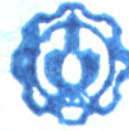


25/33/4/06

TESIS



DEK PERPUSTAKAAN
INSTITUT TEKNOLOGI
SEPULUH - NOPEMBER

**ESTIMASI SPLINE DALAM REGRESI NONPARAMETRIK
DENGAN PENDEKATAN *LOCAL RISK***

Oleh :

WINARDI
NRP. 1304 201 004

RTSt
519.536
win
e-1
2006



PERPUSTAKAAN ITS	
Tgl. Terima	15-2-06
Terima Dari	H
No. Agenda Prp.	224662

**PROGRAM STUDI MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2006**

**ESTIMASI SPLINE DALAM REGRESI NONPARAMETRIK
DENGAN PENDEKATAN LOCAL RISK**

TESIS


Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

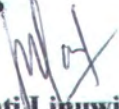
WINARDI
NRP. 1304 201 004

Tanggal Ujian : 27 Januari 2006
Periode Wisuda : Maret 2006

Disetujui Oleh Tim Penguji Tesis :


1. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S. (Pembimbing I)
NIP. 131 843 382


2. Ir. Sri Pingit Wulandari, M.Si. (Pembimbing II)
NIP. 131 651 256



3. Prof. Dra. Susanti Linuwih, M.Stats., Ph.D. (Penguji)
NIP. 130 368 808


4. Prof. Drs. Nur Iriawan, M.IKom., Ph.D. (Penguji)
NIP. 131 782 011


5. Dr. Purhadi, M.Sc. (Penguji)
NIP. 131 652 051


6. Dr. Sony Sunaryo, M.Si. (Penguji)
NIP. 131 843 380

(Penguji)
Direktur Program Pascasarjana


Prof. Ir. Happy Ratna S., M.Sc., Ph.D.
NIP. 130 541 829



ESTIMASI SPLINE DALAM REGRESI NONPARAMETRIK DENGAN PENDEKATAN *LOCAL RISK*

Oleh : WINARDI
Dosen Pembimbing : 1. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S.
: 2. Ir. Sri Pingit Wulandari, M.Si.

ABSTRAK

Pada model regresi nonparametrik $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dimana y variabel respon dan x variabel prediktor, untuk n pengamatan terdapat beberapa pendekatan yang dapat digunakan untuk mengestimasi fungsi regresi, diantaranya adalah spline. Spline merupakan polinomial yang tersegmentasi dan mempunyai fleksibilitas, sehingga dapat menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal dari data. Penelitian ini telah mengkaji suatu metode estimasi gabungan dari estimasi spline pada model regresi nonparametrik dengan menggunakan pendekatan *local risk*, mengkaji metode *Risk Estimation using Classical Pilot* (RECP), dan *Akaike Information Criterion* (AIC_c) dalam menentukan parameter penghalus λ optimal dan mengevaluasi performance dari kedua metode dengan data simulasi.

Berdasarkan hasil kajian dari fungsi resiko dengan menggunakan pendekatan *local risk* diperoleh bentuk estimasi local risk sebagai berikut: $\hat{R}(\lambda, x_i) = \{(S_\lambda f_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \hat{\sigma}^2 (S_\lambda S_\lambda^T)(x_i)$, dimana $(S_\lambda f_\lambda)(x_i)$ merupakan elemen ke- i dari vektor $S_\lambda f_\lambda$, dan $(S_\lambda S_\lambda^T)(x_i)$ adalah elemen diagonal ke- i dari matriks $S_\lambda S_\lambda^T$, serta $S_\lambda = X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T$. Estimator spline $f_\lambda(x_i)$ diperoleh dari meminimumkan estimasi local risk.

Dalam mengkaji metode pemilihan parameter penghalus RECP diperoleh: $RECP(\lambda) = n^{-1} \left[\|(\mathbf{I} - S_\lambda) f_\lambda\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(S_\lambda S_\lambda^T) \right]$, nilai λ yang optimal adalah λ yang memberikan nilai $RECP(\lambda)$ yang paling minimum. Sedangkan metode AIC_c diperoleh : $AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(S_\lambda - \mathbf{I})y\|^2}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(S_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(S_\lambda) - 2}$, parameter penghalus λ optimal adalah λ yang memberikan nilai AIC_c yang paling minimum.

Berdasarkan hasil simulasi dengan berbagai kombinasi n , σ dan fungsi, diperoleh bahwa nilai MSE untuk metode RECP cenderung lebih kecil dari pada nilai MSE untuk metode AIC_c pada setiap model simulasi. Dapat disimpulkan bahwa metode pemilihan parameter penghalus λ optimal dengan RECP cenderung lebih baik dibandingkan dengan AIC_c .

Kata Kunci: *Spline, Estimasi Local Risk, RECP, AIC_c .*

SPLINE ESTIMATION IN NONPARAMETRIC REGRESSION BY LOCAL RISK APPROACH

By : WINARDI
Under the Supervision : 1. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S.
2. Ir. Sri Pingit Wulandari, M.Si.

ABSTRACT

There are some approach that can be used to estimate regression model include nonparametric regression one, $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, where y is response variable and x is predictor variable for n observation. One of approach is spline, a segmented and flexibility polynomial, so it can adjust effectively to the local characteristic of data. This research studies a combination estimation method from spline estimation in nonparametric regression using local risk approach, Risk Estimation using Classical Pilot (RECP) and Akaike Information Criterion (AIC_c) methods in determining smoothing parameter optimal λ and evaluating performance of both methods using simulation data.

The study about risk function by local risk approach obtained the local risk estimation model such as: $\hat{R}(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda f_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \hat{\sigma}^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i)$, where $(\mathbf{S}_\lambda f_\lambda)(x_i)$ is the element for i observation of vector $\mathbf{S}_\lambda f_\lambda$, and $(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i)$ is a diagonal element for i observation of matrix $\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T$, and $\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T$. The spline estimator of $f_\lambda(x_i)$ can be obtained by minimizing local risk estimation.

In examining about the smoothing parameter selection method RECP obtained by the expression: $RECP(\lambda) = n^{-1} \left[\|(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda) f_\lambda\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \right]$, the optimal value of λ is the λ that given the most minimum $RECP(\lambda)$. Meanwhile,

AIC_c method obtained by the expression: $AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})y\|^2}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2}$,

the smoothing parameter of optimal λ is the λ that given the most minimum AIC_c .

Based on simulation of some combination n , σ and function, reveal that the MSE value by RECP method tend to less than the MSE value of AIC_c . Hence, the conclusion of this study is that the selection method of smoothing parameter optimal λ using by RECP is better than AIC_c .

Key words : *Spline, Local Risk Estimation, RECP, AIC_c .*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil Alamin, segala puji bagi Allah S.W.T yang telah memberikan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan dan kesabaran sehingga dapat menyelesaikan tesis ini dengan judul : **Estimasi Spline dalam Regresi Nonparametrik dengan Pendekatan Local Risk**. Shalawat dan salam penulis haturkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad S.A.W yang telah membawa manusia dari masa jahiliah ke masa modern yang penuh dengan ilmu pengetahuan. Tesis ini merupakan hasil penelitian sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Magister Sains (M.Si.) pada Program Magister Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, ITS Surabaya.

Penulis menyadari bahwa tesis ini dapat diselesaikan, tidak lepas dari bimbingan, arahan, dorongan moral maupun bantuan materil dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada yang terhormat;

1. Bapak Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S., selaku Koordinator Program Studi Magister Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, sekaligus sebagai dosen pembimbing utama, dengan penuh kesabaran dan tidak kenal lelah, memberikan petunjuk, bimbingan serta motivasi setiap saat, sehingga tulisan ini selesai tepat pada waktunya.
2. Ibu Ir. Sri Pingit Wulandari, M.Si selaku dosen pembimbing kedua yang juga telah banyak memberikan dorongan, petunjuk, pengarahan yang sangat bermanfaat selama proses penulisan dan bersedia meluangkan waktunya untuk penulis.

3. Ketua Jurusan Statistika ITS Surabaya yang telah memberikan kemudahan dan fasilitas selama proses perkuliahan.
4. Para dosen pengajar yang telah memberikan dan mentransfer ilmunya kepada penulis dengan hati yang tulus, beserta staf administrasi akademik, laboratorium komputasi dan ruang baca Jurusan Statistika yang telah banyak membantu penulis selama masa studi.
5. Para Pimpinan STIMK Handayani Makassar yang telah memberikan bantuan dan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan pendidikan di Program Magister Jurusan Statistika ITS Surabaya.
6. Orang tuaku yang tercinta Ayahanda Drs. Zainal Arifin Abbas, Ibunda Suarni, yang telah membesarkan, mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan pengorbanan yang begitu besar dan mulia, mendoakan penulis dengan penuh kasih sayang, memberikan motivasi dan dorongan kepada penulis untuk terus belajar dan belajar.
7. Dr. Hamzah Upu, M.Ed. selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Makassar yang telah memberikan motivasi, dorongan dan bantuan kepada penulis sebelum dan selama menempuh pendidikan di Program Magister Statistika ITS Surabaya.
8. Adikku Nunung, Wati, M. Nur, Mutmainnah, Ana, M. Amin dan Ima serta semua keluarga yang telah mendukung dengan penuh pengertian dan kasih sayang kepada penulis.
9. Saudara-saudaraku seangkatan 2004 di Program Magister Statistika ITS : Abdul Wahab, Irwan, Fatimah Djafar, Wahidah Alwi, Mulianah, Adnan Sauddin, Abdul Rahim, Abdul Khair dan Pak Heri serta Firdaus (S-2 Elektro) yang telah banyak



memberi masukan, bantuan, motivasi dan pengertian dengan penulis. Kemudian kepada teman-teman yang namanya tidak sempat penulis sebutkan, atas kebersamaan, kekompakan, bantuan dan masukannya selama masa perkuliahan.

10. Dirjen Dikti yang telah memberikan bantuan beasiswa BPPS selama masa studi di Program Magister Statistika ITS Surabaya.

11. Semua pihak yang telah banyak membantu yang tidak tersebut namanya satu-persatu.

Akhirnya penulis berharap dan memohon semoga bantuan semua pihak mendapat Ridho serta balasan yang setimpal dari-Nya, dan sebagai suatu karya ilmiah semoga tesis ini dapat memberikan manfaat untuk menambah wawasan keilmuan kita semua dan mendapat ridho dari Allah SWT. Amin.

Surabaya, Januari 2006

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	i
ABSTRAK	ii
ABSTRACT	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	4
1.3. Tujuan Penelitian	4
1.4. Manfaat Penelitian	5
1.5. Batasan Masalah	5
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Spline Dalam Regresi Nonparametrik	6
2.2. Fungsi Kerugian dan Resiko	7
2.3. Vektor Random	8
2.4. Distribusi Chi-Kuadrat	9
2.5. Estimasi <i>Local Risk</i>	9
2.6. Metode Pemilihan Parameter Penghalus	10
BAB III. METODOLOGI PENELITIAN	
3.1. Bahan dan Alat	11
3.2. Metode Penelitian	11
BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1. Estimasi Spline dengan Pendekatan <i>Local Risk</i>	14
4.2. Pemilihan Parameter Penghalus λ Optimal	20
4.2.1. Metode <i>Risk Estimation using Classical Pilots</i> (RECP)	20
4.2.2. Metode <i>Akaike Information Criterion Corrected</i> (AICc)	21

4.3. Simulasi	27
4.3.1. Metode RECP	30
4.3.2. Metode AICc	34
4.3.3. Metode RECP dan AICc	39
BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1. Kesimpulan	45
5.2. Saran	46
DAFTAR PUSTAKA	47
LAMPIRAN	49

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul	Halaman
4.1	Plot Data Simulasi untuk Fungsi Trigonometri dengan $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$	29
4.2	Plot Data Simulasi untuk Fungsi Eksponensial dengan $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$	29
4.3	Plot Nilai RECP dengan λ untuk Model Trigonometri	30
4.4	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan Metode RECP	31
4.5	Plot Nilai RECP dengan λ untuk Model Eksponensial	32
4.6	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan Metode RECP	33
4.7	Plot Nilai AICc dengan λ untuk Model Trigonometri	35
4.8	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan metode AICc	36
4.9	Plot Nilai AICc dengan λ untuk Model Eksponensial	37
4.10	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan Metode AICc	38
4.11.	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan Metode RECP dan AICc	39
4.12	Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan Metode RECP dan AICc	41
4.13	Diagram Batang Nilai MSE pada Model Trigonometri	42
4.14	Diagram Batang Nilai MSE pada Model Eksponensial	44

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul	Halaman
4.1	Pemilihan λ dengan Metode RECP pada Model Trigonometri	30
4.2	Pemilihan λ dengan Metode RECP pada Model Eksponensial	32
4.3	Pemilihan λ dengan Metode AICc pada Model Trigonometri	34
4.4	Pemilihan λ dengan Metode AICc pada Model Eksponensial	37
4.5	Hasil Simulasi λ Optimal untuk Model Trigonometri	42
4.6	Hasil Simulasi λ Optimal untuk Model Eksponensial	43

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Teks	Halaman
1.	Program untuk menentukan parameter penghalus optimal dengan menggunakan metode RECP dan AICc pada Model Fungsi Trigonometri	49
2.	Program untuk menentukan parameter penghalus optimal dengan menggunakan metode RECP dan AICc pada Model Fungsi Eksponensial	51
3.	Program menentukan MSE	53
4.	Nilai λ dengan Nilai RECP dan AICc	59

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Analisis regresi merupakan salah satu analisis dalam statistika yang banyak digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel-variabel penjelas dengan variabel responnya. Untuk n buah pengamatan, misalkan y adalah variabel respon dan x adalah variabel penjelas, maka bentuk hubungannya dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x_i \in [a, b], \quad (1.1)$$

dimana $f(x_i)$ adalah kurva regresi dan error ε_i diasumsikan independen dengan mean nol dan variansi σ^2 .

Ada dua pendekatan yang dapat digunakan untuk mengestimasi kurva regresi $f(x_i)$ yaitu pendekatan regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Pada pendekatan regresi parametrik diasumsikan bentuk kurva regresi $f(x_i)$ diketahui. Dalam melakukan estimasi terhadap $f(x_i)$ dalam regresi parametrik sama dengan melakukan estimasi terhadap parameter-parameter dalam kurva regresi. Sedangkan pada pendekatan regresi nonparametrik bentuk kurva regresi $f(x_i)$ diasumsikan tidak diketahui. Kurva regresi hanya diasumsikan mulus dan fungsi f termuat dalam ruang fungsi tertentu, dimana dalam pemilihan ruang fungsi tersebut dimotivasi oleh sifat kemulusan dari fungsi f tersebut.

Ada beberapa pendekatan untuk mengestimasi kurva regresi $f(x_i)$ dalam regresi nonparametrik antara lain pendekatan kernel (Hardle, 1990), spline

(Wahba,1990), *Nearest Neighbor* (Hardle, 1990), Estimasi Deret Fourier (Eubank, 1988), dan Histogram (Green dan Silverman,1994).

Pendekatan regresi nonparametrik yang cukup populer adalah spline. Pendekatan ini merupakan polinomial yang memiliki sifat tersegmen, dimana sifat ini memberikan fleksibel lebih dari pada polinomial biasa, sehingga dapat menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal dari fungsi atau data.

Dalam pendekatan spline, estimator f diperoleh dengan meminimumkan *Penalized Least Square* (PLS) :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx = R(f) + \lambda J(f) \quad (1.2)$$

dengan λ parameter penghalus yang mengontrol keseimbangan antara kecocokan terhadap data (*Goodness of fit*) dan kemulusan kurva (*Penalty*).

Dalam menyelesaikan permasalahan optimasi pada Persamaan (1.2) dapat digunakan pendekatan *Reproducing Kernel Hilbert Space* (RKHS) (Kemeldorf dan Wahba, 1971), *Gateaux* dan keluarga nonparametrik (Eubank, 1988). Lee (2004) mengembangkan suatu metode untuk memperoleh estimasi f dengan menggunakan pendekatan *Local Risk*. Pendekatan *Local Risk* ini mempunyai beberapa kelebihan dalam mendapatkan estimasi f , seperti perhitungan matematikanya tidak terlalu rumit jika dibandingkan dengan pendekatan *Reproducing Kernel Hilbert Space* dan *Gateaux*. Selain itu *Local risk* mempunyai sifat fleksibel dan sangat cocok digunakan pada data yang mempunyai perilaku berubah-ubah.

Dalam memperoleh estimasi kurva regresi yang baik, pemilihan λ yang optimal merupakan hal yang penting. Jika fungsi $f(x_i)$ yang tidak diketahui terdiri dari beberapa bentuk atau pola kurva yang berbeda-beda maka kita akan kesulitan untuk memperoleh estimasi $f_\lambda(x_i)$ yang baik dalam mengestimasi $f(x_i)$. Hal ini disebabkan karena kurva yang berubah dengan lamban memerlukan λ yang lebih besar untuk menstabilkan variansi, sementara pada bentuk kurva yang berubah dengan cepat membutuhkan λ yang relatif kecil untuk mengurangi bias (Lee, 2004). Oleh karena itu, untuk mengatasi masalah tersebut perlu dikembangkan suatu metode yang dapat menggabungkan estimasi $f_\lambda(x_i)$ (diperoleh dari λ yang berbeda) untuk mendapatkan estimasi $f(x_i)$ yang lebih baik.

Beberapa metode untuk memilih parameter penghalus λ yang optimal yaitu metode klasik seperti *Cross Validation* (CV), *Generalized Cross Validation* (GCV)(Craven dan Wahba, 1979), *Mallows' Cp criterion* (Mallows, 1973), dan *Akaike Information Criterion* (AIC_c) (Hurvich dkk., 1998). Metode lain adalah metode estimasi *risk* seperti *Risk Estimation using Classical Pilots* (RECP) (Lee, 2003) dan *Exact Double Smoothing* (EDS) (Wand dan Guterrez, 1997). Dari berbagai metode tersebut, metode RECP dan AIC_c mempunyai performance yang lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya (Lee, 2003).

Sehubungan dengan uraian singkat di atas, dalam penelitian ini akan dikaji estimasi spline pada model regresi nonparametrik dengan menggunakan pendekatan *local risk*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas maka permasalahan yang akan diajukan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mendapatkan estimasi spline dengan menggunakan pendekatan *local risk*?
2. Bagaimana menentukan parameter penghalus λ optimal dari estimasi spline dengan menggunakan *Risk Estimation using Classical Pilots* (RECP), dan *Akaike Information Criterion* (AIC_c).
3. Bagaimana *performance* (kebaikan) dari metode yang digunakan untuk memperoleh parameter penghalus λ optimal pada data simulasi.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mengkaji estimasi spline dengan menggunakan pendekatan *local risk*, yaitu estimasi $f_\lambda(x_i)$ yang meminimumkan estimasi *local risk*.
2. Mengkaji parameter penghalus λ optimal dari estimasi Spline dengan menggunakan metode RECP dan AIC_c .
3. Mengevaluasi kebaikan dari metode yang digunakan untuk memperoleh parameter penghalus λ optimal pada data simulasi.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin dicapai dari hasil penelitian ini adalah:

1. Meningkatkan wawasan keilmuan, khususnya yang berkaitan dengan model regresi nonparametrik yang menggunakan estimasi spline dengan pendekatan *local Risk*.
2. Memberikan informasi alternatif metode penyelesaian permasalahan regresi nonparametrik.

1.5. Batasan Masalah

Berdasarkan pada permasalahan di atas, maka dalam penelitian ini akan dibatasi pada estimasi *local risk*, metode pemilihan parameter penghalus dengan metode RECP dan AIC_c .



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Spline dalam Regresi Nonparametrik

Spline merupakan polinomial yang mempunyai sifat tersegmen. Sifat ini dapat memberikan fleksibel lebih dari pada polinomial biasa, oleh karena itu spline sangat memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal dari fungsi atau data (Eubank, 1988). Spline ini banyak dikembangkan oleh Wahba (1990), khususnya pada persoalan optimasi.

Fungsi spline dengan orde m adalah sembarang fungsi yang mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$E(y) = S(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j x^j + \sum_{l=1}^r \beta_l (x - k_l)_+^{m-1} \quad (2.1)$$

dengan y variabel respon pada Persamaan (1.1).

Dimana $j = 0, 1, \dots, m-1$ dan $l = 1, 2, \dots, r$. γ_j, β_l adalah parameter real dan k_l adalah titik-titik knot.

Fungsi $(x - k_l)_+^{m-1}$ dapat didefinisikan berikut :

$$(x - k_l)_+^{m-1} = \begin{cases} (x - k_l)^{m-1}, & x \geq k_l \\ 0 & , x < k_l \end{cases}$$

Fungsi spline di atas mempunyai sifat, yaitu:

- a) Fungsi S merupakan polinomial derajat $m-1$ pada interval (k_l, k_{l+1})
- b) Fungsi S mempunyai turunan ke $m-2$ yang kontinu.
- c) Fungsi S mempunyai turunan ke $m-1$ yang merupakan fungsi tangga.

Jika $m = 2$, $m = 3$, dan $m = 4$ disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.1) maka diperoleh fungsi spline linear untuk $m = 2$, fungsi spline kuadratik untuk $m = 3$, dan fungsi spline kubik untuk $m = 4$. Adapun masing-masing bentuk fungsi spline tersebut sebagai berikut:

$$E(y) = S(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \sum_{l=1}^r \beta_l (x - k_l)_+ \quad (2.2)$$

$$E(y) = S(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \sum_{l=1}^r \beta_l (x - k_l)_+^2 \quad (2.3)$$

$$E(y) = S(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \sum_{l=1}^r \beta_l (x - k_l)_+^3 \quad (2.4)$$

2.2 Fungsi Kerugian dan Resiko

Definisi tentang fungsi kerugian dan resiko (Eubank, 1988) sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Fungsi Kerugian)

Jika $f_\lambda = (f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_n})^T$ adalah estimator untuk $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ maka fungsi kerugian dapat didefinisikan sebagai :

$$L(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (f_i - f_{\lambda_i})^2 \quad (2.5)$$

Nilai harapan dari fungsi kerugian di atas disebut fungsi resiko.

Definisi 2.2 (Fungsi Resiko)

Jika $f_\lambda = (f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_n})^T$ adalah estimator untuk $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ maka fungsi resiko dapat didefinisikan sebagai :

$$R(\lambda) = E[L(\lambda)]$$

$$= n^{-1} \sum_{i=1}^n E(f_i - f_\lambda)^2 \quad (2.6)$$

$L(\lambda)$ dan $R(\lambda)$ merupakan ukuran dari kinerja suatu estimator.

2.3. Vektor Random

Jika $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ merupakan vektor random dengan variansi $\sigma_{ii} = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$; $\text{Cov}(y_i, y_j) = \sigma_{ij}, i \neq j$; dan $E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}$ maka

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T] \quad (2.7)$$

Teorema 2.1 (Seber dan Lee, 2003)

Misalkan \mathbf{y} adalah suatu vektor $n \times 1$ dengan $E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}$ dan $\text{Var}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$.

Jika terdapat matriks \mathbf{A} yang berukuran $n \times n$ maka :

$$E(\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) = \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$$

Bukti:

Diketahui

$$\sigma_{ij} = E(y_i y_j) - \mu_i \mu_j, i \neq j$$

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = E(y_i^2) - \mu_i^2, i = j$$

$$\text{maka } E(y_i y_j) = \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j \quad (2.8)$$

$$E(y_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E(y_i y_j) \end{aligned} \quad (2.10)$$

dengan mensubstitusi Persamaan (2.8) pada (2.10), maka

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sigma_{ij} + \mu_i \mu_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_i \mu_j, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\
&= \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}
\end{aligned}$$

2.4. Distribusi Chi-Kuadrat

Jika diberikan fungsi probabilitas Chi-Kuadrat berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} x^{p/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty \quad (2.11)$$

dimana p merupakan derajat bebas maka

$$E(X) = p \quad \text{dan} \quad E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{p-2}$$

2.5. Estimasi Local Risk

Estimasi *local risk* dalam konteks regresi spline digunakan oleh Lee (2004).

Untuk mendapatkan estimasi dari $R(\lambda, x_i)$, dimisalkan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, \quad \mathbf{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T, \quad \mathbf{f}_\lambda = (f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2), \dots, f_\lambda(x_n))^T, \\
\mathbf{S}_\lambda &= \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T, \quad \text{dimana } \mathbf{S}_\lambda \text{ sebagai matriks "hat".}
\end{aligned}$$

Estimasi σ^2 adalah:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}_\lambda(x_i))^2}{\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda)} \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan estimasi f_λ (λ merupakan parameter penghalus optimal) dan $\hat{\sigma}^2$, maka bentuk estimator *local risk* adalah:

$$\hat{R}(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \hat{\sigma}^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i) \quad (2.13)$$

dimana, $(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i)$ adalah elemen ke- i dari vektor $\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda$, dan

$(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i)$ adalah elemen diagonal ke- i dari matriks $\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T$

2.6. Metode Pemilihan Parameter Penghalus

Ada beberapa metode untuk memilih parameter penghalus λ optimal yaitu :

a. Metode *Risk Estimation using Classical Pilots* (RECP)

Bentuk umum metode RECP sebagai berikut:

$$RECP(\lambda) = \frac{1}{n} \{ \|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{f}_\lambda\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \} \quad (2.14)$$

Parameter penghalus λ dipilih yang mempunyai resiko yang paling minimum. Metode ini dikembangkan oleh Lee (2003). Ide dari metode mirip dengan metode yang dikembangkan oleh penulis lain, tetapi dengan nama metode yang berbeda, seperti *Stabilized Selectors* (Chiu, 1991), *Double Smoothing* (Hardle, 1992), *Plug-In Unbiased Risk Estimation* (Lee, 2001).

b. Metode *Akaike Information Criterion* (AIC_c)

AIC pada mulanya dirancang untuk model regresi parametrik sebagai estimasi tak bias dari ekspektasi *Kullback-Leibler Information*, kemudian metode AIC dikembangkan untuk model regresi nonparametrik dan metode tersebut berubah menjadi *Akaike Information Criterion Corrected* (AIC_c).

Bentuk umum dari metode AIC_c sebagai berikut:

$$AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1\}}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2} \quad (2.15)$$

Parameter penghalus λ dipilih yang meminimumkan AIC_c .

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Bahan dan Alat

Bahan dan alat yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Jurnal dan buku referensi yang terkait dengan permasalahan
2. Software yang digunakan adalah Matlab 5.3.
3. Data yang digunakan adalah data simulasi.

3.2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dan langkah-langkah penelitian yang berkaitan dengan tujuan penelitian ini, sebagai berikut:

1. Mendapatkan estimasi spline dengan pendekatan *local risk*, yaitu estimasi

$f_\lambda(x_i)$ yang meminimumkan estimasi *local risk*:

$\hat{R}(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \hat{\sigma}^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i)$, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Mendapatkan dekomposisi berikut :

$$R(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f})(x_i) - f(x_i)\}^2 + \sigma^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i), \text{ untuk suatu } \mathbf{S}_\lambda$$

- b. Mengestimasi kuantitas f yang tidak diketahui dan σ^2 dengan menggunakan f_λ dan $\hat{\sigma}^2$.
- c. Menggunakan metode AIC_c untuk memilih parameter penghalus λ .
- d. Mendapatkan bentuk *local risk* $\hat{R}(\lambda, x_i)$.
- e. Mengkaji $f_\lambda(x_i)$ yang meminimumkan *local risk* $\hat{R}(\lambda, x_i)$.

dimana, $x_i = \frac{i-0,5}{n}$, dimana $i = 1, 2, \dots, n$

dengan ukuran sampel $n = 50, n = 100, n = 200$ dan $\sigma = 0,05, \sigma = 0,1, \sigma = 0,2$ dan setiap proses diulang 50 kali.

- c. Membangkitkan error ε_i yang berdistribusi $N(0, \sigma^2)$.
- d. Menentukan variabel respon berdasarkan model $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$
- e. Menentukan parameter penghalus λ optimal dengan menggunakan metode RECP dan AIC_c .
- e. Menghitung $f_\lambda(x_i)$ untuk λ yang optimal
- f. Menghitung *Mean Square Errors* (MSE) dari model-model yang optimal.
- g. Membandingkan nilai MSE dari model optimal.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini akan dikaji tentang estimasi spline dalam regresi nonparametrik dengan pendekatan *local risk*. Pertama akan dibahas tentang estimasi spline dengan pendekatan *local risk*. Kemudian dalam subbab berikutnya dibahas tentang metode pemilihan parameter penghalus optimal dengan menggunakan metode RECP dan AICc. Dan terakhir akan dibahas hasil simulasi yang telah dilakukan untuk mengevaluasi performance dari kedua metode tersebut.

4.1. Estimasi Spline dengan Pendekatan *Local Risk*

Spline merupakan polinomial yang tersegmen dan mempunyai fleksibilitas, sehingga dapat menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal data. Estimator spline sering digunakan pada data yang mempunyai perilaku berubah-ubah, dimana pada interval tertentu mempunyai karakteristik yang berbeda dengan interval yang lainnya. Pendekatan spline banyak digunakan dalam regresi nonparametrik.

Untuk menentukan $f_{\lambda}(x_i)$ dalam persamaan regresi nonparametrik dapat menggunakan metode *Least Square* berikut:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \right\} \quad (4.1)$$

Dalam regresi nonparametrik, bentuk kurva regresi diasumsikan tidak diketahui tetapi hanya diasumsikan mulus, artinya fungsi tersebut termuat dalam suatu ruang tertentu, seperti dalam ruang fungsi Sebolev.

$$W_2^m[a,b] = \{f \mid f^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \text{ kontinu absolut pada interval } [a,b] \text{ dan } \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty\}$$

Berdasarkan hal di atas, maka Persamaan (4.1) dapat ditulis:

$$\text{Min}_{f \in W} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \right\} \quad (4.2)$$

dengan syarat :

$$\int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan pendekatan *Lagrange* , f diasumsikan sebagai berikut:

$$\text{Min} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \left(\int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx - \alpha \right) \right\} \quad (4.4)$$

untuk setiap $f \in W$.

Untuk meminimumkan (4.4) dapat juga dilakukan dengan meminimumkan PLS (Eubank, 1988):

$$\left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx \right\} = R(f) + \lambda J(f) \quad (4.5)$$

dimana : $n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = R(f)$ merupakan *Least Square*,

$$\int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx = J(f) \text{ merupakan } \textit{Penalty}.$$

Fungsi spline dengan orde m merupakan sembarang fungsi dengan bentuk sebagai berikut:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j x^j + \sum_{l=1}^r \beta_l (x - k_l)_+^{m-1} \quad (4.6)$$

Dimana $j = 0, 1, \dots, m-1$ dan $l = 1, 2, \dots, r$. γ_j , β_l adalah parameter real dan k_l adalah titik-titik knot. Model regresi dengan fungsi f didekati dengan fungsi spline merupakan model regresi spline yang mempunyai model berikut :

$$y_i = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j x_i^j + \sum_{l=1}^r \beta_l (x_i - k_l)_+^{m-1} + \varepsilon_i \quad (4.7)$$

Jika diketahui :

$$\phi_1(x_i) = 1, \quad \phi_{m+1}(x_i) = (x_i - k_1)_+^{m-1}$$

$$\phi_2(x_i) = x_i, \quad \phi_{m+2}(x_i) = (x_i - k_2)_+^{m-1}$$

$$\phi_3(x_i) = x_i^2, \quad \phi_{m+3}(x_i) = (x_i - k_3)_+^{m-1}$$

\vdots

$$\phi_m(x_i) = x_i^{m-1}, \quad \phi_{m+r}(x_i) = (x_i - k_r)_+^{m-1}$$

dimana Vektor $\theta^T = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$,

maka estimasi spline f adalah:

$$f_\lambda = \sum_{g=1}^{m+r} \theta_{\lambda_g} X_g \quad (4.8)$$

dimana $\theta_\lambda = (\theta_{\lambda_1}, \theta_{\lambda_2}, \dots, \theta_{\lambda_{m+r}})$ merupakan *minimizer* dari :

$$\text{MSE}(\theta, \lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{g=1}^{m+r} \theta_{\lambda_g} X_g(x_i))^2 \quad (4.9)$$

Jika \mathbf{X}_λ didefinisikan sebagai matriks berukuran $n \times (m + r)$:

$$\mathbf{X}_\lambda = \{X_g(x_i), i = 1, 2, \dots, n, g = 1, 2, \dots, m + r\}$$

maka θ_λ merupakan solusi untuk persamaan normal.

$$\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda \theta_\lambda = \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{y} \quad (4.10)$$

dimana $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Jika \mathbf{X}_λ mempunyai rank penuh, maka:

$$\theta_\lambda = (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{y} \quad (4.11)$$

Jika kedua ruas pada Persamaan (4.11) digandakan dengan \mathbf{X}_λ maka diperoleh persamaan berikut:

$$\mathbf{X}_\lambda \theta_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{y},$$

karena $f_\lambda = \mathbf{X}_\lambda \theta_\lambda$, maka

$$f_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{y}$$

$$f_\lambda = \mathbf{S}_\lambda \mathbf{y} \quad (4.12)$$

Jadi $\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T$, dimana \mathbf{S}_λ merupakan matriks simetris dan idempoten. \mathbf{S}_λ biasa disebut sebagai matriks hat.

Untuk mendapatkan persamaan *local risk* maka diberikan teorema berikut (Craven dan Wahba, 1979) :

Teorema 4.1.1

Jika fungsi resiko diberikan $R(\lambda) = E[L(\lambda)] = n^{-1} \sum_{i=1}^n E(f_\lambda(x_i) - f(x_i))^2$ maka

$$R(\lambda) = B^2(\lambda) + \sigma^2 \rho(\lambda), \text{ dimana } B^2(\lambda) = n^{-1} \|(I - \mathbf{S}_\lambda) \mathbf{f}\|^2, \text{ dan } \rho(\lambda) = n^{-1} \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T).$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
R(\lambda) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n E (f_{\lambda}(x_i) - f(x_i))^2 \\
&= n^{-1} E \sum_{i=1}^n (f_{\lambda}(x_i) - f(x_i))^2 \\
&= n^{-1} E \left[\| \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{y} - \mathbf{f} \|^2 \right] \\
&= n^{-1} E \left[\| \mathbf{f} - \mathbf{S}_{\lambda} (\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}) \|^2 \right] \\
&= n^{-1} E \left[\| \mathbf{S}_{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f} \|^2 \right] \\
&= n^{-1} E \left[(\mathbf{S}_{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f})^T (\mathbf{S}_{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f}) \right] \\
&= n^{-1} \left[\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f} \|^2 + E (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right], \\
&= n^{-1} \left[\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f} \|^2 + \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T) \right] \\
&= n^{-1} \| (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f} \|^2 + n^{-1} \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T) \\
&= B^2(\lambda) + \sigma^2 \rho(\lambda)
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema di atas diperoleh persamaan berikut :

$$R(\lambda) = n^{-1} \left[\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f} \|^2 + \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T) \right] \quad (4.13)$$

Dari Persamaan (4.13) maka dapat dibentuk persamaan *local risk* yang dapat dinyatakan menjadi dekomposisi seperti berikut:

$$R(\lambda, x_i) = \{ (\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{f})(x_i) - f(x_i) \}^2 + \sigma^2 (\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T)(x_i) \} \quad (4.14)$$

dimana,

$(S_\lambda f)(x_i)$ merupakan elemen ke-i dari vektor $S_\lambda f$, dan

$(S_\lambda S_\lambda^T)(x_i)$ merupakan elemen diagonal ke-i dari matriks $S_\lambda S_\lambda^T$

Dari persamaan *local risk* di atas dapat ditentukan estimasi *local risk* dengan terlebih dahulu mengestimasi f dari Persamaan (4.14). Estimasi f tersebut dipilih dari beberapa estimasi spline $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_m}$, dimana $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ merupakan parameter penghalus yang diseleksi dengan menggunakan salah satu metode pemilihan parameter penghalus. Jika menggunakan metode AICc maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$AIC_C(\lambda) = \log \frac{\|(S_\lambda - I)y\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{tr(S_\lambda) + 1\}}{n - tr(S_\lambda) - 2} \quad (4.15)$$

Dengan menggunakan metode AICc tersebut maka f_λ dengan nilai AICc paling minimum merupakan estimasi spline f .

Jika diberikan jumlah kuadrat residual, $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - f_\lambda(x_i))^2$, maka $\hat{\sigma}^2$

dapat diperoleh dengan membagi RSS dengan derajat bebas yaitu $tr(I - S_\lambda)$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{tr(I - S_\lambda)}$$

Jadi diperoleh estimasi $\hat{\sigma}^2$ sebagai berikut :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f_\lambda(x_i))^2}{tr(I - S_\lambda)} \quad (4.16)$$

Dengan menggunakan estimasi f dan σ^2 maka bentuk estimasi *local risk* dapat dituliskan menjadi :

$$\hat{R}(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \hat{\sigma}^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i) \quad (4.17)$$

Jadi estimator spline yang diperoleh dengan pendekatan *local risk* adalah $f_\lambda(x_i)$ yang meminimumkan estimasi *local risk* di atas.

4.2. Pemilihan Parameter Penghalus λ Optimal

Bentuk estimator spline sangat dipengaruhi oleh parameter penghalus λ optimal. Jika λ kecil ($\lambda \rightarrow 0$) maka $\hat{f}_\lambda(x_i)$ akan sangat kasar dan jika λ besar ($\lambda \rightarrow \infty$) maka $\hat{f}_\lambda(x_i)$ akan sangat halus (global), oleh karena itu pemilihan parameter penghalus λ optimal sangat penting untuk mendapatkan estimator spline yang lebih baik. Ada berbagai metode yang dapat digunakan untuk memilih parameter penghalus λ optimal, seperti metode CV, GCV, RECP, EDS dan AIC_c. Dalam penelitian hanya mengkaji metode pemilihan parameter penghalus *Risk Estimation using Classical Pilots* (RECP) dan *Akaike Information Criterion Corrected* (AIC_c).

4.2.1 Metode *Risk Estimation using Classical Pilots* (RECP)

RECP adalah metode untuk memilih λ optimal yang meminimumkan $R(\lambda) = n^{-1} E \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\lambda\|^2$. Berdasarkan Teorema 4.1.1 diperoleh persamaan $R(\lambda)$ yang lebih sederhana dan mudah diaplikasikan.

$$R(\lambda) = n^{-1} \left[\|(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda) \mathbf{f}\|^2 + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \right]$$

dengan mengestimasi \mathbf{f} dan σ^2 yang tidak diketahui pada persamaan di atas maka diperoleh bentuk umum metode RECP sebagai berikut :

$$RECP(\lambda) = n^{-1} \left[\|(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda) f_\lambda\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \right] \quad (4.18)$$

Jadi nilai λ yang optimal adalah λ yang memberikan nilai $\hat{R}(\lambda)$ yang paling minimum.

4.2.2 Metode Akaike Information Criterion Corrected (AIC_c)

AIC pada mulanya dirancang untuk model regresi parametrik sebagai penaksir estimasi tak bias dari ekspektasi *Kullback-Leibler Information*, kemudian metode AIC dikembangkan sebagai metode pemilihan parameter penghalus dan metode tersebut dinamakan metode *Akaike Information Criterion Corrected* (AIC_c). Dalam regresi nonparametrik, metode ini digunakan untuk memilih parameter penghalus λ optimal dari estimator spline. Adapun persamaan dari metode AIC_c sebagai berikut:

$$AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1\}}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2} \quad (4.19)$$

Untuk mengkaji persamaan di atas maka akan dibuktikan teorema berikut (Hurvich, dkk., 1998):

Teorema 4.2.2

Jika diketahui fungsi discrepancy Kullback-Leibler $d(\mu, \sigma^2) = E_0[-2 \log\{f(y)\}]$

maka AIC_c adalah ekspektasi dari fungsi discrepancy Kullback-Leibler yaitu :

$$AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1\}}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2}$$

Sebelum membuktikan teorema di atas maka terlebih dahulu akan dibuktikan lemma di bawah ini (Seber dan Lee, 2003):

Lemma 4.2.2

Jika diketahui model regresi $y = f + \varepsilon$, dimana, $f = \mathbf{X}_\lambda \theta_0$, $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$,

$y \sim N(\mathbf{X}_\lambda \theta_0, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$ dan matriks \mathbf{X}_λ berukuran $n \times p$ dengan rank \mathbf{X}_λ adalah p ,

dimana $p = m + r$ maka:

$$(i) E_0 \left[\frac{(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\theta}_0 - \theta_0)}{\sigma_0^2} \right] = p$$

$$(ii) E_0 \left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \right) = n - p$$

$$(iii) E_0 \left(\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}_\lambda^2} \right) = \frac{1}{n - p - 2}$$

Bukti:

(i) Berdasarkan Persamaan (4.11) diperoleh $\hat{\theta}_0 = (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T y$

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_0) &= E \left[(\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T y \right] \\ &= (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T E(y) \\ &= (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda \theta_0 \\ &= \theta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_0) &= Var \left[(\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T y \right] \\ &= (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T Var(y) \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \\ &= (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T (\sigma_0^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_0^2 (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \\
&= \sigma_0^2 (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1}
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh $\hat{\theta}_0 \sim N(\theta_0, \sigma_0^2 (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1})$

$$\text{Misalkan } Q = \frac{(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\theta}_0 - \theta_0)}{\sigma_0^2} = (\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T (\text{Var}(\hat{\theta}_0))^{-1} (\hat{\theta}_0 - \theta_0)$$

dengan melakukan transformasi

$$\mathbf{Z} = (\text{Var} \hat{\theta}_0)^{-1/2} (\hat{\theta}_0 - \theta_0) \text{ atau } \hat{\theta}_0 = (\text{Var} \hat{\theta}_0)^{1/2} \mathbf{Z} + \theta_0, \text{ maka diperoleh:}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \mathbf{Z}^T (\text{Var}(\hat{\theta}_0))^{1/2} (\text{Var}(\hat{\theta}_0))^{-1} (\text{Var}(\hat{\theta}_0))^{1/2} \mathbf{Z} \\
&= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \\
&= \sum_{i=1}^p Z_i^2
\end{aligned}$$

Karena \mathbf{Z} berdistribusi $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ dan Z_i^2 adalah variabel-variabel yang saling independen maka

$$\frac{(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\theta}_0 - \theta_0)}{\sigma_0^2} \sim \chi_p^2$$

karena Q berdistribusi chi kuadrat dengan derajat bebas p maka :

$$E_0 \left[\frac{(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\theta}_0 - \theta_0)}{\sigma_0^2} \right] = p$$

(ii) Dengan menggunakan metode MLE diperoleh:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}_\lambda \hat{\theta}_0)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}_\lambda \hat{\theta}_0)}{n}$$

$$\begin{aligned}
n\hat{\sigma}^2 &= y^T y - y^T X_\lambda \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_0^T X_\lambda^T y + \hat{\theta}_0^T X_\lambda^T X_\lambda \hat{\theta}_0 \\
&= y^T y - y^T X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T y - y^T X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T y + \\
&\quad y^T X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} (X_\lambda^T X_\lambda) (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T y \\
&= y^T y - y^T X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T y \\
&= y^T (\mathbf{I} - X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T) y
\end{aligned}$$

$n\hat{\sigma}^2 = y^T A y$, dimana $A = (\mathbf{I} - X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T)$ idempoten

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{y^T A y}{\sigma_0^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{rank } A &= (\mathbf{I} - X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T) \\
&= \text{tr}(\mathbf{I}) - \text{tr}(X_\lambda (X_\lambda^T X_\lambda)^{-1} X_\lambda^T) \\
&= n - \text{tr}(S_\lambda) \\
&= n - p, \quad p = \text{rank } X_\lambda
\end{aligned}$$

dengan demikian $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-p}^2$, sehingga

$$E_0 \left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \right) = n - p$$

(iii) $\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2}$ dapat ditulis $\frac{1}{\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)}$. Karena $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$ berdistribusi χ_{n-p}^2 maka

$$E_0 \left(\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right) = E_0 \left[\frac{1}{\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{d-2}, \text{ d adalah derajat bebas}$$

$$= \frac{1}{n-p-2}$$

Bukti Teorema 4.2.2:

Misalkan model regresi sebenarnya $y = f + \varepsilon$, $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$ dan Kandidat

model regresi $y = \mu + \eta$, $\eta \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ dimana $f = \mathbf{X}_\lambda \theta_0$, $\mu = \mathbf{X}_\lambda \theta$

$$g(y | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)} \text{ dan}$$

$L(y)$ adalah fungsi likelihood dari $g(y | \mu, \sigma^2)$

diketahui fungsi *discrepancy Kullback-Leibler* :

$$\begin{aligned} d(\mu, \sigma^2) &= E_0 \left[-2 \log \{L(y)\} \right] \\ &= E_0 \left[-2 \log \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y_i-\mu)^2/(2\sigma^2)} \right\} \right] \\ &= E_0 \left[-2 \log \left\{ \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} e^{-(1/2) \sum_{i=1}^n (y_i-\mu)^2/\sigma^2} \right\} \right] \\ &= E_0 \left[-2 \left\{ -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i-\mu)^2 \right\} \right] \\ &= E_0 \left[n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i-\mu)^2 \right] \\ &= E_0 \left[n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{(\mu - y)^T (\mu - y)}{\sigma^2} \right] \\ &= E_0 \left[n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{(\mu - f + \varepsilon)^T (\mu - f + \varepsilon)}{\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \left[n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^T + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T)(\boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f}))}{\sigma^2} \right] \\
&= E_0[n \log(2\pi\sigma^2)] + E_0 \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma^2} \right] + E_0 \left[\frac{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})}{\sigma^2} \right] \\
&= n \log(2\pi\sigma^2) + \frac{n\sigma_0^2}{\sigma^2} + \frac{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{f})}{\sigma^2} \\
d(\hat{\mathbf{f}}_h, \hat{\sigma}^2) &= n \log(2\pi\hat{\sigma}^2) + \frac{n\sigma_0^2}{\hat{\sigma}^2} + \frac{(\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})^T (\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})}{\hat{\sigma}^2} \\
\Delta(h) &= E_0[d(\hat{\mathbf{f}}_h, \hat{\sigma}^2)] \\
&= E_0 \left[n \log(\hat{\sigma}^2) \right] + E_0 \left[\frac{n\sigma_0^2}{\hat{\sigma}^2} \right] + E_0 \left[\frac{(\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})^T (\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})}{\hat{\sigma}^2} \right] \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n^2 E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] + n E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] E_0 \left[\frac{(\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})^T (\hat{\mathbf{f}}_h - \mathbf{f})}{\sigma_0^2} \right] \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n^2 E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] + n E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] E_0 \left[\frac{(\mathbf{X}_\lambda \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \mathbf{X}_\lambda \boldsymbol{\theta}_0)^T (\mathbf{X}_\lambda \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \mathbf{X}_\lambda \boldsymbol{\theta}_0)}{\sigma_0^2} \right] \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n^2 E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] + n E_0 \left[\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2} \right] E_0 \left[\frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)}{\sigma_0^2} \right] \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n^2 E_0 \left[\frac{1}{\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2}} \right] + n E_0 \left[\frac{1}{\frac{\sigma_0^2}{n\hat{\sigma}^2}} \right] E_0 \left[\frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda (\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \boldsymbol{\theta}_0)}{\sigma_0^2} \right] \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n^2 \frac{1}{n-p-2} + n \frac{1}{n-p-2} (p) \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + \frac{n^2 + np}{n-p-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n - n + \frac{n^2 + np}{n - p - 2} \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n + \frac{(-n^2 + np + 2n + n^2 + np)}{n - p - 2} \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n + \frac{2np + 2n}{n - p - 2} \\
&= n \log(\hat{\sigma}^2) + n + \frac{2n(p+1)}{n - p - 2}
\end{aligned}$$

$$AIC_c = \log(\hat{\sigma}^2) + 1 + \frac{2(p+1)}{n - p - 2}, \text{ atau dapat ditulis:}$$

$$\begin{aligned}
AIC_c &= \log(\hat{\sigma}^2) + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2} \\
&= \log \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{f}_\lambda)^T (\mathbf{y} - \mathbf{f}_\lambda)}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2} \\
&= \log \frac{\|\mathbf{f}_\lambda - \mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2} \\
AIC_c &= \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2}
\end{aligned}$$

Jadi nilai λ yang optimal adalah λ yang memberikan nilai AIC_c yang paling minimum.

4.3. Simulasi

Dalam penelitian ini dilakukan simulasi untuk dua metode pemilihan parameter penghalus λ optimal, yaitu metode RECP dan AIC_c . Simulasi ini menggunakan data hasil pembangkitan, dimana data yang dibangkitkan adalah data dengan distribusi Normal. Software yang digunakan adalah MATLAB 5.3.

Selanjutnya ada dua model kurva regresi yang digunakan dalam simulasi ini, yaitu dengan bentuk :

1. Fungsi Trigonometri

$$f(x_i) = \sqrt{x_i(1-x_i)} \sin \left[\frac{2\pi\{1+2^{0.2}\}}{x_i+2^{0.2}} \right]$$

2. Fungsi Eksponensial

$$f(x_i) = 4,3(e^{-2,15x_i} - 4e^{-4,3x_i} + 3e^{-6,45x_i})$$

$$\text{dimana, } x_i = \frac{i-0,5}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan ukuran sampel $n = 50, n = 100, n = 200$ dan $\sigma = 0,05 \quad \sigma = 0,1, \sigma = 0,2$ dan setiap proses diulang 50 kali. Residual dibangkitkan dari distribusi $N(0, \sigma^2)$.

Setelah data dibangkitkan maka ditentukan nilai λ pada setiap pasangan model untuk membentuk matriks \mathbf{X}_λ , dimana dalam matriks tersebut terdiri dari matriks yang dibentuk dari fungsi polinomial dan *truncated*. Kemudian dihitung $\hat{f}_\lambda = \mathbf{S}_\lambda \mathbf{y}$ untuk setiap model, dimana $\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T$.

Setelah diperoleh estimasi f dengan berbagai λ maka selanjutnya akan ditentukan λ optimal dengan menggunakan metode RECP dan AICc.

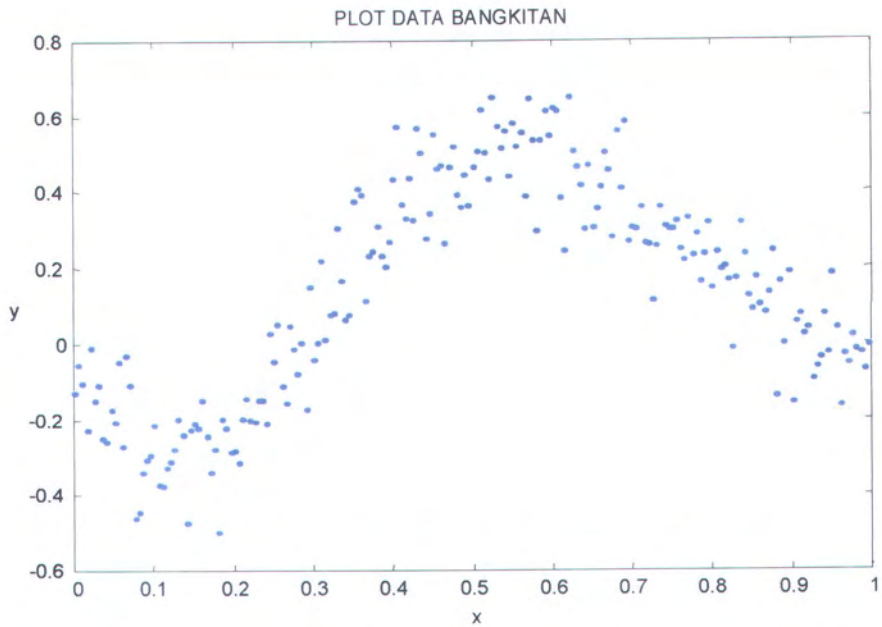
$$RECP = n^{-1} \left[\|(\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda) \mathbf{f}_\lambda\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \right]$$

$$AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I}) \mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1\}}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2}$$

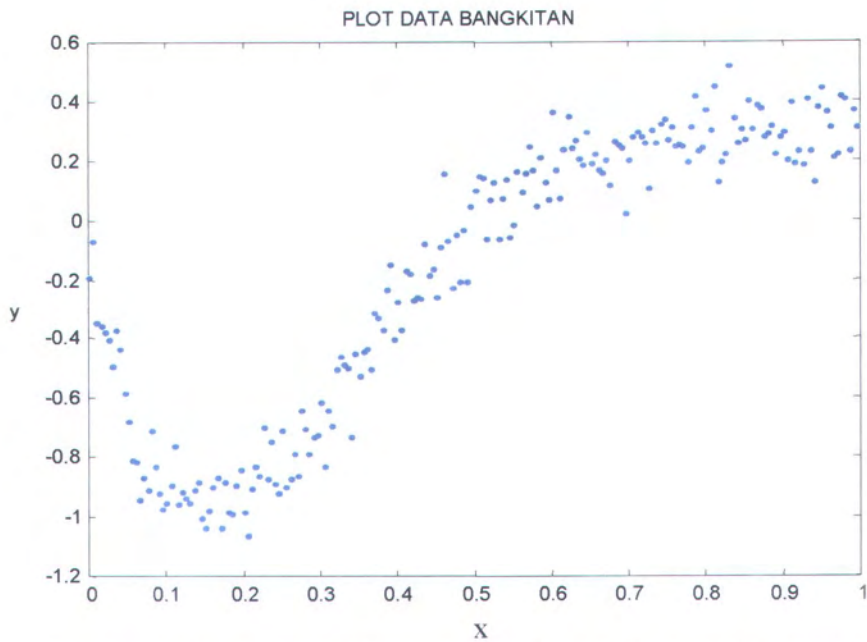
(Program untuk menentukan λ optimal dapat dilihat pada Lampiran 1 dan 2)

Plot untuk masing-masing model kurva regresi ditampilkan sebagai berikut :





Gambar 4.1 Plot data simulasi untuk fungsi trigonometri dengan $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$



Gambar 4.2. Plot data simulasi untuk fungsi eksponensial dengan $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$

4.3.1. Metode RECP

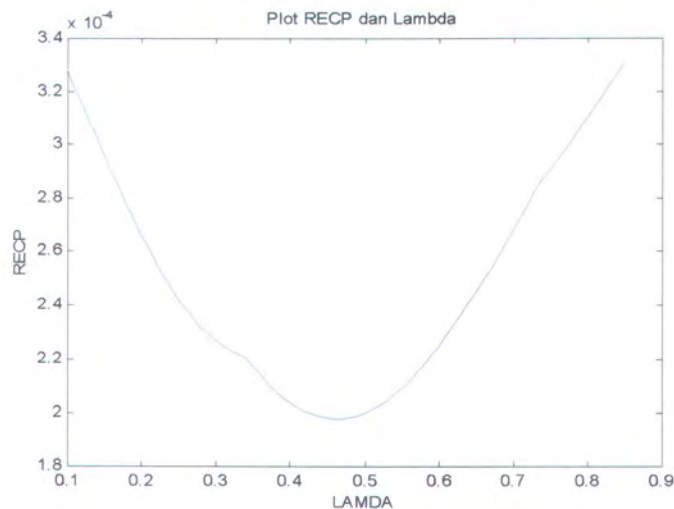
a. Model Trigonometri

Parameter penghalus λ optimal dengan menggunakan metode RECP dapat dilihat pada Tabel 4.1 berikut:

Tabel 4.1 Pemilihan λ dengan metode RECP pada Model Trigonometri

Nilai λ	RECP (λ)
0,41	0,0002026
0,42	0,0002011
0,43	0,0002000
0,44	0,0001991
0,45	0,0001986
0,46	0,0001983
0,47	0,0001984
0,48	0,0001988
0,49	0,0001994
0,50	0,0002004

Plot antara nilai RECP dengan λ , diberikan dalam Gambar 4.3.

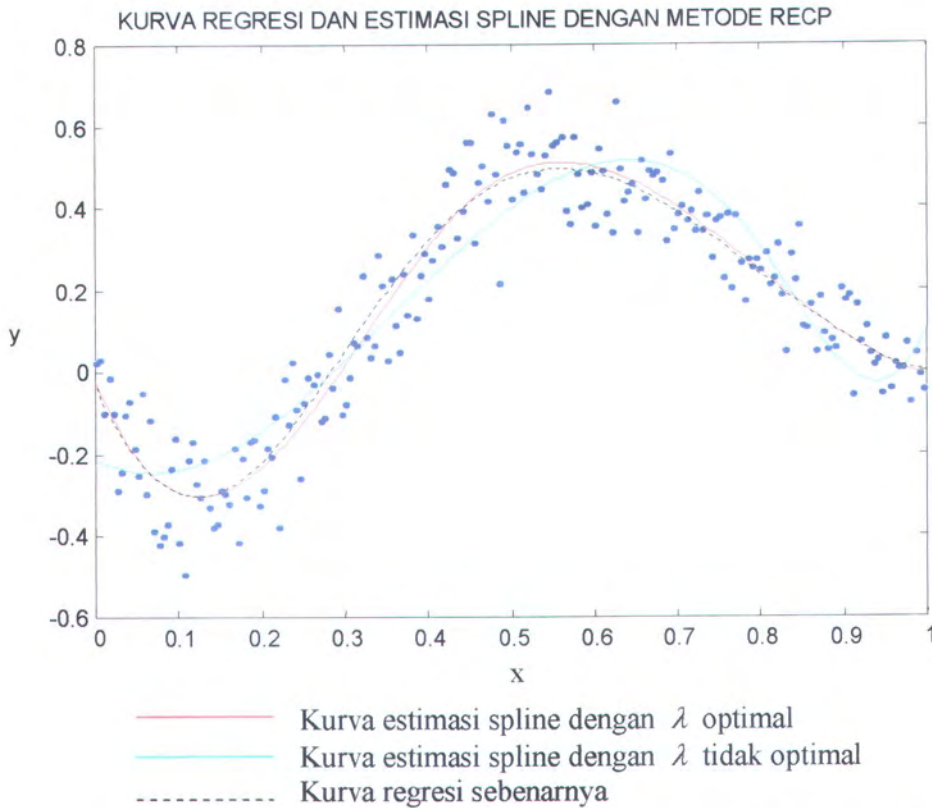


Gambar 4.3 Plot Nilai RECP dengan λ untuk Model Trigonometri

Berdasarkan Tabel 4.1 dan plot di atas terlihat bahwa λ optimal dari model fungsi trigonometri untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ adalah berada pada nilai

$\lambda = 0,46$ dengan nilai RECP minimum 0,0001983. Parameter penghalus λ optimal yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE.

Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal.



Gambar 4.4 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan Metode RECP

Berdasarkan Gambar 4.4 di atas terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan λ optimal sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Sedangkan kurva estimasi spline dengan λ tidak optimal ($\lambda = 0,8$) jauh dari kurva regresi sebenarnya. Selain itu dapat juga dilihat nilai MSE untuk estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal. MSE

dengan λ optimal sebesar 0,000259, sedangkan MSE untuk λ tidak optimal sebesar 0,005, ini berarti MSE dengan λ optimal lebih kecil dari pada MSE dengan λ tidak optimal. Hal ini menunjukkan bahwa dengan menggunakan λ optimal sangat mempengaruhi estimasi spline yang dihasilkan.

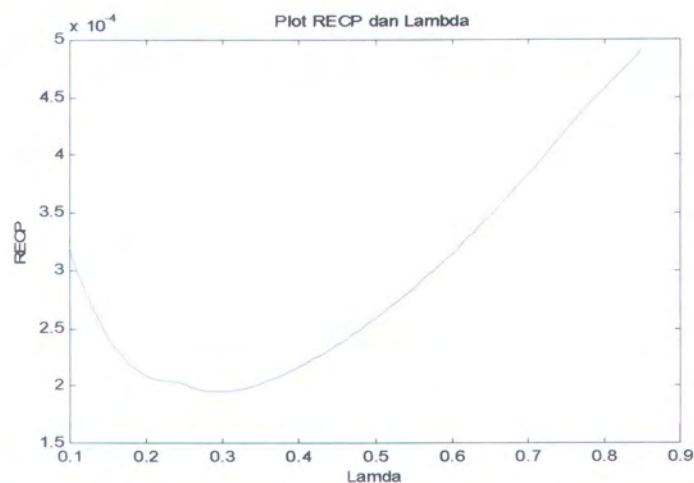
b. Model Eksponensial

Parameter penghalus λ optimal dengan menggunakan metode RECP dapat dilihat pada Tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2 Pemilihan λ dengan metode RECP pada Model Eksponensial

Nilai λ	RECP (λ)
0,24	0,0002044
0,25	0,0002021
0,26	0,0001995
0,27	0,0001976
0,28	0,0001965
0,29	0,0001945
0,30	0,0001959
0,31	0,0001963
0,32	0,0001973

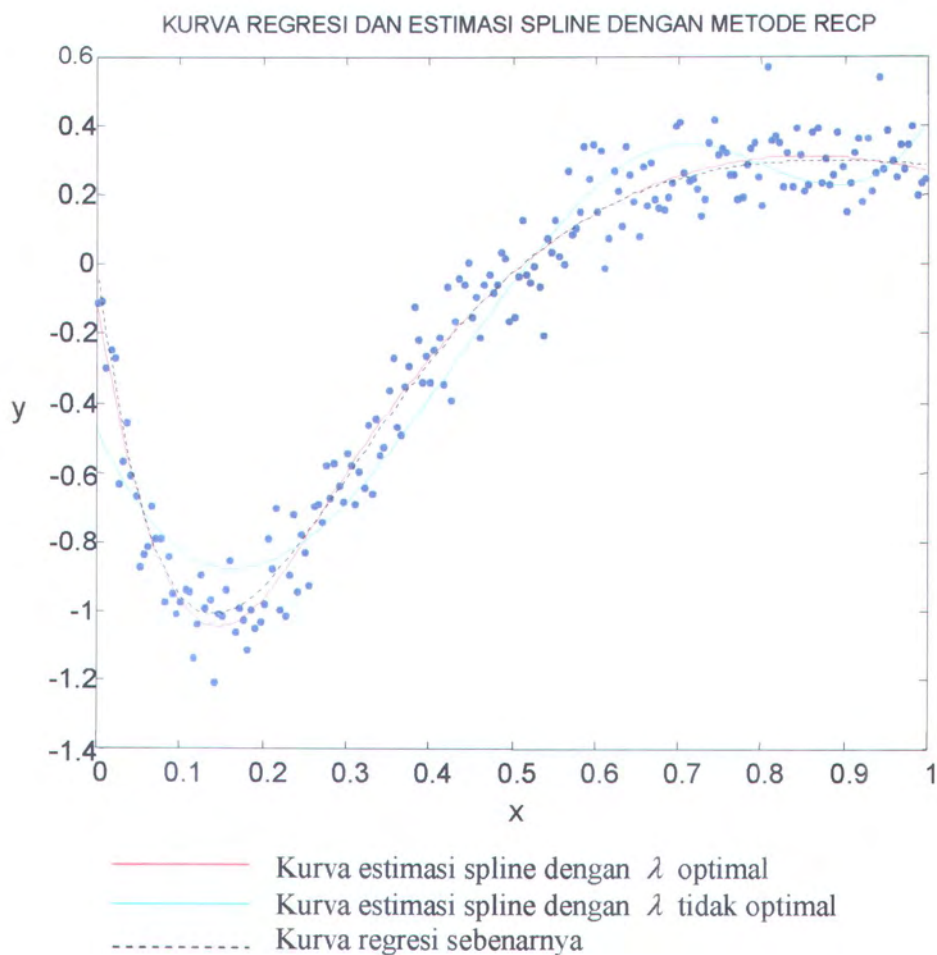
Plot antara nilai RECP dengan λ sebagai berikut:



Gambar 4.5 Plot Nilai RECP dengan λ untuk Model Eksponensial

Berdasarkan Tabel 4.2 dan Gambar 4.5 terlihat bahwa λ optimal dari model fungsi eksponensial untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ adalah berada pada nilai $\lambda = 0,29$ dengan nilai RECP minimum 0,0001945. Parameter penghalus λ optimal yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE.

Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal ($\lambda = 0,7$)



Gambar 4.6 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan metode RECP

Berdasarkan Gambar 4.6 terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan λ optimal sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Sedangkan kurva estimasi spline dengan λ tidak optimal jauh dari kurva regresi sebenarnya. Selain itu dapat juga dilihat nilai MSE untuk estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal. MSE dengan λ optimal sebesar 0,000279, sedangkan MSE untuk λ tidak optimal sebesar 0,0089, ini berarti MSE dengan λ optimal lebih kecil dari pada MSE dengan λ tidak optimal. Hal ini menunjukkan bahwa dengan menggunakan λ optimal sangat mempengaruhi estimasi spline yang dihasilkan.

4.3.2. Metode AICc

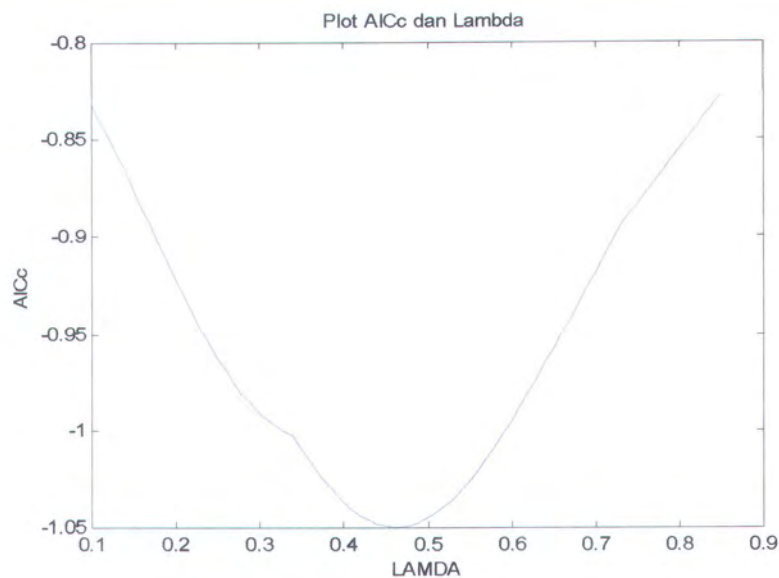
a. Model Trigonometri

Parameter penghalus λ optimal dengan menggunakan metode AICc dapat dilihat pada Tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3 Pemilihan λ dengan metode AICc pada Model Trigonometri

Nilai λ	AICc (λ)
0,41	-1,0402
0,42	-1,0433
0,43	-1,0458
0,44	-1,0477
0,45	-1,0479
0,46	-1,0481
0,47	-1,0485
0,48	-1,0489
0,47	-1,0488
0,50	-1,0448

Plot antara nilai AICc dengan λ , diberikan dalam Gambar 4.7.



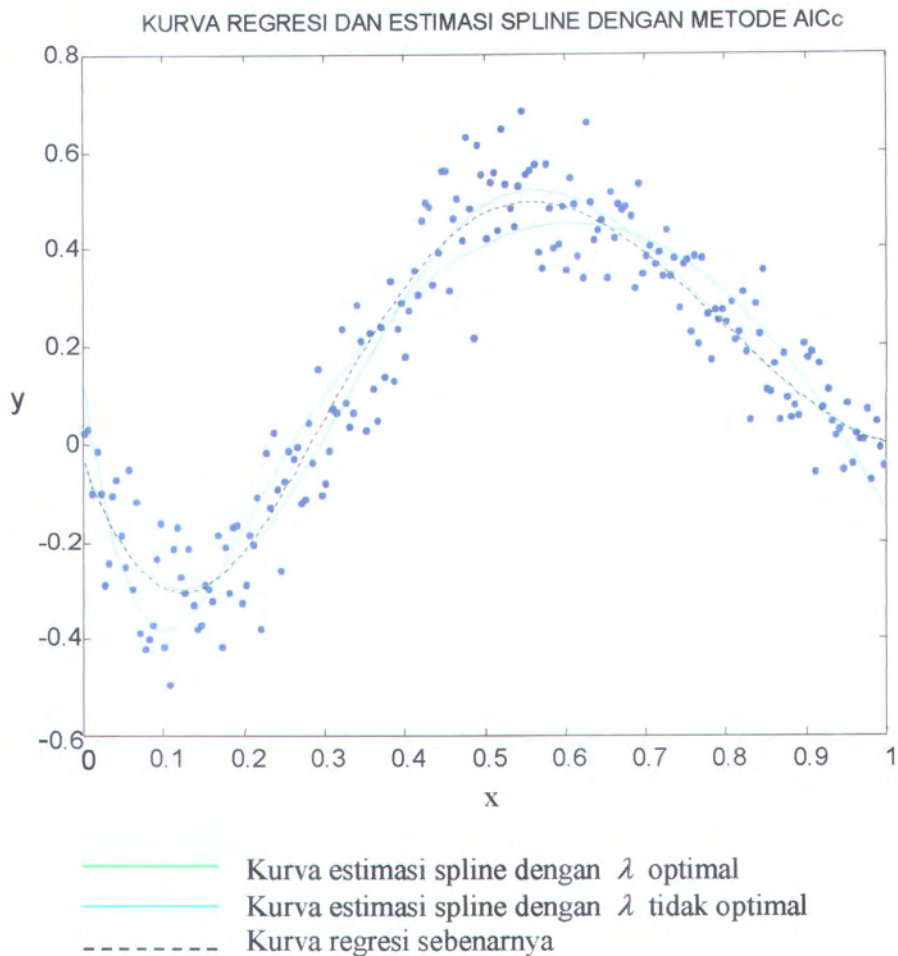
Gambar 4.7 Plot nilai AICc dengan λ untuk Model Trigonometri

Berdasarkan Tabel 4.3 dan Gambar 4.7 terlihat bahwa λ optimal dari model fungsi trigonometri untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ adalah berada pada nilai $\lambda = 0,48$ dengan nilai AICc minimum $-1,0489$. Parameter penghalus λ optimal yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE.

Berdasarkan Gambar 4.8 terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan λ optimal sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Sedangkan kurva estimasi spline dengan λ tidak optimal jauh dari kurva regresi sebenarnya. Selain itu dapat juga dilihat nilai MSE untuk estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal. MSE dengan λ optimal sebesar $0,000337$, sedangkan MSE untuk λ tidak optimal sebesar $0,0030$, ini berarti MSE dengan λ optimal lebih kecil dari pada MSE dengan λ tidak optimal

Hal ini menunjukkan bahwa dengan menggunakan λ optimal sangat mempengaruhi estimasi spline yang dihasilkan.

Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal ($\lambda = 0,2$).



Gambar 4.8 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan metode AICc

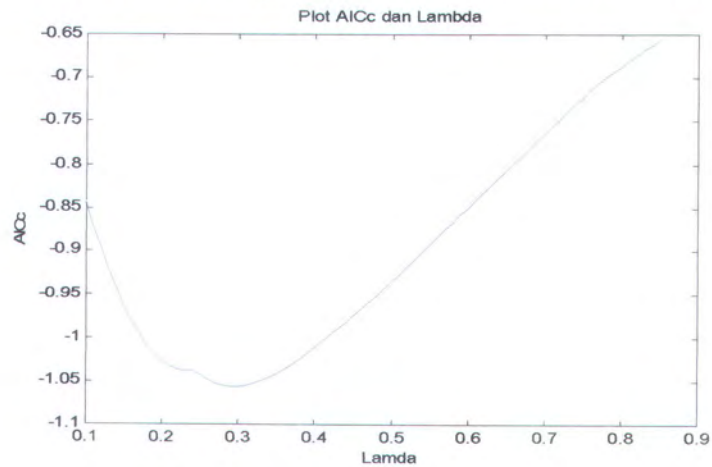
b. Model Eksponensial

Parameter penghalus λ optimal dengan menggunakan metode AICc dapat dilihat pada tabel 4.4 berikut:

Tabel 4.4 Pemilihan λ dengan metode AICc pada Model Eksponensial

Nilai λ	RECP (λ)
0,24	-1,0363
0,25	-1,0413
0,26	-1,0468
0,27	-1,0509
0,28	-1,0535
0,29	-1,0548
0,30	-1,0551
0,31	-1,0537
0,32	-1,0516
0,33	-1,0486

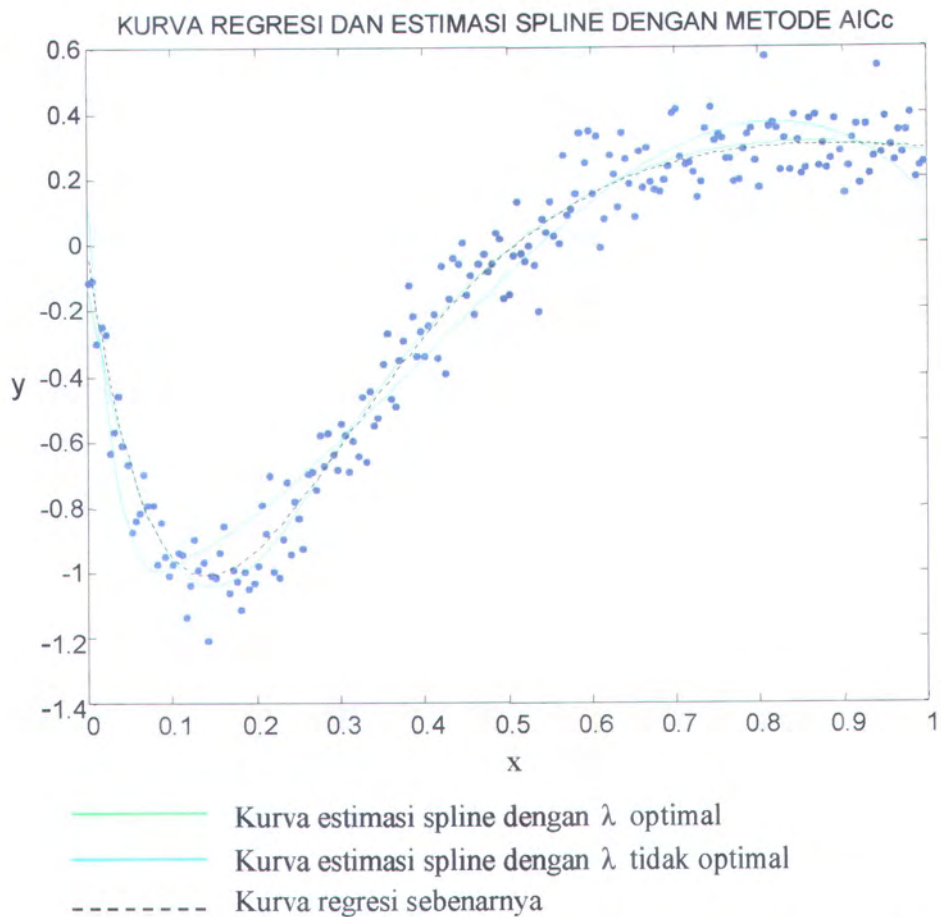
Plot antara nilai AICc dengan λ , diberikan dalam Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Plot nilai AICc dengan λ untuk Model Eksponensial

Berdasarkan Tabel 4.4 dan Gambar 4.9 terlihat bahwa λ optimal dari model fungsi eksponensial untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ adalah berada pada nilai $\lambda = 0,3$ dengan nilai AICc minimum -1,0551. Parameter penghalus λ optimal yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE.

Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan lamda optimal dan lamda tidak optimal ($\lambda = 0,1$).



Gambar 4.10 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan Metode AICc

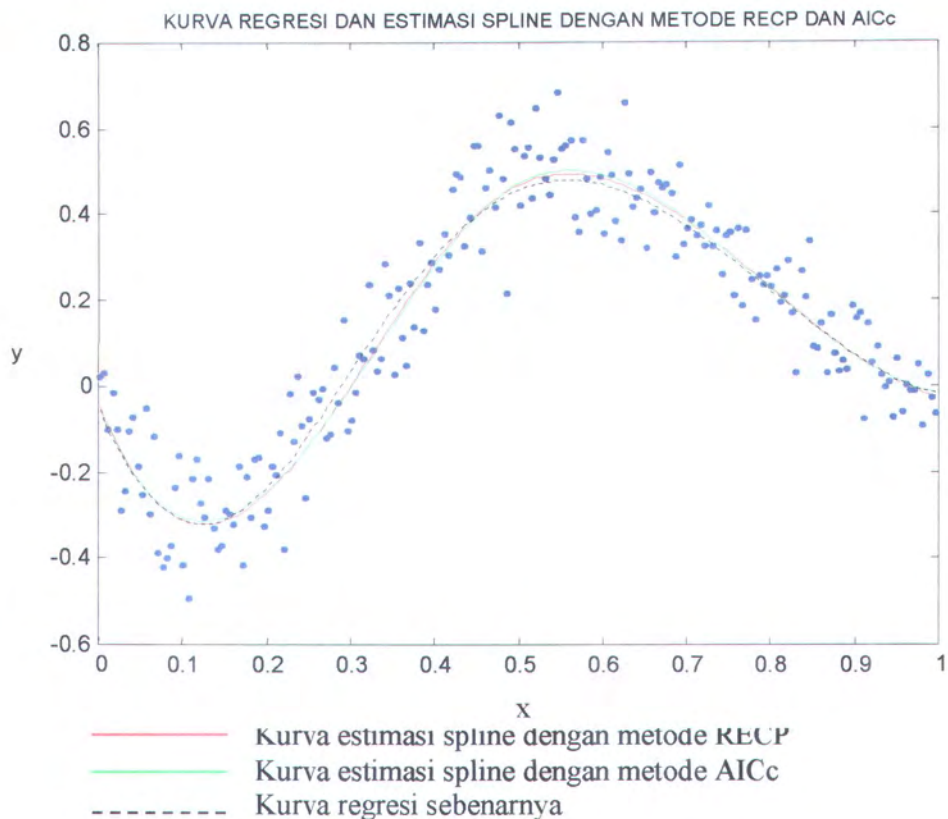
Berdasarkan Gambar di atas terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan λ optimal sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Sedangkan kurva estimasi spline dengan λ tidak optimal jauh dari kurva regresi sebenarnya. Selain itu dapat juga dilihat nilai MSE untuk estimasi spline dengan λ optimal dan λ tidak optimal. MSE dengan λ optimal sebesar 0,000298, sedangkan MSE untuk λ tidak optimal sebesar 0,0058, ini berarti MSE dengan λ optimal lebih kecil dari pada MSE dengan λ tidak optimal

Hal ini menunjukkan bahwa dengan menggunakan λ optimal sangat mempengaruhi estimasi spline yang dihasilkan.

4.3.3. Metode RECP dan AICc

a. Model Trigonometri

Berdasarkan λ optimal yang telah diperoleh dari model fungsi trigonometri untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ yaitu nilai $\lambda = 0,46$ dengan nilai RECP minimum 0,0001983 dan $\lambda = 0,48$ dengan nilai AICc minimum -1,0489, maka parameter penghalus λ optimal tersebut digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE. Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan metode RECP dan AICc.



Gambar 4.11 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Trigonometri dengan Metode RECP dan AICc

Berdasarkan Gambar 4.11 terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan metode RECP dan AICc sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Untuk membandingkan kurva estimasi spline dengan menggunakan kedua metode tersebut diperhatikan nilai MSE untuk estimasi spline dengan metode RECP dan AICc. MSE dengan metode RECP sebesar 0,000259, sedangkan MSE dengan metode AICc sebesar 0,000337, ini berarti MSE dengan metode RECP lebih kecil dari pada MSE dengan metode AICc untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$. Perbandingan untuk berbagai kombinasi n dan σ diberikan pada halaman berikutnya.

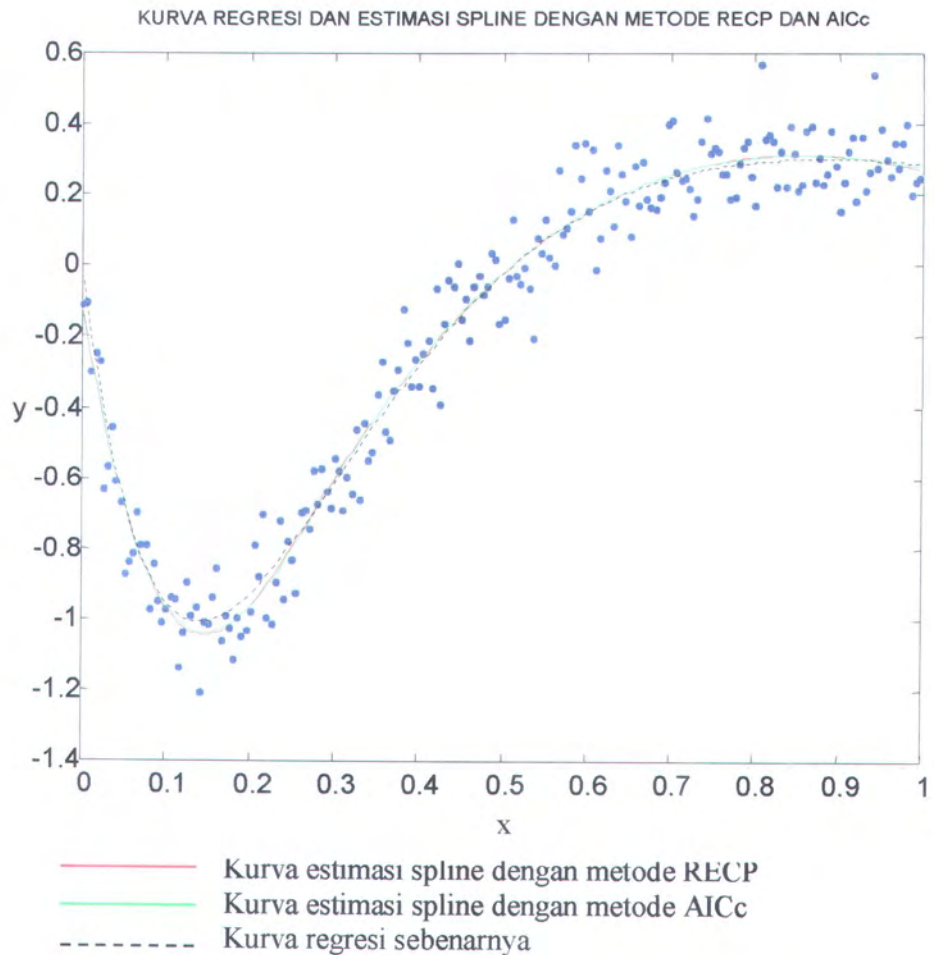
b. Model Eksponensial

Berdasarkan λ optimal yang telah diperoleh dari model fungsi eksponensial untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$ yaitu nilai $\lambda = 0,29$ dengan nilai RECP minimum 0,0001945 dan $\lambda = 0,30$ dengan nilai AICc minimum -1,0551, maka parameter penghalus λ optimal tersebut digunakan untuk mendapatkan estimasi spline dan MSE.

Berdasarkan Gambar 4.12 terlihat bahwa kurva estimasi spline dengan metode RECP dan AICc sangat dekat dengan kurva regresi sebenarnya, bahkan pada interval tertentu saling berimpit. Untuk membandingkan kurva estimasi spline dengan menggunakan kedua metode tersebut diperhatikan nilai MSE untuk estimasi spline dengan metode RECP dan AICc. MSE dengan metode RECP sebesar 0,000279, sedangkan MSE dengan metode AICc sebesar 0,000298, ini berarti MSE dengan metode RECP lebih kecil dari pada MSE dengan metode

AICc untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0,1$. Perbandingan untuk berbagai kombinasi n dan σ diberikan pada halaman berikutnya.

Berikut ini merupakan kurva regresi sebenarnya, estimasi spline dengan metode RECP dan AICc.



Gambar 4.12 Kurva Regresi dan Estimasi Spline untuk Model Eksponensial dengan Metode RECP dan AICc

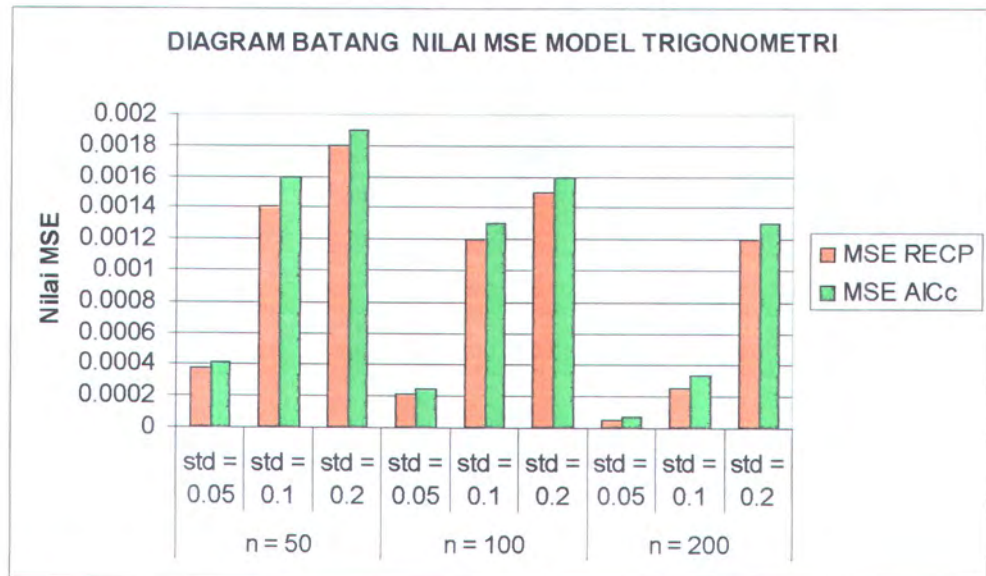
Dalam simulasi ini dilakukan replikasi sebanyak 50 kali dan nilai λ yang digunakan berada dalam interval 0,1 sampai 0,85 dengan selisih 0,01, sehingga banyaknya lambda yang disimulasikan adalah 76 buah. Jadi banyaknya nilai

RECP atau AIC untuk satu model simulasi adalah 3.800 nilai. Dari 3.800 nilai diperoleh λ optimal yaitu nilai yang paling minimum dari nilai RECP dan nilai AICc. Pada tabel berikut ini diberikan λ optimal dengan masing-masing nilai RECP dan AICc untuk model trigonometri (dengan berbagai n dan σ).

Tabel 4.5 Hasil simulasi λ optimal untuk model trigonometri

n	σ	RECP			AICc		
		λ	Nilai	MSE	λ	Nilai	MSE
50	0,05	0,39	0,0001382	0,000377	0,38	-1,6262	0,000419
	0,1	0,48	0,0004867	0,001400	0,50	-1,0794	0,001600
	0,2	0,50	0,0023000	0,001800	0,51	-0,3962	0,001900
100	0,05	0,41	0,0000797	0,000217	0,40	-1,6898	0,000238
	0,1	0,45	0,0003422	0,001200	0,46	-1,0579	0,001300
	0,2	0,38	0,0013580	0,001500	0,36	-0,4589	0,001600
200	0,05	0,44	0,0000530	0,000052	0,45	-1,6229	0,000071
	0,1	0,46	0,0001983	0,000259	0,48	-1,0489	0,000337
	0,2	0,57	0,0007960	0,001200	0,58	-0,4459	0,001300

Berdasarkan Tabel di atas dapat dibuat diagram batang sebagai berikut:



Gambar 4.13 Diagram Batang Nilai MSE pada Model Trigonometri

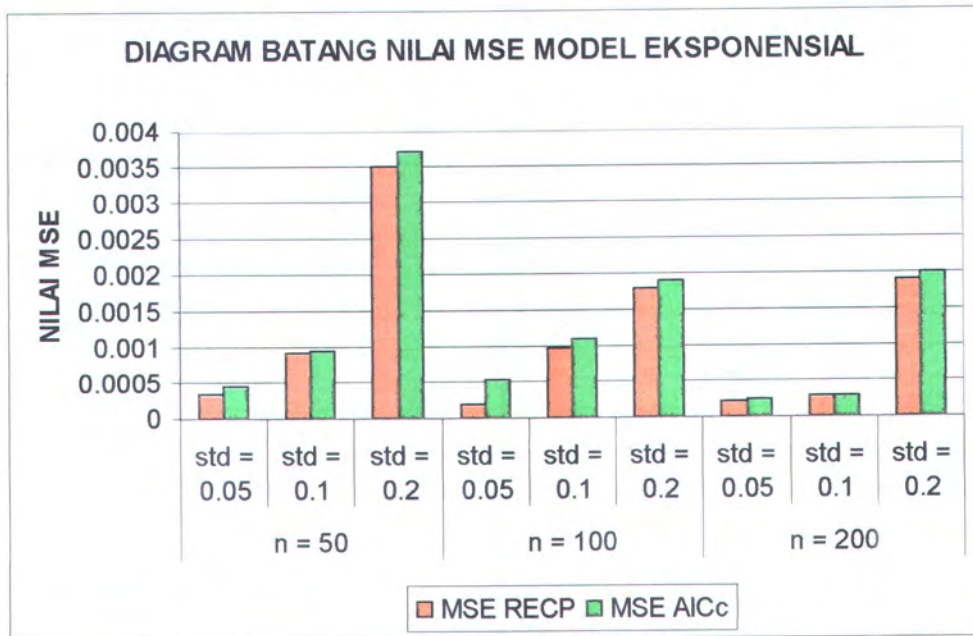
Berdasarkan pada Tabel 4.5 dan diagram batang di atas menunjukkan bahwa nilai MSE metode RECP selalu lebih kecil dari pada nilai MSE metode AICc pada setiap model simulasi dengan berbagai variasi σ dan ukuran sampel n . Hal ini menunjukkan bahwa metode RECP pada simulasi ini cenderung lebih baik dari pada metode AICc. Selain itu diperoleh informasi bahwa jika σ semakin bertambah untuk setiap ukuran sampel maka nilai MSE juga cenderung semakin besar. Sedangkan jika ukuran sampel semakin besar untuk setiap σ maka nilai MSE cenderung semakin kecil.

Pada Tabel 4.6 berikut diberikan λ optimal dengan masing-masing nilai RECP dan AICc untuk model eksponensial (dengan berbagai n dan σ).

Tabel 4.6 Hasil simulasi λ optimal untuk model eksponensial

N	σ	RECP			AICc		
		λ	Nilai	MSE	λ	Nilai	MSE
50	0,05	0,29	0,0001356	0,000352	0,30	-1,6344	0,000446
	0,1	0,29	0,0005319	0,000933	0,28	-1,0424	0,000937
	0,2	0,22	0,0022510	0,003500	0,21	-0,3844	0,003700
100	0,05	0,29	0,0000963	0,000188	0,31	-1,6093	0,000526
	0,1	0,23	0,0003401	0,000971	0,22	-1,0585	0,001100
	0,2	0,30	0,0014340	0,001800	0,32	-0,4475	0,001900
200	0,05	0,29	0,0000511	0,000207	0,30	-1,6322	0,000225
	0,1	0,29	0,0001945	0,000279	0,30	-1,0551	0,000298
	0,2	0,32	0,0006485	0,001900	0,33	-0,5344	0,002000

Berdasarkan Tabel di atas dapat dibuat diagram batang sebagai berikut:



Gambar 4.14 Diagram Batang Nilai MSE pada Model Eksponensial

Berdasarkan pada Tabel 4.6 dan diagram batang di atas menunjukkan bahwa nilai MSE metode RECP selalu lebih kecil dari pada nilai MSE metode AICc pada setiap model simulasi dengan berbagai variasi σ dan ukuran sampel n . Hal ini menunjukkan bahwa metode RECP pada simulasi ini cenderung lebih baik dari pada metode AIC. Selain itu diperoleh informasi bahwa jika σ^2 semakin bertambah untuk setiap ukuran sampel maka nilai MSE juga cenderung semakin besar.

Jadi berdasarkan hasil simulasi secara keseluruhan, khususnya dengan melihat nilai MSE maka dapat disimpulkan bahwa metode pemilihan parameter penghalus λ optimal dengan RECP cenderung lebih baik dibandingkan dengan metode AICc.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Berdasarkan hasil kajian dari fungsi resiko dengan menggunakan pendekatan *local risk* diperoleh bentuk estimasi local risk sebagai berikut:

$$\widehat{R}(\lambda, x_i) = \{(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i) - f_\lambda(x_i)\}^2 + \widehat{\sigma}^2 (\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i),$$

dimana $\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{X}_\lambda (\mathbf{X}_\lambda^T \mathbf{X}_\lambda)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^T$, dan $(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda)(x_i)$ merupakan elemen ke- i dari vektor $\mathbf{S}_\lambda \mathbf{f}_\lambda$, serta $(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T)(x_i)$ adalah elemen diagonal ke- i dari matriks $\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T$.

Estimasi spline $f_\lambda(x_i)$ diperoleh dari meminimumkan estimasi *local risk*.

2. Dalam mengkaji pemilihan parameter penghalus λ optimal dengan metode RECP diperoleh :

$$RECP(\lambda) = n^{-1} \left[\left\| (\mathbf{I} - \mathbf{S}_\lambda) \hat{\mathbf{f}} \right\|^2 + \hat{\sigma}^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda \mathbf{S}_\lambda^T) \right]$$

Nilai λ yang optimal adalah λ yang memberikan nilai $RECP(\lambda)$ yang paling minimum. Sedangkan pemilihan parameter penghalus λ optimal dengan metode AICc diperoleh :

$$AIC_c(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2(\text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + 1)}{n - \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) - 2}$$

Nilai λ yang optimal adalah λ yang memberikan nilai $AIC_c(\lambda)$ yang paling minimum.

3. Berdasarkan hasil simulasi dengan variasi fungsi (trigonometri dan eksponensial) dan variasi σ ($\sigma = 0,05$; $\sigma = 0,1$; $\sigma = 0,2$), serta variasi ukuran sampel n ($n = 50$; $n = 100$; $n = 200$) diperoleh bahwa nilai MSE untuk metode RECP cenderung lebih kecil dari pada nilai MSE untuk metode AICc pada setiap model simulasi. Dapat disimpulkan bahwa metode pemilihan parameter penghalus λ optimal dengan RECP cenderung lebih baik dibandingkan dengan metode AICc.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini, penulis menyadari bahwa permasalahan yang dikaji masih terbatas, sehingga sangat memungkinkan untuk dikembangkan dan dikaji lebih lanjut. Oleh karena itu penulis menyarankan untuk mengembangkan pendekatan local risk ini pada bentuk estimasi yang lain, seperti pendekatan Kernel, Histogram, Wavelet, dan lain-lain. Khusus pada pendekatan Spline, bisa dikembangkan ke arah regresi semiparametrik. Sedangkan untuk pemilihan parameter penghalus optimal, penulis menyarankan untuk mengkaji metode *Exact Double Smoothing* (EDS) karena metode ini sangat berkaitan dengan pendekatan *local risk* itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

- Chiu, S.T., (1991). Some Stabilized Bandwidth Selectors for Nonparametric Regression. *Ann. Statist.* 19, 1528-1546.
- Craven, P. dan Wahba, G., (1979). Smoothing Noisy Data with Spline Functions Estimating the Correct Degree of Smoothing by Method of Generalized Cross-Validation, *Journal Numerische Mathematics*, 31, 377-403.
- Eubank, R.L., (1988). *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Marcel Dekker: New York.
- Green, P.J., dan Silverman, B.W., (1994). *Nonparametric Regression and Generalized Linear Model*, Chapman & Hall: London.
- Hardle, W., (1990). *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press: New York.
- Hardle, W, Hall, P., dan Marron, J.S., (1992). Regression Smoothing Parameters that are not Far from their Optimum. *J. Amer. Statist. Assoc.* 87, 227 – 233.
- Hurvich, C.M., Simonoff, J.S., Tsai, C.L., (1998). Smoothing Parameter Selection in Non-parametric Regression using an Improved Akaike Information Criterion. *Journal Royal Society*, Seri B 60, 271-293.
- Kimeldorf, G. dan Wahba, G., (1971). Some Result on Tchebycheffian Spline Function, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 33, 82-95.
- Lee, T.C.M., (2001). A Stabilized Bandwith Selection Method for Kernel Smoothing of the Periodogram. *Signal Processing.*, 81, 419-430.
- _____, (2003). Smoothing Parameter Selection for Smoothing Spline: a Simulasi Study. *Comput. Stat. Data Anal.* Elsevier, 42, 139-148.
- _____, (2004). Improved Smoothing Spline Regression by Combining Estimates of Different Smoothness. *Statistics & Probability Letters.* Elsevier, 67, 133-140.
- Mallows, C.L., (1973), Some Comments on Cp, *Journal Technometrics*, 15, 661-675.

Seber, G.A.F. dan Lee, A.J., (2003). *Linear Regression Analysis*, John Wiley: New Jersey.

Wahba, G., (1990). *Spline Models For Observational Data*. SIAM, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied mathematics, Philadelphia.

Wand, M.P., dan Gutierrez, R.G., (1997). Exact Risk Approaches to Smoothing Parameter Selection. *Journal Nonparametric Statistic*. 8, 337-354.

LAMPIRAN

1. Program untuk Menentukan Parameter Penghalus Optimal dengan Menggunakan Metode RECP dan AICc pada Model Fungsi Trigonometri

```
clear all;

disp('PROGRAM UNTUK MENCARI LAMDA OPTMAL');
disp('METODE YANG DIGUNAKAN ADALAH METODE RECP DAN AICc');

%% MEMBANGKITKAN DATA %%

n=input('ukuran sampel, 50,100, 200 : n =');
for i=1:n,
    t(i)=(i-0.5)/n;
    f(i)=(sqrt(t(i)*(1-t(i))))*(sin((6.28*(1+(2^0.2)))/(t(i)+(2^0.2))));
end
v=input('standar deviasi,0.05,0.1,0.2 : v =');
%k=input('nilai lamda, k = ');
kawal=input('lamda mulai dari ');
kakhir=input('lamda sampai ke ');
kbeda=input('bedanya yaitu ');
k=[kawal:kbeda:kakhir];
bts=k>-5000;
byk=sum(sum(bts));
rep=50;
for ij=1:rep,
    er=random('Normal',0,v,n,1);
    y=f'+er;
    %plot(t,y,'o');
    %display(y);

    %% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
    for i=1:4,
        for j=1:n,
            T(j,i)=t(j)^(i-1);
        end
    end
    for q=k',
        for i=1:byk,
            x=t'-q(i);
            h1=x>=0;
            h2=h1.*x;
            h3=h2.^3;
            X=[T h3];
            %display(X);
            S=X*inv(X'*X)*X';
            ft=S*y;
            %display (ft);

            %% MENGHITUNG NILAI RECP %%
            tr1=S'*S;
            tr2=sum(diag(tr1));
            N1=S*ft-ft;
            N2=N1'*N1;
            s1=y-ft;
```

```

s2=s1.^2;
s3=sum(s2);
tr3=eye(n);
tr4=tr3-S;
tr5=sum(diag(tr4));
s4=s3/tr5;
RECP(ij,i)=(N2+s4*tr2)/n;
%display (RECP);

%% MENGHITUNG NILAI AICc %%
s4=ft-y;
s5=s1.^2;
s6=sum(s5);
c1=s6/n;
c2=log10(c1);
c3=sum(diag(S));
c4=2*(c3+1);
c5=n-c3-2;
c6=c4/c5;
AICc(ij,i)=c2+1+c6;
%display (AICc);
end
end
end
%plot(t',y,'b:p',t',ft,'r:o');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE');
xlabel('t');
ylabel('y');
min (RECP)
min (AICc)
plot(k,min (RECP),'-')
title('Plot RECP dan Lambda ');
xlabel('LAMDA');
ylabel('RECP');

plot(k,min (AICc),'-')
title('Plot AICc dan Lambda ');
xlabel('LAMDA');
ylabel('AICc');

```

2. Program untuk Menentukan Parameter Penghalus Optimal dengan Menggunakan Metode RECP dan AICc pada Model Fungsi Eksponensial

```

clear all;

disp('PROGRAM UNTUK Mencari LAMDA OPTMAL');
disp('METODE YANG DIGUNAKAN ADALAH METODE RECP DAN AICc');

%% MEMBANGKITKAN DATA %%

n=input('ukuran sampel, 50,100, 200 : n =');
for i=1:n,
    t(i)=(i-0.5)/n;
    f(i)=4.3*(exp(-2.15*t(i))-4*exp(-4.3*t(i))+3*exp(-6.45*t(i)));
end
v=input('standar deviasi,0.05,0.1,0.2 : v =');
kawal=input('lamda mulai dari ');
kakhir=input('lamda sampai ke ');
kbeda=input('bedanya yaitu ');
k=[kawal:kbeda:kakhir];
bts=k>-5000;
byk=sum(sum(bts));
rep=50;
for ij=1:rep,
    er=random('Normal',0,v,n,1);
    y=f'+er;
    %plot(t,y,'o');
    %display(y);

    %% MENGHITUNG Matriks HAT (S) %%
    for i=1:4,
        for j=1:n,
            T(j,i)=t(j)^(i-1);
        end
    end
    for q=k',
        for i=1:byk,
            x=t'-q(i);
            h1=x>=0;
            h2=h1.*x;
            h3=h2.^3;
            X=[T h3];
            %display(X);
            S=X*inv(X'*X)*X';
            ft=S*y;
            %display (ft);

            %% MENGHITUNG NILAI RECP %%
            tr1=S'*S;
            tr2=sum(diag(tr1));
            N1=S*ft-ft;
            N2=N1'*N1;
            s1=y-ft;
            s2=s1.^2;
            s3=sum(s2);
            tr3=eye(n);
            tr4=tr3-S;

```

```

tr5=sum(diag(tr4));
s4=s3/tr5;
RECP(ij,i)=(N2+s4*tr2)/n;
%display (RECP);

%% MENGHITUNG NILAI AICc %%
s4=ft-y;
s5=s1.^2;
s6=sum(s5);
c1=s6/n;
c2=log10(c1);
c3=sum(diag(S));
c4=2*(c3+1);
c5=n-c3-2;
c6=c4/c5;
AICc(ij,i)=c2+1+c6;
%display (AICc);
end
end
end
%plot(t',y,'b:p',t',ft,'r:o');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE');
xlabel('t');
ylabel('y');
min (RECP)
min (AICc)
%RECP
plot(k,min (RECP)','-')
title('Plot RECP dan Lambda ');
xlabel('Lamda');
ylabel('RECP');

plot(k,min (AICc)','-')
title('Plot AICc dan Lambda ');
xlabel('Lamda');
ylabel('AICc');

```

3. Program Menentukan MSE

Model Fungsi Trigonometri

```
clear all;

disp('PROGRAM UNTUK Mencari MEAN SQUARE ERROR (MSE)');
%% MEMBANGKITKAN DATA %%

n=input('ukuran sampel, 50, 100, 200 : n =');
for i=1:n,
    t(i)=(i-0.5)/n;
    f(i)=(sqrt(t(i)*(1-t(i))))*(sin((6.28*(1+(2^0.2)))/(t(i)+(2^0.2))));
end
v=input('standart deviasi, 0.05, 0.1, 0.2 : v =');
er=random('Normal',0,v,n,1);
y=f'+er;
%plot(t,y,'o');
%display(t);
%display(y);
%display(f');
%k=input('nilai lamda optimal : k = ');

kRECP=input('lamda RECP ');
kAICc=input('lamda AICc ');

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
x=t'-kRECP;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECP=S*y;
MSE1=f'-ftRECP;
MSE2=MSE1.^2;
MSERECp=sum(MSE2)/n;

x=t'-kAICc;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICc=S*y;
MSE3=f'-ftAICc;
MSE4=MSE3.^2;
MSEAICc=sum(MSE4)/n;
```



```

MSERECp
MSEAICc
plot(t',y','.',t',ftRECP,'r-',t',ftAICc,'g-',t',f','k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE RECP DAN AICc');
xlabel('t');
ylabel('y');
plot(t',y','.');
title('PLOT DATA BANGKITAN');
xlabel('t');
ylabel('y');

%% Lamda RECP Optimal dan tidak Optimal %%
kRECPo=input('lamda RECPo ');
kRECPto=input('lamda RECPto ');

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
x=t'-kRECPo;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECPo=S*y;
MSE5=f'-ftRECPo;
MSE6=MSE5.^2;
MSERECPo=sum(MSE6)/n;

x=t'-kRECPto;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECPto=S*y;
MSE7=f'-ftRECPto;
MSE8=MSE7.^2;
MSERECPto=sum(MSE8)/n;
MSERECPo
MSERECPto
plot(t',y','.',t',ftRECPo,'r-',t',ftRECPto,'c-',t',f','k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE RECP');
xlabel('t');
ylabel('y');

%%Lamda AICc Optimal dan tidak Optimal%%
kAICco=input('lamda AICco ');
kAICcto=input('lamda AICcto ');

```

```

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
x=t'-kAICco;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICco=S*y;
MSE9=f'-ftAICco;
MSE10=MSE9.^2;
MSEAICco=sum(MSE10)/n;

x=t'-kAICcto;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICcto=S*y;
MSE11=f'-ftAICcto;
MSE12=MSE11.^2;
MSEAICcto=sum(MSE12)/n;

MSEAICco
MSEAICcto
plot(t',y, '.',t',ftAICco,'g-',t',ftAICcto,'c-',t',f,'k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE AICc');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

Model Fungsi Eksponensial

```
clear all;
disp('PROGRAM UNTUK MENCARI MEAN SQUARE ERROR (MSE)');
%% MEMBANGKITKAN DATA %%

n=input('ukuran sampel, 50, 100, 200 : n =');
for i=1:n,
    t(i)=(i-0.5)/n;
    f(i)=4.3*(exp(-2.15*t(i))-4*exp(-4.3*t(i))+3*exp(-6.45*t(i)));
end
v=input('standart deviasi, 0.05, 0.1, 0.2 : v =');
er=random('Normal',0,v,n,1);
y=f'+er;
%plot(t,y,'o');
%display(t);
%display(y);
%display (f');

%%nilai lamda optimal RECP dan AICc%%
kRECP=input('lamda RECP ');
kAICc=input('lamda AICc ');

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
x=t'-kRECP;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECP=S*y;
MSE1=f'-ftRECP;
MSE2=MSE1.^2;
MSERECp=sum(MSE2)/n;

x=t'-kAICc;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICc=S*y;
MSE3=f'-ftAICc;
MSE4=MSE3.^2;
MSEAIcC=sum(MSE4)/n;
MSERECp
MSEAIcC
plot(t',y','.',t',ftRECP,'r-',t',ftAICc,'g-',t',f','k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE RECP DAN AICc');
```

```

xlabel('t');
ylabel('y');

plot(t',y','.');
title('PLOT DATA BANGKITAN');
xlabel('t');
ylabel('y');

%% Lamda RECP Optimal dan tidak Optimal %%
kRECPo=input('lamda RECPo ');
kRECPto=input('lamda RECPto ');

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
x=t'-kRECPo;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECPo=S*y;
MSE5=f'-ftRECPo;
MSE6=MSE5.^2;
MSERECPo=sum(MSE6)/n;

x=t'-kRECPto;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftRECPto=S*y;
MSE7=f'-ftRECPto;
MSE8=MSE7.^2;
MSERECPto=sum(MSE8)/n;
MSERECPo
MSERECPto
plot(t',y','.',t',ftRECPo,'r-',t',ftRECPto,'c-',t',f','k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE RECP');
xlabel('t');
ylabel('y');

%% Lamda AICc Optimal dan tidak Optimal %%
kAICco=input('lamda AICco ');
kAICcto=input('lamda AICcto ');

```

```

%% MENGHITUNG MATRIKS HAT (S) %%
for i=1:4,
    for j=1:n,
        T(j,i)=t(j)^(i-1);
    end
end
end
x=t'-kAICco;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICco=S*y;
MSE9=f'-ftAICco;
MSE10=MSE9.^2;
MSEAICco=sum(MSE10)/n;

x=t'-kAICcto;
h1=x>=0;
h2=h1.*x;
h3=h2.^3;
X=[T h3];
%display(X);
S=X*inv(X'*X)*X';
ftAICcto=S*y;
MSE11=f'-ftAICcto;
MSE12=MSE11.^2;
MSEAICcto=sum(MSE12)/n;

%display (ft);
%% MENGHITUNG NILAI MSE %%
MSEAICco
MSEAICcto
plot(t',y,'.',t',ftAICco,'g-',t',ftAICcto,'c-',t',f','k:');
title('KURVA REGRESI DAN ESTIMASI SPLINE DENGAN METODE AICc');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

4. Nilai λ dengan Nilai RECP dan AICc

Untuk $n = 50$ dan $\sigma = 0.05$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.10	0.0006589	-0.9478	0.0005848	-0.9996
0.11	0.0006248	-0.9709	0.0005293	-1.0430
0.12	0.0005913	-0.9949	0.0004794	-1.0860
0.13	0.0005584	-1.0198	0.0004309	-1.1323
0.14	0.0005262	-1.0455	0.0003878	-1.1781
0.15	0.0004952	-1.0719	0.0003501	-1.2225
0.16	0.0004657	-1.0986	0.0003175	-1.2650
0.17	0.0004379	-1.1253	0.0002897	-1.3047
0.18	0.0004119	-1.1519	0.0002663	-1.3413
0.19	0.0003876	-1.1782	0.0002470	-1.3739
0.20	0.0003650	-1.2044	0.0002314	-1.4023
0.21	0.0003440	-1.2301	0.0002191	-1.4260
0.22	0.0003245	-1.2555	0.0002097	-1.4450
0.23	0.0003065	-1.2803	0.0001919	-1.4835
0.24	0.0002899	-1.3044	0.0001769	-1.5189
0.25	0.0002746	-1.3280	0.0001670	-1.5439
0.26	0.0002604	-1.3511	0.0001601	-1.5624
0.27	0.0002471	-1.3737	0.0001494	-1.5923
0.28	0.0002348	-1.3959	0.0001418	-1.6149
0.29	0.0002188	-1.4266	0.0001356	-1.6291
0.30	0.0002034	-1.4583	0.0001361	-1.6344
0.31	0.0001896	-1.4888	0.0001368	-1.6307
0.32	0.0001774	-1.5177	0.0001406	-1.6186
0.33	0.0001669	-1.5443	0.0001470	-1.5992
0.34	0.0001580	-1.5680	0.0001558	-1.5742
0.35	0.0001508	-1.5883	0.0001667	-1.5448
0.36	0.0001452	-1.6046	0.0001796	-1.5125
0.37	0.0001413	-1.6166	0.0001942	-1.4784
0.38	0.0001390	-1.6262	0.0002105	-1.4435
0.39	0.0001382	-1.6261	0.0002282	-1.4083
0.40	0.0001389	-1.6239	0.0002412	-1.3843
0.41	0.0001411	-1.6171	0.0002504	-1.3681
0.42	0.0001447	-1.6063	0.0002615	-1.3492
0.43	0.0001496	-1.5918	0.0002746	-1.3281
0.44	0.0001516	-1.5860	0.0002894	-1.3051

Untuk $n = 50$ dan $\sigma = 0.1$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.25	0.0006412	-0.9597	0.0005366	-1.0370
0.26	0.0006249	-0.9709	0.0005333	-1.0397
0.27	0.0006113	-0.9804	0.0005329	-1.0403
0.28	0.0006006	-0.9881	0.0005326	-1.0424
0.29	0.0005925	-0.9940	0.0005319	-1.0357
0.30	0.0005870	-0.9981	0.0005441	-1.0310
0.31	0.0005839	-1.0003	0.0005519	-1.0249
0.32	0.0005730	-1.0085	0.0005614	-1.0174
0.33	0.0005626	-1.0165	0.0005727	-1.0087
0.34	0.0005531	-1.0239	0.0005857	-0.9990
0.35	0.0005444	-1.0307	0.0006002	-0.9884
0.36	0.0005366	-1.0371	0.0006163	-0.9769
0.37	0.0005294	-1.0429	0.0006338	-0.9647
0.38	0.0005229	-1.0483	0.0006528	-0.9519
0.39	0.0005169	-1.0533	0.0006733	-0.9385
0.40	0.0005115	-1.0578	0.0006951	-0.9246
0.41	0.0005067	-1.0620	0.0007181	-0.9105
0.42	0.0005024	-1.0657	0.0007421	-0.8962
0.43	0.0004987	-1.0689	0.0007670	-0.8819
0.44	0.0004955	-1.0716	0.0007925	-0.8677
0.45	0.0004930	-1.0739	0.0008186	-0.8536
0.46	0.0004909	-1.0757	0.0008405	-0.8421
0.47	0.0004893	-1.0771	0.0008510	-0.8368
0.48	0.0004867	-1.0782	0.0008621	-0.8311
0.49	0.0004868	-1.0789	0.0008737	-0.8253
0.50	0.0004870	-1.0794	0.0008857	-0.8194
0.51	0.0004871	-1.0793	0.0008981	-0.8133
0.52	0.0004874	-1.0791	0.0009109	-0.8072
0.53	0.0004876	-1.0789	0.0009243	-0.8009
0.54	0.0004881	-1.0782	0.0009383	-0.7944
0.55	0.0004891	-1.0773	0.0009529	-0.7876
0.56	0.0004903	-1.0762	0.0009683	-0.7807
0.57	0.0004917	-1.0750	0.0009846	-0.7734
0.58	0.0004933	-1.0736	0.0010017	-0.7659
0.59	0.0004950	-1.0721	0.0010199	-0.7581
0.60	0.0004969	-1.0704	0.0010392	-0.7500

Untuk $n = 50$ dan $\sigma = 0.2$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.19	0.0028	-0.3173	0.002297	-0.3842
0.20	0.0028	-0.3179	0.002283	-0.3843
0.21	0.0028	-0.3188	0.002273	-0.3844
0.22	0.0028	-0.3198	0.002251	-0.3841
0.23	0.0028	-0.3210	0.002253	-0.3833
0.24	0.0028	-0.3222	0.002257	-0.3820
0.25	0.0028	-0.3236	0.002259	-0.3802
0.26	0.0028	-0.3250	0.002261	-0.3779
0.27	0.0028	-0.3265	0.002264	-0.3750
0.28	0.0027	-0.3280	0.002267	-0.3717
0.29	0.0027	-0.3295	0.002269	-0.3679
0.30	0.0027	-0.3310	0.002271	-0.3636
0.31	0.0027	-0.3324	0.002277	-0.3590
0.32	0.0027	-0.3338	0.002283	-0.3541
0.33	0.0027	-0.3352	0.002289	-0.3489
0.34	0.0027	-0.3364	0.002296	-0.3435
0.35	0.0027	-0.3375	0.002304	-0.3380
0.36	0.0027	-0.3412	0.002312	-0.3343
0.37	0.0026	-0.3482	0.002321	-0.3342
0.38	0.0026	-0.3548	0.002331	-0.3339
0.39	0.0025	-0.3609	0.002342	-0.3336
0.40	0.0025	-0.3666	0.002354	-0.3331
0.41	0.0025	-0.3717	0.002368	-0.3326
0.42	0.0025	-0.3764	0.002383	-0.3319
0.43	0.0024	-0.3807	0.002399	-0.3310
0.44	0.0024	-0.3844	0.002415	-0.3300
0.45	0.0024	-0.3876	0.002433	-0.3289
0.46	0.0024	-0.3903	0.002451	-0.3275
0.47	0.0024	-0.3924	0.002470	-0.3259
0.48	0.0024	-0.3941	0.002491	-0.3241
0.49	0.0023	-0.3953	0.002513	-0.3220
0.50	0.0023	-0.3960	0.002535	-0.3196
0.51	0.0023	-0.3962	0.002559	-0.3170
0.52	0.0024	-0.3960	0.002584	-0.3141
0.53	0.0024	-0.3954	0.002609	-0.3109
0.54	0.0024	-0.3943	0.002636	-0.3075

Untuk $n=100$ dan $\sigma = 0.05$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.10	0.0003340	-1.0685	0.0003147	-1.0944
0.11	0.0003168	-1.0915	0.0002813	-1.1430
0.12	0.0003010	-1.1137	0.0002526	-1.1899
0.13	0.0002866	-1.1349	0.0002280	-1.2343
0.14	0.0002736	-1.1552	0.0002071	-1.2760
0.15	0.0002616	-1.1745	0.0001894	-1.3149
0.16	0.0002508	-1.1929	0.0001743	-1.3508
0.17	0.0002409	-1.2103	0.0001617	-1.3835
0.18	0.0002319	-1.2270	0.0001512	-1.4127
0.19	0.0002213	-1.2471	0.0001426	-1.4381
0.20	0.0002084	-1.2733	0.0001344	-1.4637
0.21	0.0001964	-1.2991	0.0001242	-1.4983
0.22	0.0001853	-1.3244	0.0001160	-1.5279
0.23	0.0001748	-1.3497	0.0001097	-1.5519
0.24	0.0001642	-1.3769	0.0001053	-1.5696
0.25	0.0001544	-1.4035	0.0001026	-1.5810
0.26	0.0001455	-1.4294	0.0001014	-1.5860
0.27	0.0001373	-1.4544	0.0000993	-1.5951
0.28	0.0001298	-1.4789	0.0000972	-1.6043
0.29	0.0001222	-1.5051	0.0000963	-1.6084
0.30	0.0001153	-1.5305	0.0000964	-1.6088
0.31	0.0001089	-1.5551	0.0000975	-1.6093
0.32	0.0001032	-1.5784	0.0000996	-1.5938
0.33	0.0000981	-1.6004	0.0001027	-1.5805
0.34	0.0000937	-1.6206	0.0001068	-1.5638
0.35	0.0000898	-1.6387	0.0001111	-1.5466
0.36	0.0000867	-1.6544	0.0001160	-1.5277
0.37	0.0000841	-1.6674	0.0001219	-1.5062
0.38	0.0000821	-1.6776	0.0001250	-1.4953
0.39	0.0000808	-1.6850	0.0001286	-1.4831
0.40	0.0000799	-1.6898	0.0001329	-1.4687
0.41	0.0000797	-1.6896	0.0001380	-1.4524
0.42	0.0000800	-1.6893	0.0001438	-1.4346
0.43	0.0000808	-1.6847	0.0001502	-1.4155
0.44	0.0000822	-1.6773	0.0001573	-1.3956
0.45	0.0000841	-1.6674	0.0001649	-1.3751
0.46	0.0000865	-1.6551	0.0001730	-1.3542

Untuk $n = 100$ dan $\sigma = 0.1$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.16	0.0005038	-0.8900	0.0003730	-1.0205
0.17	0.0004923	-0.9000	0.0003619	-1.0337
0.18	0.0004813	-0.9098	0.0003534	-1.0439
0.19	0.0004708	-0.9194	0.0003475	-1.0513
0.20	0.0004608	-0.9287	0.0003437	-1.0560
0.21	0.0004513	-0.9378	0.0003419	-1.0583
0.22	0.0004423	-0.9465	0.0003418	-1.0585
0.23	0.0004338	-0.9550	0.0003401	-1.0567
0.24	0.0004257	-0.9631	0.0003459	-1.0533
0.25	0.0004181	-0.9709	0.0003498	-1.0484
0.26	0.0004109	-0.9784	0.0003546	-1.0424
0.27	0.0004041	-0.9857	0.0003526	-1.0449
0.28	0.0003977	-0.9927	0.0003492	-1.0491
0.29	0.0003915	-0.9994	0.0003478	-1.0509
0.30	0.0003857	-1.0059	0.0003481	-1.0505
0.31	0.0003803	-1.0121	0.0003502	-1.0479
0.32	0.0003751	-1.0181	0.0003538	-1.0434
0.33	0.0003703	-1.0236	0.0003589	-1.0372
0.34	0.0003659	-1.0288	0.0003653	-1.0296
0.35	0.0003619	-1.0337	0.0003727	-1.0209
0.36	0.0003582	-1.0381	0.0003811	-1.0112
0.37	0.0003547	-1.0423	0.0003904	-1.0007
0.38	0.0003517	-1.0460	0.0004005	-0.9896
0.39	0.0003494	-1.0489	0.0004114	-0.9780
0.40	0.0003473	-1.0516	0.0004194	-0.9696
0.41	0.0003455	-1.0538	0.0004259	-0.9629
0.42	0.0003441	-1.0555	0.0004330	-0.9558
0.43	0.0003431	-1.0568	0.0004407	-0.9481
0.44	0.0003425	-1.0576	0.0004491	-0.9399
0.45	0.0003422	-1.0577	0.0004580	-0.9314
0.46	0.0003424	-1.0579	0.0004674	-0.9225
0.47	0.0003429	-1.0576	0.0004773	-0.9135
0.48	0.0003438	-1.0559	0.0004876	-0.9041
0.49	0.0003451	-1.0543	0.0004984	-0.8946
0.50	0.0003468	-1.0522	0.0005096	-0.8849

Untuk $n = 100$ dan $\sigma = 0.2$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.10	0.001532	-0.4070	0.001549	-0.3967
0.11	0.001521	-0.4102	0.001523	-0.3956
0.12	0.001512	-0.4126	0.001505	-0.3943
0.13	0.001507	-0.4141	0.001493	-0.3929
0.14	0.001504	-0.4149	0.001485	-0.3915
0.15	0.001504	-0.4149	0.001481	-0.3902
0.16	0.001506	-0.4144	0.001479	-0.3890
0.17	0.001508	-0.4137	0.001479	-0.3878
0.18	0.001511	-0.4129	0.001481	-0.3868
0.19	0.001499	-0.4164	0.001484	-0.3857
0.20	0.001487	-0.4198	0.001488	-0.3892
0.21	0.001475	-0.4233	0.001494	-0.3977
0.22	0.001464	-0.4268	0.001482	-0.4057
0.23	0.001452	-0.4303	0.001469	-0.4131
0.24	0.001441	-0.4336	0.001459	-0.4199
0.25	0.001430	-0.4369	0.001450	-0.4261
0.26	0.001420	-0.4400	0.001444	-0.4317
0.27	0.001410	-0.4429	0.001439	-0.4365
0.28	0.001401	-0.4457	0.001436	-0.4405
0.29	0.001393	-0.4483	0.001435	-0.4437
0.30	0.001385	-0.4506	0.001434	-0.4459
0.31	0.001379	-0.4527	0.001436	-0.4472
0.32	0.001373	-0.4545	0.001439	-0.4475
0.33	0.001368	-0.4560	0.001444	-0.4470
0.34	0.001365	-0.4572	0.001449	-0.4457
0.35	0.001362	-0.4581	0.001456	-0.4436
0.36	0.001360	-0.4589	0.001463	-0.4408
0.37	0.001359	-0.4588	0.001472	-0.4374
0.38	0.001358	-0.4586	0.001482	-0.4334
0.39	0.001361	-0.4584	0.001493	-0.4288
0.40	0.001363	-0.4576	0.001505	-0.4238
0.41	0.001367	-0.4566	0.001518	-0.4183
0.42	0.001371	-0.4552	0.001531	-0.4124
0.43	0.001376	-0.4536	0.001545	-0.4063
0.44	0.001382	-0.4518	0.001549	-0.4000
0.45	0.001388	-0.4497	0.001550	-0.3935

Untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0.05$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.16	0.0001371	-1.2096	0.0000927	-1.3795
0.17	0.0001312	-1.2289	0.0000857	-1.4137
0.18	0.0001253	-1.2488	0.0000796	-1.4459
0.19	0.0001198	-1.2685	0.0000743	-1.4756
0.20	0.0001145	-1.2881	0.0000699	-1.5021
0.21	0.0001094	-1.3076	0.0000664	-1.5248
0.22	0.0001047	-1.3269	0.0000636	-1.5434
0.23	0.0001000	-1.3467	0.0000616	-1.5573
0.24	0.0000955	-1.3669	0.0000603	-1.5664
0.25	0.0000912	-1.3867	0.0000586	-1.5788
0.26	0.0000872	-1.4063	0.0000559	-1.5994
0.27	0.0000834	-1.4255	0.0000539	-1.6152
0.28	0.0000799	-1.4442	0.0000526	-1.6259
0.29	0.0000766	-1.4624	0.0000511	-1.6312
0.30	0.0000736	-1.4800	0.0000519	-1.6322
0.31	0.0000708	-1.4970	0.0000525	-1.6262
0.32	0.0000682	-1.5133	0.0000537	-1.6167
0.33	0.0000658	-1.5288	0.0000554	-1.6032
0.34	0.0000634	-1.5448	0.0000576	-1.5863
0.35	0.0000612	-1.5601	0.0000602	-1.5668
0.36	0.0000593	-1.5734	0.0000627	-1.5493
0.37	0.0000578	-1.5846	0.0000653	-1.5321
0.38	0.0000566	-1.5937	0.0000681	-1.5134
0.39	0.0000557	-1.6007	0.0000713	-1.4936
0.40	0.0000548	-1.6081	0.0000748	-1.4729
0.41	0.0000540	-1.6141	0.0000786	-1.4516
0.42	0.0000535	-1.6185	0.0000822	-1.4317
0.43	0.0000531	-1.6215	0.0000861	-1.4119
0.44	0.0000530	-1.6228	0.0000901	-1.3919
0.45	0.0000532	-1.6229	0.0000944	-1.3717
0.46	0.0000532	-1.6211	0.0000989	-1.3515
0.47	0.0000536	-1.6180	0.0001036	-1.3314
0.48	0.0000541	-1.6133	0.0001085	-1.3115
0.49	0.0000549	-1.6072	0.0001135	-1.2919
0.50	0.0000558	-1.5998	0.0001186	-1.2726

Untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0.1$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.16	0.0002902	-0.8840	0.0002339	-0.9778
0.17	0.0002840	-0.8934	0.0002257	-0.9933
0.18	0.0002780	-0.9028	0.0002190	-1.0063
0.19	0.0002721	-0.9121	0.0002138	-1.0168
0.20	0.0002664	-0.9212	0.0002098	-1.0250
0.21	0.0002611	-0.9300	0.0002069	-1.0310
0.22	0.0002560	-0.9386	0.0002051	-1.0348
0.23	0.0002512	-0.9468	0.0002043	-1.0365
0.24	0.0002467	-0.9546	0.0002044	-1.0363
0.25	0.0002426	-0.9619	0.0002021	-1.0413
0.26	0.0002388	-0.9688	0.0001995	-1.0468
0.27	0.0002354	-0.9750	0.0001976	-1.0509
0.28	0.0002323	-0.9807	0.0001965	-1.0535
0.29	0.0002296	-0.9858	0.0001945	-1.0548
0.30	0.0002272	-0.9903	0.0001959	-1.0551
0.31	0.0002252	-0.9942	0.0001963	-1.0537
0.32	0.0002235	-0.9975	0.0001973	-1.0516
0.33	0.0002220	-1.0003	0.0001987	-1.0486
0.34	0.0002208	-1.0027	0.0002004	-1.0448
0.35	0.0002177	-1.0089	0.0002025	-1.0403
0.36	0.0002145	-1.0154	0.0002050	-1.0351
0.37	0.0002115	-1.0214	0.0002077	-1.0294
0.38	0.0002088	-1.0269	0.0002106	-1.0233
0.39	0.0002064	-1.0320	0.0002138	-1.0168
0.40	0.0002044	-1.0364	0.0002171	-1.0100
0.41	0.0002026	-1.0402	0.0002207	-1.0030
0.42	0.0002011	-1.0433	0.0002244	-0.9957
0.43	0.0002000	-1.0458	0.0002283	-0.9882
0.44	0.0001991	-1.0477	0.0002324	-0.9806
0.45	0.0001986	-1.0479	0.0002365	-0.9728
0.46	0.0001983	-1.0481	0.0002408	-0.9650
0.47	0.0001984	-1.0485	0.0002452	-0.9572
0.48	0.0001988	-1.0489	0.0002497	-0.9493
0.49	0.0001994	-1.0488	0.0002543	-0.9414
0.50	0.0002004	-1.0448	0.0002591	-0.9334
0.51	0.0002016	-1.0422	0.0002639	-0.9253
0.52	0.0002032	-1.0389	0.0002689	-0.9172

Untuk $n = 200$ dan $\sigma = 0.2$

Lamda	Model Trigonometri		Model Eksponensial	
	Nilai RECP	Nilai AICc	Nilai RECP	Nilai AICc
0.25	0.0008573	-0.4136	0.0006685	-0.5216
0.26	0.0008565	-0.4140	0.0006641	-0.5245
0.27	0.0008558	-0.4144	0.0006603	-0.5270
0.28	0.0008552	-0.4147	0.0006569	-0.5292
0.29	0.0008546	-0.4150	0.0006542	-0.5311
0.30	0.0008540	-0.4153	0.0006520	-0.5325
0.31	0.0008536	-0.4155	0.0006505	-0.5335
0.32	0.0008532	-0.4157	0.0006485	-0.5342
0.33	0.0008528	-0.4159	0.0006492	-0.5344
0.34	0.0008526	-0.4160	0.0006493	-0.5343
0.35	0.0008523	-0.4162	0.0006501	-0.5338
0.36	0.0008521	-0.4163	0.0006513	-0.5330
0.37	0.0008518	-0.4164	0.0006531	-0.5318
0.38	0.0008492	-0.4178	0.0006554	-0.5302
0.39	0.0008448	-0.4200	0.0006582	-0.5284
0.40	0.0008403	-0.4223	0.0006613	-0.5263
0.41	0.0008360	-0.4246	0.0006648	-0.5241
0.42	0.0008317	-0.4268	0.0006684	-0.5217
0.43	0.0008275	-0.4290	0.0006723	-0.5192
0.44	0.0008235	-0.4311	0.0006763	-0.5166
0.45	0.0008197	-0.4331	0.0006804	-0.5140
0.46	0.0008161	-0.4350	0.0006846	-0.5113
0.47	0.0008128	-0.4368	0.0006888	-0.5086
0.48	0.0008097	-0.4384	0.0006932	-0.5059
0.49	0.0008069	-0.4399	0.0006976	-0.5032
0.50	0.0008044	-0.4413	0.0007021	-0.5004
0.51	0.0008022	-0.4425	0.0007066	-0.4976
0.52	0.0008002	-0.4435	0.0007112	-0.4948
0.53	0.0007986	-0.4444	0.0007157	-0.4920
0.54	0.0007974	-0.4451	0.0007203	-0.4892
0.55	0.0007965	-0.4455	0.0007249	-0.4865
0.56	0.0007961	-0.4456	0.0007294	-0.4838
0.57	0.0007960	-0.4458	0.0007338	-0.4812
0.58	0.0007964	-0.4459	0.0007383	-0.4785
0.59	0.0007973	-0.4452	0.0007427	-0.4759
0.60	0.0007985	-0.4445	0.0007471	-0.4734