoothing in areas with only small observations and oversmoothing in areas with a high density of observations.

An alternative to the fixed weighting functions is adaptive kernels or spatially varying kernels, which give smaller bandwidth in areas with more data points and greater bandwidth in areas with less data points. Two types of adaptive kernel are adaptive Gaussian and adaptive bi-square. Adaptive Gaussian weighting function is defined as

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right),$$

and adaptive bi-square weighting function is stated as

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right)^2; \text{if } \mathrm{d}_{ij} \leq b_i \\ 0 \quad ; \text{otherwise,} \end{cases}$$

where b_i is the bandwidth of location i.

Therefore, the implementation of GWMGPR requires a choice of specific function: a bisquare or a Gaussian function and the choice of bandwidth. The results of GWMGPR are more sensitive to the bandwidth of the particular weighting function chosen rather than to the selection of the weighting function. This means that we need to determine optimum bandwidth so there are sufficient data points within the kernel to get a reliable estimation in terms of bias and standard error but not too large of bandwidth so that there are too many data points such that the heterogeneity is washed away or not too high of bandwidth that the kernel only includes one data point for each location, then the system breaks down. The greater the bandwidth, the lower standard error of the coefficient regression but the higher bias, and vice versa.

There are several techniques used to obtain optimal bandwidth in terms of optimum trade-off between bias and standard error, such as the generalized cross-validation (GCV), which is used to determine the best combination of the bias and standard error. The optimum bandwidth is indicated by the minimum value of GCV, which is defined as follows [8]:

$$GCV = \frac{n \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b)\right)^T \left(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(b)\right)}{\left(n - v_1\right)^2},$$

where $\hat{\mathbf{y}}_i(b)$ is the prediction of $\mathbf{y}_i$ for bandwidth b, and v_1 is the number of effective parameters in the GWMGPR model.

Once the weights w_{ij} are calculated, the parameter estimation is determined. To obtain the estimator of location i, we need information of location j by applying a weighting function w_{ij} to the

log-likelihood function. When the optimal weighting function is obtained, the log-likelihood function of location i in (8) is written as a weighted log-likelihood function as follows:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_1 &= \ln\left(L\left(\mu_l\left(\mathbf{u}_i\right), \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right), \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)\right) w_{ij}, \quad \left(l, m = 1, 2 \ldots, g;\ l < m\right), \\
\mathbb{Q}_1 &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{g}\left(y_{jl} \ln\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \left(y_{jl}-1\right)\ln\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \ln\left(y_{jl}!\right) - \frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) + \ln\left(1+\mathbb{Q}_2\right)\right] w_{ij},
\end{aligned} \tag{10}$$

where

$$\mathbb{Q}_2 = \sum_{l<m}^{g} \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right), \tag{11}$$

$$z_{jl} = \exp\left(\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right), \tag{12}$$

$$\ln\left(r_l\right) - \frac{\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(r_l - 1\right)}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)} + 1 = 0, \tag{13}$$

and

$$\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right) = q_{jl}\ \exp\left(\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}_l\left(\mathbf{u}_i\right)\right). \tag{14}$$

The MLE method is applied to the parameter estimation; therefore, the weighted log-likelihood function in (10) is maximized over the vector parameter $\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)$ in (7). The first partial derivatives of $\mathbb{Q}_1$ with respect to $\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{u}_i\right)$ are shown as follows:

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T\left(\mathbf{u}_i\right)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(y_{jl} - \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)\mathbf{x}_j}{\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\ \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_2 / \partial \boldsymbol{\beta}_l^T\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\mathbb{Q}_2}\right) w_{ij}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{Q}_1}{\partial \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)} &= \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}}{1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)} + \frac{\left(y_{jl}-1\right)y_{jl}}{\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)y_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(y_{jl} - \mu_{jl}\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}{\left(1+\varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)\mu_{jl}\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_2 / \partial \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)}{1+\mathbb{Q}_2}\right) w_{ij},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_1}{\partial \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\mathbb{Q}_2}\frac{\partial \mathbb{Q}_2}{\partial \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)}\right) w_{ij} \tag{17}$$

with $\mathbb{Q}_2$ is stated in (11), where

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{Q}_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T\left(\mathbf{u}_i\right)} &= -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right)\frac{\partial z_{jl}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T\left(\mathbf{u}_i\right)}, \\
\frac{\partial \mathbb{Q}_2}{\partial \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)} &= -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{lm}\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right)\frac{\partial z_{jl}}{\partial \varphi_l\left(\mathbf{u}_i\right)}, \\
\frac{\partial \mathbb{Q}_2}{\partial \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)} &= \sum_{l<m}^{g}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{lm}\left(\mathbf{u}_i\right)}\gamma_{jlm}\ \left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right)\right) \\
&= \left(e^{-y_{jl}} - z_{jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{jm}\right),
\end{aligned}$$

and

$$\frac{\partial z_{jl}}{\partial \boldsymbol{\beta}_l^T(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{jl}\ \mathbf{x}_j\ \mu_{jl}(r_l - 1)}{\left(1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\,\mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\ - \varphi_l(\mathbf{u}_i)\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\ r_l\right)},$$

$$\frac{\partial z_{jl}}{\partial \varphi_l(\mathbf{u}_i)} = \frac{z_{jl}\ \mu_{jl}^2(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)^2}{\left(1 + \varphi_l(\mathbf{u}_i)\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\right)\left(1 + \varphi_l\ (\mathbf{u}_i)\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\ - \varphi_l\ (\mathbf{u}_i)\ \mu_{jl}(\mathbf{u}_i)\ r_l\right)},$$

with z_{jl} and r_l are stated in (12) and (13), respectively.

From Equations (15) to (17), the total number of parameters of GWMGPR model, notated by a_1, is $(g + 2p + 3)\,gn/2$. The first partial derivatives of $\mathbb{Q}_1$ with respect to each parameter in (15) through (17) are not closed-form and the MLE does not give analytical solutions. A numerical optimization, such as the Newton–Raphson algorithm, as the simplest and the most common optimization method, is needed when there is no analytical solution available to obtain the maximum likelihood estimators. The Newton–Raphson algorithm is

$$\hat{\theta}^{(h+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)\mathbf{g}\left(\hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right),$$

where $\hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i)$ is the vector of parameter of location i at the hth iteration, $\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ is the inverse of Hessian matrix of location i at the hth iteration, and $\mathbf{g}\left(\hat{\theta}^{(h)}(\mathbf{u}_i)\right)$ is the gradient vector of location i at the hth iteration. For a more detailed discussion about numerical optimization methods, see Cameron and Trivedi [24].

4. Simultaneous Hypothesis Testing

Simultaneous hypothesis testing aims to test more than one parameter, for example to test all the parameters $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$, $(l = 1, 2, \ldots g;\ i = 1, 2, \ldots, n)$ together. This is used to determine the significance of the regression parameters in the model jointly. The hypothesis for simultaneous testing of parameter $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$ is stated as follows:

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_{l1}(\mathbf{u}_i) = \beta_{l2}(\mathbf{u}_i) = \ldots = \beta_{lp}(\mathbf{u}_i) = 0;\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ l, m = 1, 2, \ldots, g), \\ &H_1 :\ \text{at least one } \beta_{lk}(\mathbf{u}_i) \neq 0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

If we cannot reject H_0, then it means that none of the regression parameter values are significant. In case of rejection, it means that one or more of $\beta_{lk}(\mathbf{u}_i)$'s have a significant effect in the model.

The critical region of hypothesis testing in (18) is obtained using the likelihood ratio test technique by calculating the ratio between the maximum value of the likelihood function under H_0, $L(\omega)$, with the maximum value of the likelihood function under the population, $L(\Omega)$. The maximum value of $L(\Omega)$ is the maximum value in (4). Meanwhile, the calculation of $L(\omega)$ is described below.

The first step to obtain the maximum $L(\omega)$ in determining the critical region for the hypothesis in (18) is to define the parameter space under H_0, $\omega = \{\beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i), \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\}$, $(l, m = 1, 2, \ldots, g;\ l < m)$. Let $\boldsymbol{\theta}_{\omega 2}(\mathbf{u}_i)$ be the vector of parameters under H_0

$$\boldsymbol{\theta}_{\omega 2}(\mathbf{u}_i) = \left[\beta_{\omega 10}(\mathbf{u}_i)\quad \ldots\quad \beta_{\omega g0}(\mathbf{u}_i)\quad \varphi_{\omega 1}(\mathbf{u}_i)\quad \ldots\quad \varphi_{\omega g}(\mathbf{u}_i)\quad \gamma_{\omega 12}(\mathbf{u}_i)\quad \ldots\quad \gamma_{\omega(g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T,$$

and the GWMGPR model of location i under H_0 be

$$\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i) = q_{il}\ \exp\left(\beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)\right). \tag{19}$$

The likelihood function in space ω is

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \left| \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i), \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\right.\right), \quad (l, m = 1, 2, ..., g;\ l < m). \tag{20}$$

Let $Q_{1\omega} = \ln L(\omega)$, then the log-likelihood function under H_0 is written as

$$\begin{aligned} Q_{1\omega} &= \sum_{i=1}^{n} P\left(\mathbf{y}_i \left| \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i), \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i), \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\right.\right), \quad (l, m = 1, 2, ..., g;\ l < m), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{il} \ln\left(\frac{\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)} \right) + (y_{il} - 1)\ln\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i) y_{il}\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \ln(y_{il}!) - \frac{\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i) y_{il}\right)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)} \right) + \ln(1 + Q_{2\omega}) \right], \end{aligned} \tag{21}$$

where

$$\begin{aligned} Q_{2\omega} &= \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{il}} - z_{\omega il}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega im}\right), \\ z_{\omega il} &= \exp\left(\frac{\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)(r_{\omega l} - 1)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)} \right), \end{aligned}$$

and

$$\ln(r_{\omega l}) - \frac{\varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)(r_{\omega l} - 1)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega il}(\mathbf{u}_i)} + 1 = 0.$$

By carrying out the same procedure as described previously, we need the information of location j to obtain the estimator of location i. The contribution of each location depends on the weighting function w_{ij}, such that the weighted log-likelihood function corresponding to (21) is written as

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{1\omega} &= w_{ij} \ln L(\omega) \\ \mathbb{Q}_{1\omega} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{g} \left(y_{jl} \ln\left(\frac{\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)} \right) + \left(y_{jl} - 1\right)\ln\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i) y_{jl}\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \ln\left(y_{jl}!\right) - \frac{\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i) y_{jl}\right)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)} \right) + \ln(1 + \mathbb{Q}_{2\omega}) \right] w_{ij}, \end{aligned} \tag{22}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{2\omega} &= \sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jl}} - z_{\omega jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\omega jm}\right), \\ z_{\omega jl} &= \exp\left(\frac{\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)} \right), \\ \ln(r_l) &- \frac{\varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)(r_l - 1)}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)} + 1 = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

and $\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)$ is defined as

$$\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i) = q_{jl}\ \exp\left(\beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)\right).$$

The first partial derivatives of $\mathbb{Q}_{1\omega}$ with respect to each parameter in the parameter vector $\boldsymbol{\theta}_{\omega 2}(\mathbf{u}_i)$ are

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{1\omega}}{\partial \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\left(y_{jl} - \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega} / \partial \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)}{1 + \mathbb{Q}_{2\omega_2}} \right) w_{ij}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{Q}_{1\omega}}{\partial \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(& -\frac{\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\, y_{jl}}{1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\, \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)} + \frac{\left(y_{jl} - 1\right) y_{jl}}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\, y_{jl}\right)} \\ & - \frac{\mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\left(y_{il} - \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\, \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)^2} + \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega} / \partial \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)}{1 + \mathbb{Q}_{2\omega}} \Bigg) w_{ij}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_{1\omega}}{\partial \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + \mathbb{Q}_{2\omega}} \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega}}{\partial \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)} \right) w_{ij}, \tag{26}$$

where $\mathbb{Q}_{2\omega}$ is defined in (23) with

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega}}{\partial \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)} &= -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\omega jm}\right) \frac{\partial z_{\omega jl}}{\partial \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)}, \\ \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega}}{\partial \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)} &= -\sum_{l<m}^{g} \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\omega jm}\right) \frac{\partial z_{\omega jl}}{\partial \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)}, \\ \frac{\partial \mathbb{Q}_{2\omega}}{\partial \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i)} &= \sum_{l<m}^{g} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{\omega lm}} \gamma_{\omega lm}(\mathbf{u}_i) \left(e^{-y_{jl}} - z_{\omega jl}\right)\left(e^{-y_{jm}} - z_{\omega jm}\right) \right) \\ &= \left(e^{-y_{jl}} - z_{\omega jl}\right)\left(e^{-y_{im}} - z_{\omega jm}\right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{\omega jl}}{\partial \beta_{\omega l0}(\mathbf{u}_i)} &= \frac{z_{\omega jl}\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\, \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)} \\ &\quad \times \frac{(r_{\omega l} - 1)}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\ r_{\omega l}\right)}, \\ \frac{\partial z_{\omega jl}}{\partial \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)} &= \frac{z_{\omega jl}\ \mu_{\omega jl}^2(\mathbf{u}_i)}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\right)} \\ &\quad \times \frac{(r_{\omega l} - 1)^2}{\left(1 + \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i) - \varphi_{\omega l}(\mathbf{u}_i)\ \mu_{\omega jl}(\mathbf{u}_i)\ r_{\omega l}\right)}. \end{aligned}$$

Equations (24) through (26) are not closed-form, so a numerical iteration is needed to solve the equations. The total number of parameters in the parameter space ω, notated by a_2, is $(g+3)\, gn/2$.

Using a significance level $\alpha \in (0, 1)$, the critical region of the likelihood ratio test for the GWMGPR model with regard to the hypothesis in (18) is

$$\Lambda = \frac{\max\ L(\omega)}{\max\ L(\Omega)} < k_\alpha, \tag{27}$$

where k_α is a constant that depends on α with $0 \leq k_\alpha \leq 1$, $L(\Omega)$ and $L(\omega)$ are stated in (4) and (20), respectively. Equation (27) can be written as

$$\begin{aligned} G^2 &= -\ln\left(\Lambda^2\right) = -2\ln(\Lambda) \\ &= 2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right). \end{aligned} \tag{28}$$

The distribution of the test statistic G^2 in (28) is written in the following Theorem 1.

Theorem 1. *Supposing the maximum likelihood estimator under H_0 and the population regarding to hypothesis testing stated in (18) are*

$$\underset{(g+3)gn/2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega 2}} = \left[\hat{\beta}_{\omega 10}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega g0}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\varphi}_{\omega 1}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_{\omega g}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\gamma}_{\omega 12}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\gamma}_{\omega (g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T,$$

$$\underset{(g+2p+3)gn/2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_g^T(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\varphi}_1(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_g(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\gamma}_{12}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\gamma}_{(g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T,$$

respectively, then the test statistic G^2 in (28) follows a chi-square distribution with gpn degrees of freedom.

Proof of Theorem 1. Suppose the maximum likelihood estimator under the population related to the hypothesis stated in (18) is partitioned as follows:

$$\underset{(g+2p+3)gn/2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_2\right]^T,$$

where

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \left[\hat{\beta}_{l1}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\beta}_{l2}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{lp}(\mathbf{u}_i)\right]^T, \quad (l = 1, 2, \ldots, g),$$

and

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = \left[\hat{\beta}_{10}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{g0}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\varphi}_1(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_g(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\gamma}_{12}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\gamma}_{(g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T.$$

The maximum likelihood estimators and the known parameters in H_0 are partitioned as

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\omega = \left[\boldsymbol{\theta}_{\omega 1} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega 2}\right]^T,$$

where

$$\underset{gpn\times 1}{\boldsymbol{\theta}_{\omega 1}} = \left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\right]^T,$$

and

$$\underset{(g+3)gn/2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega 2}} = \left[\hat{\beta}_{\omega 10}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\beta}_{\omega g0}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\varphi}_{\omega 1}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\varphi}_{\omega g}(\mathbf{u}_i) \quad \hat{\gamma}_{\omega 12}(\mathbf{u}_i) \quad \ldots \quad \hat{\gamma}_{\omega (g-1)g}(\mathbf{u}_i)\right]^T,$$

with the true parameter is partitioned as

$$\boldsymbol{\theta}_\omega = \left[\boldsymbol{\theta}_{\omega 1} \quad \boldsymbol{\theta}_2\right]^T.$$

Therefore, the hypothesis in (18) can be written as

$$\begin{aligned} H_0 &: \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_{\omega 1} \\ H_1 &: \boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_{\omega 1}. \end{aligned}$$

The test statistic G^2 stated in (28) can be described as follows:

$$\begin{aligned} G^2 =& 2\left[\ln L\left(\hat{\theta}\right) - \ln L\left(\hat{\theta}_\omega\right)\right] \\ =& 2\left[\ln L\left(\hat{\theta}\right) - \ln L\left(\theta_\omega\right)\right] - 2\left[\ln L\left(\hat{\theta}_\omega\right) - \ln L\left(\theta_\omega\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Let $\ell\left(\theta_\omega\right) = \ln L\left(\theta_\omega\right)$, using Taylor's second order expansion around $\hat{\theta}$, we get

$$\ell\left(\theta_\omega\right) \approx \ell\left(\hat{\theta}\right) + \mathbf{g}\left(\hat{\theta}\right)\left(\theta_\omega - \hat{\theta}\right) - 1/2\left(\theta_\omega - \hat{\theta}\right)^T \mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\theta_\omega - \hat{\theta}\right),$$

where

$$\mathbf{g}\left(\hat{\theta}\right) = \left.\frac{\partial \ell\left(\theta\right)}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}},$$

and

$$\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right) = -\left.\frac{\partial^2 \ell\left(\theta\right)}{\partial \theta \partial \theta^T}\right|_{\theta = \hat{\theta}}.$$

Since $\mathbf{g}\left(\hat{\theta}\right) = \mathbf{0}$, then

$$2\left[\ell\left(\hat{\theta}\right) - \ell\left(\theta_\omega\right)\right] \approx \left(\hat{\theta} - \theta_\omega\right)^T \mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta} - \theta_\omega\right). \tag{30}$$

Meanwhile, when the function $\ell\left(\theta_\omega\right)$ is represented via second order approximation around $\hat{\theta}_\omega$, the following is obtained:

$$\ell\left(\theta_\omega\right) \approx \ell\left(\hat{\theta}_\omega\right) + \mathbf{g}\left(\hat{\theta}\right)\left(\theta_\omega - \hat{\theta}_\omega\right) - 1/2\left(\theta_\omega - \hat{\theta}_\omega\right)\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\theta_\omega - \hat{\theta}_\omega\right),$$

or it can be written as

$$2\left[\ell\left(\hat{\theta}_\omega\right) - \ell\left(\theta_\omega\right)\right] \approx \left(\hat{\theta}_\omega - \theta_\omega\right)^T \mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}_\omega - \theta_\omega\right). \tag{31}$$

Following (30) and (31), the test statistic in (29) can be written as

$$G^2 \approx \left(\hat{\theta} - \theta_\omega\right)^T \mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta} - \theta_\omega\right) - \left(\hat{\theta}_\omega - \theta_\omega\right)^T \mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}_\omega - \theta_\omega\right). \tag{32}$$

Let the partition of Fisher information matrix $\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)$ and its inverse $\mathcal{I}^{-1}\left(\hat{\theta}\right)$ be

$$\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{11[gpn \times gpn]} & \mathcal{I}_{12[gpn \times (g+3)gn/2]} \\ \mathcal{I}_{21[(g+3)gn/2 \times gpn]} & \mathcal{I}_{22[(g+3)gn/2 \times (g+3)gn/2]} \end{bmatrix},$$

and

$$\mathcal{I}^{-1}\left(\hat{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}^{11}_{gpn \times gpn} & \mathcal{I}^{12}_{gpn \times (g+3)gn/2} \\ \mathcal{I}^{21}_{(g+3)gn/2 \times gpn} & \mathcal{I}^{22}_{(g+3)gn/2 \times (g+3)gn/2} \end{bmatrix}.$$

Based on the nature of the conditional distribution, given as $\theta_1 = \theta_{\omega 1}$, $\hat{\theta}_1$ and $\hat{\theta}_2$, we get

$$\hat{\theta}_{\omega 2} = \hat{\theta}_2 - \mathcal{I}^{21}\left(\mathcal{I}^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\theta}_1 - \theta_{\omega 1}\right). \tag{33}$$

A simpler form of (33) using a simple manipulation of the partitioned matrix of the Fisher information is

$$\hat{\theta}_{\omega 2} = \hat{\theta}_2 + \mathcal{I}_{22}^{-1}\mathcal{I}_{21}\left(\hat{\theta}_1 - \theta_{\omega 1}\right).$$

Since $\left(\hat{\theta}_{\omega}-\theta_{\omega}\right)=\left(\mathbf{0},\hat{\theta}_{\omega 2}-\theta_{2}\right)$ and $\theta_{\omega 2}-\theta_{2}=\hat{\theta}_{2}-\theta_{2}+\mathcal{I}_{22}^{-1}\mathcal{I}_{21}\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)$, then

$$\begin{aligned}\left(\hat{\theta}_{\omega}-\theta_{\omega}\right)^{T}\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}_{\omega}-\theta_{\omega}\right)=&\left(\hat{\theta}_{\omega 2}-\theta_{2}\right)^{T}\mathcal{I}_{22}\left(\hat{\theta}_{\omega 2}-\theta_{2}\right)\\=&\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\\ \hat{\theta}_{2}-\theta_{2}\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}\mathcal{I}_{12}\mathcal{I}_{22}^{-1}\mathcal{I}_{21} & \mathcal{I}_{12}\\ \mathcal{I}_{21} & \mathcal{I}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\\ \hat{\theta}_{2}-\theta_{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

The statistic G^2 in (32) can then be written as

$$\begin{aligned}G^{2}\approx&\left(\hat{\theta}-\theta_{\omega 2}\right)^{T}\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}-\theta_{\omega 2}\right)-\left(\hat{\theta}_{\omega 2}-\theta_{\omega 2}\right)^{T}\mathcal{I}\left(\hat{\theta}\right)\left(\hat{\theta}_{\omega 2}-\theta_{\omega 2}\right)\\=&\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)^{T}\left(\mathcal{I}_{11}-\mathcal{I}_{12}\mathcal{I}_{22}^{-1}\mathcal{I}_{21}\right)\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)\\=&\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)^{T}\left(\mathcal{I}^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right).\end{aligned}$$

With regard to the normality for MLE under the regularity conditions (see Cameron and Trivedi [25]), the distribution of the partitioned matrix is

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{1}-\theta_{1}\\ \hat{\theta}_{2}-\theta_{2}\end{bmatrix}\overset{a}{\sim}N\left(\mathbf{0},\mathcal{I}^{-1}\left(\theta\right)\equiv\begin{bmatrix}\mathcal{I}^{11} & \mathcal{I}^{12}\\ \mathcal{I}^{21} & \mathcal{I}^{22}\end{bmatrix}\right),$$

such that

$$\begin{aligned}&\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{1}\right)\overset{a}{\sim}N\left(\mathbf{0},\mathcal{I}^{11}\right),\\&\left(\mathcal{I}^{11}\right)^{1/2}\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{1}\right)\overset{a}{\sim}N\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_{gpn}\right),\\&G^{2}=\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)^{T}\left(\mathcal{I}^{11}\right)^{-1}\left(\hat{\theta}_{1}-\theta_{\omega 1}\right)\overset{a}{\sim}\chi^{2}_{gpn}.\end{aligned}$$

□

Regarding Equation (27), the critical region of the test statistic G^2 is

$$\begin{aligned}\alpha=&P\left(\Lambda<k_{\alpha};\omega\right)\\=&P\left(-2\ln\Lambda>-2\ln k_{\alpha};\omega\right)\\=&P\left(G^{2}>c;\omega\right),\text{ where }c=-2\ln k_{\alpha}\\=&P\left(G^{2}>\chi^{2}_{\alpha,gpn}\right).\end{aligned}$$

Therefore, H_0 in (18) is rejected when $G^2>\chi^2_{\alpha,gpn}$.

5. Conclusions

We developed a local regression model, called a geographically weighted multivariate generalized Poisson regression (GWMGPR) model. We have shown the step-by-step procedure to obtain the estimation of the parameters and the test statistic for hypothesis testing of the GWMGPR model. It is easy to see that the same procedure of developing the GWMGPR model presented in this article can be applied in developing other GWR models based on different multivariate distributions.

The distribution of the test statistic developed in this paper is based on an asymptotic approach. Therefore, further study is needed for development of exact distributions of the test statistics. Despite the advantages of presenting regression coefficients for each location, GWMGPR is a complex model that needs a challenging coding program. Furthermore, simulation and application of the

GWMGPR model using real data to validate the theoretical results in this paper that are being prepared for our next manuscript.

Author Contributions: Conceptualization, S.M.B., P.P., and S.S.; methodology, S.M.B., P.P., S.S. and S.P.R.; writing—original draft preparation, S.M.B.; writing—review and editing, S.M.B. and P.P. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research received no external funding.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

GWMGPR	Geographically weighted multivariate generalized Poisson regression
GWMNBR	Geographically weighted multivariate negative binomial regression
GWMPR	Geographically weighted multivariate Poisson regression
GWR	Geographically weighted regression
MGPR	Multivariate generalized Poisson regression
MLE	Maximum likelihood estimation

References

1. Winkelmann, R. *Econometric Analysis of Count Data*, 5th ed.; Springer: Berlin, Germany, 2008.
2. Famoye, F. A Multivariate Generalized Poisson Regression Model. *Commun. Stat. Theory Methods* **2015**, *44*, 497–511. [CrossRef]
3. Famoye, F.; Okafor, R.; Adamu, M.O. A multivariate Generalized Poisson Distribution. *J. Stat. Theory Appl.* **2011**, *10*, 519–532.
4. Famoye, F. A New Bivariate Generalized Poisson Distribution. *Stat. Neerl.* **2010**, *64*, 112–124. [CrossRef]
5. Famoye, F. Comparisons of Some Bivariate Regression Models. *J. Stat. Comput. Simul.* **2012**, *82*, 937–949. [CrossRef]
6. Zamani, H.; Faroughi, P.; Ismail, N. Bivariate Generalized Poisson Regression Model: Applications on Health Care Data. *Empir. Econ.* **2016**, *51*, 1607–1621. [CrossRef]
7. Anselin, L. *Spatial Econometrics: Methods and Models*; Springer: Dordrecht, The Netherlands, 1988.
8. Fotheringham, A.S.; Brundson, C.; Charlton, M. *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationship*; John Wiley & Son Ltd.: Chichester, UK, 2002.
9. Tobler, W.R. Cellular Geography. In *Theory and Decision Library (An International Series in the Philosophy and Methodology of the Social and Behavioral Sciences)*; Gale, S., Olsson, G., Eds.; Springer: Dordrecht, The Netherlands, 1979; pp. 379–386.
10. Bascuñán, M.M.; Quezada, C.R. Geographically Weighted Regression for Modelling the Accessibility to the Public Hospital Network in Concepción Metropolitan Area, Chile. *Geospat. Health* **2016**, *11*, 263–273.
11. Fotheringham, A.S.; Kelly, M.H.; Charlton, M. The Demographic Impacts of the Irish Famine: Towards a Greater Geographical Understanding. *Trans. Inst. Br. Geogr.* **2012**, *38*, 221–237. [CrossRef]
12. Lin, C.H.; Wen, T.H. Using Geographically Weighted Regression (GWR) to Explore Spatial Varying Relationships of Immature Mosquitoes and Human Densities with the Incidence of Dengue. *Int. J. Environ. Res. Public Health* **2011**, *8*, 2798–2815. [CrossRef] [PubMed]
13. Zhao, F.; Park, N. Using Geographically Weighted Regression Models to Estimate Annual Average Daily Traffic. *Transp. Res. Rec. J. Transp. Res. Board* **2004**, *1879*, 99–107. [CrossRef]
14. Nakaya, T.; Fotheringham, A.S.; Brunsdon, C.; Charlton, M. Geographhically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping. *Stat. Med.* **2005**, *24*, 2695–2717. [CrossRef] [PubMed]
15. Rodrigues, M.; de la Riva, J.; Fotheringham, S. Modeling the Spatial Variation of the Explanatory Factors of Human-caused Wildfires in Spain Using Geographically Weighted Logistic Regression. *Appl. Geogr.* **2014**, *48*, 52–63. [CrossRef]
16. Chen, J.; Liu, L.; Xiao, L.; Xu, C.; Long, D. Integrative Analysis of Spatial Heterogeneity and Overdispersion of Crime with a Geographically Weighted Negative Binomial Model. *Int. J. Geo-Inf.* **2020**, *9*, 60. [CrossRef]

17. Harini, S.; Purhadi, Mashuri, M.; Sunaryo, S. Statistical Test for Multivariate Geographically Weighted Regression Model Using the Method of Maximum Likelihood Ratio Test. *Int. J. Appl. Math. Stat.* **2012**, *29*, 110–115.
18. Purhadi, B.W.O.; Purnami, S.W. Parameter Estimation of Geographically Weigthed Multivariate Poisson Regression. *Appl. Math. Sci.* **2015**, *9*, 4081–4093.
19. Suyitno; Purhadi; Sutikno; Irhamah. Parameter Estimation of Geographically Weighted Trivariate Weibull Regression Model. *Appl. Math. Sci.* **2016**, *10*, 861–878.
20. Sugiarti, H.; Purhadi; Sutikno; Purnami, S.W. Parameter Estimation of Geographically Weighted Multivariate t Regression Model. *J. Theor. Appl. Inf. Technol.* **2016**, *92*, 45–51.
21. Dewi, Y.S.; Purhadi; Sutikno; Purnami, S.W. Comparison of Nelder Mead and BFGS Algorithms on Geographically Weighted Multivariate Negative Binomial. *Int. J. Adv. Sci. Eng. Inf. Technol.* **2019**, *9*, 979–987. [CrossRef]
22. Fathurahman, M.; Purhadi; Sutikno; Ratnasari, V. Geographically Weighted Multivariate Logistic Regression Model and Its Application. *Abstr. Appl. Anal.* **2020**, *2020*, 8353481. [CrossRef]
23. Pawitan, Y. *In All Likelihood*; Clarendon Press: Oxford, UK, 2001.
24. Cameron, A.C.; Trivedi, P.K. *Microeconometrics Methods and Applications*; Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2005.
25. Cameron, A.C.; Trivedi, P.K. *Regression Analysis of Count Data*, 2nd ed.; Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2013.

© 2020 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).